

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO
ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POST GRADO

MAESTRÍA EN MATEMATICAS



**ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE SISTEMAS
DINÁMICOS AUTÓNOMOS NO LINEALES A TRAVÉS
DE CICLOS LÍMITES Y SU VISUALIZACIÓN
COMPUTACIONAL**

Tesis presentada por:

Br. PATRICIO CHOQUE HUAMÁN

Para optar al Grado Académico de
Magíster en Matemáticas.

ASESOR:

Mgt. IGNACIO VELÁSQUEZ HACHA

CUSCO - PERÚ

2008

DEDICATORIA

A Dios todo poderoso por haberme guiado en este camino

En especial a mi esposa Julia por comprenderme y apoyarme en todo momento y mis tesoros más preciados mis hijos Dax Giancarlo y Gianfranco Andre por su infinito amor y comprensión

A mis queridos padres Alejandro y Simeona por su aliento permanente y apoyo incondicional

A mis hermanos Leonardo, Haydee y Ruth Gladys por su apoyo permanente

CONTENIDO

ABSTRACT

RESUMEN

PRESENTACIÓN

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

	Pág.
1.1 Planteamiento de problema	1
1.1.1 Descripción del problema	1
1.1.2 Formulación del problema	3
1.2 Objetivos	3
1.2.1 Objetivo general	3
1.2.2 Objetivos específicos	3
1.3 Hipótesis	4
1.4 Justificación y/o importancia	4
1.5 Procedimiento metodológico	5
1.5.1 Método	5
1.5.2 Técnica	5

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1	Antecedentes	6
2.2	Fundamentos teóricos	8
2.2.1	Flujo asociado a un sistema autónomo lineal	8
2.2.2	Conjugación de sistemas autónomos lineales	11
2.2.3	Sistemas autónomos lineales hiperbólicos	12
2.2.3.1	Sistemas autónomos lineales bidimensionales	14
2.2.4	Campos vectoriales	21
2.2.5	Sistemas autónomos no lineales	25
2.2.5.1	Punto de equilibrio	26
2.2.5.2	Estabilidad de un punto de equilibrio	27
2.2.6	Singularidades hiperbólicas	28
2.2.6.1	Teorema de Hartman – Grobman	29
2.2.6.2	Teorema de la variedad estable	32
2.2.7	Singularidades no hiperbólicas	39
2.2.7.1	Teorema de la variedad centro	39
2.2.8	Estabilidad en el sentido de Liapunov	43
2.2.8.1	Teorema de Liapunov	44

CAPÍTULO III

CICLOS LÍMITE Y ESTABILIDAD ESTRUCTURAL

3.1 Soluciones periódicas	51
3.2 Ciclos límite	52
3.2.1 Interpretación geométrica del ciclo límite	53
3.2.2 Existencia del ciclo límite	55
3.3 Teorema de Poincaré - Bendixon	55
3.4 Estabilidad del ciclo límite	58
3.5 Perturbación de un campo vectorial	64
3.6 Estabilidad estructural de sistemas autónomos no lineales	64
3.7 Aplicaciones	72
3.7.1 Aplicación a electrónica: El oscilador de Van Der Pol	72
3.7.2 Aplicación a ecología: Presa - Depredador	84
CONCLUSIONES	93
SUGERENCIAS	94
BIBLIOGRAFÍA	95
ANEXOS	96

ABSTRACT

The state of a dynamic system is described by the coordinates of a point in the phase space and as the time advances, that point describes a trajectory or orbit; to return again to the same, then the orbit is closed. The existence of periodic solutions depends on the topological states and the relationship among the position of a current point and after a time "t."

The most important property in a dynamic system is its long term qualitative behavior. The essence of an attractor is that it is some portion of the space of phases, such that any point that begins to move in its vicinity approaches more and more to it.

It arises this way the problem of great practical importance, the one of finding the conditions under those which an arbitrarily small variation in the functions of definition of the dynamic system, causes an arbitrarily small variation of the solution.

In this context, in this thesis work determined the structural stability of non-linear autonomous dynamic systems through cycles limit and computationally is visualized the spaces of phases and fields of flow of these systems using the software mathematica version 5.1.

With this purpose, the work begins with the scientific sustentation of the investigation; put on emphasis in the associated flows, conjugation of systems, hyperbolic systems, vectorial fields, non-linear autonomous systems, hyperbolic singularities, non hyperbolic singularities and the stability in the sense of Liapunov. Follow, is described and they interpret

the cycles limit and the structural stability of non-linear autonomous systems, using the theorem of linealización of Hartman - Grobman, theorem of the stable variety, the theorem of Liapunov and the theorem of Poincaré - Bendixon. Finally the applications are presented to the electronics the oscillator of Van Der Pol and to the ecology the pattern Presa - Depredador, using all the mathematical and computational tools exposed in the previous part.

In this investigation work the deductive method was used, since it was determined in general form the structural stability of n-dimensional non-linear autonomous dynamic systems through cycles limit, it stops then to particularize it to two-dimensional non-linear autonomous systems.

The utilized technique was the analysis, since it was analyzed the periodic solutions of non-linear autonomous dynamic systems.

RESUMEN

El estado de un sistema dinámico se describe por las coordenadas de un punto en el espacio fásico y a medida que el tiempo avanza, ese punto describe una trayectoria u órbita; para regresar de nuevo a si mismo, entonces la órbita es cerrada. La existencia de soluciones periódicas depende de las propiedades topológicas y la relación entre la posición de un punto actual y después de un tiempo "t".

La propiedad más importante de un sistema dinámico es su comportamiento cualitativo a largo plazo. La esencia de un atractor es que es alguna porción del espacio de fases, tal que cualquier punto que comienza a moverse en sus proximidades se aproxima cada vez más a él. Surge así el problema de gran importancia práctica, el de hallar las condiciones bajo las cuales una variación arbitrariamente pequeña en las funciones de definición del sistema dinámico, ocasiona una variación arbitrariamente pequeña de la solución.

En este contexto, en este trabajo de tesis se determina la estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales a través de ciclos límite y se visualiza computacionalmente los espacios de fases y campos de flujo de estos sistemas utilizando el software mathematica versión 5.1. Con este propósito, se inicia el trabajo con la sustentación científica de la investigación, se pone énfasis en los flujos asociados, conjugación de sistemas, sistemas hiperbólicos, campos vectoriales, sistemas autónomos no lineales, singularidades hiperbólicas, singularidades no hiperbólicas y

la estabilidad en el sentido de Liapunov. A continuación, se describen e interpretan los ciclos límite y la estabilidad estructural de sistemas autónomos no lineales, utilizando el teorema de linealización de Hartman-Grobman, teorema de la variedad estable, el teorema de Liapunov y el teorema de Poincaré - Bendixon. Finalmente se presentan las aplicaciones a la electrónica el oscilador de Van Der Pol y a la ecología el modelo presa-depredador, utilizando todas las herramientas matemáticas y computacionales expuestas en la parte anterior.

En éste trabajo de investigación se utilizó el método deductivo, puesto que se determinó en forma general la estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales n-dimensionales a través de ciclos límite, para luego particularizarla a sistemas autónomos no lineales bidimensionales.

La técnica utilizada fue el análisis, puesto que se analizó las soluciones periódicas de sistemas dinámicos autónomos no lineales.

PRESENTACIÓN

En muchas áreas de investigación del conocimiento humano nos encontramos con fenómenos que dependen de cierta condición o condiciones y que al cambiar algunas de ellas se tiene una forma distinta.

Además cabe resaltar la importancia del estudio de fenómenos en los que se presenta situaciones repetitivas o cíclicas.

El comportamiento de los fenómenos anteriormente descritos pueden ser modelados matemáticamente mediante el análisis de los sistemas dinámicos.

Para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real, inevitablemente hay que simplificarlo e idealizarlo, haciendo resaltar y tomando en cuenta sólo los factores más sustanciales que actúan sobre éste y despreciando los menos considerables. Entonces, surgen los problemas sobre si fueron adecuados las variables tomadas o no. Es posible que los factores no considerados influyan fuertemente sobre el fenómeno estudiado y cambien sus características cuantitativas y cualitativas. En muchos problemas se puede señalar las condiciones bajo las cuales ciertas simplificaciones no son posibles.

Si cierto fenómeno se describe por medio de sistema de ecuaciones diferenciales, las cuales por lo general son tomadas del experimento y por lo tanto con un cierto error entonces, surge el problema sobre la influencia de pequeñas variaciones en las funciones involucradas en la definición del sistema dinámico sobre la solución buscada.

De aquí la importancia de realizar un estudio de la persistencia de las propiedades cualitativas de un sistema dinámico frente a las pequeñas perturbaciones de las funciones involucradas en dicho sistema y modelarlo matemáticamente mediante el análisis de los sistemas dinámicos como una aplicación práctica.

En este sentido, este trabajo de tesis permite determinar las condiciones generales para la estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales a través de ciclos límite y visualizar computacionalmente los espacios de fases y campos de flujo, utilizando el software *Mathematica Versión 5.1* .

PATRICIO CHOQUE HUAMÁN

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación trata de la estabilidad estructural de sistemas autónomos no lineales a través de ciclos límite; de sus modelos matemáticos y el uso del software *Mathemática versión 5.1*, para la visualización computacional de los espacios de fases y sus campos de flujo.

El trabajo está constituido por tres capítulos:

En el primer capítulo se presenta el problema de investigación el cual comprende: Planteamiento del problema, formulación de objetivos, formulación de hipótesis, justificación y/o importancia y el procedimiento metodológico.

En el segundo capítulo se presenta el marco teórico, que abarca la sustentación científica de la investigación, se pone énfasis en los flujos asociados, conjugación de sistemas, sistemas hiperbólicos, campos vectoriales, sistemas autónomos no lineales, singularidades hiperbólicas, singularidades no hiperbólicas y la estabilidad en el sentido de Liapunov.

En el tercer capítulo, se describen e interpretan los ciclos límite y la estabilidad estructural de sistemas autónomos no lineales, utilizando el teorema de linealización de Hartman-Grobman, teorema de la variedad estable y el teorema de Liapunov. También se presentan las aplicaciones a la electrónica como es el oscilador de Van Der Pol y a la ecología en el

modelo presa-depredador, utilizando las herramientas matemáticas y computacionales expuestas en el capítulo anterior.

Por último, se proporciona un anexo con las funciones utilizadas en el software *mathematica versión 5.1* para la visualización computacional de los espacios de fases y sus campos de flujo de los sistemas dinámicos presentados en el presente trabajo de investigación.

Agradezco la valiosa colaboración y apoyo incondicional del Mgt. IGNACIO VELASQUEZ HACHA, por llevar a buen término este trabajo de tesis. También mi reconocimiento y gratitud a todas las personas que me han ayudado a aprender de ellos.

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Supongamos que en un tiempo $t = t_0$ un sistema dinámico está en un estado particular y que en $t \gg t_0$ vuelve al mismo estado tal que todas las posiciones y velocidades son exactamente las mismas que antes. Por lo tanto, la unicidad de las soluciones significa que debe repetirse una y otra vez, en consecuencia el movimiento es periódico.

El estado de un sistema dinámico se describe por las coordenadas de un punto en el espacio fásico, y a medida que t avanza, ese punto describe una trayectoria u órbita; para regresar de nuevo a si mismo, entonces la órbita es cerrada. La existencia de soluciones periódicas depende de: Las propiedades topológicas; la relación entre la posición de un punto actual y después de un tiempo t .

La idea es la de colocar una superficie completa de estados iniciales y seguir la evolución de cada uno hasta que regrese y choque contra la superficie (sección de Poincaré). ¿Podemos encontrar un estado que regrese exactamente a su punto de partida? Si es así, entonces la solución es periódica aunque la mera existencia de una sección de Poincaré puede forzar

algunas veces (por motivos topológicos) a que tenga lugar una solución periódica.

La propiedad más importante de un sistema dinámico es su comportamiento a largo plazo. Esto selecciona un conjunto mucho más sencillo de movimientos de entre todos los del sistema completo. ¿Qué hace un sistema dinámico a largo plazo? se puede estabilizar en un atractor. La esencia de un atractor es que es alguna porción del espacio de fases, tal que cualquier punto que comienza a moverse en sus proximidades se aproxima cada vez más a él.

Consideremos un sistema dinámico en el plano que tenga un ciclo límite estable, es decir una órbita cerrada tal que las soluciones cercanas se mueven hacia él. Siguiendo la dinámica hasta que nos choquemos de nuevo contra el segmento, se determina una aplicación del segmento en si mismo que lo comprime hacia el punto en el cual el ciclo límite lo cruza la razón es el teorema de Brouwer (sobre el punto fijo). Si hay un segmento de línea tal que todo punto que comience sobre él y que finalmente regresa a él entonces hay al menos una solución periódica que pasa a través de dicho segmento, éste es un teorema bastante notable ya que no depende de detalles dinámicos, sólo requiere que el flujo sea continuo. Por lo tanto un flujo en \mathbb{R}^n que posea una sección de Poincaré a de tener una trayectoria periódica que pase a través de la sección (por el teorema de Brouwer).

Si en las funciones involucradas en el sistema las variaciones arbitrariamente pequeñas pueden variar mucho la solución, entonces la solución determinada no puede describir ni siquiera de forma aproximada el problema planteado. Por consiguiente surge el problema de gran importancia práctica, el de

determinar las condiciones bajo las cuales una pequeña perturbación en las funciones involucradas en la definición del sistema dinámico ocasiona una variación arbitrariamente pequeña en la solución.

1.1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Será posible determinar la estabilidad estructural de sistemas autónomos no lineales a través de ciclos límite y su visualización computacional?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL:

Determinar la estabilidad estructural de sistemas autónomos no lineales a través de ciclos límite y visualizar computacionalmente.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- ☞ Analizar las soluciones periódicas de sistemas autónomos no lineales a través de ciclos límite.
- ☞ Verificar que un sistema es estructuralmente estable si ésta no pierde sus propiedades cualitativas bajo pequeñas perturbaciones en las funciones involucradas en su definición.
- ☞ Visualizar computacionalmente el espacio de fases y el campo de flujo de sistemas autónomos no lineales, utilizando el software *Mathemática versión 5.1*
- ☞ Aplicar la estabilidad estructural a problemas específicos de electrónica y ecología

1.3 HIPÓTESIS

La aplicación de ciclos límite permite determinar la estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales y su consecuente visualización computacional.

1.4 JUSTIFICACIÓN Y/O IMPORTANCIA

Para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real, inevitablemente hay que simplificarlo e idealizarlo, haciendo resaltar y tomando en cuenta sólo los factores más sustanciales que actúan sobre éste y despreciando los menos considerables. Entonces, surgen los problemas sobre si fueron adecuados las variables tomadas o no. Es posible que los factores no considerados influyan fuertemente sobre el fenómeno estudiado y cambien sus características cuantitativas y cualitativas. En muchos problemas se puede señalar las condiciones bajo las cuales ciertas simplificaciones no son posibles.

Si cierto fenómeno se describe por medio de sistema de ecuaciones diferenciales, las cuales por lo general son tomadas del experimento y por lo tanto con un cierto error, entonces surge el problema sobre la influencia de pequeñas variaciones en las funciones involucradas en la definición del sistema dinámico sobre la solución buscada.

De aquí la importancia de realizar un estudio de la persistencia de las propiedades cualitativas de un sistema dinámico frente a las pequeñas perturbaciones de las funciones involucradas en dicho sistema y modelarlo matemáticamente mediante el análisis de los sistemas dinámicos como una aplicación práctica.

En este sentido, este trabajo de investigación permite determinar las condiciones generales para que un sistema dinámico sea estructuralmente estable y visualizar computacionalmente el espacio de fases y su campo de flujo, utilizando el software *Mathematica Versión 5.1*

1.5 PROCEDIMIENTO METODOLÓGICO

1.5.1 MÉTODO:

En éste trabajo de investigación se utilizará el *método deductivo*, puesto que se determinará en forma general la estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales n - dimensionales a través de ciclos límite, para luego particularizarla a sistemas autónomos no lineales bidimensionales.

1.5.2 TÉCNICA:

La técnica a utilizar será el *análisis*, puesto que se trata de analizar las soluciones periódicas de sistemas dinámicos autónomos no lineales.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES

Rey Oscar III de Suecia (1887), ofreció 2500 coronas por resolver el siguiente problema. ¿Es estable el sistema solar? un estado de reposo o de movimiento es estable si no cambia mucho bajo el efecto de pequeñas perturbaciones.

Poincaré, H (1889) intentó resolver el problema pero no lo consiguió (de todas formas se le concedió el premio), pero hizo buena mella en él, puesto que introdujo la topología. En aquella época ya se conocía la solución al problema de los dos cuerpos, por ejemplo, la Tierra describe una órbita periódica alrededor del Sol, pero es precisamente la periodicidad la que nos proporciona un control muy útil sobre la estabilidad. Poincaré en su memoria “lucha” con la cuestión de existencia de órbitas periódicas para las ecuaciones diferenciales planteadas, comienza por el procedimiento clásico y demuestra como obtener tales soluciones desarrollando la variable involucrada como una serie infinita en donde cada término es una función periódica del tiempo t de lo que resulta que existen series cuyos coeficientes son periodos y que satisfacen “formalmente” las ecuaciones. El procedimiento parece tener sentido ¡pero! le aparece el problema de demostrar la convergencia de la serie infinita planteada, no lo hizo y abandonó el método e inició uno nuevo, su idea era la de demostrar la existencia de soluciones periódicas lo que demostraría

la convergencia de la serie.

Liapunov, A. M (1892) encontró un criterio muy útil para la estabilidad, se trata de una generalización de la idea de que para un sumidero existe una norma en \mathbb{R}^n tal que $|x(t) - x_0|$ decrece para las soluciones $x(t)$ cercanas a x_0 .

Mostró que se podían usar otras ciertas funciones en lugar de la norma para garantizar la estabilidad.

Pontryagin y Andronov (1937) introdujeron el concepto de estabilidad estructural.

Peixoto (1958-1962) presentó una caracterización de las ecuaciones diferenciales estructuralmente estables.

Smale, S (1980) determinó que la propiedad más importante de un sistema dinámico es su comportamiento a largo plazo.

Hale, J. K. (1991) relacionó la dinámica con las bifurcaciones.

Combes, S (1999) presentó los exponentes de Liapunov.

2.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En esta sección se desarrollan conceptos que se requieren para desarrollar nuestro trabajo de investigación y verificar los objetivos planteados, así como la demostración de resultados fundamentales. También se presentan conceptos de estabilidad asociados a sistemas no lineales, así como la demostración de resultados de estabilidad tales como el teorema de estabilidad de Liapunov, que permite realizar el estudio de la estabilidad en el sentido de Liapunov.

2.2.1 FLUJO ASOCIADO A UN SISTEMA AUTÓNOMO LINEAL

El sistema autónomo¹ lineal:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = Y_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde $X : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X' : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son aplicaciones definidas en el

conjunto abierto U ; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n \times n}; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ y $Y_0 \in \mathbb{R}^n$

admite una única solución; de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_0} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \varphi_{Y_0}(t) = e^{tA} Y_0 \end{aligned}$$

El flujo asociado a $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o al sistema autónomo lineal $X' = AX$, está dado

por:

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, X) &\mapsto \varphi_A(t, X) = e^{tA} X \end{aligned}$$

¹ Matriz de coeficientes A , independiente del tiempo

PROPOSICIÓN 2.2.1.1

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entonces, su flujo asociado φ_A verifica:

- i) $\varphi_A(0, X) = X ; \forall X \in \mathbb{R}^n .$
- ii) $\varphi_A(t + s, X) = \varphi_A(t, \varphi_A(s, X)) ; \forall t, s \in \mathbb{R} ; \forall X \in \mathbb{R}^n .$

DEMOSTRACIÓN:

$$i) \quad \varphi_A(0, X) = e^{0A} X = e^\Phi X = IX = X$$

donde Φ es la matriz cero.

$$ii) \quad \varphi_A(t + s, X) = e^{(t+s)A} X = e^{tA} e^{sA} X = e^{tA} (\varphi_A(s, X)) = \varphi_A(t, \varphi_A(s, X)) .*$$

DEFINICIÓN 2.2.1.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, las raíces del polinomio característico de grado n

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se llaman autovalores o valores propios de A .

