UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TESIS

GRÁFICOS VERTICALES COMPLETOS CON CURVATURA MEDIA $H = \frac{1}{2}$ EN $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS

AUTOR:
Br. Daniel Ruben Condori Balcon

ASESOR:
Mtro. Derly Pari Mendoza
CÓDIGO ORCID:
0000-0002-6497-2736

CO-ASESOR:
Mgt. Jose Mozo Ayma
CÓDIGO ORCID:
0000-0003-1769-2210

CUSCO - PERÚ
2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, asesor del trabajo de investigación titulado: **GRÁFICOS VERTICALES COMPLETOS CON CURVATURA MEDIA *H* = 1/2 EN H^2xR** presentado por: **DANIEL RUBÉN CONDORI BALCÓN** con DNI Nro.: 45211899 para optar el grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS. Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por DOS veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 7%.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	**X**
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera página del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 15 de agosto de 2024

V° B°

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIDAD DE POSGRADO DIRECCIÓN

Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco
UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Dr. Mario Oswaldo Guzmán Huamán
DIRECTOR

.....
Firma
Post firma: Derly Pari Mendoza
Nro. de DNI: 41756455
ORCID del Asesor: 0000-0002-6497-2736

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: https://unsaac.turnitin.com/viewer/submissions/oid:27259:373181180?locale=es-MX

NOMBRE DEL TRABAJO
Graficos verticales completos con curvatura media H=1_2 en H2xR.pdf

AUTOR
Daniel Ruben Condori Balcon

RECUENTO DE PALABRAS
15668 Words

RECUENTO DE CARACTERES
64234 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS
99 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO
541.6KB

FECHA DE ENTREGA
Aug 15, 2024 10:58 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME
Aug 15, 2024 10:59 AM GMT-5

7% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 4% Base de datos de Internet
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de Crossref
- Base de datos de contenido publicado de Crossref
- 5% Base de datos de trabajos entregados

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 10 palabras)
- Bloques de texto excluidos manualmente

V° B°

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIDAD DE POSGRADO DIRECCIÓN

Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco
UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Dr. Mario Oswaldo Guzmán Huamán
DIRECTOR

Dedicatoria

Dedicado a Micaela, Magdalena y mis queridos padres Roberto y Alejandrina.

Agradecimientos

Mi total consideración y gratitud a mis queridos asesores por la ayuda y guía que me brindaron. A mi querida esposa, hija y padres por haberme impulsado en mi desarrollo profesional. A la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco por brindarme una formación más especializada en el área de las matemáticas.

Resumen

En la presente investigación el espacio de trabajo es la variedad diferenciable $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{H}^2$ es el espacio hiperbólico de dimensión dos con el modelo del semiplano superior. El objetivo principal de este trabajo es demostrar la existencia de gráficos verticales completos en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ definidos sobre dominios exteriores de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ con curvatura media constante $H = \frac{1}{2}$ y crecimiento débil $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Para ello, primeramente se presentan los conceptos de métrica riemanniana definida en una variedad enfatizando la métrica de $\mathbb{H}^2$; en la variedad producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ se establecen propiedades de la métrica producto, conexión riemanniana, geodésica y curvatura; se presentan a los gráficos verticales como un subconjunto del espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dado por $\{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : t = u(x, y)\}$ donde $u : \mathbb{H}^2 \times \{0\} \to \mathbb{R}$ es una función dada como gráfico vertical con curvatura media constante, y se obtiene una relación muy importante de la divergencia de gráficos verticales con su curvatura media mediante una ecuación diferencial parcial de segundo orden, este es un resultado con el cual se consigue la demostración del resultado principal.

Palabras claves: Gráfico vertical, curvatura media, métrica riemanniana, divergencia.

Abstract

In the present investigation, the work space is the differentiable manifold $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, where $\mathbb{H}^2$ is the two-dimensional hyperbolic space with the upper half-plane model. The main objective of this work is to demonstrate the existence of complete vertical graphs in the space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ over exterior domains of $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ with constant mean curvature $H = \frac{1}{2}$ and weak growth $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. To do this, first are presented the concepts of the Riemannian metric defined on a manifold emphasizing the metric of $\mathbb{H}^2$; In the product variety $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, properties of the product metric, Riemannian connection, geodesic and curvature are established; are presented to vertical graphs as a subset of the space $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ given by $\{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : t = u(x, y)\}$ where $u : \mathbb{H}^2 \times \{0\} \to \mathbb{R}$ is a function given as a vertical graph with constant mean curvature, and a very important relationship is obtained from the divergence of vertical graphs with their mean curvature Through a second-order partial differential equation, this is a result with which the demonstration of the main result is achieved.

Keywords: Vertical graph, mean curvature, Riemannian metric, divergence.

Índice general

Dedicatoria **II**

Agradecimiento **III**

Resumen **IV**

1. Planteamiento del Problema **1**

1.1. Planteamiento del Problema 1

1.1.1. Situación Problemática 1

1.1.2. Formulación del Problema 2

1.1.3. Justificación de la Investigación 2

1.1.4. Formulación de Objetivos 3

2. Marco Teórico Conceptual **4**

2.1. Antecedentes de la investigación 4

2.1.1. Antecedentes Internacionales 4

2.1.2. Antecedentes Nacionales 5

2.2. Bases Teóricas 6

2.2.1. Métrica Riemanniana 7

2.2.2. Conexión Riemanniana 14

2.2.3. Geodésicas 27

2.2.4. Curvaturas 31

2.2.5. Gradiente y Divergencia 40

2.3. El Espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 44

2.3.1. Métrica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 45

2.3.2. Símbolos de Christoffel en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 46

2.3.3. Conexión en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 56

2.3.4. Geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 59

2.3.5. Curvatura Seccional en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 62

2.3.6. Curvatura Media y Curvatura de Gauss 63

2.4. Marco Conceptual 68

3. Metodología **69**

3.1. Tipo y nivel de investigación 69

3.2. Unidad de análisis 70

3.3. Técnica de recolección de información 70

4. Gráficos Verticales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ **71**

4.1. Gráficos verticales 71

Conclusiones **88**

Recomendaciones y Sugerencias **89**

Bibliografía **90**

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1. Planteamiento del Problema

1.1.1. Situación Problemática

La geometría hiperbólica en las últimas décadas está adquiriendo mayor importancia por su interrelación con múltiples ramas de la matemática. así mismo estudiar $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ha adquirido mucha importancia en relación a temas de investigación sobre éste espacio. La investigación propuesta está basada en el artículo de Elbert et al. (2012) "Existence of vertical ends of mean curvature 1/2 in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$", que trata sobre los gráficos verticales en la variedad producto del espacio hiperbólico de dimensión 2 con el modelo del semiplano superior con los reales $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Por otro lado, un gráfico vertical en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es el conjunto

$$S = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in \Omega, y > 0\}$$

donde Ω es un dominio y g es una función diferenciable, su curvatura media satisface

una ecuación diferencial parcial de segundo orden. En esta investigación se prueba la existencia de gráficos verticales en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ definidos sobre dominios exteriores de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ con curvatura media constante $H = \frac{1}{2}$ tomando en cuenta que la curva frontera satisface algunas condiciones geométricas. Un ejemplo de curva frontera es la elipse hiperbólica con excentricidad pequeña.

