



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO**

**ESCUELA DE POSGRADO**

**MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS**

**TESIS**

**SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES  
UNIDIMENSIONALES POR APROXIMACIÓN MEDIANTE  
POLINOMIOS DE CHEBYSHEV**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN  
MATEMÁTICAS**

**AUTOR**

**Br. OSCAR MONTAÑEZ HUILLCA**

**ASESOR**

**Dr. GUIDO ALVAREZ JAUREGUI**

**CÓDIGO ORCID**

**0000-0002-2669-9847**

**CUSCO – PERÚ**

**2023**

## INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, asesor del trabajo de investigación/tesis titulado: "SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES UNIDIMENSIONALES POR APROXIMACION MEDIANTE POLINOMIOS DE CHEBYSHEV" presentado por: OSCAR MONTAÑEZ HUILLCA con Nro. de DNI: 40125389 , para optar el grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por DOS veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 3 %

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera hoja del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 05 de enero de 2024



Firma

Dr. Guido Álvarez Jáuregui

Nro. de DNI. 23868575

CODIGO ORCID 0000-0002-2669-9847

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio:  
<https://unsaac.turnitin.com/viewer/submissions/oid:27259:301976806?locale=es-MX>

NOMBRE DEL TRABAJO

**TESIS FINAL**

AUTOR

**OSCAR MONTAÑEZ**

RECuento DE PALABRAS

**8200 Words**

RECuento DE CARACTERES

**49864 Characters**

RECuento DE PÁGINAS

**73 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**1.1MB**

FECHA DE ENTREGA

**Jan 5, 2024 6:04 AM GMT-5**

FECHA DEL INFORME

**Jan 5, 2024 6:05 AM GMT-5****● 3% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base

- 3% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Cross

**● Excluir del Reporte de Similitud**

- Base de datos de trabajos entregados
- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 10 palabras)

## **DEDICATORIAS**

A mis padres: Catalina y Benedicto, quienes son el motor de mi vida, por mostrarme el camino a la superación como ejemplos de esmero y tenacidad incansables.

A mis hermanos Edwin, Yenny, Miki, Bill Oscar quienes enriquecen mis experiencias de vida, por su aliento y motivación que hacen que continúe en el logro de mis metas y objetivos.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero expresar mi agradecimiento a la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, a la Escuela de Posgrado en la Maestría en Matemáticas, por permitirme desarrollarme académicamente.

De forma especial, expreso mi agradecimiento inmenso al Dr. Guido Álvarez Jáuregui, mi asesor, por su guía, por su constante motivación y paciencia durante el desarrollo de este trabajo de investigación.

## CONTENIDO

DEDICATORIAS .....	i
AGRADECIMIENTOS.....	ii
CONTENIDO .....	iii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	vi
RESUMEN .....	viii
RESUMO.....	ix
PRESENTACIÓN .....	x
INTRODUCCIÓN .....	xi
CAPÍTULO 1:.....	1
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	1
1.1.1. Situación problemática. ....	1
1.1.2. Formulación del Problema.....	3
1.1.3. Hipótesis.....	4
1.1.4. Importancia y Justificación de la investigación.....	4
1.1.5. Objetivos de la Investigación .....	5
1.1.5.1. Objetivo General .....	5
1.1.5.2. Objetivos Específicos.....	5
1.1.6 Variables.....	6
1.1.5.1. Variable Independiente.....	6

1.1.5.2. Variable dependiente.....	6
1.2 Marco Teórico Conceptual .....	6
1.2.1. Antecedentes de la Investigación .....	6
1.2.2. Bases Teóricas Filosóficas.....	7
1.2.3. Marco Teórico Conceptual .....	7
1.3. Metodología.....	13
1.3.1. Tipo de Investigación .....	13
1.3.2. Nivel de Investigación .....	13
1.3.3. Diseño de Investigación.....	13
1.3.4. Delimitación de la Investigación .....	14
1.3.4.1. Delimitación Espacial y Temporal.....	14
1.3.4.2. Delimitación Conceptual.....	14
CAPÍTULO 2:.....	15
MARCO TEÓRICO .....	15
2.1. Polinomios de Chebyshev.....	15
2.2. Cálculo de los coeficientes de Chebyshev .....	17
2.3. Ortogonalidad de Funciones.....	23
2.4. Series de Chebyshev .....	27
CAPÍTULO 3:.....	30
MATRICES DE DIFERENCIACIÓN Y EDPS. UNIDIMENSIONALES .....	30
3.2 Ecuación de Calor Unidimensional .....	40

3.3 Ecuación de Onda Unidimensional .....	45
3.4 Ecuación de Advección .....	49
CONCLUSIONES .....	54
RECOMENDACIONES.....	55
BIBLIOGRAFÍA .....	56
ANEXOS. ....	58
MATRIZ DE CONSISTENCIA .....	58
CÓDIGOS DE PROGRAMAS.....	60

## LISTA DE SÍMBOLOS.

- $\mathbb{R}$  : Conjunto de números reales
- $T_n$ : Polinomio de Chebyshev de grado  $n$ .
- $a_{n,k}$  : Coeficiente  $k$ -ésimo del polinomio de Chebyshev  $T_n$ .
- $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  : Sucesión de polinomios de Chebyshev.
- $L^p(\Omega)$ : Espacio  $L^p$  en  $\Omega$  con  $1 \leq p \leq \infty$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ : Producto interno de  $L^2(\Omega)$ .
- $\omega$ : Función peso.
- $\ell_i(x)$ : Coeficientes del polinomio de interpolación de Lagrange.
- $D_N$  : Matriz de diferenciación de orden  $(N + 1) \times (N + 1)$ .
- $D_N^2$  : Es el cuadrado de la matriz de diferenciación de orden  $(N + 1) \times (N + 1)$ .
- EDP: Ecuaciones Diferenciales Parciales.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Para $N=4$ , los nodos de Chebyshev son: $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ , en el intervalo $[-1,1]$ ....	3
Figura 2. Gráfica de la solución en los puntos según el Método de Euler. ....	11
Figura 3. Los primeros 4 polinomios de Chebyshev .....	17
Figura 4. Funcion peso en el intervalo $]-1,1[$ .....	23
Figura 5. Los puntos de Chebyshev $x_j, j = 1, \dots, 11$ son proyecciones perpendiculares, de puntos que tienen igual distancia, en el círculo de radio uno.....	27
Figura 6. Las figuras muestran que a mayor número de términos en la serie tiene mayor aproximación de la función .....	28
Figura 7. Primeras matrices de diferenciación $D$ de primer orden .....	39
Figura 8 Condiciones sobre la matriz de diferenciación.....	39
Figura 9. Solución de la ecuación de calor $N=4, x, u(x,t)$ .....	43
Figura 10. Solución para $N=4, x, t, u(x,t)$ .....	44
Figura 11. Solución $N=20, x, u(x,t)$ .....	44
Figura 12. Polinomio de Chebyshev de tercer grado, en $t=0.01$ .....	45
Figura 13. Para $N=4, u_{ex}, u_{apr}$ .....	48
Figura 14. Gráfica de los polinomios de Chebyshev.....	49
Figura 15. Primera Iteración, $N=4, t=0.01$ .....	52
Figura 16. Solución exacta $f(x)$ y aproximada de la ecuación de Advección para $dt=0.01$ ....	53

## RESUMEN

El presente trabajo de investigación intitulado Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Unidimensionales por aproximación mediante polinomios de Chebyshev está organizado en tres capítulos.

En el Capítulo 1, del presente trabajo de investigación, se consideran aspectos fundamentales y definiciones que son base para el desarrollo de la misma relacionados a las propiedades de los polinomios.

En el capítulo 2, se desarrollan los polinomios de Chebyshev, con la finalidad de aproximar la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales unidimensionales considerando una elección puntos convenientes llamadas puntos o nodos de Chebyshev, para luego hacer uso de la matriz de diferenciación de Chebyshev y generar un sistema de ecuaciones diferenciales que son resueltas mediante un método numérico adecuado.

En el capítulo 3 se presenta la definición de la Matriz de diferenciación de Chebyshev, esta matriz se construye en base a los nodos de Chebyshev y el polinomio de interpolación de Lagrange. Finalmente se determina la solución aproximada de casos especiales de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales.

### **Palabras claves:**

Polinomios de Chebyshev, matrices de diferenciación, métodos numéricos, ecuación de onda, calor, advección.

## RESUMO

O presente trabalho de investigação intitulado Solução de Equações Diferenciais Parciais Unidimensionais por aproximação usando polinômios de Chebyshev está organizado em três capítulos.

No capítulo 1, são considerados aspectos fundamentais e definições que são a base para o seu desenvolvimento relacionado às propriedades dos polinômios.

No capítulo 2 são desenvolvidos os polinômios de Chebyshev, com o objetivo de aproximar a solução de equações diferenciais parciais unidimensionais considerando uma escolha de pontos convenientes chamados pontos o nós de Chebyshev, para então fazer uso de la matriz de diferenciação de Chebyshev e gere um sistema de equações diferenciais que são resolvidos pelo método numérico apropriado.

No capítulo 3 apresenta a definição da matriz de diferenciação de Chebyshev, esta matriz é construída com base nos nós de Chebyshev no polinômio de interpolação de Lagrange. Finalmente, é determinada a solução aproximada de casos especiais de equações diferenciais parciais unidimensionais.

### **Palavras chaves:**

Polinômios de Chebyshev, matrizes da diferenciação, métodos numéricos, equação do onda, calor, advecção.

## **PRESENTACIÓN**

Estimado Sr. Decano de la Escuela de Posgrado de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO, en acto de conformidad con lo establecido por el Reglamento para optar al correspondiente Grado Académico de Maestro en el área de Matemáticas, se somete a su conocimiento la presente investigación de tesis para su revisión respectiva.

La matemática, durante el transcurso de la historia, se ha desarrollado trascendentalmente logrando fortalecerse y formalizarse con el pasar del tiempo. Cada vez aparecen nuevos conocimientos que enriquecen más a la matemática, tal es el caso de los métodos numéricos que surgieron con el propósito de encontrar la solución aproximada a la solución exacta de una Ecuación Diferencial Parcial. Entre los métodos numéricos conocidos está el método de diferencias finitas, que sobresalió en el año de 1950 y el método de elementos finitos, sobresaliendo en el año de 1960.

El presente trabajo de investigación pretende contribuir en sentar los fundamentos a cerca de un método basado en la discretización, que es el proceso de transferir funciones continuas o ecuaciones a su contraparte discreta, para determinar una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales parciales en una dimensión.

Motivo por el cual desarrollo el tema: Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales unidimensionales por aproximación mediante polinomios de Chebyshev.

Br. Oscar Montañez Huillca

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los ordenadores y computadoras son muy útiles en el desarrollo del conocimiento científico, por su versatilidad y precisión en los cálculos que, junto con un software adecuado, que en la actualidad se han desarrollado de manera práctica tales como Matlab, Mathematica, Python y otros.

Los polinomios de Chebyshev tienen mucha importancia en la actualidad, dentro de los métodos numéricos, puesto que la raíz de un polinomio de Chebyshev, llamados también como nodos o puntos de Chebyshev, se utilizan como puntos de interpolación para los polinomios. Se hace uso del método de colocación que consiste en sustituir las raíces o nodos de Chebyshev en la condición inicial de la Ecuación Diferencial Parcial, considerándola como la primera aproximación a la solución. El método surge como alternativa a la solución a las ecuaciones diferenciales ordinarias de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Este tipo de ecuaciones diferenciales corresponden a casos más particulares de la ecuación diferencial llamada Sturm-Liouville, que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma  $-[p(x)y']' + q(x)y = \lambda w(x)y$ .

Entre los primeros métodos de aproximación a las soluciones de ecuaciones diferenciales está el, muy difundido, Método de Fourier (Considerado como un método espectral) que se refiere a expresar la solución de la ecuación diferencial como una serie truncada, de tal manera que el objetivo es determinar los coeficientes de la serie. La base para este método son funciones que son efectivas para problemas periódicos y para problemas no periódicos, el método de Colocación de Chebyshev, con base en los nodos o puntos de Chebyshev, puede ser una eficaz alternativa.

## CAPÍTULO 1:

### 1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

#### 1.1.1. Situación problemática.

Encontrar soluciones analíticas correspondientes a ecuaciones diferenciales parciales, en ocasiones es bastante laborioso. Los métodos numéricos, surgen como una alternativa urgente, porque permiten resolver ecuaciones diferenciales parciales por aproximación y han tomado una posición trascendental en la búsqueda de la solución de ecuaciones diferenciales, entre ellos, los métodos basados en los polinomios de Chebyshev constituyen actualmente un área de estudio de la matemática que merece la atención de los investigadores, debido a la gran importancia tanto teórico como en sus aplicaciones.

Los métodos de simulación numérica conocidos como métodos de elementos finitos, diferencias finitas están siendo aplicadas ampliamente en la solución de ecuaciones diferenciales, sin embargo, se requiere de optar por nuevas alternativas que optimicen el cálculo de solución de una ecuación diferencial.