Si $Av_j = \lambda_j v_j$ o $(A - \lambda_j I)v_j = \Phi$; $v_j \in \mathbb{R}^{n \times 1} - \{\Phi\}$; $\forall j = 1, 2, \dots, n$,

entonces, v_j es el *autovector* asociado al autovalor λ_j .

Sea $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donde $v_j = \begin{bmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{nj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ son vectores

linealmente independientes.

Se sigue que $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un elemento del grupo²
 $G(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} / A \text{ es inversible}\}$. Es decir $V \in G(\mathbb{R}^n)$

DEFINICIÓN 2.2.1.2

Dado $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, el espectro de A , denotado por $\Sigma(A)$ es el conjunto de todos los autovalores de A . Es decir: $\Sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} / \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

PROPOSICIÓN 2.2.1.2

Dado el sistema autónomo lineal $X' = AX$:

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (\mathbb{K} campo real o complejo) son los autovalores de

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y v_1, v_2, \dots, v_n son los autovectores linealmente independientes correspondientes a los autovalores λ_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ talque

$Av_i = \lambda_i v_i$; $\forall i = 1, 2, \dots, n$; entonces: $V(t) = [e^{\lambda_1 t} v_1 \quad e^{\lambda_2 t} v_2 \quad \dots \quad e^{\lambda_n t} v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

es una matriz fundamental³ del sistema lineal $X' = AX$.

DEMOSTRACIÓN:

Como $V(t)$ es una matriz fundamental del sistema autónomo lineal $X' = AX$, entonces cada columna de $V(t)$ es solución de $X' = AX$, es decir:

Si $\phi_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces $\phi_i'(t) = \lambda_i e^{\lambda_i t} v_i = e^{\lambda_i t} \lambda_i v_i$.

² Es un monoide (conjunto con la ley de composición asociativa y que tiene un elemento neutro) talque $\forall A \in G(\mathbb{R}^n)$, existe un $A^{-1} \in G(\mathbb{R}^n)$, para el cual $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

³ Matriz solución de un sistema lineal cuyas columnas forman una base para el espacio de soluciones de dicho sistema

Como v_i es el autovector asociado a λ_i , entonces $Av_i = \lambda_i v_i$; $\forall i = 1, 2, \dots, n$

, luego $\phi_i'(t) = e^{\lambda_i t} \lambda_i v_i = e^{\lambda_i t} Av_i = Ae^{\lambda_i t} v_i = A\phi_i(t)$, entonces

$\phi_i'(t) = A\phi_i(t)$; $\forall i = 1, 2, \dots, n$; esto implica que $\phi_i(t)$ es solución del sistema lineal $X' = AX$; $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Por tanto $V(t)$ es solución del sistema lineal $X' = AX$ con $X(0) = I$.*

OBSERVACIÓN 2.2.1.1

Si $C \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ entonces $X(t) = V(t) \cdot C$ es también solución del sistema autónomo lineal $X' = AX$.

2.2.2 CONJUGACIÓN DE SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES

Dados dos sistemas autónomos lineales: $X' = AX$ y $X' = BX$ con

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, cuyos flujos asociados respectivos son:

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n & \varphi_B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, X) &\mapsto \varphi_A(t, X) = e^{tA} X & (t, X) &\mapsto \varphi_B(t, X) = e^{tB} X \end{aligned}$$

i) A y B (o los sistemas lineales asociados $X' = AX$ y $X' = BX$) son

Topológicamente Conjugados y se denota por $A \equiv_{top} B$ si, y sólo si, existe

un *Homeomorfismo*⁴ $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(\varphi_A(t, X)) = \varphi_B(t, h(X)), \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

⁴ Aplicación biyectiva y bicontinua

ii) A y B (o los sistemas lineales asociados $X' = AX$ y $X' = BX$) son *Linealmente Conjugados* y se denota por $A \equiv_{lin} B$ si, y sólo si, existe un

*Isomorfismo*⁵ $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(\varphi_A(t, X)) = \varphi_B(t, h(X)), \quad \forall t \in \mathbb{R}; \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

iii) A y B (o los sistemas lineales asociados $X' = AX$ y $X' = BX$) son C^r -*Conjugados*, $1 \leq r < \infty$ y se denota por $A \equiv_{C^r} B$ si, y sólo si, existe un

*Difeomorfismo*⁶ de clase C^r , $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$h(\varphi_A(t, X)) = \varphi_B(t, h(X)), \quad \forall t \in \mathbb{R}; \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

2.2.3 SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES HIPERBÓLICOS

Dado el sistema autónomo lineal $X' = AX$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

A es una *Matriz Hiperbólica* (o $X' = AX$ es un sistema lineal hiperbólico) si, y sólo si, todos sus autovalores tienen parte real distinto de cero.

$$Hip(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} / A \text{ es matriz hiperbolica}\}$$

Si A es una matriz hiperbólica, el *Índice de Estabilidad* de A , denotado por $i(A)$, es el número de autovalores (incluyendo multiplicidades) con parte real negativa.

⁵ Aplicación biyectiva

⁶ Homeomorfismo diferenciable

DEFINICIÓN 2.2.3.1

Sea $A \in \text{Hip}(\mathbb{R}^n)$:

- 1) El *Subespacio Estable (Variedad Estable)* de A , denotado por $E^s(A)$, es el subespacio vectorial de \mathbb{R}^n que es generado por los autovectores correspondientes a los autovalores con parte real negativa.
- 2) El *Subespacio Inestable (Variedad Inestable)* de A , denotado por $E^u(A)$ es el subespacio vectorial de \mathbb{R}^n que es generado por los autovectores correspondientes a los autovalores con parte real positiva.

OBSERVACIÓN 2.2.3.1

Los subespacios vectoriales E^s y E^u son subespacios invariantes⁷ por la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

OBSERVACIÓN 2.2.3.2

Sea $A \in \text{Hip}(\mathbb{R}^n)$ talque $i(A) = m$ donde $0 \leq m \leq n$, entonces

$$A \equiv_{\text{lin}} J_A = \text{diag}[A_1, A_2].$$

donde:

$A_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tiene todos sus autovalores con parte real negativa y

$A_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ tiene todos sus autovalores con parte real positiva.

Aquí: $J_A = PAP^{-1}$; con $P \in G(\mathbb{R}^n)$

⁷ El subespacio vectorial E^s de \mathbb{R}^n es *Invariante* por la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si, y sólo si, $v \in E^s$ implica que $Av \in E^s$.

OBSERVACIÓN 2.2.3.3

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no es hiperbólico, entonces \mathbb{R}^n se descompone en suma directa⁸ de subespacios E^s, E^u y E^c . Es decir $\mathbb{R}^n = E^s(A) \oplus E^u(A) \oplus E^c(A)$. Donde $E^c(A)$ es el subespacio generado por los autovectores asociados a los autovalores con parte real nula y se denomina *Subespacio centro (Variedad centro)* de A . Al igual que los dos subespacios, éste también es invariante por la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Analicemos el caso \mathbb{R}^2 :

2.2.3.1 SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES BIDIMENSIONALES

Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $A \in G(\mathbb{R}^2)$. Analizaremos cualitativamente sistemas lineales autónomos bidimensionales de la forma:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = Y_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Con } X' = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ y } X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

La condición de que A sea no singular es equivalente a que $(0,0)$ es el único punto fijo del flujo asociado $\varphi_A(t, X) = e^{tA} X$. Esto implica que el origen de coordenadas $(0,0)$ siempre es una trayectoria u órbita⁹, es decir siempre es

⁸ $E^s(A) + E^u(A) + E^c(A) = \mathbb{R}^n$ y $E^s(A) \cap E^u(A) \cap E^c(A) = \{0\}$

⁹ Un dibujo en el espacio (t, x_1, x_2) es una *curva solución* o *curva integral* del sistema, pero si se dibuja sólo en (x_1, x_2) se tiene una *trayectoria* u *órbita* del sistema dinámico

una solución de (1).

El sistema (1) es equivalente a:

$$\begin{cases} X' = J_A X \\ X(0) = Y_0 \end{cases} \quad (2)$$

Donde J_A es la forma de Jordan de la matriz A .

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma(A)$ y X_0 es un punto singular¹⁰, entonces se presentan los siguientes casos:

CASO A) Cuando λ_1 y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

En este caso $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

A-1) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, entonces X_0 es una *singularidad estable*

A-2) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, entonces X_0 es una *singularidad inestable*

A-3) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces X_0 es una *singularidad punto de silla*

CASO B) Cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$; $\lambda \in \mathbb{R}$

En este caso $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y el $N_{uc}(A - \lambda I)$ es bidimensional.

B-1) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, entonces X_0 es un *nodo singular estable*

B-2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$, entonces X_0 es un *nodo singular inestable*

CASO C) Cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

De curva integral a órbita en tiempo t pasa de variable a parámetro. En la curva integral no hay flecha puesto que la información sobre el sentido ya viene dada por la coordenada t , en la órbita si hay flecha puesto que el tiempo t es un parámetro.

¹⁰ (x_1, x_2) es un punto singular o punto crítico del sistema (1), si $AX = \Phi$; un punto que no es punto singular es un punto regular.

En este caso $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; $\mu \neq 0$ y el $N_{uc}(A - \lambda I)$ es unidimensional.

C-1) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, entonces X_0 es un *nodo degenerado estable*

C-2) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$, entonces X_0 es un *nodo degenerado inestable*

CASO D) Cuando $\lambda_1 = a + ib$ y $\lambda_2 = a - ib = \overline{\lambda_1} \in \mathbb{C}$; $b \neq 0$

En este caso $J_A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

D-1) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces X_0 es un *centro*

D-2) Si $a < 0$ y $b \neq 0$, entonces X_0 es un *foco estable*

D-3) Si $a > 0$ y $b \neq 0$, entonces X_0 es un *foco inestable*

EJEMPLO

Analizar la singularidad del sistema autónomo lineal:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases} \quad (1)$$

SOLUCIÓN:

En este caso: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Pasos a seguir para determinar los autovalores y autovectores asociados

Paso 1: Hallar los autovalores de A :

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1 - \lambda)(-2 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2 ; \lambda_2 = -1 \quad (\text{caso A -1})$$

Luego $\Sigma(A) = \{-2, -1\}$. Esto indica que $X_0 = (0, 0)$ es una singularidad estable.

Como $J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces el sistema (1) es equivalente a:

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -y \end{cases} \quad (2)$$

Paso 2: Hallar los autovectores asociados:

☞ Para $\lambda_1 = -2$:

$$A - \lambda_1 I = A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in N_{uc}(A + 2I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(A + 2I) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_1 = (0, 1)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = -2$

☞ Para $\lambda_2 = -1$:

$$A - \lambda_2 I = A + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in N_{uc}(A + I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(A + I) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_2 = (1, 0)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = -1$.

De esta forma se observa que $E^s = \{v_1, v_2\} = \{(0, 1), (1, 0)\}$ entonces $\mathbb{R}^2 = E^s$, mientras que $E^u = E^c = \emptyset$.

Como la solución del sistema (1) es $X(t) = V(t) \cdot C$, entonces:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{12}$$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_{21} + c_2 e^{\lambda_2 t} v_{22}$$

Tendrá la forma:

$$x(t) = c_2 e^{-t}$$

$$y(t) = c_1 e^{-2t}$$

Luego:

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Además: $x^2 = c_2^2 e^{-2t} \Rightarrow x^2 = \frac{c_2^2}{c_1} y$

Luego, las órbitas son familia de parábolas.

Si $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{c_1}{c_2} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, entonces las órbitas a lo largo

de estas parábolas tienden asintóticamente hacia el origen de coordenadas.

Si $c_2 \neq 0$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2c_1 e^{-2t}}{-c_2 e^{-t}} = 2 \frac{c_1}{c_2} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, lo cual implica

que las rectas tangentes a cada trayectoria tienden al eje X .

El espacio de fases¹¹ del sistema autónomo lineal (1), será:

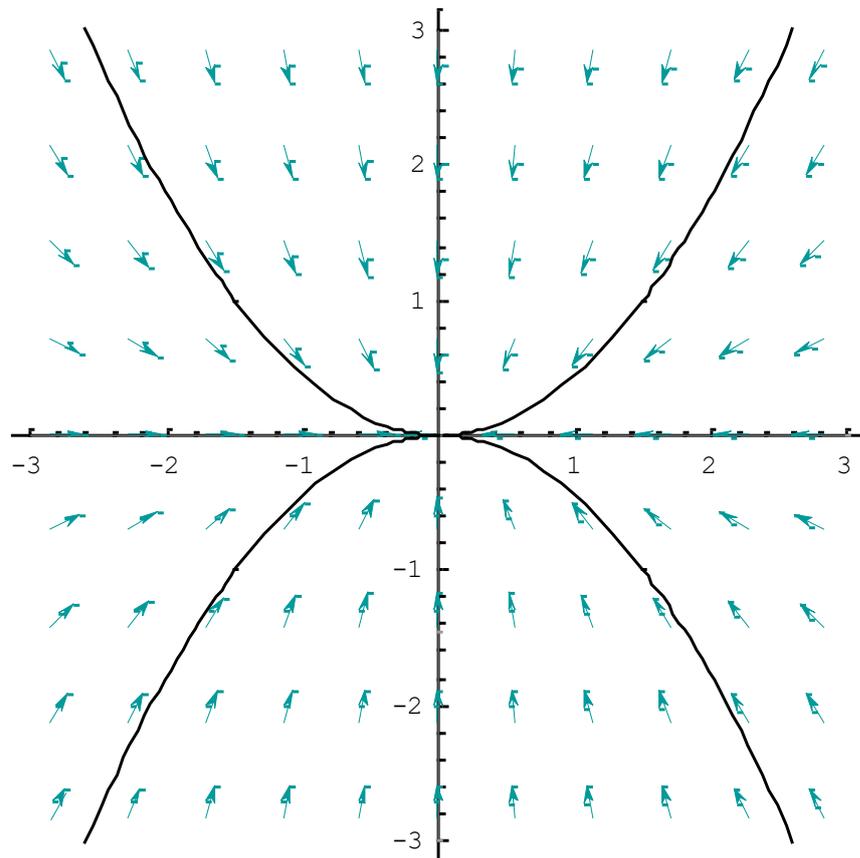


Figura 2.1: Espacio de fases del sistema (1)

Visualización computacional de la figura 2.1



¹¹ Una fase es un estado, el espacio de fases es un espacio de estados en el que las coordenadas de un punto deben darnos toda la información sobre el estado de todo el sistema.

El espacio de fases del sistema equivalente (2), será:

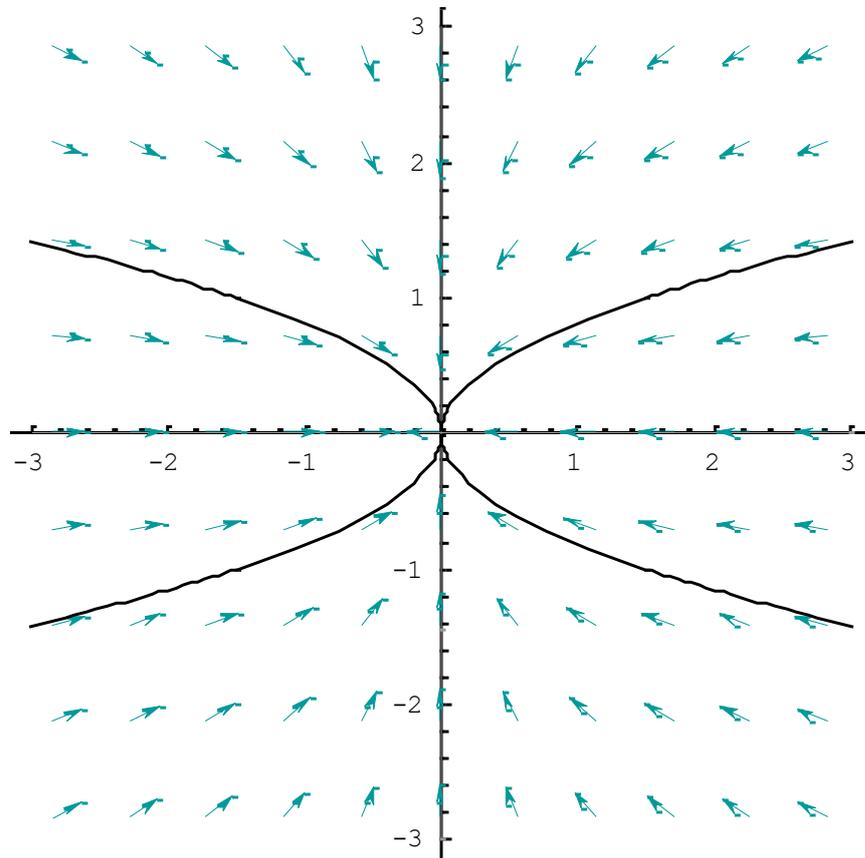


Figura 2.2: Espacio de fases del sistema equivalente (2)

Visualización computacional de la figura 2.2



2.2.4 CAMPOS VECTORIALES

Consideremos el sistema autónomo lineal $X' = AX$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, este sistema está asociada a un campo vectorial¹²:

$$F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X \mapsto F(X) = AX$$

donde $W \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Las soluciones del sistema autónomo lineal $X' = AX$ son aplicaciones diferenciables $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$, tales que $\phi'(t) = A\phi(t)$, $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$.

¹² Un campo vectorial es una función vectorial de variable vectorial definido por

$$F : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X \mapsto F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))$$

donde

$$F_i : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \mapsto F_i(X), \forall i = 1, 2, \dots, n$$

son campos escalares(funciones reales de variable vectorial)

$\phi \in C^r$; $r \geq 1$, $r \in \mathbb{Z}^+$ se denominan *curvas integrales* o *curvas solución* del campo vectorial F o del sistema autónomo lineal $X' = AX$.

Luego; ϕ es solución del sistema autónomo lineal $X' = AX$ si, y sólo si, $\phi'(t)$ en t coincide con F en $\phi(t)$.

Un sistema oscila cuando tiene una solución periódica no trivial. En un sistema planar¹³ una solución periódica en el *plano de fase*¹⁴ resulta una órbita cerrada.

Para cada punto (x_1, x_2) en el plano de fase se tiene el vector $F(x_1, x_2)$, Luego $F(X)$; $\forall X \in \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial sobre el plano de fase.

Un vector en un punto es tangente a la órbita en ese punto.

Luego se puede construir la trayectoria u órbita desde un punto inicial a partir del diagrama del campo vectorial.

En la figura 2.3, se observa el campo vectorial y las órbitas de un sistema autónomo lineal:

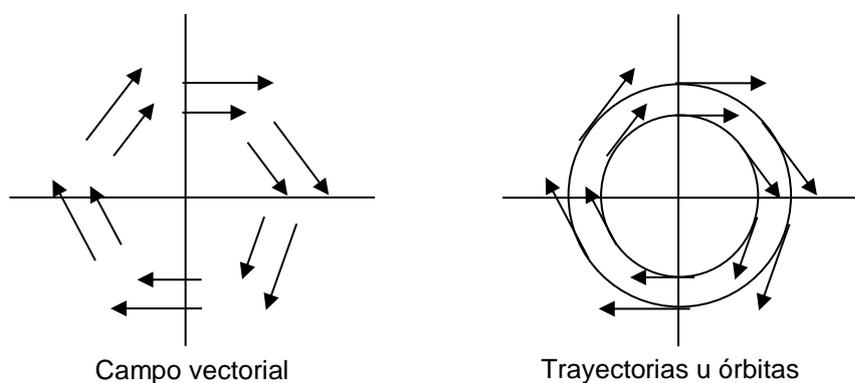


Figura 2.3: Campo vectorial y órbitas de un sistema autónomo lineal

¹³ Sistemas de dos variables de estado. Es decir en (1), $X = (x_1, x_2)$

¹⁴ Plano x_1, x_2 donde se representan gráficamente las trayectorias u órbitas

EJEMPLO

Para el sistema autónomo lineal:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad (1)$$

Analizar el campo vectorial y las órbitas.