1.1.2. Formulación del Problema

1.1.2.1. Problema General

¿Existen gráficos verticales completos en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ definidos sobre dominios exteriores de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ con curvatura media $H = \frac{1}{2}$ y crecimiento débil $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$?

1.1.2.2. Problemas Específicos

- ¿De qué manera se establecen propiedades y resultados de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ para la solución de problemas relacionados con gráficos verticales?
- ¿De qué forma se relacionan la divergencia de gráficos verticales con su curvatura media mediante una ecuación diferencial parcial de segundo orden?

1.1.3. Justificación de la Investigación

La geometría hiperbólica nació a principios del siglo XIX cuando unos matemáticos como Lobachevsky y Bolyai sentaron sus fundamentos, buscando aclarar la existencia de geometrías planas diferentes de la euclideana.

Lo atractivo del estudio de la geometría hiperbólica, en la actualidad, está

motivado por numerosas y diferentes aplicaciones en el análisis complejo, ecuaciones diferenciales, topología de variedades, sistemas dinámicos, relatividad, etc., mencionadas áreas con multitud de problemas de investigación en las que se trabaja en la actualidad y para las cuales la geometría hiperbólica es una herramienta esencial. Al estudiar ésta geometría no euiclideana, uno se da cuenta de que en esta geometría hiperbólica hay muchas preguntas de investigación por aclarar, por lo que podemos decir que forma una parte activa de la matemática contemporánea.

Un tema reciente en investigaciones es generalizar la teoría del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ al espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con la métrica producto. Abrech, Nelli, Sa Earp, entre otros, investigan este espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Por lo que resulta atractivo investigar acerca de gráficos verticales completos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

1.1.4. Formulación de Objetivos

1.1.4.1. Objetivo General

Demostrar la existencia de gráficos verticales completos en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ definidos sobre dominios exteriores de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ con curvatura media constante $H = \frac{1}{2}$ y crecimiento débil $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

1.1.4.2. Objetivos Específicos

- Establecer propiedades y resultados de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ para la solución de problemas relacionados con gráficos verticales.
- Determinar la relación entre la divergencia de gráficos verticales con su curvatura media mediante una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Capítulo 2

Marco Teórico Conceptual

2.1. Antecedentes de la investigación

2.1.1. Antecedentes Internacionales

1. Santos et al. (2019) realizó la investigación: "Aplicación de Gauss Hiperbólica y Superficies CMC en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$", para optar el grado académico de Maestro en Matemática en la Universidad Federal del Amazonas, Programa de pograduación en Matemática.

   El objetivo general de la investigación fue estudiar las propiedades geométricas de superficies con proyección vertical y curvatura media constante $H = \frac{1}{2}$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

   La investigación llegó a las siguientes conclusiones:

   a) El estudio de que bajo sobre ciertas condiciones impuestas a la superficie, siempre es posible a través de una aplicación harmónica dada, recuperar una superficie de curvatura media $H = \frac{1}{2}$, tal que la aplicación es de Gauss hiperbólica y cuya parametrizacion está en términos de la aplicación.

2. Ruys et al. (2008) realizó la investigación: "Superficies Mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$", para optar el grado académico de Maestro en Matemática en la Universidad Federal de Goiás, Instituto de Matemática y Estadística.

   El objetivo general de la investigación fue hacer un estudio de superficies mínimas simplemente conexas en variedades riemannianas tridimensionales, buscando determinar las condiciones necesarias para encontrar superficies mínimas en estos espacios.

   La investigación llegó a las siguientes conclusiones:

   a) El estudio de las superficies mínimas en $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es un asunto que viene siendo investigado hace pocos años, por eso éste trabajo se limitó al estudio de superficies mínimas sobre esos espacios $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y buscó dar un camino para estudios en otros grupos de Lie.

   b) La construcción de superficies mínimas en grupos de Lie presentados durante la investigación es una generalización de la representación de Weierstrass de superficies mínimas en $\mathbb{R}^3$.

2.1.2. Antecedentes Nacionales

1. Pari (2019) realizó la investigación: "Gráficos horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$", para optar el grado académico de Maestro en Ciencias Matemáticas en la Universidad Nacional de San Agustín, Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Naturales y Formales.

   El objetivo principal de la investigación fue demostrar la no existencia de un gráfico horizontal entero mínimo en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

   La investigación llegó a las siguientes conclusiones:

   a) El principio del máximo para gráficos horizontales es un resultado funda-

mental para la demostración del resultado principal.

b) No existe superficies mínimas M inmersas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal que la frontera asintótica de M en $\partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ esté contenido en una recta.

c) La segunda forma fundamental tiene un rol primordial en la obtención de propiedades geométricas de superficies inmersas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

2. Medrano (2016) realizó la investigación: "Principio del máximo en el espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$", para optar el Título profesional de Licenciado en Matemática en la Universidad Nacional de San Agustín, Facultad de Ciencias Naturales y Formales.

   El objetivo general de la investigación fue estudiar y analizar la teoría de las Hipersuficies de $\mathbb{H}^{n+1}$.

   La investigación llegó a las siguientes conclusiones:

   a) Puesto que las derivadas de una función brindan información acerca del comportamiento de la función, el principio del máximo verifica ésta afirmación.

   b) En particular, una inmersión tiene codimensión 1, donde $\bar{\nabla}_X \xi = -\mathcal{A}_\xi X$.

   c) En el Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, la curvatura media de una subvariedad M con la métrica inducida expresa mediante una ecuación diferencial parcial.

2.2. Bases Teóricas

En esta sección se describen algunos elementos de la geometría riemanniana tomando gran interés en la variedad riemanniana $M = \mathbb{H}^2$ denominado espacio hiperbólico de dimensión dos, usando el modelo del semiplano superior.

2.2.1. Métrica Riemanniana

La métrica riemanniana es "una forma de medir longitudes de vectores tangentes en un punto de una variedad, que varían diferenciablemente con el punto" (Do Carmo, 2011, p. 41). En esta sección se va a definir la métrica riemanniana y se describe en el espacio $\mathbb{H}^2$.

Definición 2.2.1. *Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de aplicaciones $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ con U_α abiertos, tales que:*

1. $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. *Para todo par α, β con $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(U_\alpha) \bigcap \mathbf{x}_\beta^{-1}(U_\beta) = W \neq \phi$, los conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ y $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ son diferenciables.*
3. *La familia $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ es máxima relativament a las condiciones 1 y 2.*

(Do Carmo, 2011, p. 2-3).