Un método que consiste en suponer que la solución de una ecuación o de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales puede aproximarse por las primeras  $n + 1$  funciones de una base ortogonal, se denomina también método espectral. Los diferentes métodos espectrales difieren en la forma de obtener los coeficientes  $a_k$  para minimizar la función residual  $R(x, a_k(t))$  tanto como sea posible. Una vez que hayan sido obtenidos los coeficientes, la

solución estaría completa, esto es, se obtendría la solución en todo su dominio espacial, mientras que en diferencias finitas se tiene la solución solo en puntos espaciales temporales.

Los métodos de aproximación por funciones tienen sus inicios a principios del siglo XX. Podemos mencionar los trabajos de Galerkin (1915) en cuyo enfoque se menciona a las funciones de aproximación, Lanezos (1938) quien estableció que una adecuada elección de las funciones de aproximación y la distribución de puntos de colocación son decisivas para la precisión de la solución. Originalmente fueron propuestos en 1944 por Blinova, luego fue implementado por primera vez en 1954 por Silberman, y prácticamente fueron dejados de lado a mediados de 1960. Posteriormente fueron retomados en los trabajos de Eliazon, Machenhauer y Rasmussen.

El método de Fourier, es uno de los primeros métodos que involucra el uso de funciones trigonométricas para determinar la solución de ecuaciones diferenciales parciales. El método de diferencias finitas, como también, el método de elementos finitos a pesar de presentar algunos inconvenientes en el cálculo de la solución aproximada de una ecuación diferencial parcial, ofrecen resultados aceptables. En tal sentido, resultaría conveniente analizar la solución aproximada mediante el método que considera como base el uso de los polinomios de Chebyshev.

### 1.1.2. Formulación del Problema

El propósito es determinar una solución para una ecuación diferencial parcial unidimensional, supóngase de la forma

$$\aleph(u(x, t)) = \mathcal{M}(u(x, t)), x \in D, t > 0 \quad (1.1)$$

$$\mathcal{F}(u(x, t)) = 0, x \in \partial D, t > 0$$

$$g(x) = u(x, 0), x \in D$$

donde  $\aleph$  y  $\mathcal{M}$  son operadores diferenciales con respecto a las variables  $t$  y  $x$ , respectivamente (pueden ser:  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  o  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ), que actúa sobre la función  $u(x, t)$ ,  $D$  es el dominio en  $x$  y  $\partial D$  es su frontera, además  $\mathcal{F}$  es la condición de frontera, con condición inicial  $g(x)$ .

Para determinar una solución aproximada de la ecuación diferencial parcial unidimensional (1.1) se realiza una discretización con respecto a la variable espacial. Considerando los polinomios de Chebyshev de grado  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T_k(x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Sobre el intervalo  $[-1, 1]$  se determinan los nodos o puntos de Chebyshev, definidos por  $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)$ ;  $0 \leq j \leq N$ , distribuidos de manera no homogénea, a saber, los nodos:  $x_0, x_1, \dots, x_N$ .

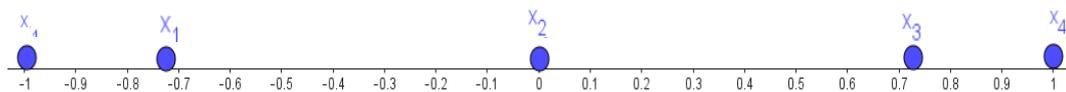


Figura 1. Para  $N=4$ , los nodos de Chebyshev son:  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ , en el intervalo  $[-1, 1]$

Sea  $\hat{u}(x, t)$  la solución aproximada de la ecuación (1.1). Para el operador diferencial  $\mathcal{M}$  se determina la Matriz  $D_N$ ,  $(N + 1) \times (N + 1)$  llamada matriz de diferenciación de Chebyshev, que es la derivada discreta de  $u$  en cada punto  $x_j$ .

Así, la derivada parcial con respecto a  $x$  de la ecuación (1.1) es

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t) \approx D_N \cdot \hat{u}$$

donde  $\hat{u}$  es el vector  $\hat{u} = [u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_N)]^T$ , (T: transpuesta)

Similarmente, para la segunda derivada parcial  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  se tiene:  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t) \approx D_N^2 \cdot \hat{u}$ , donde  $D_N^2 = D_N \cdot D_N$ . Luego, la derivada parcial con respecto al tiempo  $\frac{\partial u}{\partial t}$  será resuelta por un método

numérico adecuado.

¿Será posible desarrollar los fundamentos teóricos de los polinomios de Chebyshev y aplicarlos en la solución aproximada de Ecuaciones Diferenciales Parciales unidimensionales?

¿Será posible determinar las soluciones aproximadas de las Ecuaciones Diferenciales Parciales unidimensionales de Calor, Onda y Advección, por medio de polinomios de Chebyshev?

¿Será posible implementar códigos en el programa de Matlab para mostrar los resultados?

### 1.1.3 Hipótesis

Es posible determinar una solución aproximada mediante polinomios de Chebyshev para una ecuación diferencial parcial unidimensional.

### 1.1.4. Importancia y Justificación de la investigación.

Antes de la aparición de las computadoras, los cálculos realizados para determinar soluciones de problemas en la física, en matemática y en áreas como mecánica de fluidos se aplicaba una expansión en series, tal es el caso de las series de Fourier. Sin embargo, los métodos de expansión en series presentaron limitaciones para calcular sus sumas truncadas en la que se tenía un número grande de sumandos y términos en la expresión. Esta limitación ha llevado el desarrollo de los métodos numéricos discretos, como el método de diferencias finitas o elementos finitos.

Como una alternativa a los métodos tradicionales se debe contribuir a sentar las bases sobre métodos alternativos, que sean aplicables en la solución de problemas de ecuaciones diferenciales parciales y sus aplicaciones.

El desarrollo del presente trabajo es de suma importancia, pues permite que las Ecuaciones Diferenciales Parciales de una dimensión, como son la Ecuación de Onda, Calor, Ecuación Advección, se resuelvan de manera eficaz mediante aproximaciones en base a los Polinomios de Chebyshev, además se implementará códigos en el programa MATLAB.

Con este trabajo de investigación se pretende contribuir al estudio de nuevos métodos que se están difundiendo en la actualidad, sobre todo por las aplicaciones en diversas áreas de las ciencias.

### **1.1.5 Objetivos de la Investigación**

#### **1.1.5.1. Objetivo General**

Determinar la solución de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales por aproximación mediante polinomios de Chebyshev.

#### **1.1.5.2. Objetivos Específicos**

1. Desarrollar los fundamentos teóricos de los polinomios de Chebyshev para aplicarlos en la aproximación a la solución de Ecuaciones diferenciales Parciales unidimensionales.
2. Determinar las soluciones aproximadas de las Ecuaciones Diferenciales Parciales unidimensionales de Calor, Onda, Advección mediante polinomios de Chebyshev.
3. Implementar los códigos de programas en Matlab que permitan analizar los resultados de las aproximaciones.

## **1.1.6 Variables**

### **1.1.6.1. Variable Independiente**

Ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales

### **1.1.6.2 Variables Dependientes**

Polinomios de Chebyshev

## **1.2 Marco Teórico Conceptual**

### **1.2.1. Antecedentes de la Investigación**

#### **a. Antecedentes Internacionales**

Paniagua (2012). En su artículo: “Aplicación de un método espectral en la solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes”, cuyo resumen es: los Métodos Espectrales fueron aplicados en las simulaciones numéricas con eficacia en mecánica cuántica, Dinámica de fluidos, etc. Este Método tiene gran alcance en la solución numérica de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, así también, en las Ecuaciones diferenciales Parciales.

El Método Espectral que presenta en el artículo se basa en la interpolación polinomial, en nodos cuya distribución genera la malla de Chebyshev, y que permite la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Los resultados del trabajo, muestra la efectividad del método, al comparar las soluciones analíticas con las soluciones aproximadas encontradas con el método de diferencias finitas.

#### **b. Antecedentes Nacionales**

Miñano (2012), en su tesis “Programa del método del elemento finito para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas con frontera convexa”, resume

El método de elemento finito ofrece una opción más adecuada en el caso de determinar la solución de una EDP parabólica, a diferencia del cálculo de la solución analítica que resulta ser laborioso.

Propone que lo conveniente es implementar un programa en Matlab que halle la solución de la ecuación diferencial, para así optimizar el proceso de determinar la solución de una EDP parabólica con frontera convexa.

### 1.2.2. Bases Teóricas Filosóficas.

Para Jeremy Avigad, el conocimiento de la matemática es esencial en la epistemología.

1. **Axioma.** Se define como una proposición, tan simple y obvia, que se acepta sin demostración.
2. **Postulado.** Proposición que no es tan evidente como un axioma, sin embargo, al igual que el axioma, se acepta sin demostración.
3. **Lema.** Proposición que es la base para la demostración de un teorema.
4. **Proposición.** Es un enunciado, falso o verdadero, pero no ambas a la vez.
5. **Teorema.** Es una proposición que afirma una verdad que debe demostrarse.
6. **Corolario.** Es aquella proposición que es consecuencia del teorema.

### 1.2.3. Marco Teórico Conceptual

**Definición 1.2.3.1.** – Sea  $A$  un subconjunto de números reales. La medida exterior de Lebesgue  $\mu_e(A)$  de un conjunto  $A$ , está definida por

$$\mu_e(A) = \inf \left\{ \sum_n |I_n| : A \subset \bigcup_{n=1} I_n \right\}$$

donde  $|I_n|$  denota la medida del intervalo  $I_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , el ínfimo es con relación a todos los cubrimientos de  $A$  por intervalos abiertos. (Flores, 2018)

**Definición 1.2.3.2.-** Dados los intervalos abiertos  $]a, b[ \subset \mathbb{R}, [0, \infty[ \subset \mathbb{R}$ . La función  $s: ]a, b[ \rightarrow [0, \infty[$  es medible, si existen funciones medibles  $s^{(r)}$  simples, tales que se cumplan:

- a)  $0 \leq s^{(1)} \leq s^{(2)} \leq \dots \leq \mu$
- b)  $s^{(r)}(x) \rightarrow \mu(x)$  cuando  $r \rightarrow \infty, \forall x \in ]a, b[$

**Definición 1.2.3.3.** Dado el intervalo abierto  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ . El espacio de funciones medibles, que se denota por  $L^p ]a, b[$ , tal que

$$\int_a^b |\mu(x)|^p dx < \infty$$

donde  $\mu: ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 1.2.3.4.** Sea la función  $w: ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se define la función peso  $w$ , como aquella función que es continua y positiva en el intervalo abierto  $]a, b[$ .

**Definición 1.2.3.5.** Sea  $w$  una función peso en el intervalo abierto  $]a, b[$ . Se define el espacio de funciones medibles, denotado por  $L_w^p$ , con  $\mu: ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que

$$\int_a^b |\mu(x)|^p w(x) dx < \infty$$

**Definición 1.2.3.6.** El conjunto de funciones  $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$  se dice que es Linealmente Independiente en  $[a, b]$ , si en la combinación lineal

$$c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + \dots + c_n\psi_n(x) = 0, x \in [a, b]$$

se tiene que  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ . Caso contrario se dice que son funciones linealmente dependientes.

**Teorema 1.2.3.7.** Si  $\psi_j(x)$  un polinomio de  $j$  –ésimo grado, para cada  $j = 0, 1, \dots, n$  entonces  $\{\psi_0, \dots, \psi_n\}$  es linealmente independiente en  $[a, b]$ . (Fernandez, 2017)

Sea el conjunto denotado por  $\wp_n$ , conformado por los polinomios cuyo grado máximo  $n$ .

**Teorema 1.2.3.8.** Si el conjunto de polinomios  $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$  es linealmente independiente en  $\wp_n$  entonces todo polinomio en  $\wp_n$  se escribe como una combinación lineal de polinomios del conjunto  $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$  (Fernandez, 2017)

**Definición 1.2.3.7.** Se define al conjunto  $\{\psi_n(x)\}_n^\infty$  como una sucesión de polinomios ortogonales con respecto al peso  $w$ , si

$$\int_a^b \psi_n(x) x^k w(x) dx = C_n \delta_{nk} = \begin{cases} C_n, & n = k; \\ 0, & n \neq k; \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

donde  $C_n \neq 0$  es una constante arbitraria.

**Definición 1.2.3.8.** Sean  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y conexo,  $k \geq 1$ . Se dice que, una ecuación de la forma:

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0; x \in U$$

es una Ecuación Diferencial Parcial (EDP)

siendo  $u: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^k(U)$  y  $F: \mathbb{R}^{n^k} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^1} \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$

$k \in \mathbb{Z}^+$  se llama orden de la ecuación.

## Método de Euler para ecuaciones diferenciales con valor inicial

Uno de los métodos numéricos más conocidos para la solución de problemas con valor inicial (PVI), es el método de Euler.