SOLUCIÓN:

En este caso el campo vectorial asociado al sistema (1), será:

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X = (x, y) \mapsto F(X) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (y, -x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

de donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Pasos a seguir para determinar los autovalores y autovectores asociados

Paso 1: Hallar los autovalores de A :

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i; \lambda_2 = -i; \text{ corresponde al caso D-1, siendo } a = 0 \text{ y } b = 1 \neq 0$$

luego $\Sigma(A) = \{i, -i\}$. Esto indica que $X_0 = (0, 0)$ es un centro.

Aquí $J_A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Paso 2: Hallar los autovectores asociados:

$$\text{Como } A - \lambda_1 I = A - iI = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$(z_1, z_2) \in N_{uc}(A - iI) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -iz_1 + z_2 = 0 \\ -z_1 - iz_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_2 = iz_1$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(A - iI) &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / z_2 = iz_1\} = \{(z_1, iz_1) / z_1 \in \mathbb{C}\} \\ &= \{z_1(1, i) / z_1 \in \mathbb{C}\} = \langle (1, i) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow V = (1, i) = (1, 0) + i(0, 1)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = i$.

De donde: $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (0, 1)$.

Como la solución del sistema (1): $X(t) = V(t) \cdot C$, para el caso D-1, está dado

por $X(t) = \rho e^{at} [\text{Cos}(bt - \theta) \cdot v_1 - \text{Sen}(bt - \theta) \cdot v_2]$ de donde

$$\begin{cases} x(t) = \rho \text{Cos}(bt - \theta) \\ y(t) = -\rho \text{Sen}(bt - \theta) \end{cases}$$

Ecuacion paramétrica de familia de circunferencias

luego $x^2 + y^2 = \rho^2$; $\rho > 0$

Gráficamente:

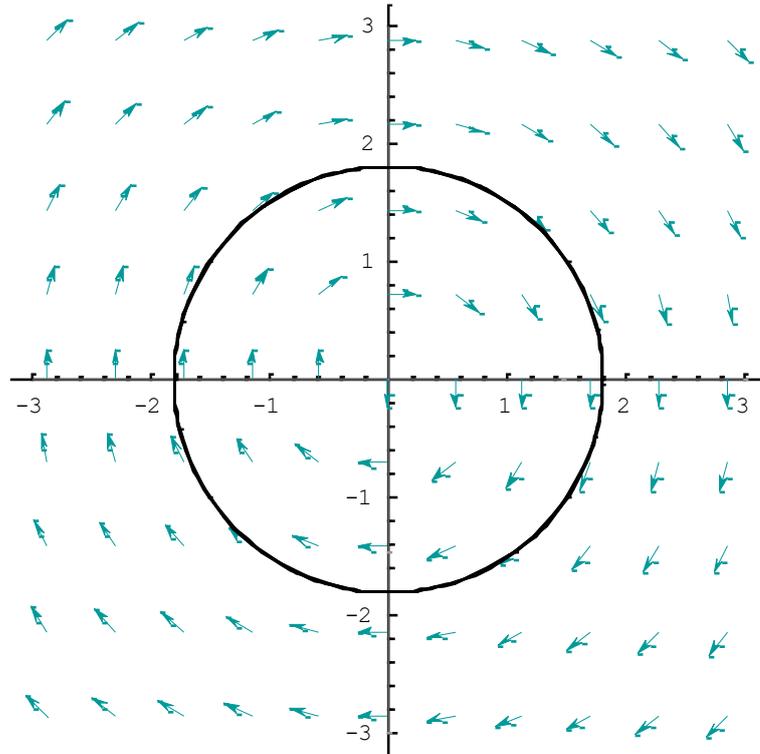


Figura 2.4: Campo vectorial y órbitas del sistema (1)

Visualización computacional de la figura 2.4



DEFINICIÓN 2.2.4.1

Sean $\varphi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\varphi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ los flujos generados por los campos vectoriales: $F : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $G : W_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde W_1 y W_2 son abiertos de \mathbb{R}^n , entonces $F \equiv_{top} G$, si existe un homeomorfismo $h : W_1 \rightarrow W_2$ talque $h(\varphi_1(t, X)) = \varphi_2(t, h(X))$, $\forall t \in \mathbb{R}; \forall X \in W_1$

OBSERVACIÓN 2.2.4.1

El homeomorfismo h lleva puntos singulares en puntos singulares; órbitas periódicas en órbitas periódicas; etc.

OBSERVACIÓN 2.2.4.2

Si h es un difeomorfismo, entonces F y G son dos campos vectoriales h -relacionados.

2.2.5 SISTEMAS AUTÓNOMOS NO LINEALES

El sistema:

$$X' = F(X) \tag{1}$$

es un *sistema autónomo no lineal*, si el campo vectorial $F:U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto, no depende del tiempo t , donde las funciones componentes (campos escalares) del vector n -dimensional $F(X)$; son continuas y además son *funciones Lipschitzianas*¹⁵ en forma local de X , definidas para todo Y_0 en el dominio $U \subset \mathbb{R}^n$.

La condición de Lipschitz garantiza la existencia de la solución del sistema (1) que satisface la condición inicial $X(0) = Y_0$.

Existen conceptos fundamentales de los sistemas autónomos no lineales que nos ayudarán a decidir su comportamiento cualitativo, así tenemos:

¹⁵ F_i es Lipschitziana en forma local en un punto Y_0 , si satisface la condición de Lipschitz $|F_i(X) - F_i(Y)| \leq L|X - Y|$ para X, Y en un abierto que contiene a Y_0 , donde L es una constante positiva y $|\cdot|$ denota la norma Euclidiana en \mathbb{R}^n , i.e. $|X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

2.2.5.1 PUNTO DE EQUILIBRIO

Un punto $X_0 \in U$ se dice que es un *punto de equilibrio* (*punto estacionario* o *punto singular*) del sistema (1), si, cuando el estado (órbita o solución) del sistema comienza en X_0 , permanece en X_0 para todo tiempo futuro. Para sistemas autónomos no lineales los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación $F(X) = \bar{0}$.

Un punto de equilibrio se dice *aislado* si existe algún abierto que contiene a dicho punto donde no existe otro punto de equilibrio del sistema.

Supongamos que $\bar{0} \in U \subset \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema (1).

Consideremos a la derivada $\frac{\partial F}{\partial X}(\bar{0})$ de F en $\bar{0}$ como un campo vectorial lineal

que aproxima a F en las proximidades de $\bar{0}$, al cual se le denomina *la parte lineal* de F en $\bar{0}$. Si todos los autovalores de $\frac{\partial F}{\partial X}(\bar{0})$ tienen parte real negativa, se dice que $\bar{0}$ es un *sumidero*.

Generalmente, un punto de equilibrio X_0 del sistema (1) es un sumidero si

todos los autovalores de $\hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0)$ tienen parte real negativa. El espacio

de fases en el abierto de un sumidero no lineal X_0 , se asemeja al de la parte

lineal del campo vectorial. Si todos los autovalores de $\hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0)$ tienen

parte real positiva, entonces se dice que X_0 es una *fuente*.

Si se presentan ambos casos, X_0 es un *punto de silla*.

2.2.5.2 ESTABILIDAD DE UN PUNTO DE EQUILIBRIO

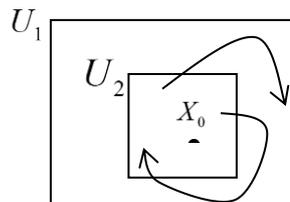
Un punto de equilibrio X_0 es *estable*, si para todo abierto U_1 que contiene a X_0 en U existe un abierto $U_2 \subset U_1$ tal que todo flujo¹⁶ (solución) $\varphi(t, Y_0)$ del

$$\text{sistema } \begin{cases} X' = F(X) \\ X(0) = Y_0 \end{cases}$$

Con $Y_0 \in U_2$, está definida y permanece en U_1 , para todo $t > 0$.

Es decir X_0 es un punto de equilibrio estable, si las soluciones próximas permanecen próximas en todo el instante posterior.

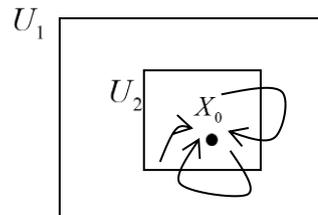
Gráficamente:



Si U_2 se puede elegir de modo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, Y_0) = X_0$, entonces se dice que X_0

es *asintóticamente estable*.

Gráficamente:



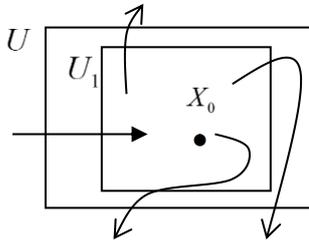
Un punto de equilibrio X_0 que no es estable se llama *inestable*. Esto significa que existe un abierto U que contiene a X_0 tal que para todo abierto U_1 que

¹⁶ $\varphi_{\hat{A}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $(t, X) \rightarrow \varphi_{\hat{A}}(t, X) = e^{t\hat{A}}X$

donde $\hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0)$

contiene a X_0 en U , existe al menos una solución $\varphi(t, Y_0)$ que comienza en $Y_0 \in U_1$ y que no permanece enteramente en U .

Gráficamente:



Un sumidero es asintóticamente estable y por tanto estable. Una fuente es un punto de equilibrio inestable.

Si X_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable, existe por definición un abierto U que contiene a X_0 tal que toda curva solución que empieza en U tiende hacia X_0 , cuando $t \rightarrow \infty$. La unión de todas las curvas solución que tienden hacia X_0 se denomina *cuenca* y se denota por $B(X_0)$.

2.2.6 SINGULARIDADES HIPERBÓLICAS

DEFINICIÓN 2.2.6.1

Un punto singular X_0 de un campo vectorial F , se llama *Hiperbólico* si todos los autovalores de $\hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0)$ tienen la parte real no nula. (\hat{A} no tiene autovalores nulos o imaginarios puros).

Un punto de equilibrio hiperbólico es o bien inestable o bien asintóticamente estable. Un punto de silla es inestable.

OBSERVACIÓN 2.2.6.1

Sean F y G dos campos vectoriales h -relacionados. Si X_0 es una singularidad de F , entonces $h(X_0)$ es una singularidad de G .

DEFINICIÓN 2.2.6.2

El número de autovalores de $\hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0)$ que tienen parte real negativa, se llama *Índice de estabilidad* de F en X_0 .

2.2.6.1 TEOREMA DE HARTMAN - GROBMAN

Consideremos el sistema autónomo no lineal: $X' = F(X)$; con $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vectorial y U un abierto de \mathbb{R}^n , $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Si X_0 es un punto singular hiperbólico de F , entonces existe un homeomorfismo $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, tal que para cada $X \in U$:

$$h(\varphi(t, X)) = e^{t\hat{A}}h(X) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

(h es una conjugación topológica entre el flujo generado por el campo vectorial F y el flujo lineal $e^{t\hat{A}}X$)

donde $\varphi(t, X)$ es el flujo generado por el campo vectorial F .

Es decir, h transforma las trayectorias del sistema autónomo no lineal en las del sistema linealizado, preservando la parametrización, o sea el sentido en el que se recorren.

DEMOSTRACIÓN:

Sea H un homeomorfismo.

Definimos $h: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, por:

$$h(X) = \int_0^1 e^{-s\hat{A}} H(\varphi(s, X)) ds ; X \in U \text{ y } s \in \mathbb{R}$$

Probemos que h satisface (1):

Observemos que:

$$e^{t\hat{A}} h(X) = e^{t\hat{A}} \int_0^1 e^{-s\hat{A}} H(\varphi(s, X)) ds$$

Aplicando la proposición 2.2.1.1, se tiene:

$$e^{t\hat{A}} h(X) = \int_0^1 e^{-(s-t)\hat{A}} H(\varphi(s-t, \varphi(t, X))) ds \quad (2)$$

Verifiquemos que:

$$\int_0^1 e^{-(s-t)\hat{A}} H(\varphi(s-t, X)) ds = h(X) \quad (3)$$

Si $u = s-t$ entonces $du = ds$, además: cuando $s \rightarrow 0$ entonces $u \rightarrow -t$ y

cuando $s \rightarrow 1$ entonces $u \rightarrow 1-t$. Luego:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-(s-t)\hat{A}} H(\varphi(s-t, X)) ds &= \int_{-t}^{1-t} e^{-u\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du = \\ &= \int_{-t}^0 e^{-u\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du + \int_0^{1-t} e^{-u\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du \end{aligned} \quad (4)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{-t}^0 e^{-u\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du &= \int_{-t}^0 e^{-(u+1)\hat{A}} e^{\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du = \\ &= \int_{-t}^0 e^{-(u+1)\hat{A}} H(\varphi(u+1, X)) du \end{aligned}$$

Si $u+1 = v$ entonces $du = dv$, además: cuando $u \rightarrow -t$ entonces $v \rightarrow 1-t$

y cuando $u \rightarrow 0$ entonces $v \rightarrow 1$. Luego:

$$\int_{-t}^0 e^{-(u+1)\hat{A}} H(\varphi(u+1, X)) du = \int_{1-t}^1 e^{-v\hat{A}} H(\varphi(v, X)) dv$$

$$\int_{-t}^0 e^{-u\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du = \int_{1-t}^1 e^{-v\hat{A}} H(\varphi(v, X)) dv$$

Luego, sustituyendo en (4), se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-(s-t)\hat{A}} H(\varphi(s-t, X)) ds &= \int_{1-t}^1 e^{-u\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du + \int_0^{1-t} e^{-u\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du = \\ &= \int_0^1 e^{-u\hat{A}} H(\varphi(u, X)) du = h(X) \end{aligned}$$

Así, (3) esta verificada y consecuentemente (2) implica que h satisface (1).

Ahora verifiquemos que h es acotada:

$$\text{Como } |h(X)| = \left| \int_0^1 e^{-s\hat{A}} H(\varphi(s, X)) ds \right| \leq e^{|\hat{A}|} \left(\sup_{s \in [0,1]} |\varphi(s, X)| \right)$$

Entonces, h es acotada en \mathbb{R}^n .

Por tanto, h es un homeomorfismo.*

Este teorema afirma que es posible deformar de manera continua todas las trayectorias del sistema no lineal, alrededor del punto de equilibrio aislado, en las trayectorias del sistema linealizado, vía el homeomorfismo h . Además indica que el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio aislado es similar al del sistema linealizado, por ejemplo el tipo de estabilidad.

En la figura 2.5, se muestra un esquema de los diagramas de fase del sistema no lineal y del sistema linealizado bajo la operación del homeomorfismo h .

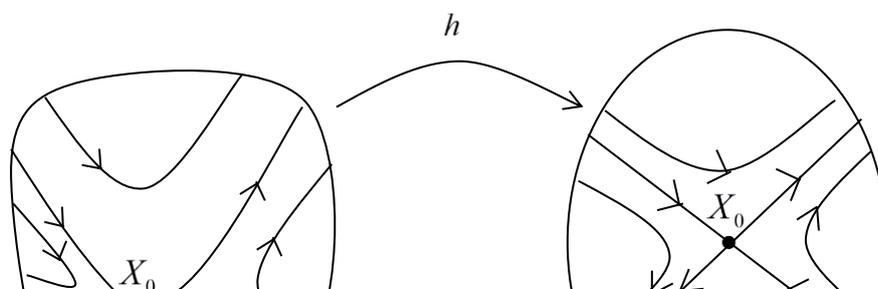


Figura 2.5: Representación gráfica de la operación del homeomorfismo h

Como en el caso de sistemas autónomos lineales, podemos definir los subespacios (variedades) estable e inestable del punto singular hiperbólico X_0 , denotadas por $W_{loc}^s(X_0)$ y $W_{loc}^u(X_0)$ respectivamente, por:

$$W_{loc}^s(X_0) = \left\{ X \in U \subset \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, X) = X_0 \text{ y } \varphi(t, X) \in U, \forall t \geq 0 \right\}$$

$$W_{loc}^u(X_0) = \left\{ X \in U \subset \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, X) = X_0 \text{ y } \varphi(t, X) \in U, \forall t \leq 0 \right\}$$

donde U es un abierto que contiene al punto singular hiperbólico X_0 .

2.2.6.2 TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE

Consideremos el sistema autónomo no lineal: $X' = F(X)$; con $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vectorial y U un abierto que contiene al punto singular hiperbólico X_0 .

Si el campo vectorial F tiene una singularidad hiperbólica X_0 , entonces existen las variedades $W_{loc}^s(X_0)$ y $W_{loc}^u(X_0)$ estable e inestable respectivamente, tales que $\dim(W_{loc}^s(X_0)) = \dim(E^s)$ y $\dim(W_{loc}^u(X_0)) = \dim(E^u)$.

DEMOSTRACIÓN:

Si el campo vectorial F tiene un punto singular hiperbólico X_0 , entonces

todos los autovalores de $\hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0)$ tienen la parte real no nula.

Luego por el teorema de Hartman – Grobman, las variedades $W_{loc}^s(X_0)$ y $W_{loc}^u(X_0)$ estable e inestable respectivamente, son imágenes homeomorfas de los subespacios vectoriales (variedades) E^s y E^u estable e inestable respectivamente. Luego $W_{loc}^s(X_0)$ y $W_{loc}^u(X_0)$ para el punto singular hiperbólico X_0 , son variedades topológicas de dimensiones iguales al índice de estabilidad $i(\hat{A})$ y $n - i(\hat{A})$ respectivamente.

Como:

$$W_{loc}^s(X_0) = \left\{ X \in U \subset \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, X) = X_0 \text{ y } \varphi(t, X) \in U, \forall t \geq 0 \right\}$$

$$W_{loc}^u(X_0) = \left\{ X \in U \subset \mathbb{R}^n / \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, X) = X_0 \text{ y } \varphi(t, X) \in U, \forall t \leq 0 \right\}$$

donde U es un abierto que contiene al punto singular hiperbólico X_0 .

Entonces, $W_{loc}^s(X_0)$ es tangente a $E^s(X_0)$ y $W_{loc}^u(X_0)$ es tangente a $E^u(X_0)$

Es decir que W_{loc}^s coincide con E^s en el punto singular hiperbólico X_0 y

W_{loc}^u coincide con E^u en el punto singular hiperbólico X_0 . Así

$$\dim(W_{loc}^s(X_0)) = \dim(E^s) \text{ y } \dim(W_{loc}^u(X_0)) = \dim(E^u) .$$

En consecuencia:

$$\mathbb{R}^n = W_{loc}^s \oplus W_{loc}^u, \text{ luego:}$$

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(W_{loc}^s \oplus W_{loc}^u) = \dim(W_{loc}^s) + \dim(W_{loc}^u) - \dim(W_{loc}^s \cap W_{loc}^u)$$

pero como $W_{loc}^s \cap W_{loc}^u = \{0\}$ entonces $\dim(W_{loc}^s \cap W_{loc}^u) = 0$, luego:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^n) &= \dim(W_{loc}^s) + \dim(W_{loc}^u) = \dim(E^s) + \dim(E^u) \\ &= i(\hat{A}) + n - i(\hat{A}) = n \end{aligned} \quad .*$$

En la figura 2.6, se esquematiza el teorema de la variedad estable:

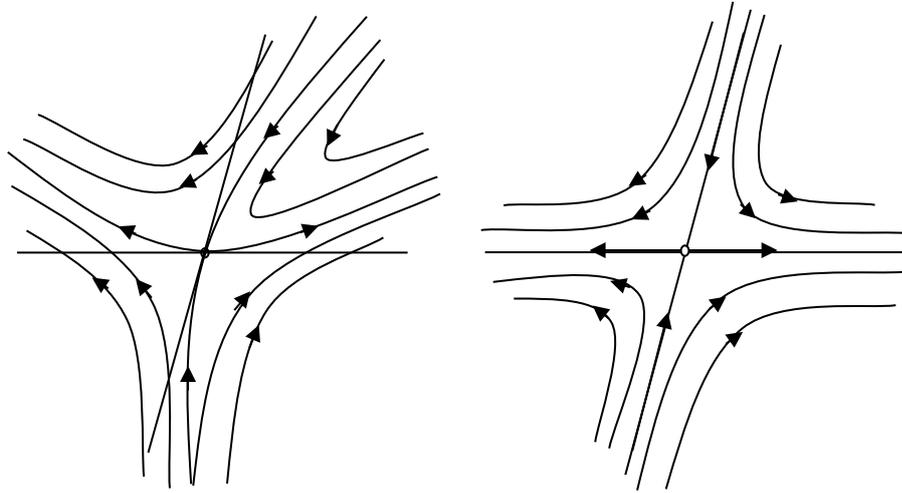


Figura 2.6: Esquema del teorema de la variedad estable

OBSERVACIÓN 2.2.6.2.1

Si X_0 es una singularidad no hiperbólica del campo vectorial F , entonces de forma análoga al caso de sistemas autónomos lineales existe una tercera variedad $W_{loc}^c(X_0)$ llamada variedad centro.