Dada una variedad diferenciable M, el espacio tangente a M en el punto $p \in M$ es denotado por T_pM.

Definición 2.2.2. *La métrica riemanniana en una variedad diferenciable M es una correspondencia el cual asocia a cada punto $p \in M$ el producto interno*

$$\langle\ ,\ \rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

tal que, si un sistema de coordenadas locales $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ de p, con $\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ y $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, entonces las funciones $g_{ij} : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{R}$, dadas por

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$$

son diferenciables en U (Do Carmo, 2011, p. 42).

Se observa que el sistema de coordenadas locales $\mathbf{x}$ que se tome, no influye en la definición anterior.

Se puede determinar la diferenciabilidad de la métrica riemanniana como: para todo par de campos vectoriales diferenciables X e Y sobre V, entonces la función producto interno $\langle X, Y\rangle$ es diferenciable en V, donde V es una vecindad de M

A las $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ se les denomina expresión local de la métrica riemanniana en términos del sistemas de coordenadas $\mathbf{x}$.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de T_pM, la matriz asociada al producto interno $\langle\ ,\ \rangle_p = g_p$ es dada por:

$$G_p = (g_{ij}(p)) = \begin{pmatrix} g_p(e_1, e_1) & \cdots & g_p(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p(e_1, e_1) & \cdots & g_p(e_1, e_n) \end{pmatrix}$$

la cual se denomina *matriz de la métrica riemanniana*, el cual es una representación numérica de la métrica riemanniana.

Definición 2.2.3. *Una variedad diferenciable dotado de una métrica riemanniana es llamada variedad riemanniana (Do Carmo, 2011, p. 42).*

En seguida se presentan ejemplos de métricas riemannianas en diferentes variedades diferenciables:

Cuando $M = \mathbb{R}^n$, es decir, la variedad M es el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$, es una variedad riemanniana con $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ dado por $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ y la métrica es dada por:

$$g_{ij} = \langle e_1, e_i\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

Se nota que la matriz de la métrica riemanniana es la matriz identidad, es decir, $G = I$.

Por otro lado, sean M_1 de orden m y M_2 de orden n, variedades riemannianas con métricas g_1 y g_2 respectivamente. El producto cartesiano $M_1 \times M_2$ es una variedad riemanniana de dimensión $m+n$ con la métrica producto g de g_1 y g_2 definida por:

$$g_{(p,q)}(v,w) = (g_1)_p \langle v_1, w_1 \rangle + (g_2)_q \langle v_2, w_2 \rangle$$

Además se observa que:

$$G_{(p,q)} = \left(\begin{array}{c|c} (g_1)_{ij} & 0 \\ \hline 0 & (g_2)_{ij} \end{array} \right)$$

donde: $(p,q) \in M_1 \times M_2$, $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2) \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = T_p M_1 \times T_q M_2$.

Ahora, sea el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$ con el modelo del semiplano superior y su métrica denominada métrica de la geometría no euclideana de Lobatchevski.

Dado el semiespacio de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0 \right\}$$

Se prueba que $\mathbb{H}^2$ es una variedad diferenciable dotado de una métrica riemanniana de dimensión 2. para tal caso, se considera la aplicación producto interno:

$$\langle \, , \, \rangle_p : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$$

con $q = (x, y) \in \mathbb{H}^2$, tales que

$$\langle u, v \rangle_q = \frac{\langle u, v \rangle}{y^2}$$

usando la parametrización identidad $\mathbf{x}$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}_q e_i = e_i$$

de donde, $g_{ij} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$, es definido por:

$$\begin{aligned} g_{ij}(x, y) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x, y), \frac{\partial}{\partial x_j}(x, y) \right\rangle_{(x,y)} \\ &= \langle e_i, e_j \rangle_{(x,y)} \\ &= \frac{\langle e_i, e_j \rangle}{y^2} \\ &= \frac{1}{y^2}\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Los g_{ij} son diferenciables, por lo que, $\mathbb{H}^2$ es una variedad riemanniana y su métrica está dado por

$$g_{ij} = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$$

Otro modelo del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$ es el modelo del disco unitario.

Luego de definir una estructura, naturalmente surge la idea de establecer una noción de equivalencia para dicha estructura, para lo cual se define isometría.

Definición 2.2.4. *Un difeomorfismo $f : M \to N$ entre variedades riemannainas M y N es llamado isometría si:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \tag{2.1}$$

para todo $p \in M$, u,$v \in T_pM$ (Do Carmo, 2011, p. 42).

En tal caso, M y N se denominan *variedades riemannianas isométricas.*

Definición 2.2.5. *Sean M y N variedades riemannianas, una aplicación diferenciable $f : M \to N$ es denominado isometría local en $p \in M$, si existe una vecindad $U \subset M$ de p donde el difeomorfismo $f : U \to f(U) \subset N$ satisface (2.1) (Do Carmo, 2011, p. 42).*

Dos variedades riemannianas M y N son localmente isométricas si para todo $p \in M$ existe una isometría local $f : U \to f(U)$, donde U es una vecindad de p y $f(U)$ está contenido en N.

Ahora se muestra como es que una métrica riemanniana permite determinar el cálculo de longitudes de curvas, para lo cual se presenta la siguiente definición de curva.

Definición 2.2.6. *Una aplicación diferenciable $c : I \to M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ sobre una variedad riemanniana M es denominado una curva (Do Carmo, 2011, P. 46).*

Se nota que se puede admitir puntas y autointersecciones en una curva. Se denomina segmento a la restricción de una curva c a un intervalo cerrado $[a, b] \subset I$.

Definición 2.2.7. *La longitud de un segmento está dado por:*

$$l_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt$$

donde: $\frac{dc}{dt}$ *es el vector tangente de c en $t \in I$ (Do Carmo, 2011, p. 47).*

Es natural cuestionarse la posibilidad de dotar una métrica riemanniana a una variedad diferenciable, la siguiente proposición discute tal situación.

Proposición 2.2.8. *Una variedad diferenciable M de Hausdorff y con base numerable posee una métrica riemanniana (Do Carmo, 2011, p. 47).*

La demostración está en Do Carmo (2011).