Este método sirve para obtener soluciones aproximadas de una ecuación diferencial, de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad (1.1)$$

con condición inicial  $y(a) = y_0$

Para empezar a describir el método de Euler, se debe considerar puntos (o nodos) igualmente distribuidos en el intervalo  $[a, b]$ , esta distribución de puntos se denomina malla en el intervalo  $[a, b]$ . Se elige un número  $n \in \mathbb{Z}^+$  para seleccionar los puntos de la malla

$$t_i = a + ih; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

tal que,  $h = \frac{b-a}{N} = t_{i+1} - t_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$

El método de Euler, es un caso particular del método de Taylor. En efecto, supóngase que  $y(t)$  es la única solución a la ecuación (1.1), y tiene dos derivadas continuas en  $[a, b]$ , así para cada  $i = 1, 2, \dots, N$  se tiene

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i)$$

para algún número  $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$ , arbitrario. Como  $h = t_{i+1} - t_i$ , se tiene

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

y, dado que  $y(t)$  satisface la ecuación diferencial (1.1)

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \quad (1.2)$$

Tal que:  $y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$

Si se considera la aproximación  $w_i \approx y(t_i)$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, N$ , y como  $y(a) = y_0$  es la condición inicial, entonces el método de Euler se describe de la forma:

$$w_0 = y_0,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, N \quad (1.3)$$

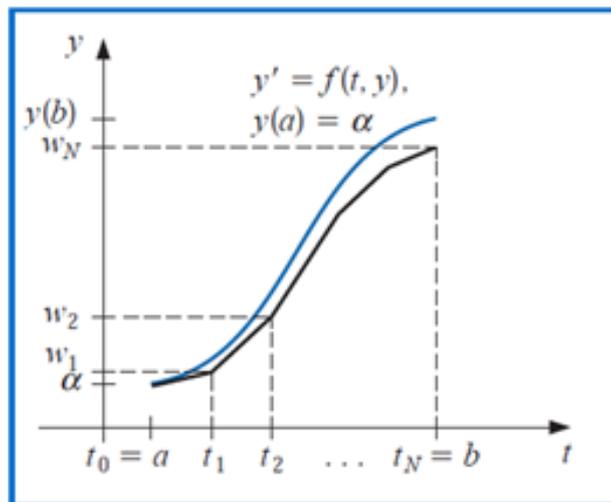


Figura 2. Gráfica de la solución en los puntos según el Método de Euler.

### Diferencias finitas para Ecuaciones Diferenciales Parciales Unidimensionales.

Para una ecuación diferencial parcial, como en (1,1), con condiciones de frontera y condiciones iniciales.

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0$$

Las aproximaciones a las derivadas parciales con respecto al tiempo  $t \in [0, b]$ , de primer y segundo orden, considerando una partición del intervalo  $[0, b]$  en los puntos equidistantes  $t_m = mh$ ; con  $m = 1, 2, \dots, M$ ;  $\Delta t = h = b/M$ ; manteniendo la variable  $x$  sin desplazamiento ( $x = x_i$ : constante) están dadas por:

a) Diferencia progresiva (Hacia adelante)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{m+1} - u_m}{h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cong \frac{u_m - 2u_{m+1} + u_{m+2}}{h^2}$$

b) Diferencia regresiva (Hacia atrás)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_m - u_{m-1}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cong \frac{u_m - 2u_{m-1} + u_{m-2}}{h^2}$$

c) Diferencias centradas

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cong \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2}$$

donde  $u_{m+1} = u(x_i, t + h)$ ,  $u_m = u(x_i, t)$ ;  $u_{m-1} = u(x_i, t - h)$ ,  $u_{m-2} = u(x_i, t - 2h)$

(Salgado, 2021)

### TEOREMA 1.2.3.9 (Interpolación de Lagrange)

Sean la función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,  $n + 1$  puntos del intervalo  $[a, b]$ , entonces existe un único polinomio  $P_n(x)$  de grado menor o igual que  $n$ , tal que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x)$$

donde para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  se tiene

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

(Sánchez, 2015)

### 1.3. METODOLOGÍA

#### 1.3.1. Tipo de Investigación

El presente trabajo es de tipo analítico-deductivo en razón a que se analizan los fundamentos teóricos de la matemática para resolver ecuaciones diferenciales para deducir si la solución determinada mediante métodos numéricos se aproxima a la solución analítica de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales.

#### 1.3.2. Nivel de Investigación

El estudio es de nivel básico por cuanto se trata de relacionar conceptos para inferir resultados y conclusiones. Esta investigación no trata problemas de experimentación.

#### 1.3.3. Diseño de Investigación

El diseño del trabajo de investigación es no experimental, puesto que no se manipulan datos. El diseño de esta investigación consiste en comparar la solución aproximada con la solución analítica de una ecuación diferencial parcial unidimensional.

### **1.3.4. Delimitación de la Investigación**

#### **1.3.4.1. Delimitación Espacial y Temporal**

El desarrollo del trabajo de investigación se lleva a cabo en la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, en la provincia y departamento del Cusco. El presente trabajo de investigación se pretende concluir el año 2023.

#### **1.3.4.2. Delimitación Conceptual**

El presente trabajo de investigación, en su parte teórica, se encuentra inmerso en el área de las ecuaciones diferenciales parciales. La solución de las ecuaciones diferenciales parciales se determinará mediante una aproximación que se enmarcan dentro de los métodos numéricos, además los resultados de dicha aproximación a la solución de la EDP se realizarán con el programa matemático Matlab

## CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

### 2.1. Polinomios de Chebyshev

Ahora, se establecerá la definición del polinomio de Chebyshev de primera especie en su forma trigonométrica, también se presentará su forma algebraica y algunas propiedades

En adelante se hará referencia a los polinomios de Chebyshev de primera especie simplemente como polinomios de Chebyshev.

**Definición 2.1.1.** Los polinomios de Chebyshev de grado  $n$ , denotado por  $T_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  se definen por

$$T_n(x) = \cos [n(\arccos x)]; \quad x \in [-1, 1]$$

de donde  $T_n(x) = \cos (n\theta)$ , siendo  $x = \cos\theta$ ;  $\theta \in [0, \pi]$ .

**Teorema 2.1.1.:** Los polinomios de Chebyshev se generan mediante la siguiente relación de recurrencia

$$T_0(x) = 1, n = 0$$

$$T_1(x) = x, n = 1$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

con  $x \in [-1, 1]$ .

### **Demostración:**

Para demostrar que la relación de recurrencia (2.1) genera los polinomios de Chebyshev consideremos la forma trigonométrica (Zaqueu, 2018)

$$\cos n\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta, \quad n \geq 2$$

Así, se tiene que:

$$T_n(x) = \cos n\theta \tag{2.2}$$

$$= \cos((n-1) + 1)\theta$$

$$= \cos(n-1)\theta \cos \theta - \operatorname{sen}(n-1)\theta \operatorname{sen} \theta$$

$$= \cos \theta \cos(n-1)\theta - \frac{\cos(n-2)\theta - \cos n\theta}{2} \tag{2.3}$$

de (2.6) y (2.7) se tiene:

$$2 \cos n\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta + \cos n\theta$$

$$\cos n\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

Por lo tanto  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$  (Zaqueu, 2018).

Los primeros polinomios de Chebyshev son

$$T_0(x) = \cos 0 = 1$$

$$T_1(x) = \cos \theta = x$$

$$T_2(x) = \cos 2\theta = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos 3\theta = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = \cos 4\theta = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots$$

⋮

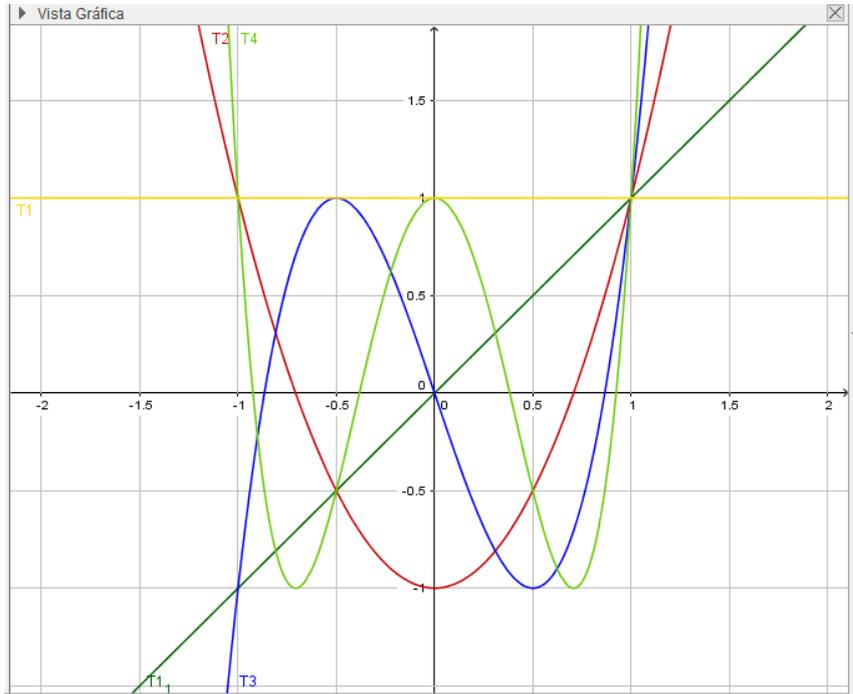


Fig. 3. Los primeros 4 polinomios de Chebyshev

## 2.2. Cálculo de los coeficientes de Chebyshev

Consideremos los polinomios de Chebyshev  $T_n(x)$  con coeficientes  $a_{n,k}$  tales que

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k \quad (2.4)$$

Si  $n = 0$  entonces  $T_0(x) = a_{n,0}$  donde  $a_{n,0} = 1$

Si  $n = 1$  entonces  $T_1(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x = x$  donde  $a_{n,1} = 1$  y  $a_{n,0} = 0$

Si  $n = 2$  entonces  $T_2(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 = 2x^2 - 1$  donde  $a_{n,2} = 2$

$a_{n,1} = 0$  y  $a_{n,0} = -1$

Así, sucesivamente.

**Proposición. 2.2.1.-** Los coeficientes  $a_{n,k}$  de los polinomios de Chebyshev  $T_n(x)$  se pueden calcular haciendo uso de la relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_{n,0} = -a_{n-2,0} \\ a_{n,k} = 2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,0} \\ a_{n,n-1} = 2a_{n-1,n-2} \\ a_{n,n} = 2a_{n-1,n-1} \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n-2 \quad (2.5)$$

Con condiciones iniciales  $a_{0,0} = 1$ ,  $a_{1,0} = 0$ ,  $a_{1,1} = 1$ .

**Demostración.**

Considerando la relación de recurrencia (1.5) y la relación (1.8) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k &= 2x \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^k - \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k} x^k \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k} x^k \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-2,k} x^k + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{k+1} \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-2,k+1} x^{k+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} x^{k+1} \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-2,k+1} x^{k+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-1,k} x^{k+1} + 2a_{n-1,n-2} x^{n-1} \\ &\quad + 2a_{n-1,n-1} x^n \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} (2a_{n-1,k} - a_{n-2,k+1}) x^{k+1} + 2a_{n-1,n-2} x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1} x^n \end{aligned}$$

$$= -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} (2a_{n-1,k} - a_{n-2,k})x^k + 2a_{n-1,n-2} x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1} x^n$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k = -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} (2a_{n-1,k} - a_{n-2,k})x^k + 2a_{n-1,n-2} x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1} x^n \quad (2.6)$$

En la ecuación (1.3), si la consideramos los coeficientes de las potencias de  $x$  de mismo grado, se tiene la siguiente relación de recurrencia entre los coeficientes

$$\begin{cases} a_{n,0} = -a_{n-2,0} \\ a_{n,k} = 2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,0} \\ a_{n,n-1} = 2a_{n-1,n-2} \\ a_{n,n} = 2a_{n-1,n-1} \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n-2$$

Con condiciones iniciales

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \end{cases} \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} a_{0,0} = 1 \\ a_{1,0} = 0, a_{1,1} = 1 \end{cases}$$

(Zaqueu, 2018)

**Definición 2.2.2.:** Una sucesión de polinomios  $\{P_n(x)\}_{k=0}^{\infty}$ , tal que el grado de  $P_n(x)$  es  $n$ , se dice que es simétrica si y solo si

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

**Observaciones.**

- 1) Para  $n$  par se tiene que  $P_n(-x) = P_n(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , es decir,  $P_n(x)$  es una función par.
- 2) Si  $n$  es impar se tiene que  $P_n(-x) = -P_n(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , es decir,  $P_n(x)$  es una función impar.

**Proposición. 2.2.3.:** La sucesión de polinomios de Chebyshev  $\{T_n(x)\}_{k=0}^{\infty}$  es simétrica.

**Demostración.** Por inducción se tiene:

Si  $n = 0$ , se tiene que  $T_0(x) = 1$  es par, puesto que  $T_0(-x) = 1 = T_0(x)$ .

Si  $n = 1$ , se tiene que  $T_1(x) = x$  es impar, puesto que  $T_1(-x) = -x = -T_1(x)$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$ , supongamos que para cada  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $T_k(x)$  es par si  $k$  es par y es impar si  $k$  es impar. Debemos demostrar que  $T_{n+1}(x)$  tiene la misma propiedad.