EJEMPLO

Analizar las singularidades del sistema autónomo no lineal:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x^2 - y \end{cases} \quad (1)$$

SOLUCIÓN:

En este caso:

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X = (x, y) \mapsto F(X) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (x, x^2 - y)$$

En primer lugar debemos calcular las singularidades del sistema:

$$F(X) = \bar{0} \Rightarrow (x, x^2 - y) = (0, 0) \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow X_0 = (0, 0).$$

Aplicando el teorema de Hartman-Grobman, linealizamos el sistema dado:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0) = \frac{\partial F}{\partial X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego los autovalores del sistema linealizado son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$, es decir

$$\Sigma(\hat{A}) = \{-1, 1\}.$$

Por tanto, $X_0 = (0, 0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico).

Como uno de los autovalores es negativo y el otro positivo entonces el punto singular hiperbólico $X_0 = (0, 0)$ es un punto de silla (caso A-3)

Hallando los autovectores asociados:

☞ Para $\lambda_1 = -1$:

$$\hat{A} - \lambda_1 I = \hat{A} + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in N_{uc}(\hat{A} + I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(\hat{A} + I) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_1 = (0, 1)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = -1$

$$\Rightarrow E^s = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\} = N_{uc}(\hat{A} + I)$$

☞ Para $\lambda_2 = 1$:

$$\hat{A} - \lambda_2 I = \hat{A} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in N_{uc}(\hat{A} - I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(\hat{A} - I) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_2 = (1, 0)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 1$

$$\Rightarrow E^u = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} = N_{uc}(\hat{A} - I)$$

Si escribimos el sistema (1) como una ecuación de primer orden, encontramos

$$\text{que: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + x$$

consecuentemente, obtenemos la familia de soluciones:

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$$

donde c es cualquier constante de integración.

Luego, $W_{loc}^u(0, 0)$ puede ser representada como una función $y = h(x)$ con

$h(0) = \frac{dh}{dx}(0) = 0$ ya que W_{loc}^u es tangente a E^u . Entonces

$$W_{loc}^u = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{x^2}{3} \right\}$$

Donde hemos tomado $c = 0$.

Por otro lado $x(0) = 0$ implica que $x' = 0$.

Por tanto $W_{loc}^s = E^s$.

El espacio de fases del sistema autónomo no lineal (1), será:

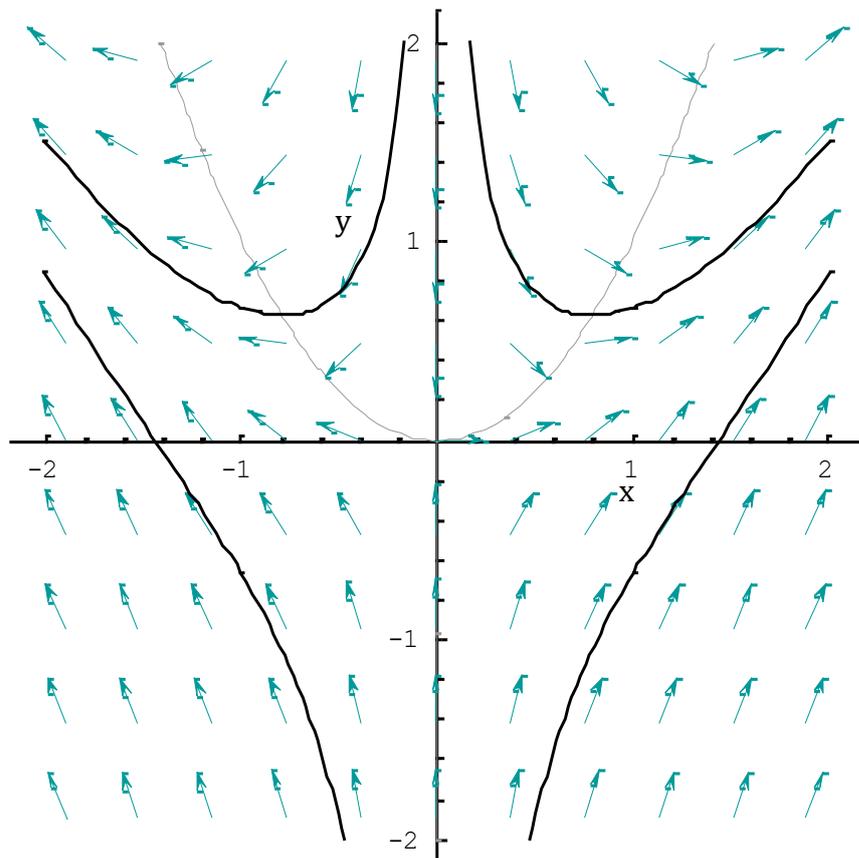


Figura 2.7: Espacio de fases del sistema (1)

Visualización computacional de la figura 2.7



2.2.7 SINGULARIDADES NO HIPERBÓLICAS

El teorema de Hartman - Grobman no funciona cuando la singularidad es no hiperbólica. El teorema de la variedad centro representa una generalización del teorema de la variedad estable y contempla la existencia de un subespacio invariante en forma local W_{loc}^c .

2.2.7.1 TEOREMA DE LA VARIEDAD CENTRO

Consideremos el sistema autónomo no lineal: $X' = F(X)$; con $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vectorial y U un abierto que contiene al punto singular no hiperbólico X_0 .

Sea $\varphi(t, X)$ el flujo generado por el campo vectorial F (solución del sistema).

Entonces existe de forma local la variedad centro W_{loc}^c que contiene el origen y es invariante bajo $\varphi(t, X)$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial con singularidades no hiperbólicas en el origen. Es decir $F(\bar{0}) = \bar{0}$ y $\frac{\partial F}{\partial X}(\bar{0})$ tienen autovalores con parte real

nula. Como $W_{loc}^s + W_{loc}^u + W_{loc}^c = \mathbb{R}^n$ y $W_{loc}^s \cap W_{loc}^u \cap W_{loc}^c = \{0\}$, entonces

$\mathbb{R}^n = W_{loc}^s \oplus W_{loc}^u \oplus W_{loc}^c$, Luego por el teorema de la variedad estable:

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(W_{loc}^s \oplus W_{loc}^u \oplus W_{loc}^c) = \dim(W_{loc}^s) + \dim(W_{loc}^u) + \dim(W_{loc}^c) \quad *$$

OBSERVACIÓN 2.2.7.1

La variedad centro W_{loc}^c no necesariamente es única.

EJEMPLO

Analizar las singularidades del sistema autónomo no lineal:

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases} \quad (1)$$

SOLUCIÓN:

En este caso:

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X = (x, y) \mapsto F(X) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (x^2, -y)$$

En primer lugar debemos calcular las singularidades del sistema:

$$F(X) = \bar{0} \Rightarrow (x^2, -y) = (0, 0) \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow X_0 = (0, 0).$$

Linealizando el sistema dado, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0) = \frac{\partial F}{\partial X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego los autovalores del sistema linealizado son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 0$. Es decir

$$\Sigma(\hat{A}) = \{-1, 0\}.$$

Por tanto $X_0 = (0, 0)$ es una singularidad no hiperbólica (punto singular no hiperbólico).

Luego, no es posible aplicar el teorema de Hartman – Grobman.

El teorema de la variedad centro nos asegura que existe W_{loc}^c .

Hallando los autovectores asociados:

☞ Para $\lambda_1 = -1$:

$$\hat{A} - \lambda_1 I = \hat{A} + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in N_{uc}(\hat{A} + I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(\hat{A} + I) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_1 = (0, 1)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = -1$

$$\Rightarrow E^s = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\} = N_{uc}(\hat{A} + I)$$

☞ Para $\lambda_2 = 0$:

$$\hat{A} - \lambda_2 I = \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in N_{uc}(\hat{A}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(\hat{A}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_2 = (1, 0)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 0$

$$\Rightarrow E^c = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} = N_{uc}(\hat{A})$$

En este caso $W_{loc}^c = E^c$.

Sin embargo existen otras variedades centro (Observación 2.2.7.1), la órbita que pasa por el punto (x_0, y_0) con $x_0 < 0$ está dada por la solución particular de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x^2} \Rightarrow y = y_0 e^{\frac{1}{x}}$$

Por lo tanto la curva

$$y = \begin{cases} y_0 e^{\frac{1}{x}}, & x_0 < 0 \\ 0, & x_0 > 0 \end{cases}$$

Es invariante bajo el flujo. Además vemos que W_{loc}^c existe de forma global.

El espacio de fases del sistema autónomo no lineal (1), será:

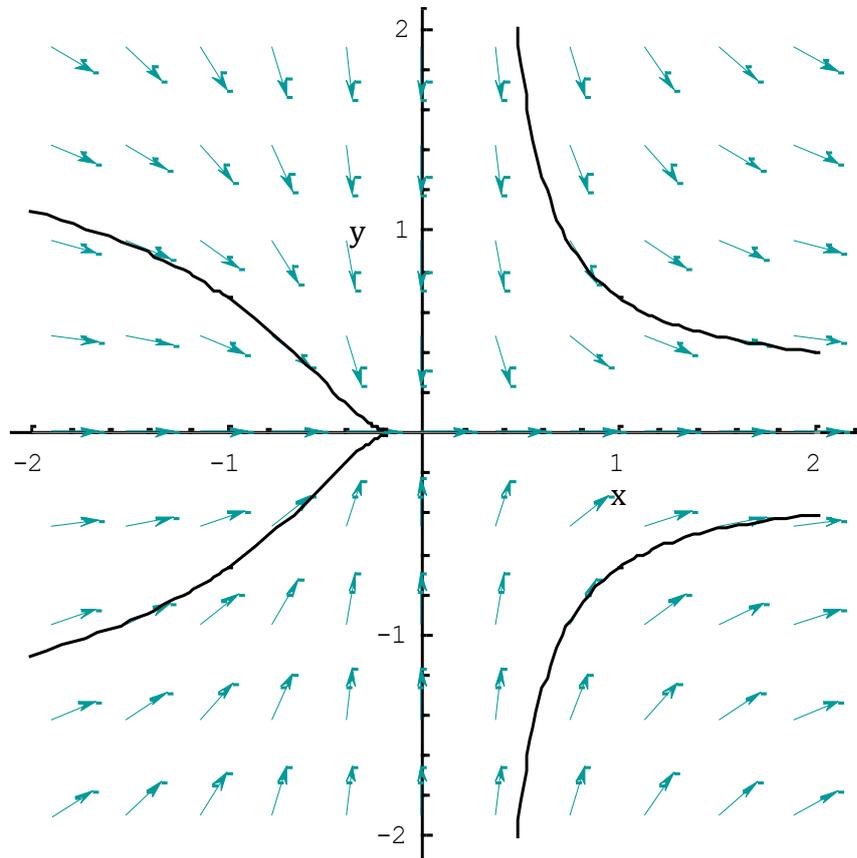


Figura 2.8: Espacio de fases del sistema (1)

Visualización computacional de la figura 2.8



2.2.8 ESTABILIDAD EN EL SENTIDO DE LIAPUNOV

De la teoría clásica de la mecánica, es sabido que un sistema es estable si su energía (una función positiva), es continuamente decreciente, o sea tiene derivada negativa, hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio.

El criterio de Liapunov para la estabilidad de sistemas autónomos no lineales es una generalización de este hecho. Liapunov demostró que ciertas otras funciones aparte de la función energía pueden ser usadas para la determinación de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema autónomo no lineal.

DEFINICIÓN 2.2.8.1

Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a un punto de equilibrio X_0 , entonces:

- ☞ V es una función *definida positiva*, si $V(X_0) = 0$ y $V(X) > 0$ en $D - \{X_0\}$.
- ☞ V es una función *semidefinida positiva*, si $V(X_0) = 0$ y $V(X) \geq 0$ en D .
- ☞ V es una función *definida negativa*, si $V(X_0) = 0$ y $V(X) < 0$ en $D - \{X_0\}$.
- ☞ V es una función *semidefinida negativa*, si $V(X_0) = 0$ y $V(X) \leq 0$ en D .
- ☞ La derivada temporal de V sobre las trayectorias u órbitas del sistema autónomo no lineal $X' = F(X)$, se denomina *derivada orbital*, se denota $\dot{V}(X)$ y está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \frac{\partial V}{\partial X} X' = \frac{\partial V}{\partial X} F(X) = \nabla V(X) \cdot F(X) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] \cdot \begin{bmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ \cdot \\ F_n(X) \end{bmatrix} \quad (*) \\ \Rightarrow \dot{V}(X) &= \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1(X) + \frac{\partial V}{\partial x_2} F_2(X) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} F_n(X) \\ \Rightarrow \dot{V}(X) &= \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} x_n' \\ \Rightarrow \dot{V}(X) &= \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} \end{aligned}$$

Si $\varphi(t_0, Y_0)$ representa el flujo (solución) del sistema $X' = F(X)$, dada a partir de la condición inicial $X(0) = Y_0$, a partir del instante inicial $t = t_0$, entonces

$$\dot{V}(X) = \frac{d}{dt} V(\varphi(t_0, Y_0)).$$

Consecuentemente, si $\dot{V}(X)$ es negativa, entonces el campo escalar V será decreciente sobre las trayectorias u órbitas del sistema $X' = F(X)$.

2.2.8.1 TEOREMA DE LIAPUNOV

Sea X_0 un punto de equilibrio del sistema autónomo no lineal $X' = F(X)$ y sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a X_0 , entonces:

☞ Si $V(X_0) = 0$ y $V(X) > 0$ en $D - \{X_0\}$. (V es una función definida positiva) además $\dot{V}(X_0) = 0$ y $\dot{V}(X) \leq 0$ en D . (\dot{V} es una función semidefinida negativa). Entonces X_0 es un *punto de equilibrio estable*.

☞ Si $V(X_0)=0$ y $V(X)>0$ en $D-\{X_0\}$. (V es una función definida positiva) además $\dot{V}(X_0)=0$ y $\dot{V}(X)<0$ en $D-\{X_0\}$. (\dot{V} es una función definida negativa). Entonces X_0 es un *punto de equilibrio asintóticamente estable*.

Una función V que cumple con las condiciones impuestas en el teorema anterior se denomina *función de Liapunov*.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Liapunov para X_0 .

Dados $B = \{X \in \mathbb{R}^n / |X - X_0| \leq \delta\} \subset D$ y un número real positivo

$$m = \text{Min} \{V(X) / |X - X_0| = \delta\}.$$

Como por hipótesis la función de Liapunov V es continua, entonces existe un abierto V_1 que contiene a X_0 contenido en B , tal que $V(X) < m$; $\forall X \in V_1$.

Como la función de Liapunov V , decrece a lo largo de las trayectorias u órbitas del sistema autónomo no lineal $X' = F(X)$, entonces el flujo generado por el campo vectorial F , $\varphi(t, X)$ permanece en el interior de B para todo $t \geq 0$ y $X \in V_1$, por tanto X_0 es un punto de equilibrio estable.

Ahora, supongamos que $\dot{V}(X) < 0$ en $D - \{X_0\}$. Sean $X \in V_1$; $Y \in B$ y (t_n) una sucesión creciente de números reales positivos tales que

$$\varphi(t_n, X) \rightarrow Y \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, X) = Y \right); \quad \text{luego} \quad V(\varphi(t_n, X)) \rightarrow V(Y) \quad \text{y}$$

$$V(\varphi(t, X)) > V(Y) ; \forall t \geq 0.$$

Supongamos que $Y \neq X_0$, entonces $V(\varphi(1, Y)) < V(Y)$ y para todo Z suficientemente próximo de Y se tiene $V(\varphi(1, Z)) < V(Y)$. Luego para n suficientemente grande, se tiene $V(\varphi(t_n + 1, X)) < V(Y)$ lo cual es absurdo. Por tanto $Y = X_0$.

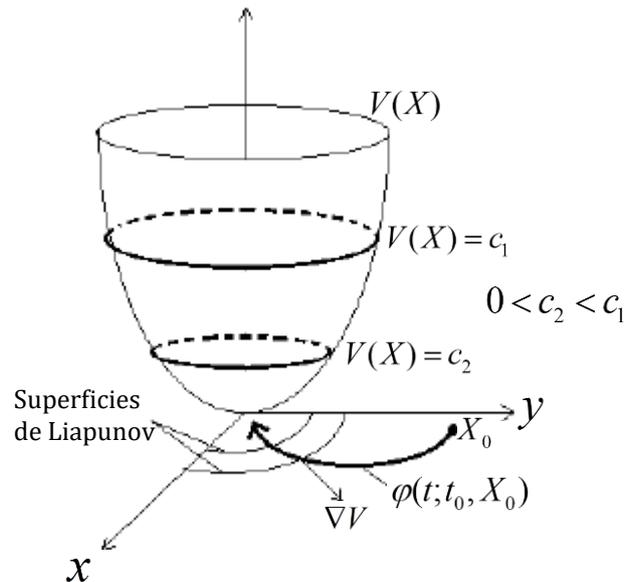
Como B es cerrado y acotado entonces es compacto, luego $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, X) = X_0 ; \forall X \in V_1$, lo cual implica que el flujo generado por el campo vectorial F , $\varphi(t, X)$ permanece en el interior de B y converge a X_0 . En consecuencia X_0 es un punto de equilibrio *asintóticamente estable*.*

Este método es una herramienta del análisis cualitativo muy poderosa. Sin embargo, presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Liapunov, por lo tanto, hay que proponer una función candidata a la función de Liapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda es, que el teorema sólo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Liapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica, no significa que el punto de equilibrio X_0 es inestable o no asintóticamente estable.

Si V es una función de Liapunov, el conjunto de los X tal que $V(X) = c$, para algún $c \in \mathbb{R}^+$, se denominada *superficie de Liapunov* o *superficies de nivel* en el espacio de estados que encierra al punto de equilibrio X_0 .

El uso de las superficies de Liapunov hace que el teorema de Liapunov sea fácilmente interpretable. Las superficies de Liapunov que corresponden a

constantes decrecientes $0 < c_2 < c_1$, se encuentran íntegramente contenidas como se muestra en la siguiente figura para el caso \mathbb{R}^2 :



La condición $\dot{V}(X) \leq 0$, se puede interpretar geoméricamente a través de (*) ya que la misma significa que el producto escalar entre el gradiente de V y el campo vectorial F es negativo: $\nabla V(X) \cdot F(X) \leq 0$.

Teniendo en cuenta que F es un vector tangente a la trayectoria u órbita solución $\varphi(t_0, Y_0)$, la condición $\dot{V}(X) = \nabla V(X) \cdot F(X) \leq 0$ significa que cuando una trayectoria u órbita cruza una superficie de Liapunov, ésta trayectoria lo hace hacia adentro y nunca vuelve a salir. Además cuando $\dot{V}(X) < 0$ las trayectorias u órbitas se mueven desde una superficie hacia otra interior correspondiente a un c menor. Cuando c decrece, las superficies de Liapunov correspondientes se achican hacia el punto de equilibrio X_0 mostrando que las trayectorias se aproximan a X_0 a medida que transcurre el tiempo. En cambio, si $\dot{V}(X) \leq 0$ no se puede asegurar que las trayectorias

converjan hacia X_0 , pero se puede concluir que X_0 es un punto de equilibrio estable ya que las trayectorias $\varphi(t_0, Y_0)$ quedarán contenidas en algún abierto U que contiene a X_0 , con Y_0 dentro de alguna superficie de Liapunov contenida en dicho abierto U .

EJEMPLO

Dado el sistema autónomo no lineal:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y + yx^2 \end{cases} \quad (1)$$

Determinar la estabilidad

SOLUCIÓN:

En este caso:

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X = (x, y) \mapsto F(X) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (y, -x - y + yx^2)$$

En primer lugar debemos calcular las singularidades del sistema:

$$F(X) = \bar{0} \Rightarrow (y, -x - y + yx^2) = (0, 0) \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow X_0 = (0, 0)$$

Luego $X_0 = (0, 0)$ origen es el único punto de equilibrio del sistema (1).