Ahora se observa algunas definiciones en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$:

Definición 2.2.9. *La métrica en* $\mathbb{H}^2$ *denotada por* $g_{\mathbb{H}}$ *está definida por:*

$$g_{\mathbb{H}} = \langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{\langle u, v \rangle}{y^2}, \text{ para todo } u, v \in T_p\mathbb{H}^2,$$

donde $p = (x, y)$ *y* $\langle\ ,\ \rangle$ *es el producto interior euclideano en el espacio* $\mathbb{R}^2$ *(Earp and Toubiana, 2009, p. 44).*

Para $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$, se tiene

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{y^2},$$

y se denota por $\| \ \|_{\mathbb{H}}$ la norma en $\mathbb{H}^2$ asociado a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{H}}$

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{H}} &= \sqrt{\langle u, u \rangle_{\mathbb{H}}} \\ &= \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{y} \\ &= \frac{\|u\|}{y} \end{aligned}$$

donde $\| \ \|$ es la norma auclideana en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.2.10. *El eje real denotado por* $\partial_\infty\mathbb{H}^2$ *está definido por:*

$$\partial_\infty\mathbb{H}^2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\big\} \cup \{\infty\}$$

(Earp and Toubiana, 2009, p. 44).

La longitud hiperbólica de una curva c de clase $\mathcal{C}^1$, denotado por $l_{\mathbb{H}}(c)$, esta

dada por:

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{H}} &= \int_a^b g_{\mathbb{H}}\left(c'(t), c'(t)\right)^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \langle c'(t), c'(t)\rangle_{\mathbb{H}}^{1/2}\, dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}}{y(t)} dt. \\ &= \int_a^b \left\|c'(t)\right\|_{\mathbb{H}} dt \end{aligned}$$

La cual es útil para calcular la longitud de un segmento horizontal y vertical. Para lo cual, se tiene:

Un segmento horizontal que une los puntos (x_1, y_0) y (x_2, y_0) esta dado por:

$$c(t) = (x_1, y_0) + t(x_2 - x_1, 0), \quad t \in [0, 1]$$

El vector velocidad esta dado por $c'(t) = (x_2 - x_1, 0)$.

De aqui, se tiene:

$$\begin{aligned} \left\|c'(t)\right\|_{\mathbb{H}} &= \frac{\|c'(t)\|}{y_0} \\ &= \frac{|x_2 - x_1|}{y_0} \end{aligned}$$

Por lo que la longitud del segmento horizontal está dado por

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{H}}(c) &= \int_0^1 \frac{|x_2 - x_1|}{y_0} dt \\ &= \frac{|x_2 - x_1|}{y_0}. \end{aligned}$$

Análogamente, el segmento vertical que une los puntos (x_0, y_1) y (x_0, y_2) esta dado

por:

$$c(t) = (x_0, y_1) + t(0, y_2 - y_1), \quad t \in [0, 1]$$

El vector velocidad esta dado por $c'(t) = (0, y_2 - y_1)$.

De aqui, se tiene:

$$\begin{aligned} \|c'(t)\|_{\mathbb{H}} &= \frac{\|c'(t)\|}{y_1 + t(y_2 - y_1)} \\ &= \frac{|y_2 - y_1|}{y_1 + t(y_2 - y_1)} \end{aligned}$$

Por lo que la longitud del segmento vertical está dado por

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{H}}(c) &= \int_0^1 \frac{|y_2 - y_1|}{y_1 + t(y_2 - y_1)} dt \\ &= \ln|y_2| - \ln|y_1| \\ &= \ln\left|\frac{y_2}{y_1}\right|. \end{aligned}$$

2.2.2. Conexión Riemanniana

En la presente sección se define conexión riemanniana, el cual ayuda a tener distintas formas de derivar, poder observar el cómo se curva una superficie (curvatura) y obtener la distancia más corta entre dos puntos en una variedad (geodésica), además se calculan los símbolos de Christoffel en $\mathbb{H}^2$ y finalmente se expresa la conexión de $\mathbb{H}^2$ con respecto al modelo del semiplano superior.

2.2.2.1. Conexión Afín

Sea $\chi(M)$ el conjunto de campo de vectores de clase $\mathcal{C}^\infty$ en M y $D(M)$ el anillo de funciones reales de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en M, donde M es una variedad diferenciable.

Definición 2.2.11. *Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es una función definida por:*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

el cual cumple con las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde $X, Y, Z \in \chi(M)$ y $f, g \in D(M)$ (Do Carmo, 2011, p. 55).

En seguida, se analiza una conexión respecto a términos locales.
Para lo cual se considera un sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_n)$ para p.

$$X = \sum_i x_i X_i, \qquad Y = \sum_j y_j X_j$$

donde $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i x_i X_i} Y \\
&= \sum_i x_i \nabla_{X_i} Y \\
&= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\
&= \sum_i x_i \left(\sum_j y_j \nabla_{X_i} X_j + X_i \left(\sum_j y_j \right) X_j \right) \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i(y_j) X_j.
\end{aligned}$$

Haciendo $\nabla_{x_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, se observa que Γ_{ij}^k son funciones diferenciables, las cuales son llamados los coeficientes de la conexión afín ∇ o llamados también los **símbolos de Christoffel** de la conexión afín ∇.

Reemplazando en lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_{i,j} x_i y_j \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k + \sum_i x_i X_i \sum_j (y_j) X_j \\ &= \sum_k \sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k X_k + X \sum_k (y_k) X_k \\ &= \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k.\end{aligned}$$

Para ejemplificar se puede considerar los campos vectoriales $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, donde $x_i, y_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se observa que la conexión de $\mathbb{R}^n$ no es más que la derivada direccional, y está dada mediante:

$$\nabla_X Y = (X(y_1), \ldots, X(y_n))$$

Se observa que $X(y_i) = dy_i(X)$ con $i = 1, \ldots, n$.
En otras palabras, $\nabla_X Y(p) = dy_p.X(p)$.

En la siguiente proposición se observa que la elección de una conexión afín en M "proporciona una forma de derivar vectores a lo largo de una curva, por lo que es posible encontrar la aceleración de la curva" (Do Carmo, 2011, p. 53).

Proposición 2.2.12. *Dada una variedad diferencible M dotada de una conexión afín ∇. Entonces existe una aplicación que es única, tal que al campo vectorial V a lo largo de la curva diferenciable $c : I \to M$ le asocia otro campo vectorial $\dfrac{DV}{dt}$ a lo largo de c, el cual es llamado derivada covariante de V a lo largo de la curva c, donde se cumple:*

1. $\dfrac{D}{dt}(V+M) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$.
2. $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$, *$W$ es una campo de vectores a lo largo de c y f es una función diferenciable en I.*

3. *Si V es inducido por un campo de vectores $Y \in \chi(M)$, es decir, $V(t) = Y(c(t))$, entonces* $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$

(Do Carmo, 2011, p.55).

A continuación se define paralelismo.

Definición 2.2.13. *Dada una conexión afín ∇ en M. El campo vectorial V es llamado paralelo a lo largo de una curva $c : I \to M$, si se cumple* $\dfrac{DV}{dt} = 0$, *para todo $t \in I$ (Do Carmo, 2011, p. 58).*

2.2.2.2. Conexión Riemanniana Compatible

En lo posterior, una conexión afín en variedades riemanianas se le denominará conexión riemanniana.