En efecto, por (2.1) se sabe que

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n \geq 2$$

de donde, para  $n \geq 1$  se tiene

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Luego consideremos dos casos:

- a) Si  $n + 1$  es par, entonces  $n$  es impar y  $n - 1$  es par. Por la hipótesis de inducción se tiene que  $T_n(x)$  es una función impar y la función  $T_{n-1}(x)$  es par. Dado que la función  $x$  es impar entonces la función  $xT_n(x)$  será par, puesto que es el producto de dos funciones impares. Por lo tanto,  $T_{n+1}(x)$  es par por ser la suma de dos funciones pares.
- b) Si  $n + 1$  es impar, entonces  $n$  es par y  $n - 1$  es impar. Por la hipótesis de inducción se tiene que la función  $T_n(x)$  es par y la función  $T_{n-1}(x)$  debe ser impar. Dado que la función  $x$  es impar entonces la función  $xT_n(x)$  será impar puesto que es el producto de funciones impares y pares. Así  $T_{n+1}(x)$  es impar por ser la suma de dos funciones impares. (Zaqueu, 2018)

**Proposición. 2.2.4:** El polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$  tiene  $n$  ceros reales en el intervalo  $[-1,1]$  dados por

$$x_k = \cos \theta_k$$

donde  $\theta_k = \frac{2k+1}{2n} \pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$

Además, los extremos del polinomio  $T_n(x)$  sobre el intervalo  $[-1,1]$  se alcanzan en  $n+1$  puntos, dados por

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \in [-1,1], k = 0, 1, \dots, n$$

donde  $n = 1, 2, \dots$

**Demostración:**

Los ceros de los polinomios de Chebyshev  $T_n(x)$ ,  $x \in [-1,1]$ , corresponden a los ceros de la función  $\cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  y estos se pueden calcular mediante

$$T_n(x) = 0 = \cos n\theta$$

$$n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Por otro lado,  $T'_n(x) = \frac{d}{dx}(\cos(n\theta)) = -n \operatorname{sen}(n\theta) \frac{d\theta}{dx} = -\frac{n \operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$

Los extremos ocurren cuando  $\operatorname{sen}(n\theta) = 0$ , es decir  $n\theta = k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$

En los puntos  $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$

**Definición 2.2.3.:** Se llama función generadora de una sucesión de polinomios  $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  donde  $P_k(x)$  es de grado  $k$ , a una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k$$

En la relación de recurrencia dada en (2.1), si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el factor  $t^k$  y realizando la suma para  $n \geq 2$ , se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} T_k(x) t^k &= 2x \sum_{k=2}^{\infty} T_{k-1}(x) t^k - \sum_{k=2}^{\infty} T_{k-2}(x) t^k \\ &= 2xt \sum_{k=2}^{\infty} T_{k-1}(x) t^{k-1} - t^2 \sum_{k=2}^{\infty} T_{k-2}(x) t^{k-2} \\ &= 2xt \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x) t^k - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) t^k \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) t^k - T_0(x) - T_1(x)t = 2xt \left[ \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) t^k - T_0(x) \right] - t^2 \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) t^k$$

$$f(x, t) - T_0(x) - T_1(x)t = 2xt f(x, t) - 2xt - t^2 f(x, t)$$

$$f(x, t) - 2xt f(x, t) + t^2 f(x, t) = 1 - 2xt + xt$$

$$(1 - 2xt + t^2) f(x, t) = 1 - xt$$

Así, la función generadora de los polinomios de Chebyshev de primera especie está dada por

$$f(x, t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) t^k, |t| < 1$$

### 2.3. Ortogonalidad de Funciones.

**Definición 2.3.1.:** Se llama función peso, denotado por  $\omega$ , a una función no negativa, definida y continua en el intervalo  $[a, b]$ , que es integrable y

$$\int_a^b \omega(x) dx > 0.$$

Una función de peso tiene por objetivo asignar el grado de importancia a una aproximación numérica en ciertas partes del intervalo  $]-1,1[$ , tal es el caso de la función peso

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pone menos énfasis cerca del centro del intervalo  $]-1,1[$  y mayor cuando se halla cerca de los extremos del intervalo. (Faires, 2007)

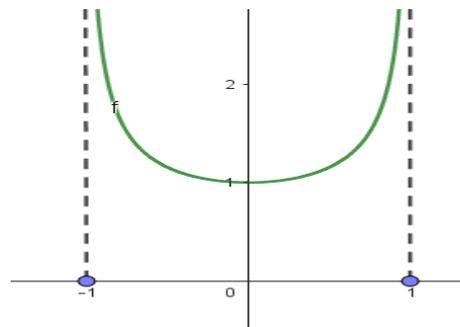


Figura 4. Función peso en el intervalo  $]-1,1[$

**Definición 2.3.2.:** Sean las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . El producto interno de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se define por

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

(Flores, 2018)

**Teorema 2.3.1** (Weierstrass) Si  $f \in C([a, b])$  es una función continua en un intervalo  $[a, b]$  entonces existe una sucesión de polinomios  $p_n(x)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$$

uniformemente en  $[a, b]$ . (Saenz, 2015)

**Proposición 2.3.1.** La familia de polinomios de Chebyshev es ortogonal dentro del intervalo cerrado  $[-1, 1]$  en relación a la *función peso*  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , esto es

$$\langle T_i(x), T_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 (T_i(x)) (T_j(x)) \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 0, \quad i \neq j$$

**Demostración.**

Consideremos que  $x = \cos \theta$ , entonces  $d(x) = -\operatorname{sen} \theta \, d\theta$ . Sabiendo que  $T_i(x) = \cos i\theta$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_i(x) T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos i\theta \cos j\theta}{\operatorname{sen} \theta} (-\operatorname{sen} \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos i\theta \cos j\theta}{\operatorname{sen} \theta} (\operatorname{sen} \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos i\theta \cos j\theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos (i+j)\theta + \cos (i-j)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen} (i+j)\theta}{i+j} + \frac{\operatorname{sen} (i-j)\theta}{i-j} \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x) T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad i \neq j$$

Por lo tanto

$$\langle T_i(x), T_j(x) \rangle = 0, \quad i \neq j$$

(Flores, 2018)

Gracias al teorema de integración de gauss- Lobato, se puede garantizar la cuadratura exacta de polinomios de grado  $2n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.3.2.** (Integración gaussiana)

Dadas la sucesión de polinomios ortogonales  $\{P_k\}_{k=0}^{\infty} \subset L_w^2$ , y  $w$  una función peso. Sea el polinomio  $P_{n+1}$  con raíces  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , con  $j = 0, 1, \dots, n$ ; se define

$$w_j = \int_a^b \ell_j(x) w(x) dx$$

donde  $\ell_j(x)$  son los coeficientes de interpolación de Lagrange asociado a los puntos  $\{x_j\}_{j=0}^n$ .

Entonces, se tiene que:

$$\int_a^b p(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^n p(x_j) w_j$$

para todo polinomio  $p$  de grado  $\leq n$ , con  $w_j > 0, j = 0, 1, \dots, n$ . (Flores, 2018)

**Proposición 2.3.2.** Dado en polinomio  $T_n$  de Chebyshev, de grado  $n$ , con función peso

$w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Entonces, se tiene que:

$$\int_{-1}^1 p(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^n p(x_j) w(x_j)$$

Para todo polinomio  $p$  cuyo grado es menor e igual a  $2n + 1$ .

donde  $x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right)$  y  $w_j = \frac{\pi}{n+1}$ . (Flores, 2018)

**Proposición 2.3.3.** (Integración Gauss-Lobato) Sea el polinomio  $T_n(x)$  de Chebyshev cuyo grado es  $n$ , además  $w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Entonces, se tiene que

$$\int_{-1}^1 p(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^n p(x_j) w(x_j)$$

para todo polinomio  $p$  cuyo grado es menor e igual que  $2n - 1$ . donde  $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$  y

$$w_j = \frac{\pi}{n \bar{c}_j}, \text{ con } \bar{c}_j = \begin{cases} 2, & \text{si } j = 0 \text{ o } j = n \\ 1, & \text{si } 1 \leq j < n \end{cases}$$

### Demostración

Consideremos el polinomio  $h(x) = T_{n+1}(x) + aT_n(x) + bT_{n-1}(x)$ , con  $h(a) = h(b) = 0$ , son homogéneos, haciéndose cero en la frontera.

Polinomio que está dado por:  $h(x) = T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)$ . Como los puntos  $x_j$  son de  $h(x)$  polinomio, entonces consideremos la forma  $x = \cos\theta$

$$\begin{aligned} h(x_j) &= \cos(n\theta) \cos(\theta) - \text{sen}(n\theta) \text{sen}(\theta) - [\cos(n\theta) \cos(\theta) + \text{sen}(n\theta) \text{sen}\theta] \\ &= -2\text{sen}(n\theta) \text{sen}\theta \end{aligned}$$

con  $h(x_j) = 0$  entonces  $\text{sen}(n\theta) = 0$  o  $\text{sen}(\theta) = 0$

$\text{sen}(n\theta) = 0$  entonces  $n\theta = j\pi + \arccos(0)$

Ahora se puede definir  $\theta_j = \frac{j\pi}{n}$ , finalmente entonces

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right); j = 0, 1, \dots, n$$

Los puntos  $x_j$  se llaman puntos de Chebyshev Gauss-Lobato, en adelante nos referiremos a ellos como puntos de Chebyshev.

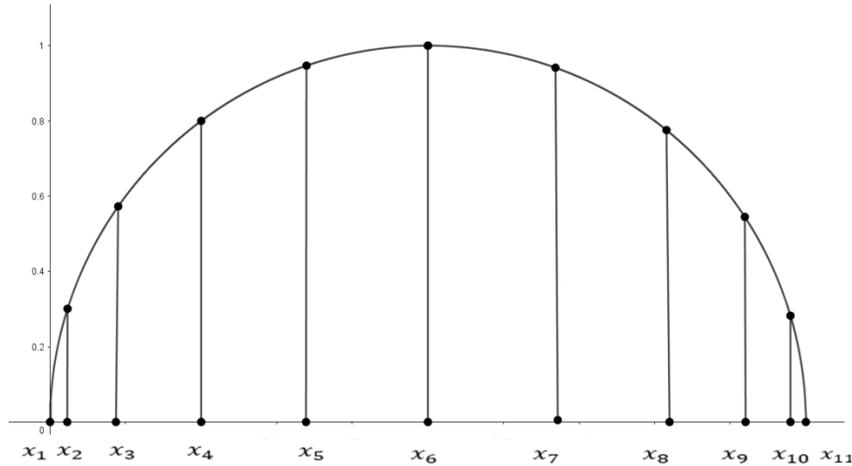


Figura 5. Los puntos de Chebyshev  $x_j, j = 1, \dots, 11$  son proyecciones perpendiculares en el eje de las abscisas, de puntos, que tienen igual distancia, en el círculo de radio uno.

## 2.4. Series de Chebyshev

Sean el intervalo  $[-1, 1]$  y la función peso del polinomio de Chebyshev  $w_T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Definición 2.2.6.:** El desarrollo de una función en series de polinomios de Chebyshev está dado por

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^T T_i(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

donde  $c_i^T = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_i(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, i = 1, 2, \dots$

Un caso particular se presenta en el desarrollo de la función

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

en serie de Chebyshev. (Zaqueu, 2018)

En efecto

Si  $i = 1, 2, \dots$

$$c_i^T = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_i(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\frac{\pi}{2} c_i^T = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} f(\cos\theta) T_i(\cos\theta) \sqrt{1-\cos^2\theta} d\theta$$

$$\frac{\pi}{2} c_i^T = \int_0^\pi f(\cos\theta) T_i(\cos\theta) d\theta$$

$$\frac{\pi}{2} c_i^T = \int_0^{\pi/2} f(\cos\theta) \cos i\theta d\theta + \int_{\pi/2}^\pi f(\cos\theta) \cos i\theta d\theta$$

$$\frac{\pi}{2} c_i^T = \int_0^{\pi/2} \cos i\theta d\theta - \int_{\pi/2}^\pi \cos i\theta d\theta$$

$$\frac{\pi}{2} c_i^T = \left. \frac{\text{seni}\theta}{i} \right|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} - \left. \frac{\text{seni}\theta}{i} \right|_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi}$$

$$\frac{\pi}{2} c_i^T = \frac{2\text{seni}\theta}{i}$$

Si  $i = 0$ , entonces

$$\frac{\pi}{2} c_0^T = \int_0^\pi f(\cos\theta) T_0(\cos\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta - \int_{\pi/2}^\pi d\theta$$

$$= \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} - \theta \Big|_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

Si  $i = 2k, k = 1, 2, \dots$ , entonces

$$\frac{\pi}{2} c_{2k}^T = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{2}}{2k} = \frac{2 \operatorname{sen} k\pi}{2k} = 0$$

Si  $i = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$ , entonces

$$\frac{\pi}{2} c_{2k-1}^T = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{2(k-1)\pi}{2}}{2k-1} = \frac{2 \operatorname{sen} \left( k\pi - \frac{\pi}{2} \right)}{2k-1} = \frac{2(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

Así, se tiene  $c_{2k-1}^T = \frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}$

Por lo tanto:  $\operatorname{sign}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} T_{2k-1}(x)}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \left[ T_1(x) - \frac{1}{3} T_3(x) + \frac{1}{5} T_5(x) + \dots \right]$

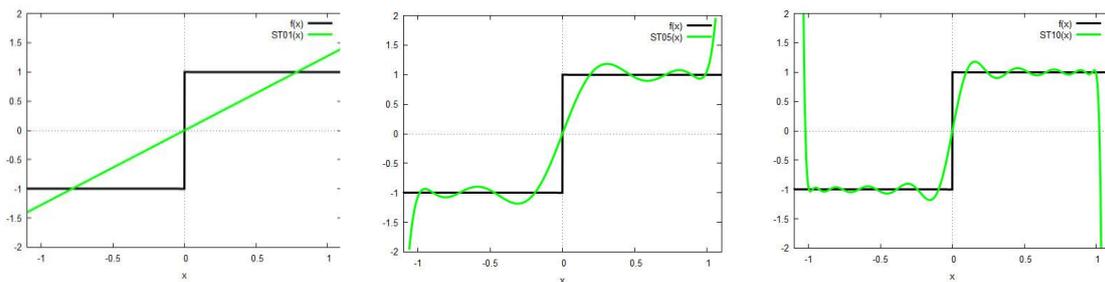


Figura 6. Las figuras muestran que a mayor número de términos en la serie tiene mayor aproximación de la función

## CAPÍTULO 3:

### MATRICES DE DIFERENCIACIÓN Y EDPS. UNIDIMENSIONALES

#### 3.1 Matrices de diferenciación de Chebyshev

De acuerdo a la proposición (2.3.3). Consideremos los puntos de Chebyshev, para  $N$  entero positivo

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

se implementa la matriz de diferenciación de Chebyshev que se usará para derivar funciones en la solución aproximada de las ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales.