Analicemos la estabilidad del origen para el sistema (1):

Linealizando el sistema dado, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2xy & -1 + x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0) = \frac{\partial F}{\partial X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los autovalores del sistema linealizado:

$$|\hat{A} - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)+1=0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Luego } \Sigma(\hat{A}) = \left\{ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

En consecuencia, de acuerdo al teorema de Hartman – Grobman $X_0 = (0,0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico). Como los dos autovalores tienen la parte real negativa (caso D-2); el origen $X_0 = (0,0)$ es un punto singular foco estable. Además es un sumidero¹⁷.

Consideremos la función de Liapunov para el origen $X_0 = (0,0)$ de la forma:

$$V : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X = (x, y) \mapsto V(x, y) = x^2 + y^2$$

Como $V(X_0) = 0$ y $V(X) > 0; \forall X \in D - \{X_0\}$. (V es una función definida

positiva). Además: $\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} F_1(X) + \frac{\partial V}{\partial y} F_2(X) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow \dot{V}(X) = 2x(y) + 2y(-x - y + yx^2) \Rightarrow \dot{V}(X) = 2y^2(x^2 - 1) \Rightarrow \dot{V}(X_0) = 0 \quad \text{y}$$

$$\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt} \leq 0 \Leftrightarrow |X| \leq 1 \Leftrightarrow |X| = \max\{|x|, |y|\} \leq 1$$

Por lo tanto si una trayectoria empieza dentro del círculo de radio 1 centrado en el origen entonces se aproximará al origen asintóticamente. Por tanto de acuerdo al teorema de Liapunov el origen $X_0 = (0,0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

¹⁷ Ver pagina 26

El espacio de fases del sistema autónomo no lineal (1), será:

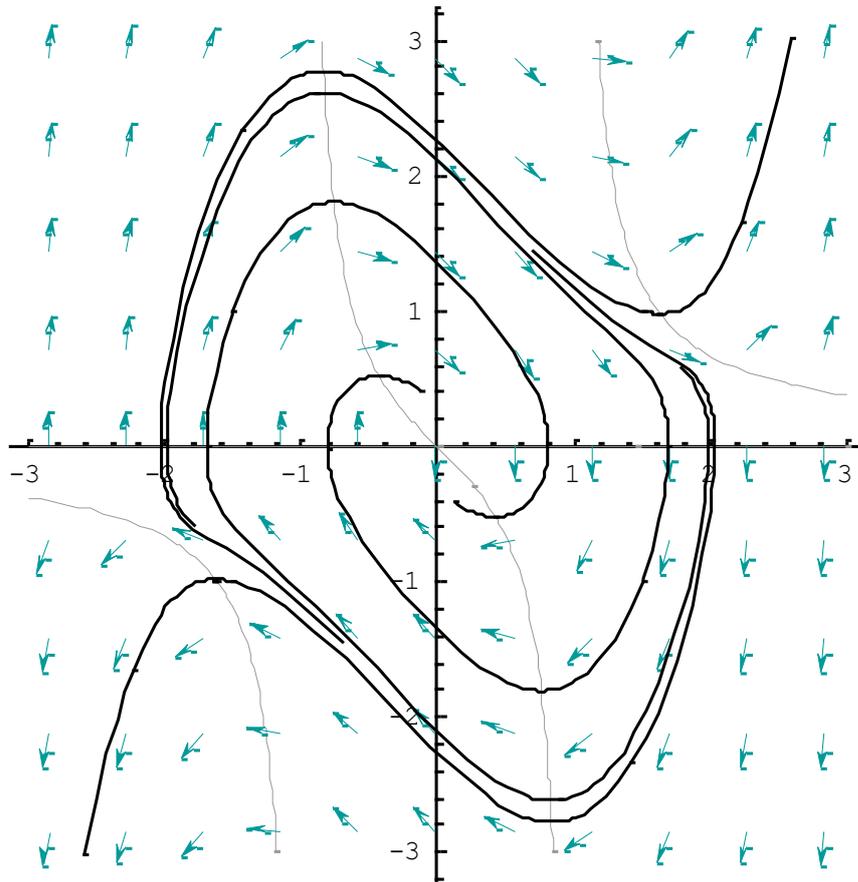


Figura 2.9: Espacio de fases del sistema (1)

Visualización computacional de la figura 2.9



CAPÍTULO III

CICLOS LÍMITE Y ESTABILIDAD ESTRUCTURAL

Iniciamos este capítulo presentando conceptos de ciclos límite, así como la demostración de uno de los resultados importantes en el análisis de la estabilidad estructural debido a Poincaré – Bendixon: en particular mostrar la invariancia de la estabilidad de sistemas autónomos no lineales mediante perturbaciones de campos vectoriales. También se presentan las aplicaciones a la electrónica y la ecología.

3.1 SOLUCIONES PERIÓDICAS

Consideremos un sistema autónomo no lineal:

$$X' = F(X) \quad \circ \quad \begin{cases} x' = F_1(x, y) \\ y' = F_2(x, y) \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = F_2(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

donde

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X = (x, y) \mapsto F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

es el campo vectorial definido en el conjunto abierto U y los campos escalares

$$F_1, F_2 \in C^1(U).$$

Todo lo que se sabe por ahora apenas nos da la información sobre las trayectorias del sistema (1) en abiertos que contienen a puntos de equilibrio.

Pero muchas veces estamos interesados en conocer las propiedades globales

más que locales. Son propiedades globales de las trayectorias aquellas que describen su comportamiento sobre grandes regiones del plano de fases. Un problema central es establecer si (1) tiene o no soluciones periódicas.

Una solución $(x(t), y(t))$ de (1) se llama *periódica* si está definida para todo t . El t más pequeño con esa propiedad se llama periodo T . Cada solución periódica define una órbita cerrada, recíprocamente si $\mathcal{C} : (x(t), y(t))$ es una trayectoria cerrada del sistema (1) entonces $(x(t), y(t))$ define una solución periódica.

Por otro lado, se sabe que un sistema autónomo lineal tiene trayectorias cerradas si y sólo si las raíces de su polinomio característico son puramente imaginarios, entonces para un sistema autónomo lineal o todas las trayectorias son cerradas o ninguna lo es. Pero un sistema autónomo no lineal puede tener una trayectoria cerrada y otras que no lo sean.

A continuación veamos criterios que nos permitan decidir si ciertas regiones del plano de fases contiene o no trayectorias cerradas.

3.2 CICLOS LÍMITE

Dado el sistema autónomo no lineal:

$$X' = F(X) \quad \circ \quad \begin{cases} x' = F_1(x, y) \\ y' = F_2(x, y) \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = F_2(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Se denomina *ciclo límite* a una trayectoria cerrada simple¹⁸ \mathcal{C} en el plano de

¹⁸ $\phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n / \phi(a) = \phi(b)$ y $\phi(t_1) \neq \phi(t_2) \quad \forall t_1 \neq t_2 ; t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$

fases a la cual convergen para $t \rightarrow \pm\infty$ las trayectorias del sistema, a partir de determinadas condiciones iniciales.

DEFINICIÓN 3.2.1

Sea X_0 un punto singular del sistema (1). Se entiende por ciclo límite como la trayectoria correspondiente a una solución periódica aislada del sistema (1), que encierra al punto X_0 .

Sea $\phi(t)$ una solución periódica aislada del sistema (1) y sea \mathcal{C} la trayectoria cerrada en el espacio de fases P . \mathcal{C} es un ciclo límite, cuando existe un número $\rho > 0$ tal que cualquiera sea el punto $\xi \in P$, a distancia inferior a ρ de la curva \mathcal{C} , la solución del sistema (1) que pasa por ξ ya no es periódica.

DEFINICIÓN 3.2.2

Se denomina *atractor* a un conjunto de puntos en el espacio de fases de un sistema dinámico hacia el cual evolucionan sus trayectorias para un tiempo suficientemente grande. Para que un conjunto sea atractor, es necesario que las trayectorias que se encuentran cercanas al atractor se mantengan cercanas a él aunque sean muy suavemente perturbadas.

Geoméricamente un atractor puede ser un punto o una curva.

3.2.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL CICLO LÍMITE

En el plano de fases del sistema (1), en las proximidades de la trayectoria cerrada \mathcal{C} que corresponde a un ciclo límite, no hay otras trayectorias

cerradas, que corresponderían a soluciones periódicas del sistema. Un ciclo límite divide al espacio de fases en dos regiones: una interna y otra externa. Por el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de un sistema del tipo (1), sus trayectorias no pueden cortarse.

Por ese motivo, cada trayectoria distinta a \mathcal{C} deberá ser o bien interior o bien exterior al ciclo límite. Todas las trayectorias interiores o exteriores que parten de puntos próximos a \mathcal{C} se arrollarán en espiral sobre \mathcal{C} , sea para $t \rightarrow +\infty$ o para $t \rightarrow -\infty$.

En la figura 3.1 se observa la grafica de un ciclo límite:

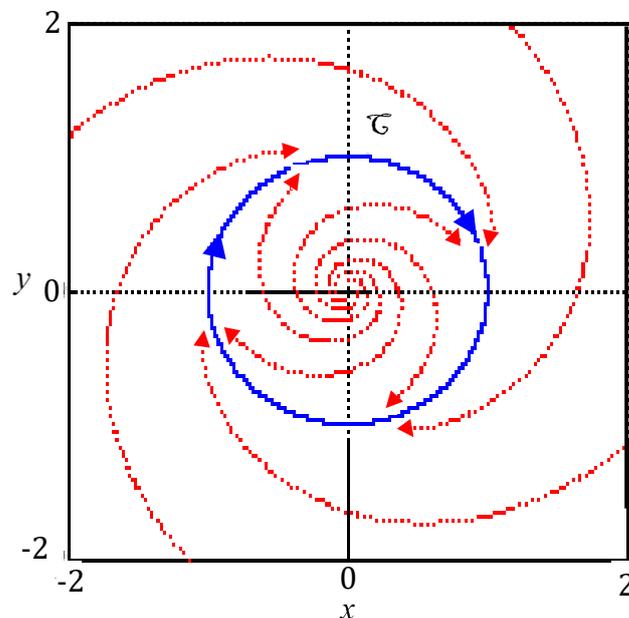


Figura 3.1: Ciclo límite \mathcal{C}

La trayectoria cerrada \mathcal{C} por corresponder a un ciclo límite, si bien no contiene puntos de equilibrio, es en si misma una *trayectoria de equilibrio*.

3.2.2 EXISTENCIA DEL CICLO LÍMITE

Una propiedad importante de los campos vectoriales bidimensionales, y por tanto también de los espacios de fases bidimensionales, es que una trayectoria cerrada simple divide al plano en dos regiones distintas. Esta propiedad, conocida como el teorema de las trayectorias de Jordan, implica que existen restricciones a las trayectorias de un flujo de fase bidimensional. Una trayectoria puede, en general, aproximarse a su valor límite sólo de una de las siguientes maneras: (a) como un punto crítico, (b) como una órbita periódica o (c) por infinitos valores de (x, y) . Una trayectoria contenida en una región acotada en el plano puede caer sólo en los casos (a) o (b).

3.3 TEOREMA DE POINCARÉ – BENDIXON

Consideremos un sistema autónomo no lineal:

$$X' = F(X) \quad \text{o} \quad \begin{cases} x' = F_1(x, y) \\ y' = F_2(x, y) \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = F_2(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

donde:

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X = (x, y) \mapsto F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

es el campo vectorial definido en el conjunto abierto U y los campos escalares

$$F_1, F_2 \in C^1.$$

Sean C_1 y C_2 dos soluciones periódicas aisladas en el plano de fases del sistema (1). Si en cada punto X de la curva C_1 el vector velocidad del sistema (1), está dirigido hacia el exterior de C_1 y en cada punto X de la curva C_2 el

vector velocidad está dirigido hacia el interior de C_2 , entonces existe al menos un ciclo límite \mathcal{C} comprendido entre C_1 y C_2 .

DEMOSTRACIÓN:

Sea

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, X) &\mapsto \varphi(t, X) \end{aligned}$$

el flujo generado por el campo vectorial

$$\begin{aligned} F: U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X = (x, y) &\mapsto F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \end{aligned} \quad y$$

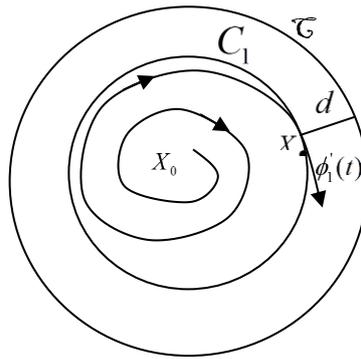
$$\begin{aligned} \phi: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \phi(t) \end{aligned}$$

una solución periódica aislada del sistema autónomo no lineal (1) que encierra al punto singular X_0 .

Si $C_1: \phi_1(t)$ y $C_2: \phi_2(t)$ son dos soluciones periódicas aisladas del sistema (1) que encierran al punto singular X_0 , pero que no lo contienen, entonces $\phi_1'(t)$ en t coincide con el campo vectorial F en $\phi_1(t)$ y $\phi_2'(t)$ en t coincide con el campo vectorial F en $\phi_2(t)$ y como todo flujo $\varphi(t, X)$ es solución del sistema autónomo no lineal (1), entonces por la unicidad de soluciones: $\varphi(t, X) = \phi_1(t)$ en $X \in C_1$ y $\varphi(t, X) = \phi_2(t)$ en $X \in C_2$.

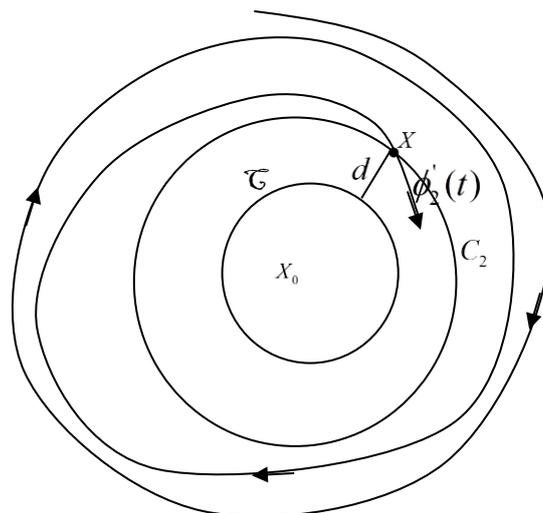
Sea \mathcal{C} órbita cerrada simple (ciclo límite) que encierra al punto singular X_0 pero que no lo contiene.

* Si en cada punto $X \in C_1$; $X \notin \mathcal{C}$ el vector velocidad del sistema (1) $\phi_1'(t)$ está dirigido hacia el exterior de $C_1: \phi_1(t)$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_1(t), \mathcal{C}) = 0$, esto significa que en $X \in C_1$ la solución periódica aislada $\phi_1(t) = \varphi(t, X)$ se acerca en espiral a la órbita cerrada simple \mathcal{C} cuando $t \rightarrow +\infty$. Gráficamente:



* Si en cada punto $X \in C_2: \phi_2(t)$; $X \notin \mathcal{C}$ el vector velocidad del sistema (1), $\phi_2'(t)$ está dirigido hacia el interior de $C_2: \phi_2(t)$, entonces $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_2(t), \mathcal{C}) = 0$, esto significa que en $X \in C_2$ la solución periódica aislada $\phi_2(t) = \varphi(t, X)$ se acerca en espiral a la órbita cerrada simple \mathcal{C} cuando $t \rightarrow -\infty$.

Gráficamente:



Por tanto existe al menos una órbita cerrada simple \mathcal{C} entre las órbitas periódicas aisladas $C_1 : \phi_1(t)$ y $C_2 : \phi_2(t)$ en el plano de fases que la divide en dos regiones una interna y otra externa.*

3.4 ESTABILIDAD DEL CICLO LÍMITE

- ☞ Si todas las trayectorias, tanto exteriores como interiores, que arrancan de las proximidades del ciclo límite \mathcal{C} , se arrollan sobre \mathcal{C} cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces el ciclo límite \mathcal{C} es *estable*.
- ☞ Si todas las trayectorias cuyo origen se halla próximo al ciclo límite \mathcal{C} , se arrollan sobre \mathcal{C} cuando $t \rightarrow -\infty$, entonces el ciclo límite \mathcal{C} es completamente *inestable*.
- ☞ Si las trayectorias interiores se arrollan sobre el ciclo límite \mathcal{C} para $t \rightarrow +\infty$ y las exteriores lo hacen para $t \rightarrow -\infty$ o inversamente, entonces el ciclo límite \mathcal{C} es *semiestable*.

EJEMPLO

Analizar el sistema autónomo no lineal:

$$\begin{cases} x' = y + x(2 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(2 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (1)$$

SOLUCIÓN:

En este caso:

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$F(X) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (y + x(2 - x^2 - y^2), -x + y(2 - x^2 - y^2))$$

En primer lugar debemos calcular las singularidades del sistema:

$$F(X) = \bar{0} \Rightarrow (y + x(2 - x^2 - y^2), -x + y(2 - x^2 - y^2)) = (0, 0) \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow X_0 = (0, 0)$$

Luego $X_0 = (0, 0)$ origen es el único punto de equilibrio del sistema (1).

Analicemos la estabilidad del origen para el sistema (1):

Linealizando el sistema dado, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3x^2 - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 - 2xy & 2 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0) = \frac{\partial F}{\partial X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos los autovalores del sistema linealizado:

$$|\hat{A} - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2 - \lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 + i ; \lambda_2 = 2 - i$$

$$\text{Luego } \Sigma(\hat{A}) = \{2 + i ; 2 - i\}.$$

En consecuencia de acuerdo al teorema de Hartman – Grobman $X_0 = (0, 0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico). Como los dos autovalores tienen la parte real positiva (caso D-3), el origen $X_0 = (0, 0)$ es un punto singular hiperbólico foco inestable. Además es una fuente¹⁹.

De poseer un ciclo límite, éste deberá encerrar al origen $X_0 = (0, 0)$. Para aplicar el teorema de Poincaré – Bendixon, debemos construir un anillo alrededor del origen, tal que las trayectorias del sistema (1) que atraviesan su perímetro lo hagan moviéndose hacia el interior del anillo a medida que

¹⁹ Ver página 27

pasa el tiempo. Como no hay puntos de equilibrio aislados en el interior del anillo, toda trayectoria que penetre en él, convergerá a un ciclo límite.

Consideremos la función de Liapunov para el origen $X_0 = (0,0)$ de la forma:

$$V : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X = (x, y) \mapsto V(x, y) = x^2 + y^2$$

La derivada de V , evaluada en los puntos (x, y) que satisfacen las ecuaciones (1), proporcionan información sobre el sentido de movimiento sobre una trayectoria del sistema:

$$\dot{V}(X) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} F_1(X) + \frac{\partial V}{\partial y} F_2(X) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(X) = 2x(y + x(2 - x^2 - y^2)) + 2y(-x + y(2 - x^2 - y^2))$$

$$\Rightarrow \dot{V}(X) = 2(x^2 + y^2)(2 - x^2 - y^2)$$

La ecuación anterior indica que \dot{V} será positiva siempre que $x^2 + y^2 < 2$ y negativa en caso contrario.

Por lo tanto, existen $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ tales que \dot{V} será positiva cuando $x^2 + y^2 < r_1$ y negativa si $x^2 + y^2 > r_2$.

De este modo obtenemos dos curvas cerradas $C_1 : x^2 + y^2 = r_1$ y $C_2 : x^2 + y^2 = r_2$, que forman el anillo que estábamos buscando y que nos permite aplicar el teorema de Poincaré - Bendixon y por lo tanto garantizar la existencia de un ciclo límite en el interior del anillo que ellas forman.