Definición 2.2.14. *Se denomina a la conexión riemanniana ∇ compatible con la métrica riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$, si para cualquier par de campos de vectores paralelos P y P' a lo largo de toda curva diferenciable c, se cumple que $\langle P, P'\rangle$ es constante (Do Carmo, 2011, p. 59).*

En la siguiente proposición se observa que es posible relacionar la regla del producto usual con el producto interno, si la conexión ∇ es compatible con la métrica $\langle\ ,\ \rangle$.

Proposición 2.2.15. *Una conexión riemanniana ∇ en M es compatible con la métrica riemnniana $\langle\ ,\ \rangle$ si y sólo si para todo par de campos vectoriales V y W a*

lo largo de la curva diferenciable $c : I \to M$ *se cumple*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad \textit{para } t \in I$$

(Do Carmo, 2011, p. 59).

Colorario 2.2.16. *La conexión riemanniana* ∇ *es compatible con la métrica* $\langle\ ,\ \rangle$ *si y sólo si*

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \chi(M)$$

(Do Carmo, 2011, p. 60).

Es decir ∇ es compatible si satisface la regla del producto.

Ahora se halla una relación entre la conexión afín y el corchete de Lie.

Definición 2.2.17. *La conexión afín* ∇ *en una variedad diferenciable* M *es denominada simétrica si*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \textit{para cada } X, Y \in \chi(M)$$

(Do Carmo, 2011, p. 60).

Observación: Dado el sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$, decir que la conexión ∇ es simétrica, indica que

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Luego, se tiene

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i,$$

de aqui,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k,$$

esto indica que los símbolos de Christoffel son simétricos respecto a los subíndices, es decir se pueden intercambiar los dos subíndices en los símbolos de Christoffel.

Ahora se enuncia el teorema fundamental de la geometría riemanniana (teorema de Levi-Civita).

Teorema 2.2.18 (**Levi-Civita).** *Dado una variedad riemanniana M, existe una conexión afín en M que cumple las siguientes condiciones:*

1. ∇ *es simétrica.*

2. ∇ *es compatible con la métrica riemanniana.*

(Do Carmo, 2011, p. 61)

Su demostración se encuentra en Do Carmo (2011).

Observación: La existencia y unicidad de la conexión afín ∇ está determinada por la relación

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2}\Big\{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \Big\} \tag{2.2}$$

la cual es simétrica y compatible.

En efecto:

Simetría:

$$\begin{aligned}\langle Z, \nabla_X Y\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}\Big\{Y\langle X, Z\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Z\langle Y, X\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle \\ &\quad - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, X], Z\rangle\Big\} - \frac{1}{2}\Big\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle \\ &\quad - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\langle [X, Y] - [Y, X], Z\rangle \\ &= \langle [X, Y], Z\rangle\end{aligned}$$

De aquí, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Entonces ∇ es simétrica.

Compatible:

Se tiene las siguientes relaciones:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big\{Y\langle X, Z\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Z\langle Y, X\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, X], Z\rangle\Big\}$$

$$\langle Y, \nabla_X Z\rangle = \frac{1}{2}\Big\{Z\langle X, Y\rangle + X\langle Y, Z\rangle - Y\langle Z, X\rangle - \langle [Z, Y], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Z, X], Y\rangle\Big\}$$

Sumando estas dos relaciones,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle .$$

con lo que ∇ es compatible.

Si la conexión ∇ es simétrica y compatible con la métrica riemanniana, entonces ∇ es llamada conexión de Levi-Civita o riemanniana de M.

Para un sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$. De (2.2) se tiene

$$\sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\}$$

donde $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$.

Se observa que para la matriz (g_{km}) se puede hallar su matriz inversa (g^{km}), luego se tiene:

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\sum_{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\}g^{km} \tag{2.3}$$

La cual se denomina expresión clásica de los símbolos de Christoffel de la conexión riemanniana en función a la métrica dada por los g_{ij}.

Se puede observar que en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, se tiene $\Gamma_{ij}^{k} = 0$.

Ahora se expresa la derivada covariante en términos de los símbolos de Christoffel.

Para ello, sea un sistema de coordendas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ y una curva diferenciable $c : I \to M$ con $c(I) \cap \mathbf{x}(U) \neq \phi$ y $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. El campo V localmente está dado por $V = \sum_j v^j X_j,\ j = 1, \ldots, n$, donde $v^j = v^j(t)$ y $X_j = X_j(c(t))$.

Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{DV}{dt} &= \frac{D}{dt}\left(\sum_j v^j X_j\right) \\
&= \sum_j \frac{dv^j}{dt}X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt} \\
&= \sum_j \frac{dv^j}{dt}X_j + \sum_j v^j \nabla_{dc/dt} X_j \\
&= \sum_j \frac{dv^j}{dt}X_j + \sum_j v^j \nabla_{\sum_i \frac{dx_i}{dt}X_i} X_j \\
&= \sum_j \frac{dv^j}{dt}X_j + \sum_{i,j} v^j \frac{dx_i}{dt}\nabla_{X_i} X_j \\
&= \sum_j \frac{dv^j}{dt}X_j + \sum_{i,j} v^j \frac{dx_i}{dt}\sum_k \Gamma_{ij}^{k} X_k.
\end{aligned}$$

De aqui

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right) X_k. \tag{2.4}$$

Como los símbolos de Christoffel son todos ceros en $\mathbb{R}^n$, de (2.4) concluimos que la derivada covariante en $\mathbb{R}^n$ resulta ser la derivada usual.

Ahora se calcula los símbolos de Christoffel en el espacio $\mathbb{H}^2$.

Sea el espacio hiperbólico con el modelo del semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

y la métrica dada por $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$.
Se tiene

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Usando la ecuación (2.3):

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

se calcula los símbolos de Christoffel de la conexión riemanniana en $\mathbb{H}^2$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{k1} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{11} \right\} g^{k1} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} \right\} g^{11} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} \right\} g^{21} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} \right\} g^{11} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y^2} \right) \right\} y^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{12}\right\}g^{k1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}\right\}g^{21} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{11} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{2}{y^3}\right\}y^2 \\
&= -\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{21}\right\}g^{k1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}\right\}g^{21} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{11} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{2}{y^3}\right\}y^2 \\
&= -\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{22}\right\}g^{k1}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}\right\}g^{21}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{11}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{11}\right\}g^{k2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{y^3}\right\}y^2\\
&= \frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{12}\right\}g^{k2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{21}^{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{21}\right\}g^{k2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{22}^{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{22}\right\}g^{k2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{2}{y^3}\right\}y^2\\
&= -\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