Dada una función  $v(x)$  definida en los puntos de Chebyshev de la malla  $x_j, j = 1, \dots, N$  se obtiene una derivada discreta  $w$  siguiendo el esquema:

1. Sea  $p$  el único polinomio de *grado*  $\leq N$  con  $p(x_j) = v_j, 0 \leq j \leq N$
2. Considere que:  $z_j = p'(x_j)$

En este esquema lineal se tiene representación matricial, para ello consideremos una matriz  $(N + 1) \times (N + 1)$ , que se denota por  $D_N$ , es decir:

$$z = D_N v.$$

Consideremos los casos  $N = 1$  y  $N = 2$ , para apreciar el funcionamiento del esquema:

- a) Para  $N = 1$ , los puntos de Chebyshev son  $x_0 = 1$  y  $x_1 = -1$ . Considerando sus valores  $v_0 = u(x_0) = u(1)$  y  $v_1 = u(x_1) = u(-1)$ , se tienen los puntos de interpolación  $(x_0, v_0), (x_1, v_1)$  y mediante el polinomio de Lagrange (Teorema 1.2.3.9), es

$$p(x) = \frac{1}{2}(1+x)v_0 + \frac{1}{2}(1-x)v_1$$

tal que, derivando se tiene

$$p'(x) = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2}v_1$$

$$\text{donde: } z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}v_0 & -\frac{1}{2}v_1 \\ \frac{1}{2}v_0 & -\frac{1}{2}v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y como } v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

de tal manera que, de la igualdad:  $w = D_1 v$ , se obtiene

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Para  $N = 2$ , los puntos de interpolación son  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$  y  $x_2 = -1$ , y sus valores

$v_0 = u(x_0) = u(1)$ ,  $v_1 = u(x_1) = u(0)$ ,  $v_2 = u(x_2) = u(-1)$ . Se consideran los puntos

de interpolación  $(x_0, v_0)$ ,  $(x_1, v_1)$ ,  $(x_2, v_2)$ , mediante la interpolación de Lagrange se tiene

$$p(x) = \frac{1}{2}x(1+x)v_0 + (1+x)(1-x)v_1 + \frac{1}{2}x(x-1)v_2$$

derivando el polinomio se tiene

$$p'(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)v_0 - 2xv_1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)v_2$$

$$\text{donde } \begin{bmatrix} \frac{3}{2}v_0 - 2v_1 & \frac{1}{2}v_2 \\ \frac{1}{2}v_0 & -\frac{1}{2}v_2 \\ -\frac{1}{2}v_0 + 2v_1 - \frac{3}{2}v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{y como } v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

entonces se tiene que:  $w = D_2 v$

donde

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

En general, se tiene la matriz de diferenciación de Chebyshev, según el teorema siguiente.

### **Teorema 3.1.1. (Matriz de Diferenciación de Chebyshev: MDC)**

Las entradas de la MDC  $D_N$  de orden " $(N + 1) \times (N + 1)$ ",  $N \geq 1$ , se determinan por:

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2+1}{6}, \quad (D_N)_{NN} = -\frac{2N^2+1}{6}$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \cdot \frac{(-1)^{1+j}}{(x_i-x_j)}, \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N-1.$$

donde  $x_j = \cos(\pi j/N)$  y además  $c_i = \begin{cases} 2, & \text{si } j = 0 \text{ o } j = N \\ 1, & \text{si } 1 \leq j \leq N-1 \end{cases}$

### **Demostración.**

Considérese los puntos de Chebyshev en  $x \in [-1, 1]$  definido por

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), j = 0, 1, 2, \dots$$

Dada una función  $u(x)$ , definida sobre los puntos de Chebyshev, la derivada en forma discreta de  $z$ , se obtiene considerando los siguientes pasos:

1. Sea  $p$  el único polinomio cuyo grado es menor e igual que  $N$ , talque

$$p(x_j) = u_j, 0 \leq j \leq N.$$

2. Sea  $z_j = p'(x_j)$

puede ser representada mediante una matriz una multiplicación por una matriz de orden  $(N + 1) \times (N + 1)$ , que se denota por  $D_N$ :

$$z_j = (D_N)_{ij} \psi_j$$

donde  $N$  es un entero positivo arbitrario, y  $(D_N)_{ij}$  representa el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $D_N$ .

Para derivar la matriz  $D_N$ , consideremos la interpolación polinomial de Lagrange y la interpolación de coeficientes

La interpolación polinomial para  $u(x_j)$  en la forma de lagrange es

$$p(x) = \sum_{j=0}^N \phi_j(x) u(x_j) \quad (3.2)$$

donde  $\phi_j(x)$  son los coeficientes de interpolación de Lagrange, definidos por

$$\phi_j(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ j \neq m}}^N \left( \frac{x - x_m}{x_j - x_m} \right) \quad (3.3)$$

Equivalentemente los coeficientes se definen también como

$$\phi_j(x) = \frac{S_N(x)}{S'_N(x_j)(x - x_j)} \quad (3.4)$$

$$\text{donde } S_N(x) = \prod_{j=0}^N (x - x_j) \quad (3.5)$$

En términos del polinomio de Chebyshev se tiene

$$S_N(x) = (1 - x^2) \frac{dT_N(x)}{dx} \quad (3.7)$$

para los puntos de Chebyshev  $x_j = \cos \frac{\pi j}{N}$  se tiene

$$\phi_j(x) = (1 - x^2) \frac{1}{d_j(x - x_j)} \frac{dT_N(x)}{dx}, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (3.8)$$

$$\text{donde } d_j = S'_N(x_j) = \frac{dS_N(x_j)}{dx} = -c_j N^2 T_N(x_j),$$

$$\begin{cases} c_j = 2, & \text{si } j = 0, N \\ c_j = 1, & \text{si } 0 < j < N \end{cases} \quad (3.9)$$

Por otro lado, puesto que la derivada

$$\frac{d}{dx}(p(x)) = u(x_j) \frac{d}{dx} \phi_j(x)$$

Se tiene

$$(D_N)_{ij} = \frac{1}{d_j} \left[ \frac{d}{dx} \phi_j(x) \right]_{x=x_i} \quad (3.10)$$

Interpolando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \phi_j(x) = \frac{1}{(x - x_j)^2} \left\{ \left[ -2x \frac{d}{dx} T_N(x) + (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} T_N(x) \right] (x - x_j) \right. \\ \left. - (1 - x^2) \frac{d}{dx} T_N(x) \right\}, j = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.11)$$

(I) Elementos fuera de la diagonal:  $1 < i < N, 1 < j < N, i \neq j$

Si tomamos  $x = x_i$  en la ecuación anterior, se obtiene

$$(D_N)_{ij} = \frac{1}{d_j} \frac{1}{x - x_j} (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} T_N(x_i) \quad (3.12)$$

donde usamos la relación  $-2x_i dT_N(x_i)/dx = 0$ . Esto es  $\theta_i = i\pi/N$ ,  $\text{sen}\theta_i \neq 0$

$$-2x \frac{d}{dx} T_N(x) \Big|_{x=x_i} = -2\cos\theta_i \frac{-N\text{sen}i\pi}{-\text{sen}\theta_i} = 0$$

Similarmente, esta relación se aplicó para el segundo término de la ecuación diferencial ordinaria polinomial de Chebyshev

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} T_N(x) - x \frac{d}{dx} T_N(x) + n^2 T_N(x) = 0 \quad (3.13)$$

entonces se obtiene la siguiente relación

$$(1 - x_i^2) \frac{d^2}{dx^2} T_N(x_i) = -N^2 T_N(x_i) \quad (3.14)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.12), se tiene

$$(D_N)_{ij} = \frac{1}{d_j} \frac{1}{x - x_j} = \frac{c_i T_N(x_i)}{c_j T_N(x_j)} \frac{1}{x_i - x_j} \quad (3.15)$$

Considerando  $T_N(x_i) = \cos[N(i\pi)/N] = \cos i\pi = (-1)^i$  y la ecuación (3.9), obtenemos

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j x_i - x_j}, \quad c_i = \begin{cases} 2 & \text{para } i = 0 \text{ o } N \\ 1 & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (3.16)$$

(II) Elementos de la diagonal ( $i = j$ );  $0 < i, j < N$

Cuando  $x$  se aproxima a  $x_j$ , la primera derivada de (3.11)

$$\left. \frac{d}{dx} \phi_j(x) \right|_{x \rightarrow x_j} = \frac{1}{(x - x_j)^2} [Y(x)](x - x_j) - (1 - x^2) \left. \frac{d}{dx} T_N(x) \right|_{x \rightarrow x_j}$$

se produce una indeterminación del tipo 0/0 puesto que  $\frac{(1-x^2)dT_N(x_j)}{dx} = 0$ . Donde, se definió que  $Y(x) = -2x dT_N(x_j)/dx + (1 - x^2)d^2T_N(x_j)/dx^2$ , cuando  $x \rightarrow x_j$ ,  $Y(x) \neq 0$ .

Aplicando la regla de L'Hospital en (3.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} \phi_j(x) \right|_{x \rightarrow x_j} &= \frac{1}{2(x - x_j)} \{-2xT'_N + (1 - x^2)T''_N \\ &+ (x - x_j)[-2T'_N - 2xT''_N - 2xT''_N + (1 - x^2)T'''_N] + 2xT'_N - (1 - x^2)T''_N\} \\ &= \frac{1}{2(x-x_j)} \{(x - x_j)[-2T'_N - 4xT''_N + (1 - x^2)T'''_N]\} \\ &= \frac{1}{2} \{-2T'_N - 4xT''_N + (1 - x^2)T'''_N\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Así, la diagonal de la MDC está constituido por las entradas

$$(D_N)_{ij} = \frac{1}{2d_j} \{-2T'_N(x_j) - 4xT''_N(x_j) + (1 - x^2)T'''_N(x_j)\} \quad (3.18)$$

puesto que  $j \neq 0, N, \text{sen}\theta_j \neq 0$ , entonces  $T'_N(x_j) = 0$ . Además de la ecuación (17)

$$-(1 - x^2)T'''_N(x) = -3xT''_N(x) + (N^2 - 1)T'_N(x) \quad (3.19)$$

Considerando  $T'_N(x_j) = 0$ , sustituimos esta relación en la ecuación (3.13), obteniendo

$$(D_N)_{jj} = -\frac{1}{2d_j} x_j T''_N(x).$$

Además, para  $T''_N(x_j)$  y haciendo uso de (3.14), los elementos de la diagonal son derivados como sigue

$$(D_N)_{jj} = -\frac{-x_j N^2 T_N(x_j)}{2d_j(1-x_j^2)} = -\frac{x_j}{2(1-x_j^2)}. \quad (3.20)$$

(III)  $i = 0, j = 0$  o  $i = N, j = N$

Dado que  $x_i = 1$  para  $j = 0$  y  $x_j = -1$  para  $j = N$ , entonces en último término del lado derecho de (22) se anula. Además, se sabe que

$$T_N(1) = 1, T_N(-1) = (-1)^N, T'_N(1) = N^2, T'_N(-1) = -(-1)^N N^2$$

y también

$$T''_N(1) = \frac{(N^2 - 1)N^2}{3}$$

$$T''_N(-1) = -(-1)^N \frac{(N^2 - 1)N^2}{3}$$

Por lo tanto, el numerador y el denominador de la ecuación (3.18) son

$$i = 0, j = 0: \quad 2T'_N(1) + 4T''_N(1) = \frac{2N^2(N^2 - 1)}{3}$$

$$2d_0 = -4N^2 T_N(1)$$

$$i = N, j = N: \quad 2T'_N(-1) + 4T''_N(-1) = -(-1) \frac{2N^2(N^2 + 1)}{3}$$

$$2d_0 = -4N^2 T_N(-1)$$

Finalmente se tiene

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad (D_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6}.$$

La disposición de los elementos de la matriz de diferenciación, tiene la forma:

$$D_N = \begin{bmatrix} \frac{2N^2+1}{6} & & 2 \frac{(-1)^j}{1-x_j} & & \frac{1}{2} (-1)^N \\ & & & & \\ & & & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1-x_i} & & -\frac{x_j}{2(1-x_j^2)} & & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1+x_i} \\ & & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & & \\ -\frac{1}{2} (-1)^N & & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1+x_j} & & -\frac{2N^2+1}{6} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Figura. Matriz de Chebyshev de primer orden

En la figura, se muestran las matrices diferenciación de Chebyshev para la primera derivada calculadas por el programa `cheb.m` en Matlab. Nótese que estas matrices presentan la forma de una matriz antisimétrica.

$$(D_N)_{ij} = -(D_N)_{N-i, N-j}$$

N=1			
0.5000		-0.5000	
0.5000		-0.5000	
N=2			
1.5000	-2.0000	0.5000	
0.5000	0	-0.5000	
-0.5000	2.0000	-1.5000	
N=3			
3.1667	-4.0000	1.3333	-0.5000
1.0000	-0.3333	-1.0000	0.3333
-0.3333	1.0000	0.3333	-1.0000
0.5000	-1.3333	4.0000	-3.1667

N=4				
5.5000	-6.8284	2.0000	-1.1716	0.5000
1.7071	-0.7071	-1.4142	0.7071	-0.2929
-0.5000	1.4142	0.0000	-1.4142	0.5000
0.2929	-0.7071	1.4142	0.7071	-1.7071
-0.5000	1.1716	-2.0000	6.8284	-5.5000

Figura 7. Primeras matrices de diferenciación D de primer orden

La matriz de diferenciación de segundo orden  $D^2$ , que también se denotará por D2, se obtiene según el siguiente teorema

**Teorema 3.1.2.** Si  $D$  es la matriz de diferenciación Chebyshev entonces la matriz de diferenciación de segundo orden está dada por  $D^2 = D \cdot D$ . (Flores, 2018).