En la figura 3.2, se observa la existencia de un ciclo límite:

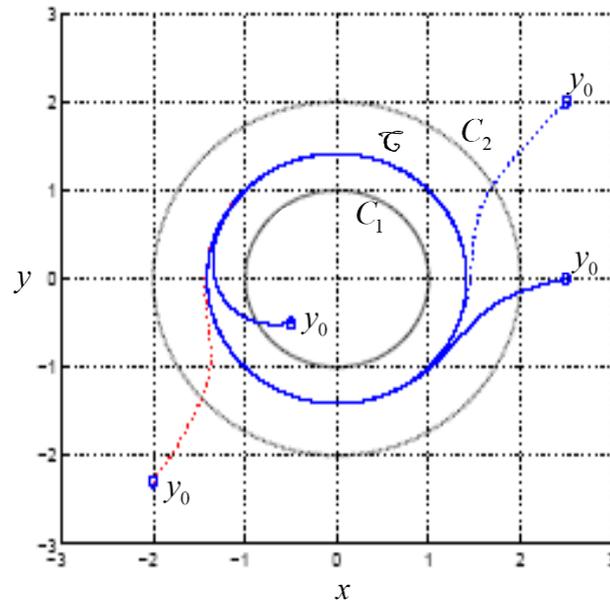


Figura 3.2: Teorema de Poincaré-Bendixon. Ejemplo sistema (1).

Con y_0 se indica los valores iniciales considerados para trazar las trayectorias.

En la figura 3.3, se aprecia la evolución de dos trayectorias $(x(t), y(t))$ correspondiente al sistema (1) sobre la superficie $V(x, y) = x^2 + y^2$ y su proyección sobre el plano (x, y) donde se observan las curvas de nivel.

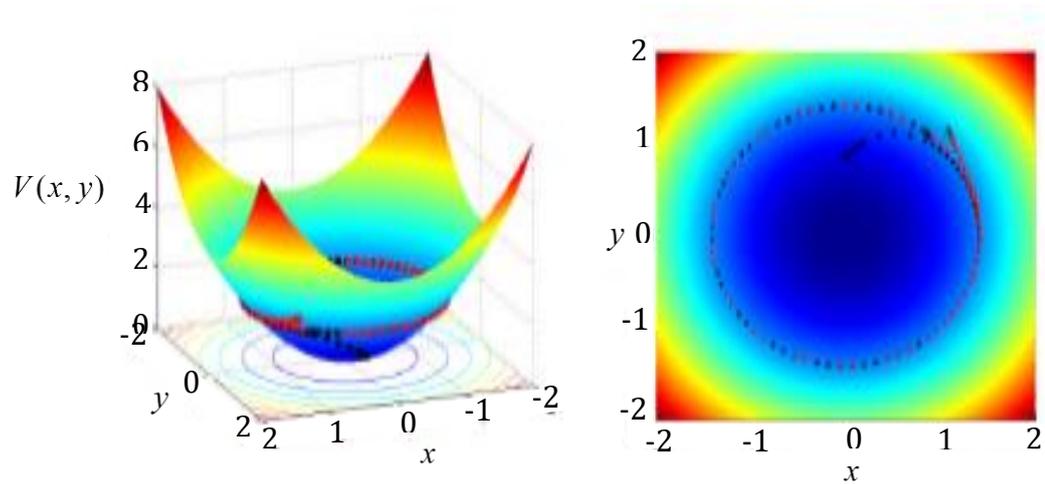


Figura 3.3: Evolución de dos trayectorias $(x(t), y(t))$ correspondiente al sistema (1) sobre la superficie $V(x, y) = x^2 + y^2$ y su proyección sobre el plano xy donde se observan las curvas de nivel. En rojo con condición inicial $X_0 = (1,1;1,15)$ y en negro para $X_0 = (0;0,85)$.

El espacio de fases del sistema autónomo no lineal (1), será:

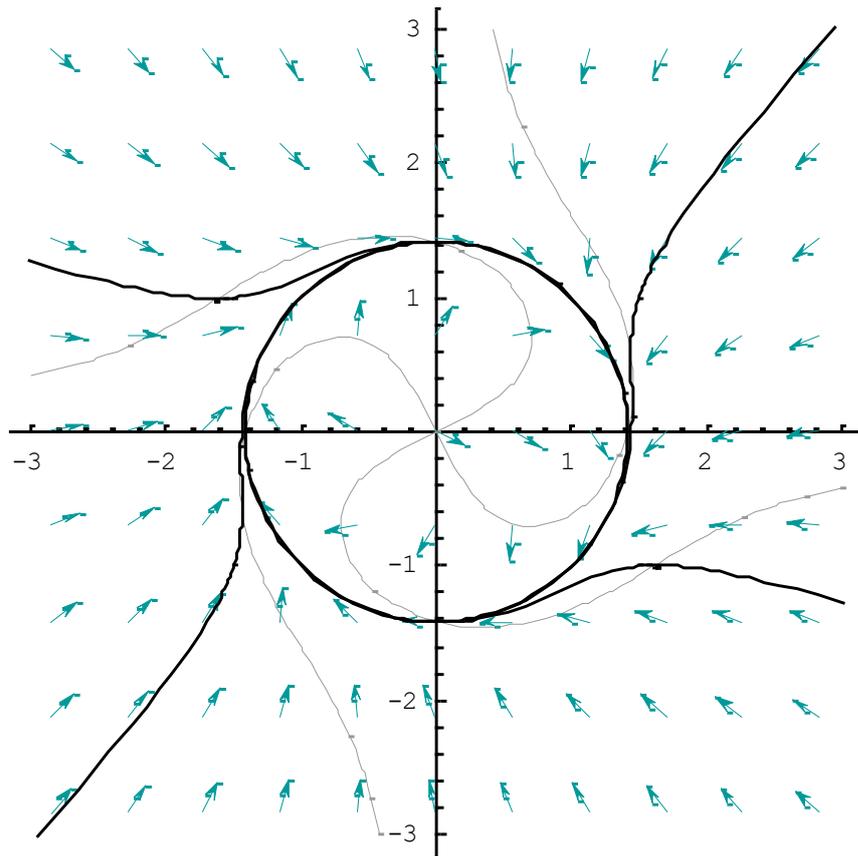


Figura 3.4: Espacio de fases del sistema (1)

Visualización computacional de la figura 3.4



Se observa que el sistema (1) tiene un único ciclo límite \mathcal{C} y que es un atractor.

Como todas las trayectorias, tanto interiores como exteriores, que arrancan en las proximidades de \mathcal{C} , se arrollan sobre \mathcal{C} , cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces \mathcal{C} es un ciclo límite estable.

3.5 PERTURBACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vectorial de clase C^1 . Una *Perturbación* de F es otro campo vectorial $G: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 , próximo a F en el sentido del campo vectorial de clase C^1 . Es decir:

$$|F(X) - G(X)| < \varepsilon ; \varepsilon > 0 \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial F}{\partial X}(X) - \frac{\partial G}{\partial X}(X) \right| < \rho ; \rho > 0 \quad \text{son pequeños}$$

para todo $X \in U$.

3.6 ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE SISTEMAS AUTONOMOS NO LINEALES

La idea de que un sistema autónomo no lineal sea estructuralmente estable, significa que éste no pierde sus propiedades cualitativas bajo pequeñas perturbaciones o cambios en las funciones involucradas en su definición. Es ésta una cuestión esencial en sistemas físicos pues éstos deben ser estructuralmente estables.

Consideremos el sistema planar autónomo no lineal:

$$X' = F(X) \quad \text{o} \quad \begin{cases} x' = F_1(x, y) \\ y' = F_2(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

¿Qué sucede con el espacio de fases del sistema (1), cuando se hace una pequeña perturbación en los campos escalares F_1 y F_2 ?

Esta interrogante es de gran importancia para las aplicaciones.

Luego de la perturbación el sistema (1) tendrá la forma:

$$X' = G(X) \quad \text{o} \quad \begin{cases} x' = F_1(x, y, \mu) \\ y' = F_2(x, y, \mu) \end{cases} \quad (2)$$

donde μ es un parámetro real.

Si pequeñas perturbaciones en los valores del parámetro μ no alteran la estructural topológica del espacio de fases, diremos que el sistema (1) es *estructuralmente estable*.

DEFINICIÓN 3.6.1

Los campos vectoriales $F, G: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o los sistemas (1) y (2)) son *topológicamente equivalentes*, si existe un homeomorfismo h , tal que $h(F(X)) = G(h(X))$, $\forall X \in U$

DEFINICIÓN 3.6.2

Dos campos vectoriales $F, G: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (o los sistemas (1) y (2)) son *Diferenciablemente equivalentes*, si existe un difeomorfismo h que lleva órbitas del flujo de F en órbitas del flujo de G . $h(\varphi_F(t, X)) = \varphi_G(t, h(X))$; $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall X \in U$. Preservando la orientación pero no necesariamente las parametrizaciones por t .

DEFINICIÓN 3.6.3

Un campo vectorial $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 , es *estructuralmente estable*, si F y su campo vectorial perturbado G son topológicamente equivalentes.

OBSERVACIÓN 3.6.1

Campos vectoriales con singularidades no hiperbólicas no pueden ser estructuralmente estables. La misma consideración se puede hacer para

órbitas periódicas. Por tanto Un sistema planar autónomo no lineal será estructuralmente estable si y sólo si todas sus singularidades y órbitas cerradas son hiperbólicas.

EJEMPLO

Consideremos el sistema autónomo no lineal (1) de la página 60:

$$\begin{cases} x' = y + x(2 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(2 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

(1)

Efectuemos pequeñas perturbaciones en las funciones escalares del sistema no lineal (1), esto es:

$$\begin{cases} x' = y + \mu x(2 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(2 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (2)$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro real.

Analicemos éste nuevo sistema autónomo no lineal perturbado:

En este caso:

$$G: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} G(X) = G(x, y) &= (F_1(x, y, \mu), F_2(x, y, \mu)) = \\ &= (y + \mu x(2 - x^2 - y^2), -x + y(2 - x^2 - y^2)) \end{aligned}$$

En primer lugar debemos calcular las singularidades del sistema (2):

$$G(X) = \bar{0} \Rightarrow (y + \mu x(2 - x^2 - y^2), -x + y(2 - x^2 - y^2)) = (0, 0) \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow X_0 = (0, 0)$$

Luego $X_0 = (0, 0)$ origen es el único punto de equilibrio del sistema (2),

independientemente del valor del parámetro $\mu > 0$.

Ahora, analicemos la estabilidad del origen para el sistema (2):

Linealizando el sistema (2), se tiene:

$$\frac{\partial G}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu - 3\mu x^2 - \mu y^2 & 1 - 2\mu xy \\ -1 - 2xy & 2 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial G}{\partial X}(X_0) = \frac{\partial G}{\partial X}(0,0) = \begin{pmatrix} 2\mu & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los autovalores del sistema linealizado:

$$|\hat{A} - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\mu - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2\mu - \lambda)(2 - \lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2(\mu + 1)\lambda + (4\mu + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu + 1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu}; \lambda_2 = \mu + 1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu}$$

$$\text{Luego } \Sigma(\hat{A}) = \left\{ \mu + 1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu}; \mu + 1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu} \right\}.$$

Por tanto, como $\mu > 0$ aplicando el teorema de Hartman – Grobman

$X_0 = (0,0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico).

Como los dos autovalores tienen la parte real positiva (caso D-3), el origen

$X_0 = (0,0)$ es un punto singular hiperbólico foco inestable. Además es una fuente.

A continuación observemos que sucede con el espacio de fases, cuando efectuamos pequeñas perturbaciones en los valores del parámetro $\mu > 0$:

☞ Para $\mu = 1.2$, el espacio de fases del sistema perturbado (2), será:

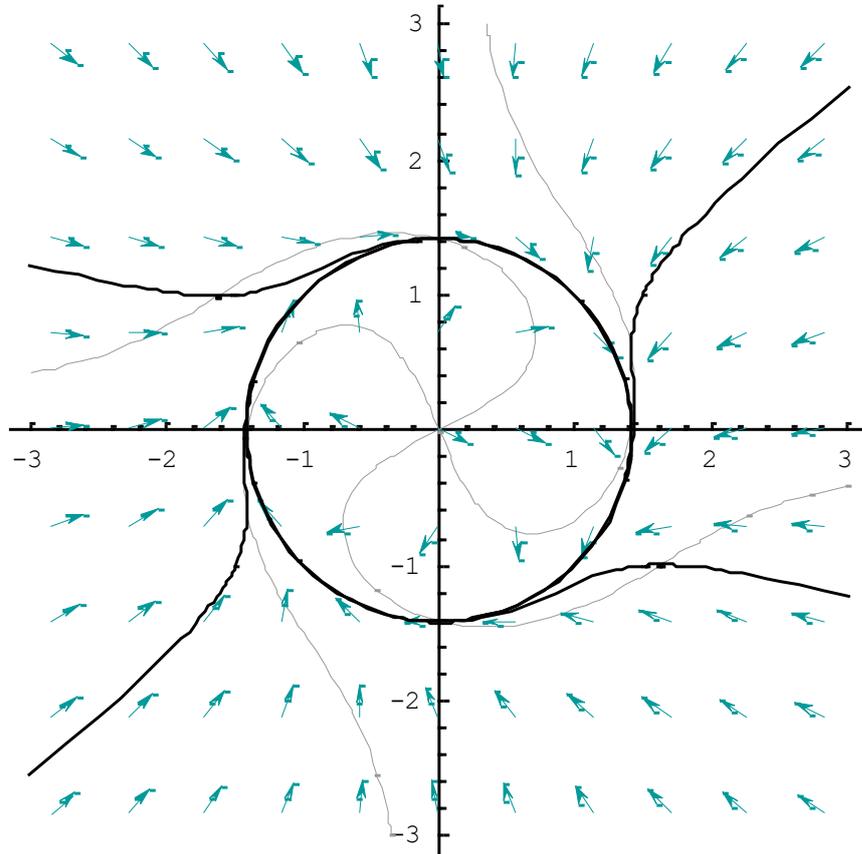


Figura 3.5: Espacio de fases del sistema (2), para $\mu = 1.2$

Visualización computacional de la figura 3.5



☞ Para $\mu = 1.6$, el espacio de fases del sistema perturbado (2), será:

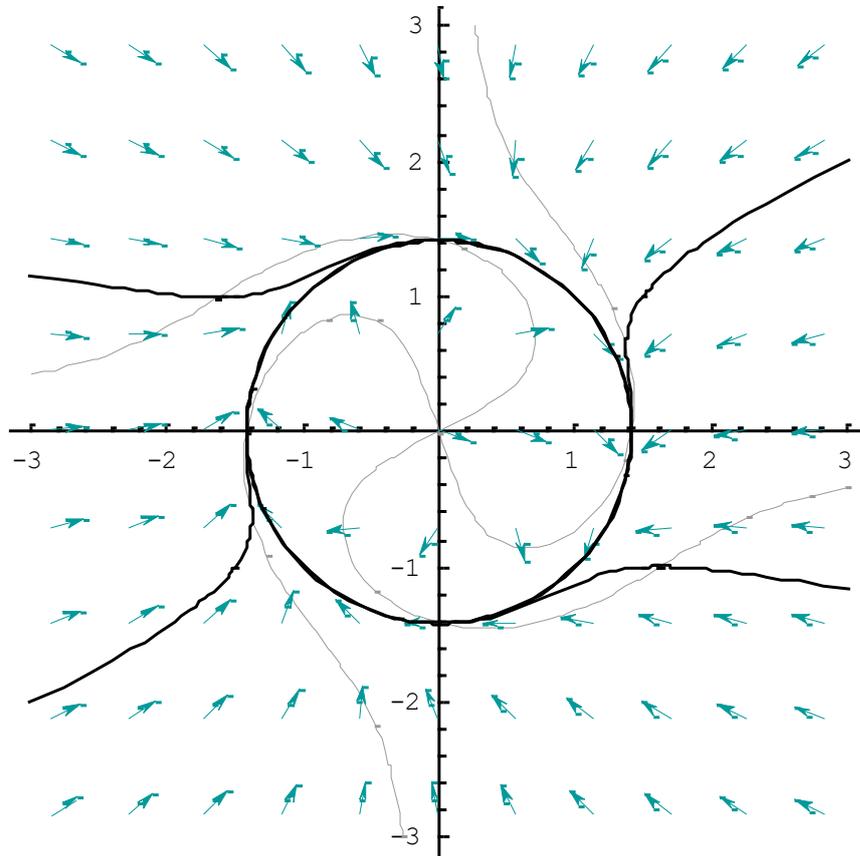


Figura 3.6: Espacio de fases del sistema (2), para $\mu = 1.6$

Visualización computacional de la figura 3.6



☞ Para $\mu = 1.9$, el espacio de fases del sistema perturbado (2), será:

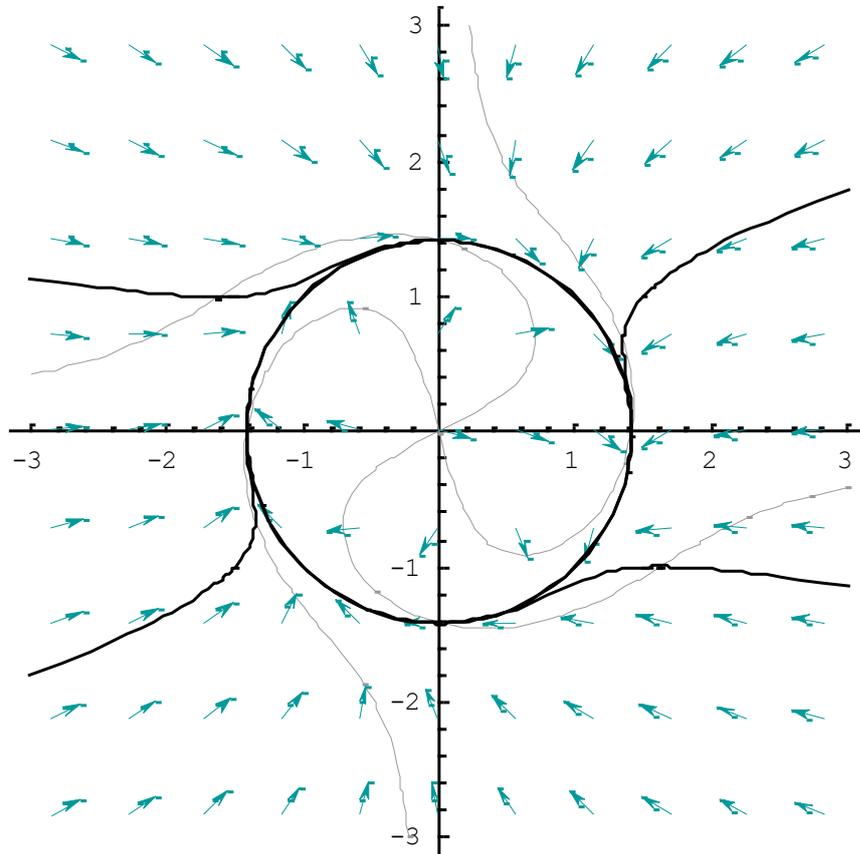


Figura 3.7: Espacio de fases del sistema (2), para $\mu = 1.9$

Visualización computacional de la figura 3.7



Se observa que, pequeñas perturbaciones en los valores del parámetro $\mu > 0$ no alteran la estructura topológica del espacio de fases del sistema (1).

Por tanto, el sistema autónomo no lineal (1) de la página 60, es *estructuralmente estable*.

También se observa que el sistema perturbado (2) independientemente del valor del parámetro $\mu > 0$, tiene un único ciclo límite \mathcal{C} y que es un atractor en todas las perturbaciones.

Como en todas las perturbaciones, todas las trayectorias, tanto interiores como exteriores, que arrancan en las proximidades de \mathcal{C} , se arrollan sobre \mathcal{C} , cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces \mathcal{C} es un ciclo límite estable.

3.7 APLICACIONES

3.7.1 APLICACIÓN A ELECTRÓNICA: EL OSCILADOR DE VAN DER POL.

Consideremos las ecuaciones del oscilador de Van Der Pol:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + (1 - x^2)y \end{cases} \quad (1)$$

Analicemos éste sistema autónomo no lineal.

En este caso:

$$F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 /$$

$$F(X) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (y, -x + (1 - x^2)y)$$

En primer lugar debemos calcular las singularidades del sistema:

$$F(X) = \bar{0} \Rightarrow (y, -x + (1 - x^2)y) = (0, 0) \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow X_0 = (0, 0)$$

Luego $X_0 = (0, 0)$ origen es el único punto de equilibrio del sistema (1).