En resumen, se tiene:

$$
\Gamma_{11}^{1}=\Gamma_{22}^{1}=\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=0,\quad \Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\Gamma_{22}^{2}=-\frac{1}{y},\quad \Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{y}.
$$

Ahora se calcula la conexión en el espacio $\mathbb{H}^2$. Para lo cual, sean

$$
X=\sum_{i=1}^{2}a_iX_i=a_1X_1+a_2X_2
$$

$$Y = \sum_{j=1}^{2} b_j X_j = b_1 X_1 + b_2 X_2$$

donde $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Por otro lado se tiene:

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Del lo anterior, se tiene los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}.$$

Reemplazando en la relación anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1} X_1 &= \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 = \frac{1}{y} X_2. \\
\nabla_{X_1} X_2 &= \Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2 = -\frac{1}{y} X_1. \\
\nabla_{X_2} X_1 &= \Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2 = -\frac{1}{y} X_1. \\
\nabla_{X_2} X_2 &= \Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2 = -\frac{1}{y} X_2.
\end{aligned}$$

De aquí, la conexión $\nabla_X Y$ de $\mathbb{H}^2$ está dado por:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{a_1X_1+a_2X_2}Y \\
&= a_1\nabla_{X_1}Y + a_2\nabla_{X_2}Y \\
&= a_1\nabla_{X_1}(b_1X_1 + b_2X_2) + a_2\nabla_{X_2}(b_1X_1 + b_2X_2) \\
&= a_1\nabla_{X_1}b_1X_1 + a_1\nabla_{X_1}b_2X_2 + a_2\nabla_{X_2}b_1X_1 + a_2\nabla_{X_2}b_2X_2 \\
&= a_1\left(\frac{\partial b_1}{\partial x}\right)X_1 + a_1b_1\nabla_{X_1}X_1 + a_1\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}\right)X_2 + a_1b_2\nabla_{X_1}X_2 \\
&\quad + a_2\left(\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)X_1 + a_2b_1\nabla_{X_2}X_1 + a_2\left(\frac{\partial b_2}{\partial y}\right)X_2 + a_2b_2\nabla_{X_2}X_2 \\
&= a_1\left(\frac{\partial b_1}{\partial x}\right)X_1 + a_1b_1\frac{1}{y}X_2 + a_1\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}\right)X_2 - a_1b_2\frac{1}{y}X_1 \\
&\quad + a_2\left(\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)X_1 - a_2b_1\frac{1}{y}X_1 + a_2\left(\frac{\partial b_2}{\partial y}\right)X_2 - a_2b_2\frac{1}{y}X_2 \\
&= \left\{a_1\left(\frac{\partial b_1}{\partial x}\right) - a_1b_2\frac{1}{y} + a_2\left(\frac{\partial b_1}{\partial y}\right) - a_2b_1\frac{1}{y}\right\}X_1 \\
&\quad + \left\{a_1b_1\frac{1}{y} + a_1\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}\right) + a_2\left(\frac{\partial b_2}{\partial y}\right) - a_2b_2\frac{1}{y}\right\}X_2.
\end{aligned}$$

2.2.3. Geodésicas

En la presente sección se introduce el concepto de geodésicas, Earp and Toubiana (2009) señala que "son curvas que minimizan la distancia entre dos puntos p y q" (p. 60). Para lo cual vamos a considerar a M una variedad riemanniana dotada de su conexión riemanniana ∇.

Definición 2.2.19. *Una curva parametrizada regular $\gamma : I \to M$ es llamada geodésica en $t_0 \in I$ si se cumple $\dfrac{D}{dt}\left(\dfrac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ en t_0. Se llama geodésica a γ si para cada $t \in I$, γ es geodésica en t (Do Carmo, 2011, p. 68).*

Sea $\gamma : I \to M$ una geodésica, luego se cumple:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle = 0$$

de aqui, la longitud del vector tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ es constante. Se asume que $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = c \neq 0$, con lo que se excluye a las geodésicas las cuales representan a puntos. Por otro lado, la longitud de arco s de la curva γ, desde un punto fijo $t = t_0$, es definido de la siguiente manera:

$$s(t) = \int_{i_0}^{t} \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = c(t - t_0).$$

Lo cual indica que, la longitud de la geodésica y la longitud de arco son proporcionales.

En seguida se va a encontrar las ecuaciones que debe satisfacer una geodésica γ. Para lo cual, sea $(U, \mathbf{x})$ un sistema de coordenadas en torno de $\gamma(t_0)$. Se tiene

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

γ representa una geodésica si

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) \\ &= \frac{D}{dt}\gamma' \\ &= \sum_k \left(\frac{dx'_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} x'_j \frac{dx_i}{dt}\right) X_k \\ &= \sum_k \left(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

De aqui, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0, \quad \text{donde } k = 1, \ldots, n$$

una geodésica debe satisfacer dichas ecuaciones.

Un fibrado tangente TM es un conjunto de pares (q, v), donde $q \in M$ y $v \in T_qM$. Si $(U, \mathbf{x})$ es un sistema de coordenadas en M, entonces todo vector de

T_qM con $q \in \mathbf{x}(U)$ es dado por $\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Una curva diferenciable γ en M dada por $t \to \gamma(t)$, establece una curva en TM dada por $t \to \left(\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right)$. Por lo que, si γ es una geodésica, luego en TU, se tiene la curva

$$t \to \left(x_1(t), \ldots, x_n(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right)$$

la cual cumple la siguiente condición, dada por:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} &= y_k \\ \frac{dy_k}{dt} &= -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j, \ k = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{2.5}$$

en términos de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de TU.

De (2.5) se puede decir que las curvas que satisfacen la ecuación diferencial de segundo orden serán llamadas geodésicas.

lema 1. *Existe un único campo G en TM cuyas trayectorias son de la forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$, donde γ es una geodésica en M (Do Carmo, 2011, p. 70).*

En seguida se halla las geodésicas en la variedad $\mathbb{R}^n$.

Para ello, se sabe que $\Gamma_{ij}^k = 0, \ \forall i, j, k$

Sea $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ una geodésica, es decir

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$$

Luego, $(x_1''(t), \ldots, x_n''(t)) = 0$, de aqui $x_i''(t) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $x_i(t) = a_i t + b_i$.

Por lo tanto, las rectas de la forma

$$\gamma(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}^n.$$

son las geodésicas en $\mathbb{R}^n$.