Para determinar las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales, con condiciones iniciales y de frontera, que se consideran en este trabajo, tomamos en cuenta las siguientes condiciones:

Para problemas con condiciones de frontera constantes u homogéneas,

$(u(-1, t) = u(1, t) = 0)$ , se deben considerar los puntos de Chebyshev  $x_j = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$

es decir  $x_0 = 0 = x_N$ , mientras que la matriz de diferenciación  $D^2$  de orden

$(N + 1) \times (N + 1)$  será la matriz  $\tilde{D}^2$  de orden  $(N - 1) \times (N - 1)$ , en la que las primeras

fila y columna de  $D^2$  no tienen efecto, además las primera y última columna no tendrán

efecto (se deben ignorar). (Trefethen, 2007)

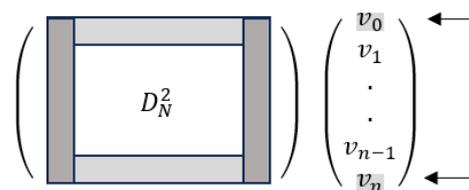


Fig. 8 Condiciones sobre la matriz de diferenciación

### 3.2 Ecuación de Calor Unidimensional

La temperatura en una barra homogénea, aislada de los lados y los extremos, en función de la posición y del tiempo  $u(x, t)$  satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \alpha \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.22)$$

Llamada Ecuación de Calor en una barra, con  $\alpha$  que es una constante que depende del material que compone la barra llamada difusividad térmica.

Condiciones de frontera homogéneas.

Consideremos la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, |x| \leq 1, t > 0 \quad (3.23)$$

donde  $\alpha = 1$ , con condiciones de frontera  $u(-1, t) = u(1, t) = 0$ , condiciones de estabilidad.

y condición inicial  $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) = f(x)$ , es la función de onda inicial.

La solución de la ecuación (3.22) es la función  $u(x, t)$ .

Para obtener la solución aproximada  $u_N$  de la ecuación (3.23), se toma como funciones base, los polinomios de Chebyshev

$$\phi_k(x) = T_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

de tal manera que

$$u_N(x, t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) \phi_k(x)$$

donde  $a_k(t)$ ,  $k = 0, \dots, N$  son los coeficientes del polinomio de aproximación que se obtiene al hacer coincidir  $u_N(x, t)$  con  $u(x, t)$  en los puntos de Chebyshev  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , llamados puntos o nodos de Chebyshev para la aproximación.

Para hacer uso del método de colocación es necesario que el valor del residuo, debido a la aproximación

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}$$

Se haga cero (se anule) en los puntos interiores de la malla, generándose así  $(N + 1)$  ecuaciones

$$\frac{du_N}{dt}(x_j, t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) = 0$$

y que la condición inicial sea

$$u_N(x_j, 0) = u(x_j, 0), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

Manteniendo  $t = t_0$  fijo, la función  $u_N(x, t)$  es un polinomio  $p(x)$  de grado  $n$ .

Se debe tomar en cuenta que la solución exacta de la ecuación de calor con condiciones iniciales y condiciones de frontera es

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \operatorname{sen} \pi x.$$

que se usaron para compararla con la solución aproximada  $u_N$

En efecto

Consideremos los puntos de colocación según Chebyshev

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Para  $N = 4$

$$x_1 = \cos 0 = 1, \quad x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_4 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_5 = \cos(\pi) = -1$$

Así, se tiene el vector  $x = \left[1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right]^T$

La condición inicial  $f(x_j) = f_j = \left[\sin\pi, \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right), \sin 0, \sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right), \sin(-\pi)\right]$

$$= [0, 0.7956, 0, -0.7956, 0]$$

Luego la matriz de diferenciación de Chebyshev de segunda derivada a considerar es

$$D_4^2 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.2426 & -14.000 & 6.0000 & -2.0000 & 0.7475 \\ -1.000 & 4.0000 & -6.0000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 0.7574 & -2.0000 & 6.0000 & -14.0000 & 9.2424 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, haciendo uso del método de solución método de Euler, (diferencias finitas) con

$$h = 0.01$$

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h} = D_4^2 * v_i$$

de donde  $v_{i+1} = v_i + h D_4^2 * v_i$

Primera iteración

$$v_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7956 \\ 0.0000 \\ -0.7956 \\ 0.0000 \end{bmatrix} + 0.01 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.2426 & -14.000 & 6.0000 & -2.0000 & 0.7475 \\ -1.000 & 4.0000 & -6.0000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 0.7574 & -2.0000 & 6.0000 & -14.0000 & 9.2424 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7956 \\ 0.0000 \\ -0.7956 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7001 \\ 0.0000 \\ -0.7001 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración

$$v_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7001 \\ 0.0000 \\ -0.7001 \\ 0.0000 \end{bmatrix} + 0.01 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.2426 & -14.000 & 6.0000 & -2.0000 & 0.7475 \\ -1.000 & 4.0000 & -6.0000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 0.7574 & -2.0000 & 6.0000 & -14.0000 & 9.2424 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7001 \\ 0.0000 \\ -0.7001 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.6166 \\ 0.0000 \\ -0.6166 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente se tiene en la iteración 20

$$v_{i+1} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0617 \\ 0.0000 \\ -0.0617 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

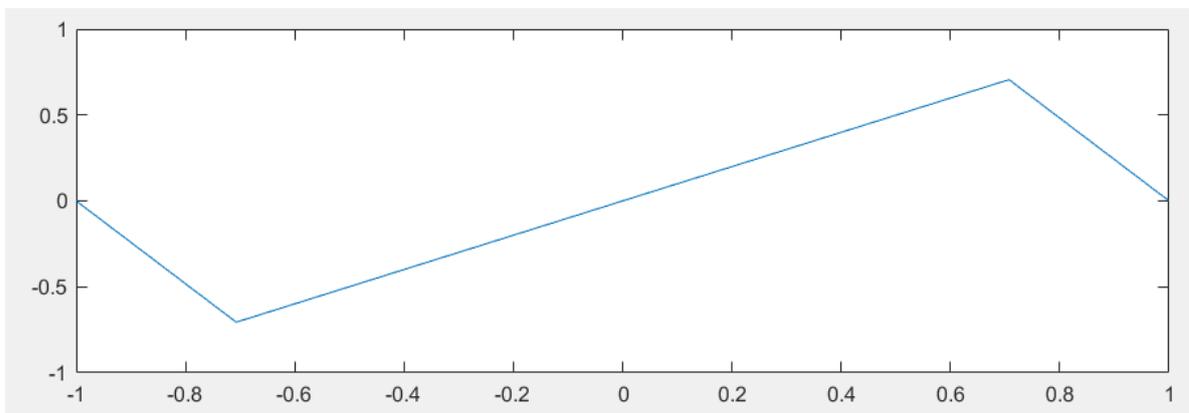


Figura 9. Solución de la ecuación de calor N=4, x, u(x,t)

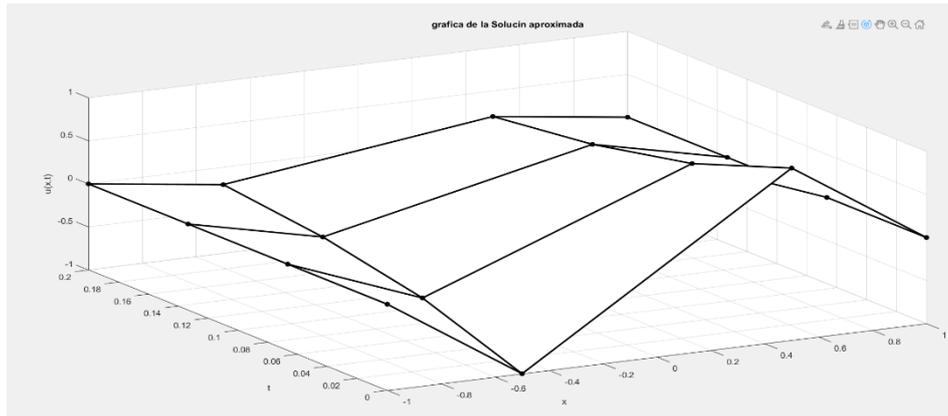


Figura 10. Solución para N=4, x, t, u(x,t)

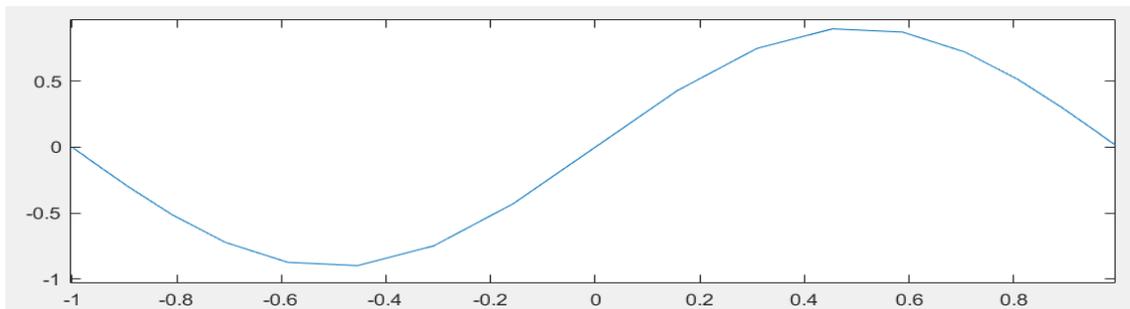


Figura 11. Solución N=20, x, u(x,t)

## Tabla de resultados

Primera iteración:

Puntos de Chebyshev $x_i$	$u_{ex}$	$u_{est}$	Error $ u_{ex} - u_{est} $
$x_1 = 0$	0	0	0
$x_2 = \sqrt{2}/2 \approx 0.7071$	0.7209	0.7001	0.0207
$x_3 = 0$	0	0	0
$x_4 = -\sqrt{2}/2 \approx -0.7071$	-0.7209	-0.7001	0.0207
$x_5 = 0$	0	0	0

El polinomio  $v(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , en  $t = 0.01$ , generado en los puntos de la solución determinada considerando la serie de polinomios de Chebyshev  $T_0(x), a_1T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_4(x)$  es de la forma

$$p(x) = \frac{a_0}{2}T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T_3(x) + a_4T_4(x)$$

Donde:  $p(x) = 2.25058x - 2.25058x^3$

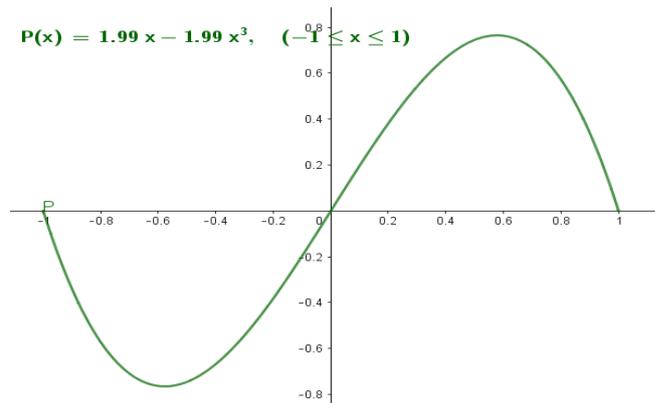


Fig.12 Polinomio de Chebyshev de tercer grado, en  $t=0.01$ .

**Segunda iteración:**

$u_{ex}$	$u_{est}$	<b>Error=</b> $ u_{ex} - u_{est} $
0	0	0
0.6531	0.6162	0.0369
0	0	0
-0.6531	-0.6162	0.0369
0	0	0

y así sucesivamente.

### 3.3 Ecuación de Onda Unidimensional

Consideremos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; -1 \leq x \leq 1; t > 0 \quad (3.24)$$

Con condiciones de frontera  $u(-1, t) = u(1, t) = 0$ .