Ahora, analicemos la estabilidad del origen para el sistema (1):

Linealizando el sistema dado, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2xy & 1 - x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_0) = \frac{\partial F}{\partial X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los autovalores del sistema linealizado:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(1 - \lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Luego } \Sigma(\hat{A}) = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

En consecuencia de acuerdo al teorema de Hartman – Grobman $X_0 = (0,0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico). Como los dos autovalores tienen la parte real positiva (caso D-3), el origen $X_0 = (0,0)$ es un punto singular hiperbólico foco inestable. Además es una fuente.

El espacio de fases del sistema autónomo no lineal (1), será:

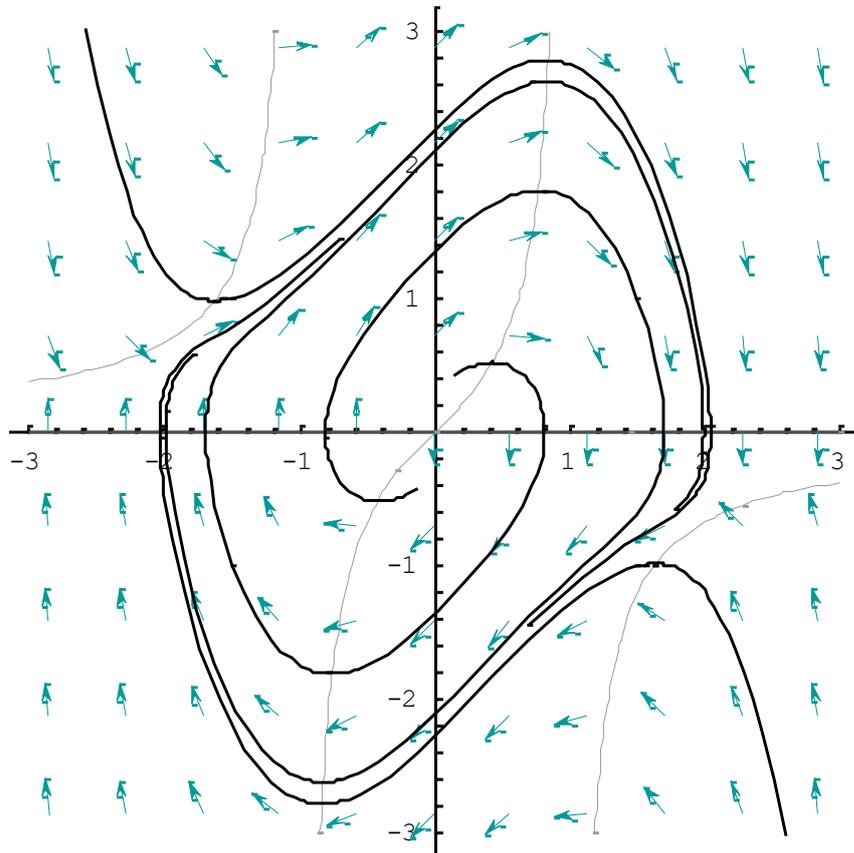


Figura 3.8: Espacio de fases del sistema (1)

Visualización computacional de la figura 3.8



Se observa que el sistema (1) tiene un único ciclo límite \mathcal{C} y que es un atractor.

Como todas las trayectorias, tanto interiores como exteriores, que arrancan en las proximidades de \mathcal{C} , se arrollan sobre \mathcal{C} , cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces \mathcal{C} es un ciclo límite estable.

Ahora, hagamos pequeñas perturbaciones o cambios en las funciones escalares del sistema no lineal (1), esto es:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu(1 - x^2)y \end{cases} \quad (2)$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro real y mide la no linealidad del sistema.

Estas ecuaciones perturbadas de Van Der Pol, describen el comportamiento de circuitos electrónicos no lineales y sirven para representar un circuito eléctrico que contiene un elemento no lineal llamado *triódo*²⁰ cuya resistencia depende de la corriente aplicada.

Analicemos éste nuevo sistema autónomo no lineal perturbado:

En este caso:

$$G: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$G(X) = G(x, y) = (F_1(x, y, \mu), F_2(x, y, \mu)) = (y, -x + \mu(1 - x^2)y)$$

En primer lugar debemos calcular las singularidades del sistema (2):

$$G(X) = \bar{0} \Rightarrow (y, -x + \mu(1 - x^2)y) = (0, 0) \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow X_0 = (0, 0)$$

²⁰ Válvula termoiónica de tres electrodos. El primero es el cátodo que al calentarse produce electrones. El segundo es el ánodo o placa, que está cargado positivamente y, por tanto, atrae a los electrones. El tercero es la rejilla que se sitúa entre el cátodo y el ánodo. La tensión aplicada a la rejilla hace que el flujo de electrones desde el cátodo al ánodo sea mayor o menor. Esto es muy interesante pues aplicando una señal de muy débil intensidad entre cátodo y rejilla se puede conseguir que la variación del flujo de electrones entre éste y el ánodo sea muy grande. Es decir con una pequeña tensión se controla una gran corriente. A ese fenómeno se le llama amplificación. Por eso, el triódo es un amplificador.

Luego $X_0 = (0,0)$ origen es el único punto de equilibrio del sistema (2), independientemente del valor del parámetro $\mu > 0$.

Ahora, analicemos la estabilidad del origen para el sistema (2):

Linealizando el sistema (2), se tiene:

$$\frac{\partial G}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2\mu xy & \mu - \mu x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial G}{\partial X}(X_0) = \frac{\partial G}{\partial X}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos los autovalores del sistema linealizado:

$$|\hat{A} - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(\mu - \lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}; \lambda_2 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

$$\text{Luego } \Sigma(\hat{A}) = \left\{ \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}; \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \right\}.$$

Por tanto, como $\mu > 0$ aplicando el teorema de Hartman – Grobman $X_0 = (0,0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico). Como los dos autovalores tienen la parte real positiva (caso D-3), el origen $X_0 = (0,0)$ es un punto singular hiperbólico foco inestable. Además es una fuente.

A continuación observemos que sucede con el espacio de fases, cuando efectuamos pequeñas perturbaciones en los valores del parámetro $\mu > 0$:

☞ Para $\mu = 1$, el espacio de fases del sistema perturbado (2), será:

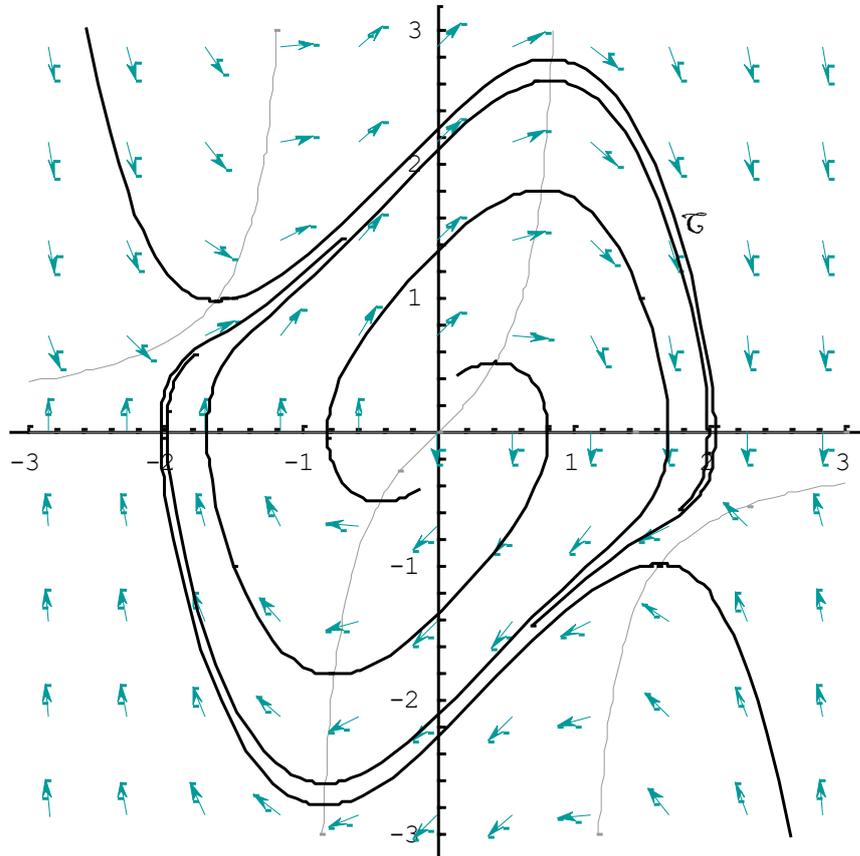


Figura 3.9: Espacio de fases del sistema (2), para $\mu = 1$

Visualización computacional de la figura 3.9



☞ Para $\mu = 1.2$, el espacio de fases del sistema perturbado (2), será:

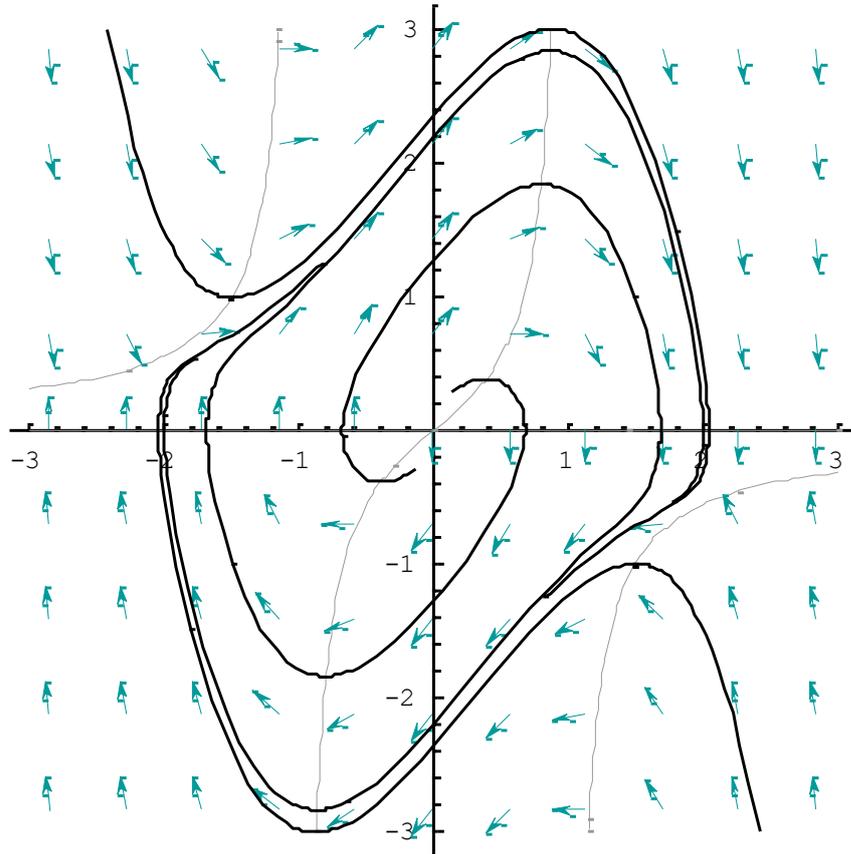


Figura 3.10: Espacio de fases del sistema (2), para $\mu = 1.2$

Visualización computacional de la figura 3.10



☞ Para $\mu = 1.5$, el espacio de fases del sistema perturbado (2), será:

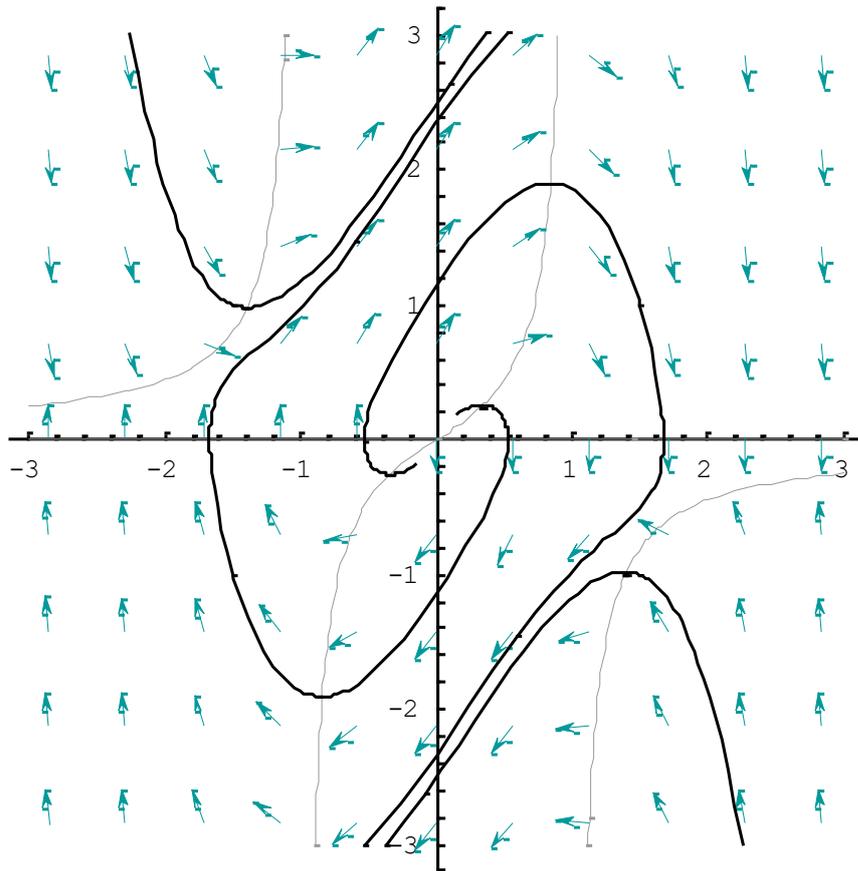


Figura 3.11: Espacio de fases del sistema (2), para $\mu = 1.5$

Visualización computacional de la figura 3.11



☞ Para $\mu = 1.8$, el espacio de fases del sistema perturbado (2), será:

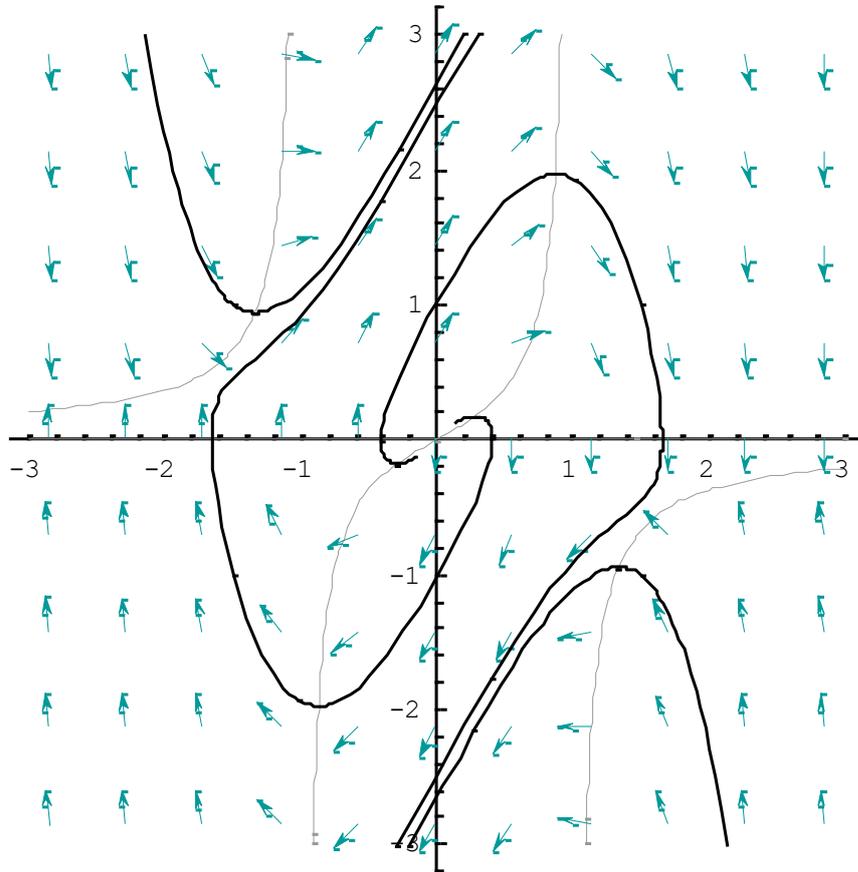


Figura 3.12: Espacio de fases del sistema (2), para $\mu = 1.8$

Visualización computacional de la figura 3.12



☞ Para $\mu = 2$, el espacio de fases del sistema perturbado (2), será:

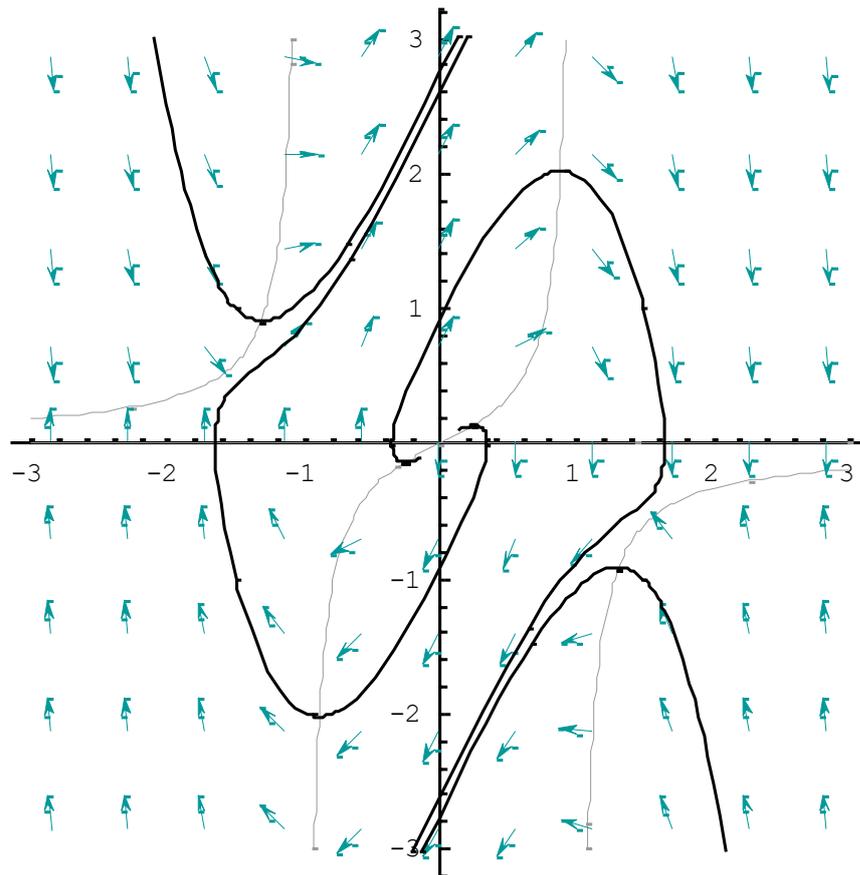


Figura 3.13: Espacio de fases del sistema (2), para $\mu = 2$

Visualización computacional de la figura 3.13



Se observa que, pequeñas perturbaciones en los valores del parámetro $\mu > 0$ no alteran la estructura topológica del espacio de fases del sistema (1). Por tanto, el sistema autónomo no lineal (1), dada mediante las ecuaciones

del oscilador de Van Der Pol, es *estructuralmente estable*.

También se observa que el sistema perturbado (2) independientemente del valor del parámetro $\mu > 0$, tiene un único ciclo límite \mathcal{C} y que es un atractor en todas las perturbaciones.

Como en todas las perturbaciones, todas las trayectorias, tanto interiores como exteriores, que arrancan en las proximidades de \mathcal{C} , se arrollan sobre \mathcal{C} , cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces \mathcal{C} es un ciclo límite estable.