Por otro lado, en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2$ con el modelo del semiplano superior, se puede considerar la curva α dada por $\alpha(t) = (0, e^t)$, entonces α es una geodésica, en efecto:

Se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (x(t), y(t)) = (0, e^t) \\
\alpha'(t) &= (0, e^t) = e^t \left(\frac{\partial}{dy} \right) \\
\frac{D\alpha'}{dt} &= e^t \frac{\partial}{dy} + e^t \frac{D}{dt} \frac{\partial}{dy}
\end{aligned}$$

Ahora se calcula $\dfrac{D}{dt}\dfrac{\partial}{dy}$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt}\frac{\partial}{dy} &= \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{dy} \\
&= \nabla_{e^t \frac{\partial}{dy}} \frac{\partial}{dy} \\
&= e^t \nabla_{\frac{\partial}{dy}} \frac{\partial}{dy} \\
&= e^t \left[\Gamma^1_{22} \frac{\partial}{dx} + \Gamma^2_{22} \frac{\partial}{dy} \right] \\
&= -e^t \frac{1}{y} \frac{\partial}{dy} \\
&= -\frac{\partial}{dy}.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la igualdad anterior

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = e^t \frac{\partial}{dy} - e^t \frac{\partial}{dy} = 0.$$

De aqui α representa una geodésica de $\mathbb{H}^2$.

Se nota que si f es una isometría de $\mathbb{H}^2$ y γ es una geodésica de $\mathbb{H}^2$, entonces $f(\gamma)$ es también una geodésica de $\mathbb{H}^2$. En efecto, si γ minimiza la distancia entre dos puntos p y q cualesquiera de γ, como f preserva distancia entre los puntos y la longitud de las curvas, entonces $f(\gamma)$ minimiza tambien aa distancia entre los puntos $f(p)$ y $f(q)$.

En $\mathbb{H}^2$ se tienen solamente dos tipos de geodésicas, como indica el siguiente teorema.

Teorema 2.2.20. *Por dos puntos de $\mathbb{H}^2$ pasa una y sólo una geodésica. Más aún las únicas geodésicas de $\mathbb{H}^2$ son las semirectas verticales y los semicírculos ortogonales al eje real (Earp and Toubiana, 2009, p. 62).*

2.2.4. Curvaturas

En la presente sección se introduce el concepto de curvatura, Do Carmo (2011) indica que "la curvatura intuitivamente, mide el cuánto una variedad riemanniana deja de ser euclidiana" (p. 99).

Definición 2.2.21. *La curvatura R de una variedad riemanniana M es una correspondencia el cual asocia a cada par $X, Y \in \chi(M)$ una aplicación $R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$ definida mediante*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

donde $Z \in \chi(M)$ y ∇ es la conexión riemanniana de M (Lee, 2006, p. 117).

Cuando $M = \mathbb{R}^n$ se observa que $R(X,Y)Z = 0$ donde X, Y, Z son campos vectoriales en $\chi(\mathbb{R}^n)$.

En efecto, sea el campo vectorial $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ en coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$, luego se obtiene que

$$\begin{aligned} \nabla_X Z &= \nabla_X (z_1, \ldots, z_n) \\ &= (Xz_1, \ldots, Xz_n) \end{aligned}$$

De aqui

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X Z &= (YXz_1, \ldots, YXz_n) \\ \nabla_X \nabla_Y Z &= (XYz_1, \ldots, XYz_n) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos afirmar que R mide intuitivamente cuanto M deja ser euclideana.

Para definir de otra manera la curvatura, consideramos un sistema de coordenadas $\{x_i\}$ en torno de $p \in M$. Se cumple que $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, luego

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

de aqui, se nota que la curvatura mide la no conmutatividad de la derivada covariante.

En las siguientes proposiciones se exhiben propiedades sobre la curvatura.

Proposición 2.2.22. *La curvatura R de una variedad riemanniana goza de las siguientes propiedades:*

1. *R es bilineal en $\chi(M) \times \chi(M)$, es decir,*

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1) \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2) \end{aligned}$$

   $f, g \in D(M),\ X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$.

2. *Para todo par $X, Y \in \chi(M)$ el operador curvatura $R(X,Y) : \chi(M) \to \chi(M)$, es lineal, esto es,*

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

   $f \in D(M)$, $Z, W \in \chi(M)$ (Do Carmo, 2011, p. 100).

Su demostración se encuentra en Lee (2006).

Proposición 2.2.23 (Primera identidad de Bianchi)**.** *Sean X, Y, Z, T campos de vectores, se cumple:*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

(Do Carmo, 2011, p. 101).

En adelante, se escribirá por conveniencia $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = (X, Y, Z, T)$.

Proposición 2.2.24. *Sean X, Y, Z, T campos de vectores, se cumplen:*

1. $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$
2. $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$
3. $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$
4. $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$

(Do Carmo, 2011, p. 102).

Ahora se escribe la curvatura R en un sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ en torno de $p \in M$.
Se denota, $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, luego

$$X = \sum_i u^i X_i,\ Y = \sum_j v^j X_j,\ Z = \sum_k w^k X_k,$$

Sea la curvatura escrita de la forma

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l.$$

Donde R^l_{ijk} son las componentes de la curvatura R en $(U, \mathbf{x})$. Se obtiene por linealidad de R,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R^l_{ijk} u^i v^j w^k X_l.$$

Ahora, a fin de determinar R^l_{ijk} en función a los simbolos de Christoffel Γ^k_{ij}, se tiene,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k \\ &= \nabla_{X_j}\left(\sum_l \Gamma^l_{ik} X_l\right) - \nabla_{X_i}\left(\sum_l \Gamma^l_{jk} X_l\right), \end{aligned}$$

Del ésto, resulta que

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}.$$

Haciendo que

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_l R^l_{ijk}g_{ls} = R_{ijks}$$

se puede reescribir las relaciones dadas en la proposición 2.2.24, de la siguiete manera:

$$\begin{aligned} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} &= 0 \\ R_{ijks} &= -R_{jiks} \\ R_{ijks} &= -R_{ijsk} \\ R_{ijks} &= R_{ksij}. \end{aligned}$$

Un caso particular se puede considerar $M = \mathbb{R}^n$ con la métrica usual, como los símbolos de Christoffel son $\Gamma^k_{i,j} = 0,\ \forall i, j, k$, entonces $R^l_{ijk} = 0$, luego

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R^l_{ijk}u^i v^j w^k X_l = 0.$$

Una expresión de la curvatura de $\mathbb{H}^2$ está dado de la siguiente manera:

Sea la variedad riemanniana $M = \mathbb{H}^2$ con la métrica riemanniana $g_{ij} = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$.

Los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0,\ \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y},\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}.$$

La curvatura esta dado por:

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k=1}^{2} u^i v^j w^k R(X_i, X_j)X_k,$$

donde, $X = \sum_{i=1}^{2} u^i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^{2} v^j X_j$, $Z = \sum_{k=1}^{2} w^k X_k$.