Condición inicial  $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x)$

Velocidad de onda inicial  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , velocidad de propagación de onda  $c = 1$ .

Se debe tomar en cuenta que la solución analítica de la ecuación de onda unidimensional

(3.24) con condiciones iniciales y frontera que se usó es

$$u(x, t) = \cos(\pi t) \operatorname{sen}(\pi x) \quad 3.25$$

Iniciamos con la solución discreta.

- a) Para la derivada  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , del lado derecho de la ecuación de onda, consideremos su forma discreta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx D2 * v \quad (3.26)$$

donde D2 es la matriz de Chebyshev de segundo orden y el vector  $v$  se determina a considerando los puntos de Chebyshev, según la proposición (2.3.3.)

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right); \quad j = 0, 1, \dots, N$$

Para  $N = 4$ ,

$$x_0 = \cos\left(\frac{0\pi}{4}\right), \quad x_1 = \cos\left(\frac{1\pi}{4}\right), \quad x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right), \quad x_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad x_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right)$$

Se tiene el vector de puntos  $x_j = \left[1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right]^T$  (puntos de discretización)

La condición inicial proporciona el vector inicial

$$f(x_i) = v_0 = \left[\operatorname{sen}(1\pi), \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right), \operatorname{sen}(0\pi), \operatorname{sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right), \operatorname{sen}(-\pi)\right]$$

$$v_0 = [0, 0.7957, 0, -0.7957, 0]$$

además, la matriz de diferenciación de Chebyshev de segundo orden (segunda derivada), es

$$D_4^2 = D2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.2426 & -14.000 & 6.0000 & -2.0000 & 0.7475 \\ -1.000 & 4.0000 & -6.0000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 0.7574 & -2.0000 & 6.0000 & -14.0000 & 9.2424 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La primera y la quinta fila de la matriz D2 se hacen nulas porque las condiciones iniciales fijan los externos en cero:  $u(-1, t) = u(1, t) = 0$ .

b) Para la derivada  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , del lado izquierdo de la ecuación de onda, se considera el método de diferencias finitas, (diferencia centrada).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} \quad (3.27)$$

Con paso de tiempo  $h$ . (sin considerar el error del método de diferencias finitas)

Tomando en cuenta la condición de velocidad de onda inicial  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h} = 0$$

entonces  $v_i - v_{i-1} = 0$ , así se tiene que:  $v_i = v_{i-1}$

Por lo tanto, con este último resultado reemplazado en (3.27) se obtiene:

$$\frac{v_{i+1} - 2 * v_i + v_{i-1}}{h^2} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h^2}; \text{ para la velocidad inicial}$$

Luego, para la condición inicial  $v_0$ , se realiza la primera iteración para  $v_1$

$$v_1 = v_0 + h^2 * D2 * v_0 \quad (3.28)$$

Mientras que para las iteraciones posteriores se usará

$$v_{i+1} = 2 * v_i - v_{i-1} + (h)^2 * D2 * v_i \quad (3.29)$$

En efecto, Para  $h = 0.01$

Iteración (Condición inicial)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7957 \\ 0.0000 \\ -0.7957 \\ 0.0000 \end{bmatrix} + (0.01)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.2426 & -14.000 & 6.0000 & -2.0000 & 0.7574 \\ -1.000 & 4.0000 & -6.0000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 0.7574 & -2.0000 & 6.0000 & -14.0000 & 9.2426 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7957 \\ 0.0000 \\ -0.7957 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7947 \\ 0.0000 \\ -0.7947 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Iteración 2

$$v_2 = 2 \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7947 \\ 0.0000 \\ -0.7947 \\ 0.0000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7956 \\ 0.0000 \\ -0.7956 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$+(0.01)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.2426 & -14.000 & 6.0000 & -2.0000 & 0.7574 \\ -1.000 & 4.0000 & -6.0000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 0.7574 & -2.0000 & 6.0000 & -14.0000 & 9.2426 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7947 \\ 0.0000 \\ -0.7947 \\ 0.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7928 \\ 0.0000 \\ -0.7928 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Iteración 3

$$v_3 = 2 \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7928 \\ 0.0000 \\ -0.7928 \\ 0.0000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.79464 \\ 0.0000 \\ -0.79464 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$+(0.01)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.2426 & -14.000 & 6.0000 & -2.0000 & 0.7475 \\ -1.000 & 4.0000 & -6.0000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 0.7574 & -2.0000 & 6.0000 & -14.0000 & 9.2424 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.7927 \\ 0.0000 \\ -0.7927 \\ 0.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.789705 \\ 0.0000 \\ -0.78970 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

### Tabla de resultados

(Error =  $|u_{ex} - v_{apr}|$ )

Primera iteración:

$u_{ex}$	$u_{est}$	Error
0	0	0
0.7952	0.7947	0.0005
0	0	0
-0.7952	-0.7947	0.0005
0	0	0

Segunda iteración:

$u_{ex}$	$u_{apr}$	Error
0	0	0
0.79215	0.7927	0.00052
0	0	0
-0.7921	-0.7927	0.00052
0	0	0

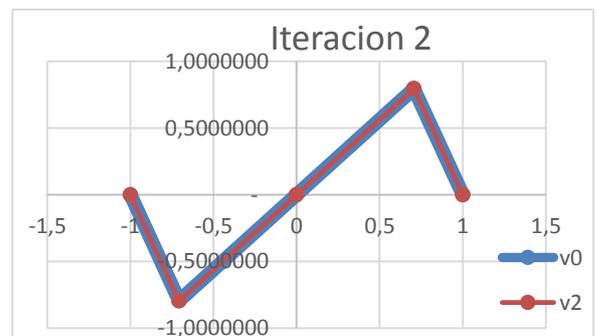
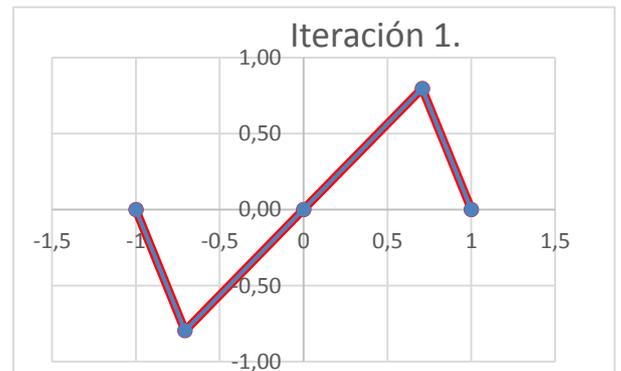


Figura 13. Para N=4,  $u_{ex}$ ,  $u_{apr}$

El polinomio, para la primera iteración, generado en los puntos de la solución determinada considerando la serie de polinomios de Chebyshev  $T_0(x), a_1T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_4(x)$  es de la forma

$$P(x) = \frac{a_0}{2}T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T_3(x) + a_4T_4(x)$$

Donde:  $P(x) = 2.25058x - 2.25058x^3$

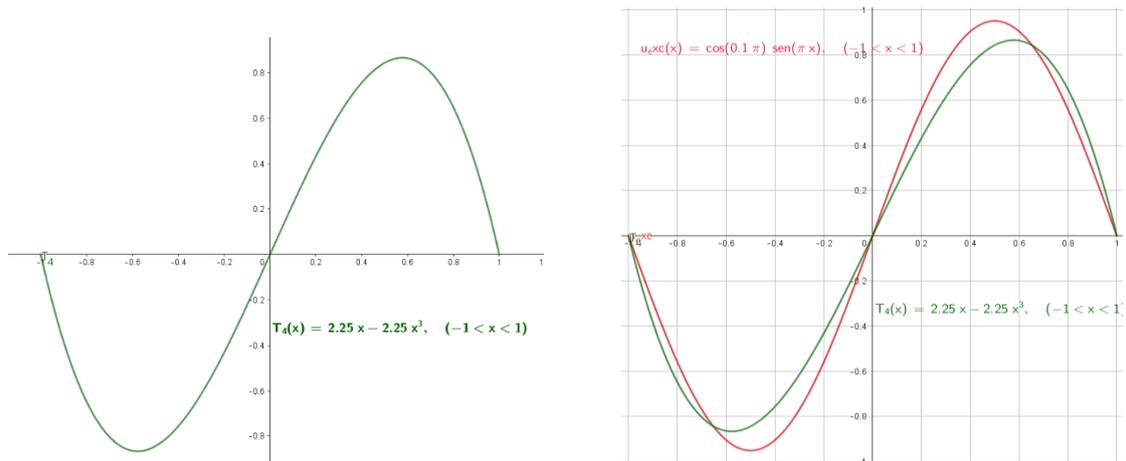


Fig. 14 Gráfica de los polinomios de Chebyshev.

### 3.4 Ecuación de Advección

Es una ecuación diferencial parcial de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0; & x \in \mathbb{R}; t > 0; c > 0: cte \\ u(x, 0) = u_0(x); \end{cases}$$

La solución es  $u = u_0(x - ct)$ .

Para este caso, consideremos la ecuación de Advección, consideremos con condición inicial  $u(x, 0) = f(x) = \text{sen}(2\pi x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , con condiciones de frontera  $u(-1, t) = u(1, t) = 0$ , con  $c = 1$ .

Se tomará en cuenta  $N = 4$ . La solución exacta considerada para la comparación es

$$u(x, t) = \text{sen}(2\pi(x - t))$$

Considerando los puntos de Chebyshev, según

$$x_i = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right); j = 0, 1, 2 \dots$$

La ecuación de Advección, se expresa de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Es decir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Para la última ecuación diferencial parcial, consideremos  $N = 4$

$$x_0 = \cos\left(\frac{0\pi}{4}\right), x_1 = \cos\left(\frac{1\pi}{4}\right), x_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right), x_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), x_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{4}\right)$$

Se genera el vector  $\mathbf{x} = \left[1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right]^T$

Ahora,

Tomando en cuenta la condición inicial, se tiene:

$$v_i = \left[ \text{sen}(2\pi(1)); \text{sen}\left(2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right); \text{sen}(2\pi(0)); \text{sen}\left(2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right); \text{sen}(2\pi(-1)) \right]^T$$

$$v_i = [0, -0.963902, 0, 0.963902, 0]^T$$

Para  $N = 4$ , se tiene que la matriz de diferenciación es:

$$D_4 = D_4^1 = \begin{bmatrix} 5.5 & -6.8284 & 2 & -1.1716 & 0.5 \\ 1.7071 & -0.7071 & -1.4142 & 0.7071 & -0.2929 \\ -0.5 & 1.4142 & 0 & -1.4142 & 0.5 \\ 0.2929 & -0.7071 & 1.4142 & 0.7071 & -1.7071 \\ -0.5 & 1.1716 & -2 & 6.8284 & -5.5 \end{bmatrix}$$

Considerando las condiciones de frontera, la primera y últimas filas de la matriz se consideran ceros

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7071 & -0.7071 & -1.4142 & 0.7071 & -0.2929 \\ -0.5 & 1.4142 & 0 & -1.4142 & 0.5 \\ 0.2929 & -0.7071 & 1.4142 & 0.7071 & -1.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, se hace uso del Método de Euler, para obtener la solución aproximada temporal del lado izquierdo de la ecuación de Advección, con  $\Delta t = h = 0.01$

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h} = -D_4 * v_i$$

de tal manera que  $v_{i+1} = v_i - h * D_4 * v_i$

en este momento se debe

Iteración 1

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.963902 \\ 0 \\ 0.963902 \\ 0 \end{bmatrix} - (0.01) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7071 & -0.7071 & -1.4142 & 0.7071 & -0.2929 \\ -0.5 & 1.4142 & 0 & -1.4142 & 0.5 \\ 0.2929 & -0.7071 & 1.4142 & 0.7071 & -1.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.963902 \\ 0 \\ 0.963902 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.977534 \\ 0.0272630 \\ 0.950270 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hallamos el polinomio de aproximación

Iteración 2

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.977534 \\ 0.0272630 \\ 0.950270 \\ 0 \end{bmatrix} + (0.01)(2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7071 & -0.7071 & -1.4142 & 0.7071 & -0.2929 \\ -0.5 & 1.4142 & 0 & -1.4142 & 0.5 \\ 0.2929 & -0.7071 & 1.4142 & 0.7071 & -1.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.990780 \\ 0.0272630 \\ 0.977534 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.936251 \\ -0.0545260 \\ 0.936253 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los resultados de las primeras iteraciones las observamos en la siguiente figura