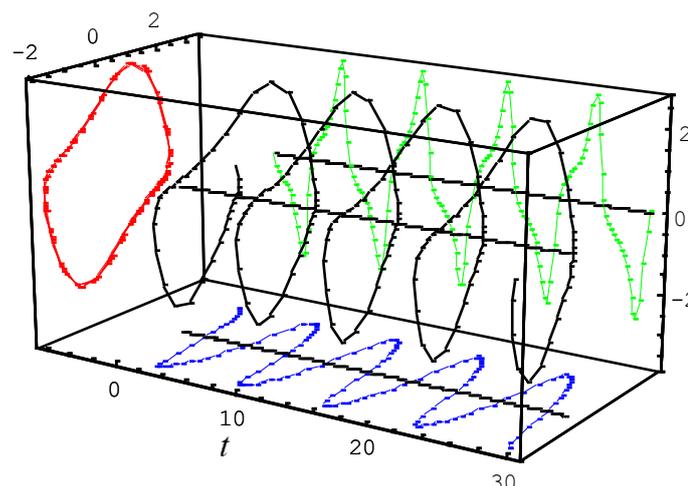
Finalmente se observa que las oscilaciones del sistema (2) se suavizan a medida que $\mu > 0$ toma valores más grandes. Es decir que a medida que $\mu > 0$ crece, el sistema se hace más no lineal.

OBSERVACION 3.7.1.1

En la siguiente figura se muestran las dos componentes de la solución del

$$\text{sistema (1): } \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + (1 - x^2)y \end{cases}$$

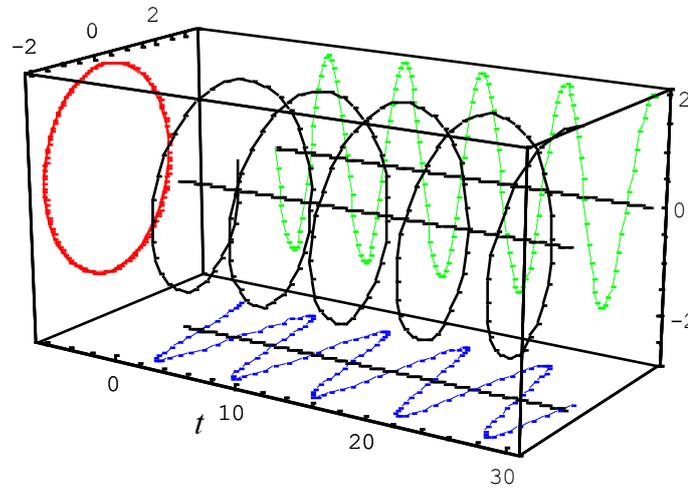
correspondiente a las condiciones iniciales $x(0) = 2$; $y(0) = 0$



OBSERVACION 3.7.1.2

Si $\mu = 0$, el sistema perturbado (2) tiene la forma:
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

el cual es un oscilador lineal armónico (péndulo simple).

**OBSERVACION 3.7.1.3**

Si μ es negativo, el ciclo limite se vuelve inestable.

3.7.2 APLICACIÓN A ECOLOGÍA: PRESA – DEPREDADOR

Consideremos las ecuaciones de Lotka – Volterra

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \quad (1)$$

Donde $x(t)$ representa la presa y $y(t)$ el depredador; las constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$; a mide la tasa de crecimiento de la presa; c mide la mortalidad del depredador y b y d son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies.

Analicemos éste sistema autónomo no lineal (1).

En este caso:

$$F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 /$$

$$F(X) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (x(a - by), y(-c + dx))$$

En primer lugar debemos calcular las singularidades del sistema:

$$F(X) = \bar{0} \Rightarrow (x(a - by), y(-c + dx)) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x = 0 \wedge y = 0) \vee (x = \frac{c}{d} \wedge y = \frac{a}{b})$$

$$\Rightarrow X_{01} = (0, 0) \wedge X_{02} = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$$

Son los puntos de equilibrio del sistema (1).

Ahora, analicemos la estabilidad en estos puntos para el sistema (1):

◆ En $X_{01} = (0, 0)$:

Linealizando el sistema dado, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_{01}) = \frac{\partial F}{\partial X}(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los autovalores del sistema linealizado:

$$|\hat{A} - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (a - \lambda)(-c - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (c - a)\lambda - ac = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = a ; \lambda_2 = -c$$

Luego $\Sigma(\hat{A}) = \{a, -c\}$.

En consecuencia de acuerdo al teorema de Hartman – Grobman $X_{01} = (0,0)$ es una singularidad hiperbólica (punto singular hiperbólico). Como uno de los autovalores reales es positivo y el otro es negativo (caso A-3), el punto singular hiperbólico $X_{01} = (0,0)$ es un punto de silla²¹.

Hallando los autovectores asociados:

☞ Para $\lambda_1 = a$:

$$\hat{A} - \lambda_1 I = \hat{A} - aI = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c - a \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in N_{uc}(\hat{A} - aI) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (-c - a)y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(\hat{A} - aI) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0) \rangle \end{aligned}$$

²¹ Ver página 27

$\Rightarrow v_1 = (1, 0)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = a$.

Luego, la subvariedad inestable está dado por:

$$E^u = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} = N_{uc}(\hat{A} - aI)$$

☞ Para $\lambda_2 = -c$:

$$\hat{A} - \lambda_2 I = \hat{A} + cI = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y) \in N_{uc}(\hat{A} + cI) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (a+c)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} N_{uc}(\hat{A} + cI) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1) \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_2 = (0, 1)$ es uno de los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = -c$

Luego, la subvariedad estable está dada por:

$$E^s = \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\} = N_{uc}(\hat{A} + cI)$$

◆ En $X_{02} = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

Linealizando el sistema dado, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\partial F}{\partial X}(X_{02}) = \frac{\partial F}{\partial X}\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los autovalores del sistema linealizado:

$$|\hat{A} - \lambda_2 I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{da}{b} \frac{bc}{d} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + ac = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{-ac} ; \lambda_2 = -\sqrt{-ac}$$

$$\text{Luego } \Sigma(\hat{A}) = \{ \sqrt{-ac}, -\sqrt{-ac} \}.$$

Por tanto el teorema de linealización de Hartman – Grobman no se puede aplicar en este caso²², puesto que los autovalores son imaginarios puros

Luego, el punto singular $X_{02} = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ es un centro (caso D-1).

Sin embargo, para conocer el carácter del punto singular X_{02} utilicemos el criterio de la estabilidad en el sentido de Liapunov.

Del sistema (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}$$

Separando variables:

$$\left(\frac{a - by}{y} \right) dy = \left(\frac{-c + dx}{x} \right) dx$$

Integrando obtenemos:

$$a \ln y - by + c \ln x - dx = k ; k \in \mathbb{R}$$

Cuya gráfica es una curva cerrada. Por tanto el punto singular X_{02} es un centro estable. En efecto:

Al separar variables estamos buscando una función de Liapunov de la forma²³:

²² Ver página 29

²³ Ver página 46

$$V : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X = (x, y) \mapsto V(x, y) = F(x) + G(y)$$

tal que $\dot{V}(X) \leq 0$ en D .

Luego:

$$\dot{V}(x, y) = \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot x(a - by) + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot y(-c + dx)$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x, y) = x \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (a - by) + y \frac{\partial G}{\partial y} \cdot (-c + dx)$$

como $\dot{V}(X) = 0$

$$\Rightarrow x \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (a - by) + y \frac{\partial G}{\partial y} \cdot (-c + dx) = 0$$

$$\Rightarrow x \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (by - a) = y \frac{\partial G}{\partial y} \cdot (-c + dx)$$

$$\Rightarrow \frac{x \frac{\partial F}{\partial x}}{(-c + dx)} = \frac{y \frac{\partial G}{\partial y}}{(by - a)}$$

como x e y son variables independientes, entonces:

$$\frac{x \frac{\partial F}{\partial x}}{(-c + dx)} = \frac{y \frac{\partial G}{\partial y}}{(by - a)} = \text{constante}.$$

Haciendo que la constante sea igual a 1, resulta:

$$\frac{x \frac{\partial F}{\partial x}}{(-c + dx)} = \frac{y \frac{\partial G}{\partial y}}{(by - a)} = 1$$

de donde:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-c + dx}{x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{by - a}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{c}{x} + d \\ \frac{\partial G}{\partial y} = b - \frac{a}{y} \end{cases}$$

integrando se tiene:

$$\begin{cases} F(x) = -c \ln x + dx \\ G(y) = by - a \ln y \end{cases}$$

por tanto:

$$V(x, y) = -c \ln x + dx + by - a \ln y .$$

De esta forma la función de Liapunov V , esta definida para todo $x, y > 0$.

Es decir:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \wedge y > 0\}$$

Como $V(x, y) = -k$, entonces la función de Liapunov V es constante sobre

las curvas solución del sistema (1).

Luego para $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$ y $d = 4$ el sistema (1), será:

$$\begin{cases} x' = x(2 - 3y) \\ y' = y(-2 + 4x) \end{cases} \quad (2)$$

El espacio de fases del sistema autónomo no lineal (2), será:

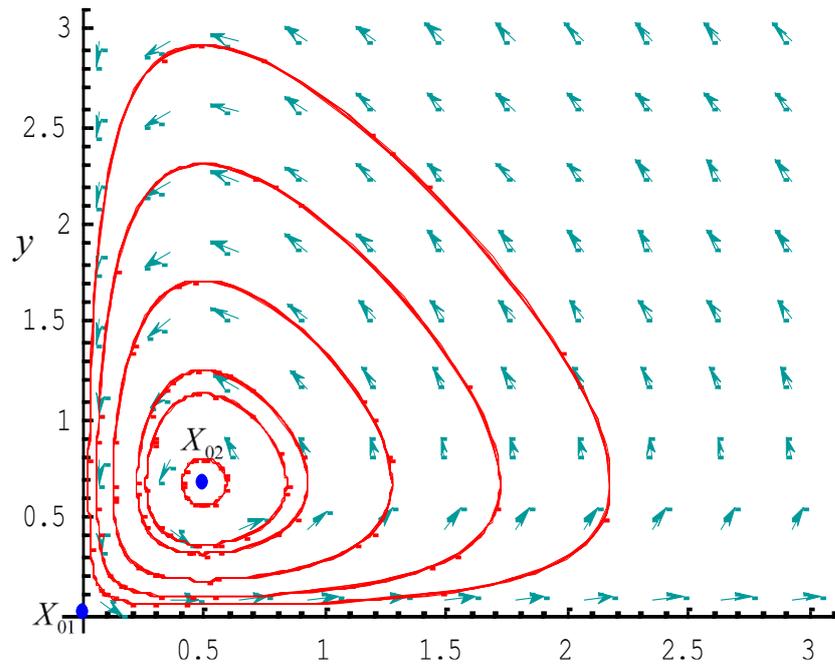


Figura 3.14: Espacio de fases del sistema (2)

Visualización computacional de la figura 3.14



Se observa que no hay ciclos límite.

Luego, toda trayectoria u órbita del sistema (2) es una órbita cerrada, excepto

el punto singular $X_{02} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ y los ejes coordenados.

En general, vemos que si $x_0, y_0 > 0$, entonces $x(t), y(t) > 0$; $\forall t$, por tanto ambas poblaciones sobreviven en mutua coexistencia.

Excepción: si las fluctuaciones son tan amplias tal que $x(t)$ llegue a estar cerca de cero, existe la posibilidad de que las últimas presas lleguen a ser

devoradas, lo que conduciría a la desaparición de ambas especies.

Ahora, hagamos pequeñas perturbaciones o cambios en las funciones escalares del sistema no lineal (1), esto es:

$$\begin{cases} x' = x(2 - 3y) \\ y' = y(-2 + 4x) + \mu \end{cases} \quad (3)$$

donde μ es un parámetro real.

Observemos que sucede con el espacio de fases, cuando efectuamos pequeñas perturbaciones en los valores del parámetro μ :

☞ Para $\mu = -1.5$, el espacio de fases del sistema perturbado (3), será:

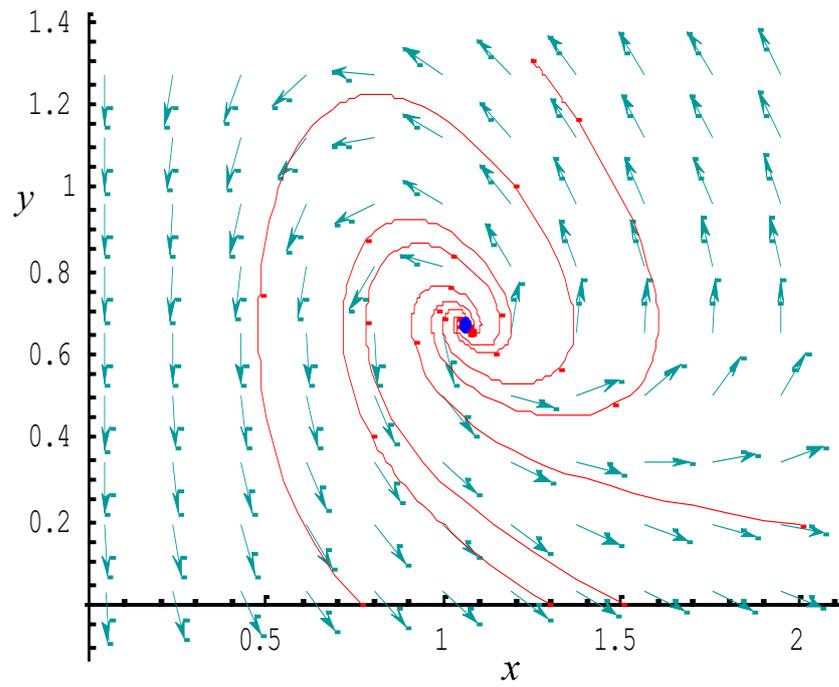


Figura 3.15: Espacio de fases del sistema (3), para $\mu = -1.5$

Visualización computacional de la figura 3.15



☞ Para $\mu = 0.8$, el espacio de fases del sistema perturbado (3), será:

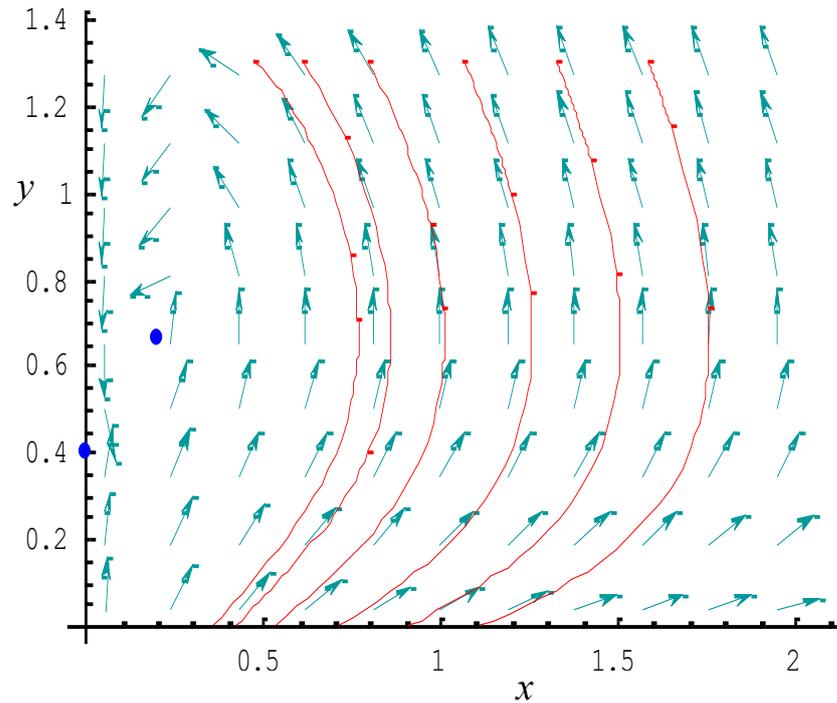


Figura 3.16: Espacio de fases del sistema (3), para $\mu = 0.8$

Visualización computacional de la figura 3.16



En consecuencia, el sistema (1) es estructuralmente inestable, ya que la más mínima perturbación introducida en las funciones de definición del sistema hace que cambie el comportamiento cualitativo del sistema.

CONCLUSIONES

- Primera: Si pequeñas perturbaciones en las funciones involucradas en la definición del sistema dinámico autónomo no lineal, no alteran la estructura topológica del espacio de fases entonces, dicho sistema dinámico es estructuralmente estable.
- Segunda: Para sistemas dinámicos autónomos no lineales estructuralmente estables en el plano, los únicos atractores son los puntos de equilibrio aislados y los ciclos límite estables.
- Tercera: Utilizando el software Matemática version 5.1 se logró visualizar computacionalmente el espacio de fases y el campo de flujo de sistemas autónomos no lineales.
- Cuarta: La estabilidad estructural es una herramienta matemática muy poderosa para resolver problemas de la Naturaleza.

SUGERENCIAS

- 1) Analizar y determinar la estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales con más de un ciclo límite.
- 2) Investigar si será posible aplicar el teorema de Poincare - Bendixon en tres o más dimensiones.
- 3) Investigar la estabilidad estructural de sistemas dinámicos no autónomos lineales y no lineales.
- 4) Investigar los atractores extraños de sistemas dinámicos caóticos dentro de la teoría del caos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. ARNOLD, V. *Équations Différentielles Ordinaires*, Editions MIR, 1974
- [2]. HIRSCH, M – SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974
- [3]. SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 1979
- [4]. TEJERO, A. *Ecuaciones diferenciales Ordinarias*, Proyecto Alqua, 2002
- [5]. PALIS, J – DE MELLO, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Proyecto Euclides, IMPA, 1977
- [6]. SCHUB, M. *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1987
- [7]. ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Editorial MIR , 1969
- [8]. KARTASHOV, A – ROZHDENSTVENSKI, B. *Ecuaciones diferenciales ordinarias y fundamentos del cálculo variacional*, Editorial REVERTE, 1980
- [9]. KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [10]. PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1991

ANEXOS

FUNCIONES UTILIZADAS EN EL MATHEMATICA 5.1 PARA LA VISUALIZACIÓN COMPUTACIONAL DE LOS ESPACIOS DE FASES Y CAMPOS DE FLUJO

```
<<DiffEqs`DEGraphics`  
Needs["Calc`MmaCalc`"]
```

Figura 2.1

```
PhasePlot[{-x,-2y},{t,-4,4},{x,-3,3},  
{y,-3,3},ShowNullclines→True,AspectRatio→Automatic];  
FlowField[{-x,-2 y},{x,-2,2},{y,-2,2},3,ImageSize→  
{350,350}]
```

Figura 2.2

```
PhasePlot[{-2x,-y},{t,-4,4},{x,-3,3},  
{y,-3,3},ShowNullclines→True,AspectRatio→Automatic];  
FlowField[{-2x,- y},{x,-2,2},{y,-2,2},3,ImageSize→  
{350,350}]
```

Figura 2.4

```
PhasePlot[{y,-x},{t,-4,4},{x,-3,3},  
{y,-3,3},ShowNullclines→True,AspectRatio→Automatic];  
FlowField[{y,-x},{x,-2,2},{y,-2,2},3,ImageSize→  
{350,350},Axes→ True]
```

Figura 3.14

```
PhasePlot[{x(2-3y), y(-2+4x)}, {t, -10, 25}, {x, 0, 3}, {y, 0, 3}, InitialPoints→{{1.2,1},{.8,.4}}, MaxCurves→{5,1}, ScaleArrows→.5, PlotStyle→Hue[0], ShowEquilibriumPoints→True]
FlowField[{x(2-3y), y(-2+4x)}, {x,0,3}, {y,0,3}, 3, StepSize→0.2]
```

Figura 3.15

```
PhasePlot[{x(2-3y), y(-2+4x)-1.5}, {t, -10, 25}, {x, 0, 3}, {y, 0, 3}, InitialPoints→{{1.2,1},{.8,.4}}, MaxCurves→{5,1}, ScaleArrows→.5, PlotStyle→Hue[0], ShowEquilibriumPoints→True]
FlowField[{x(2-3y), y(-2+4x)-1.5}, {x,0,3}, {y,0,3}, 3, StepSize→0.2]
```

Figura 3.16

```
PhasePlot[{x(2-3y), y(-2+4x)+0.8}, {t, -10, 25}, {x, 0, 3}, {y, 0, 3}, InitialPoints→{{1.2,1},{.8,.4}}, MaxCurves→{5,1}, ScaleArrows→.5, PlotStyle→Hue[0], ShowEquilibriumPoints→True]
FlowField[{x(2-3y), y(-2+4x)+0.8}, {x,0,3}, {y,0,3}, 3, StepSize→0.2]
```