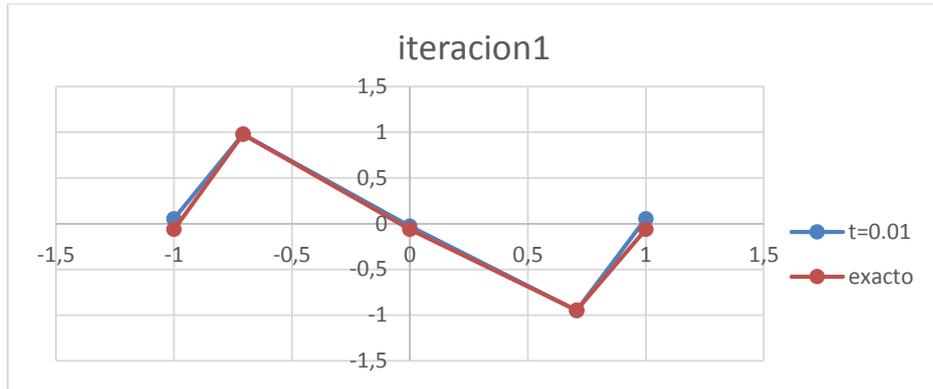


Figura. 15. Primera Iteración N=4, t=0.01

Los errores absolutos, los observamos en las siguientes tablas

Iteración 1

	$v_{apr}$	$u_{ex}$	Error= $ v_{apr} - u_{ex} $
1	0	0	0
$\sqrt{2}/2$	-0.9775	-0.9453	0.0322
0	0.02726	0	0.0272
$-\sqrt{2}/2$	0.9502	0.9787	0.0285
-1	0	0	0

Para generar el polinomio  $P(x)$ ,  $-1 < x < 1$ , se han considerado con 5 polinomios de Chebyshev (debido a que con 4 puntos la gráfica se vería como en la figura anterior), con ello la aproximación es más adecuada.

$$P(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T_3(x) + a_4T_4(x) + a_5T(x)$$

Donde:

$$P(x) = \frac{-0.00615738}{2}(1) - 0.370711(x) + 0.00663513(2x^2 - 1) - 0.373603(4x^3 - 3x) + 0.0127946(8x^4 - 8x^2 + 1) + 0.744312(16x^5 - 20x^3 + 5x)$$

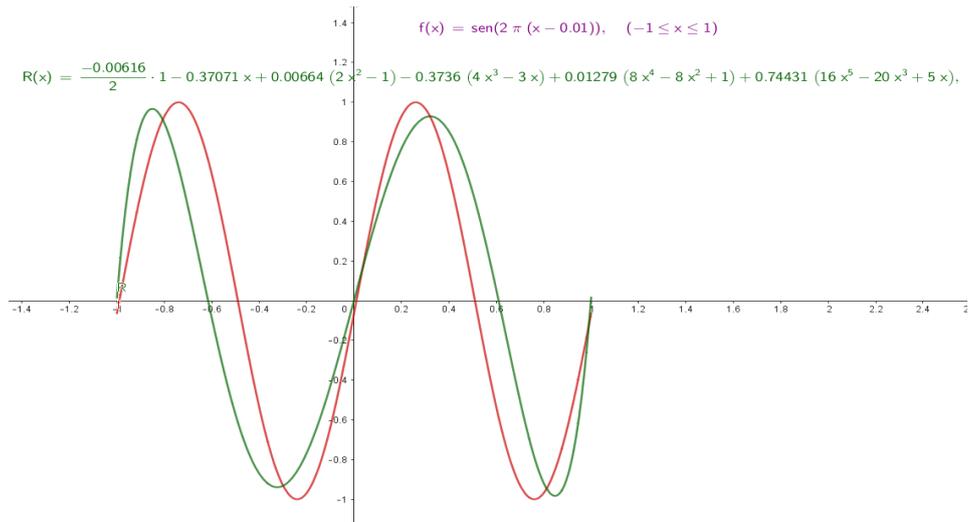


Figura 15. Solución exacta  $f(x)$  y exacta  $R(x)$  para la ecuación de Advección.

## CONCLUSIONES

- 1) En base a los polinomios de Chebyshev se determinó la solución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales.
- 2) Se desarrolló los fundamentos teóricos de los polinomios de Chebyshev que permitió su aplicación en la determinación de la solución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales en una dimensión.
- 3) Se determinó las soluciones aproximadas de las ecuaciones diferenciales parciales de calor, onda, advección en una dimensión, considerando el operador matricial de diferenciación y los puntos de Chebyshev.
- 4) Con el soporte del programa Matlab se implementó los códigos que permiten analizar la solución estimada de las ecuaciones diferenciales parciales y mostrar su aproximación a la solución exacta.

## RECOMENDACIONES

- 1) Ampliar el estudio de las soluciones aproximadas en el intervalo  $[-1,1]$  a un intervalo cualesquiera donde las raíces tomen la forma  $x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ ;  $j = 0, \dots, n$
- 2) Extender el estudio de la aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales parciales en superficies, mediante polinomios de Chebyshev.
- 3) Ampliar el estudio en áreas como la Dinámica de Fluidos en dispersión de gases contaminantes.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1) Boyd, J. (2000). *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. EE. UU. Michigan: DOVER Publications, Inc. Second Edition
- 2) Fernandez, R. (2017). Propuesta Didáctica y Conocimientos de un Método Espectral (Metodo Chebyshev), en la Especialidad de Matematica . Arequipa.
- 3) Flores, M. (2018). *Métodos Espectrales (Chebyshev) como una Alternativa para la Solución de EDO y EDP*. Arequipa.
- 4) Luis de Araujo, E. (2016). *Solução de equilibrio de EDPs usando dase Chebushev*. . SP-Brasil: USP.
- 5) Paniagua, J. (2012). Aplicación de un Método Espectral en la Solución de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden con coeficcnetes Constantes. *Entre Arte e Ingeniería*. Colombia.
- 6) Salgado, V. (2021). Ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico mediante diferencias finitas. Cusco-Perú.
- 7) Sánchez, M. (2015). Método de Interpolación de lagrange y diferencias divididas en una serie de tiempo para determinar funciones polinómicas en la estimación del crecimiento poblacional. Lambayeque.
- 8) Santos, R. (2011). *Equações Diferenciais Parciais, Uma Introducao*. Brasil: UFMG-Brasil.
- 9) Trefethen, L. (2007). *Finite differential and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. EE. UU.
- 10) Zaqueu, V. (2018). *As Quatro Familias de Polinomios de Chebyshev, Propriedades e Algumas Aplicações na Analise Numerica*. Brasil.

## LINKOGRAFÍA

- 1) <https://la.mathworks.com/help/matlab/partial-differential-equations.html>  
Programas en Matlab. *Visitado el 20/02/2023*
- 2) [https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub\\_geral.show\\_file?pi\\_doc\\_id=178259](https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub_geral.show_file?pi_doc_id=178259)  
As Quatro Familias de Polinomios de Chebyshev. *Visitado el 01/02/2023*
- 3) <http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/53547/1/David%20F.%20Griffiths.pdf>  
Griffiths, Dold, Silvester. *Visitado el 28/12/2023.*
- 4) <https://cecs.wright.edu/~stthomas/htchapter02.pdf>  
Essential Partial Differential Equation. *Visitado 28/12/2023*

## ANEXOS

### MATRIZ DE CONSISTENCIA

Formulación del Problema	Hipótesis	Objetivos	Variables	Metodología
<p>a) ¿Será posible desarrollar los fundamentos teóricos de los polinomios de Chebyshev para aplicarlos en la aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales?</p> <p>b) ¿Será posible determinar las soluciones aproximadas de las Ecuaciones Diferenciales Parciales unidimensionales de Calor, Onda, Advección, ¿considerando los polinomios de Chebyshev?</p> <p>c) ¿Será posible implementar códigos de programas en Matlab que permitan analizar los resultados de las aproximaciones?</p>	<p>Es posible determinar una solución aproximada para una Ecuación Diferencial Parcial Unidimension al usando polinomios de Chebyshev</p>	<p><b>Objetivo General</b> Determinar la solución de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales por aproximación mediante polinomios de Chebyshev.</p> <p><b>Objetivos Específicos</b> a) Desarrollar los fundamentos teóricos de los polinomios de Chebyshev para aplicarlos en la aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales. b) Determinar las soluciones aproximadas de las Ecuaciones Diferenciales Parciales unidimensionales de Calor, Onda, Advección, mediante los polinomios de Chebyshev. c) Implementar códigos de programas en Matlab que permitan analizar los resultados de las aproximaciones.</p>	<p><b>Variable Independiente</b> Ecuaciones diferenciales parciales unidimensional</p> <p><b>Variable Dependiente</b> Polinomios de Chebyshev</p>	<p><b>Tipo de Investigación</b></p> <p>El presente trabajo es de tipo analítico-deductivo en razón a que se analizan los fundamentos teóricos de la matemática para resolver ecuaciones diferenciales para deducir si la solución determinada mediante métodos numéricos se aproxima a la solución analítica de ecuaciones diferenciales parciales unidimensionales.</p> <p><b>Nivel de Investigación</b></p> <p>El estudio es de nivel básico por cuanto se trata de relacionar conceptos para inferir resultados. Este nivel de investigación no trata problemas de aplicaciones prácticas.</p> <p><b>Diseño de Investigación</b></p> <p>El diseño del trabajo de investigación es no experimental, puesto que no se manipulan datos. El diseño de esta investigación consiste en comparar la solución aproximada con la solución analítica de una ecuación diferencial parcial unidimensional.</p>

## **Ecuación de Onda**

En sentido matemático, la ecuación de onda unidimensional es una función que se mueve.

Esta ecuación determina las propiedades de muchos fenómenos de onda, como las ondas de luz, olas marinas, ondas de aire.

## **Ecuación de Advección**

Esta ecuación diferencial en una dimensión representa el transporte de una sustancia en medio de un fluido que puede ser agua o aire. Tal es el caso del transporte de un agente contaminante en el recorrido de un río (Griffiths, 2010)

## **Ecuación de Calor**

La ecuación de calor es usada en problemas de la vida cotidiana, tal es el caso de la electrónica, para la disipación de calor en el sistema de componentes que la integran y así se evita que se sobrecalienten (Cengel, 2002).

## CÓDIGOS DE PROGRAMAS.

A continuación, se presentan los códigos en Matlab.

### 1. Programa que determina la matriz de diferenciación de chebyshev (math Works )

```
cheb.m
% CHEB cálculo de D = matriz diferenciación, x = malla de Chebyshev
function [D,x] = cheb(N)
if N==0, D=0; x=1; return, end
x = cos(pi*(0:N)/N)';
c = [2; ones(N-1,1); 2].*(-1).^ (0:N)';

X = repmat(x,1,N+1);
dX = X-X';
D = (c*(1./c)') ./ (dX+(eye(N+1))); % apaga las entradas de la diagonal
D = D - diag(sum(D'))'; % entradas de la diagonal
```

### 2. Código Matlab

#### ecuación de calor

```
% Ecuacion de calor.
% Matriz de diferenciación:
N = 4;
[D,x] = cheb(N);
D2 = D^2;
D2([1 N+1],:)=zeros(2,N+1);
eps = 0.01;
dt = min([.01,50*N^(-4)/eps]);
t = 0;
v = sin(pi*x);
% Solve PDE by Euler formula and plot results:
tmax = 0.2;
tplot = 0.01;
nplots = round(tmax/tplot);
plotgap = round(tplot/dt);
dt = tplot/plotgap;
xx = -1:.025:1;
vv = polyval(polyfit(x,v,N),xx);
plotdata = [vv;zeros(nplots,length(xx))];
tdata = t;
for i = 1:nplots
    for n = 1:plotgap
        t = t+dt;
        v = v + dt*(D2*(v)); % Euler

        % v(end) = -1; % BC
    end
    vv = polyval(polyfit(x,v,N),xx);
    plotdata(i+1,:) = vv;
    tdata = [tdata; t];
end
clf, subplot('position',[.1 .4 .8 .5])
mesh(xx,tdata,plotdata), grid on,
axis([-1 1 0 tmax -1 1]),
%view(-60,55), %colormap([0 0 0]),
xlabel x, ylabel t, zlabel u
```

### 3. Código Matlab

```
% p2.m - Ecuacion onda unidimensional, con condiciones inicales y de
% frontera

% Matriz de diferenciacion
N =50 ;
[D,x] = cheb(N);
D2 = D^2; % matriz de diferenciacion de segundo orden
D2([1 N+1],:)=zeros(2,N+1);% condicion de frontera

eps = 0.01;
dt = min([.01,50*N^(-4)/eps]);
t = 0;
%condiciones iniciales
vo=sin(pi*(x));
v = vo+dt^2 *D2*vo;
plot(x,v,'r-*');
hold on
plot(x,cos(pi*t)*sin(pi*x),'b-o');

%v = vo+dt^2 *D2*vo;
% Metodo de diferencias fintas para la derivada temporal

tmax = 0.2;
tplot = 0.1;
nplots = round(tmax/tplot);
plotgap = round(tplot/dt);

dt = tplot/plotgap;
xx = -1:.5:1;
vv = polyval(polyfit(x,v,N),xx);
plotdata = [vv;zeros(nplots,length(xx))];
tdata = t;

for i = 1:nplots
for n = 1:plotgap
t = t+dt;

vnew = 2*v -vo+ (dt)^2*(D2*(v)); % diferencias finitas
vo=v;
v=vnew;
%vv(end) = -1; % BC
end

vv = polyval(polyfit(x,v,N),xx);
plotdata(i+1,:) = vv;
tdata = [tdata; t];

end

clf, subplot('position',[.1 .4 .8 .5])
mesh(xx,tdata,plotdata), grid on,
axis([-1 1 0 tmax -1 1]),

%view(-60,55), %colormap([0 0 0]),
xlabel x, ylabel t, zlabel u

%plot(x,v);
```

```
%hold on
%v_exac=cos(pi*t)*sin(pi*x);
%plot(x,v_exac);
%error=max(abs((v-v_exac)))
```