Luego,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j}(\nabla_{X_i}X_k) - \nabla_{X_i}(\nabla_{X_j}X_k) + \nabla_{[X_i,X_j]}X_k \\ &= \nabla_{X_j}(\nabla_{X_i}X_k) - \nabla_{X_i}(\nabla_{X_j}X_k). \end{aligned}$$

Se tiene los casos:

Si $i = j$, entonces

$$R(X_1, X_1)X_1 = 0$$

$$R(X_1, X_1)X_2 = 0$$

$$R(X_2, X_2)X_1 = 0$$

$$R(X_2, X_2)X_2 = 0.$$

Si $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2)X_1 &= \nabla_{X_2}(\nabla_{X_1}X_1) - \nabla_{X_1}(\nabla_{X_2}X_1) = \nabla_{X_2}(\frac{1}{y}X_2) - \nabla_{X_2}(-\frac{1}{y}X_1) \\ &= \frac{1}{y}\nabla_{X_2}X_2 - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y})X_2 + \frac{1}{y}\nabla_{X_1}X_1 - \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{y})X_1 \\ &= -\frac{1}{y^2}X_2 - \frac{1}{y^2}X_2 + \frac{1}{y^2}X_2 \\ &= -\frac{1}{y^2}X_2. \end{aligned}$$

Análogamente se tienen:

$$R(X_1, X_2)X_2 = \frac{1}{y^2}X_1$$

$$R(X_2, X_1)X_1 = \frac{1}{y^2}X_2$$

$$R(X_2, X_1)X_2 = -\frac{1}{y^2}X_1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \sum_{i,j,k=1}^{2} u^i v^j w^k R(X_i, X_j)X_k \\
&= u^1v^1w^1R(X_1,X_1)X_1 + u^1v^1w^2R(X_1,X_1)X_2 + u^1v^2w^1R(X_1,X_2)X_1 \\
&\quad + u^2v^1w^1R(X_2,X_1)X_1 + u^1v^2w^2R(X_1,X_2)X_2 + u^2v^1w^2R(X_2,X_1)X_2 \\
&\quad + u^2v^2w^1R(X_2,X_2)X_1 + u^2v^2w^2R(X_2,X_2)X_2 \\
&= -\frac{1}{y^2}u^1v^2w^1X_2 + \frac{1}{y^2}u^2v^1w^1X_2 + \frac{1}{y^2}u^2v^1w^2X_1 - \frac{1}{y^2}u^2v^1w^2X_1 \\
&= \frac{1}{y^2}w^2(u^1v^2 - u^2v^1)X_1 + \frac{1}{y^2}w^1(u^2v^1 - u^1v^2)X_2
\end{aligned}$$

2.2.4.1. Curvatura Seccional

Existe una relación entre la curvatua seccional o riemanniana con el operador curvatura.

Dado un espacio vectorial V, se usa la siguiente notación:

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

el cual no es más que el área del paralelogramo determinado por los vectores $x, y \in V$.

Proposición 2.2.25. *Sea $\sigma \subset T_pM$ un subespacio bidimensional del espacio tan-*

gente T_pM y sean $x, y \in \sigma$ dos vectores linealmente independientes. Entonces

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

no depende de la elección de los vectores $x, y \in \sigma$ (Do Carmo, 2011, p. 104).

A continuación se define curvatura seccional.

Definición 2.2.26 (curvatura seccional)**.** *Dado un punto $p \in M$ y un subespacio bidimensional $\sigma \subset T_pM$ el número real $K(x,y) = K(\sigma)$, dado por*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}$$

es llamado curvatura seccional de σ en p, donde $\{x, y\}$ es una base cualquiera de σ (Do Carmo, 2011, p. 105).

Ahora se calcula la curvatura seccional de $\mathbb{H}^2$, para lo cual se usa el modelo del semiplano superior.

Se sabe que

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}.$$

además los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = 0,\ \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y},\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}.$$

Se puede escribir la curvatura seccional como:

$$K = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = \frac{R_{ijij}}{\frac{1}{y^2}\frac{1}{y^2}} = R_{ijij}y^4.$$

Se halla R_{ijij}.

$$\begin{aligned} R_{ijij} &= \sum_l R^l_{iji} g_{lj} \\ &= R^j_{iji} g_{jj} \\ &= \frac{1}{y^2} R^j_{iji} \\ &= \frac{1}{y^2}\left(\sum_l \Gamma^l_{ii}\Gamma^j_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{ji}\Gamma^j_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^j_{ii} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^j_{ji}\right). \end{aligned}$$

Si $i = 1$ y $j = 2$, se tiene:

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{y^2}\left(\sum_l \Gamma^l_{11}\Gamma^2_{2l} - \sum_l \Gamma^l_{21}\Gamma^2_{1l} + \frac{\partial}{\partial y}\Gamma^2_{11} - \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2_{21}\right) \\ &= \frac{1}{y^2}\left(\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} + \frac{\partial}{\partial y}\Gamma^2_{11} - \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2_{21}\right) \\ &= \frac{1}{y^2}\left(0.(0) + \frac{1}{y}.(-\frac{1}{y}) - (-\frac{1}{y}).(\frac{1}{y}) - 0.(0) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right) \\ &= \frac{1}{y^2}(-\frac{1}{y^2}) \\ &= -\frac{1}{y^4}. \end{aligned}$$

Luego, $K = -1$.

Si $i = 2$ y $j = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
R_{2121} &= \frac{1}{y^2}\left(\sum_l \Gamma^l_{22}\Gamma^1_{1l} - \sum_l \Gamma^l_{12}\Gamma^1_{2l} + \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1_{22} - \frac{\partial}{\partial y}\Gamma^1_{12}\right) \\
&= \frac{1}{y^2}\left(\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} + \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^1_{22} - \frac{\partial}{\partial y}\Gamma^1_{12}\right) \\
&= \frac{1}{y^2}\left(0.(0) + (-\frac{1}{y}).(-\frac{1}{y}) - (-\frac{1}{y}).(-\frac{1}{y}) - 0.(0) + \frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{y})\right) \\
&= \frac{1}{y^2}(-\frac{1}{y^2}) \\
&= -\frac{1}{y^4}
\end{aligned}$$

luego, $K = -1$.

Entonces, $\mathbb{H}^2$ tiene curvatura seccional constante igual a -1.

2.2.5. Gradiente y Divergencia

Definición 2.2.27 (Gradiente). *Sea M una variedad riemanniana y sean $X \in \chi(M)$ y $f \in D(M)$, se define el gradiente de f como el campo vectorial ∇f en M dado por:*

$$\langle \nabla f(p), v\rangle = df_p(v), \text{ donde } p \in M,\ v \in T_pM$$

(Do Carmo, 2011, p. 93).

Se toma el sistema de coordenadas $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ de T_pM, para un i, sea

$v = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, se tiene:

$$\left\langle \nabla f(p), \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \tag{2.6}$$

Como: $\nabla f(p) \in T_pM$

$$\begin{aligned}\nabla f(p) &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_n} + \ldots a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\end{aligned}$$

luego, se tiene:

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla f(p), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i g_{ij}\end{aligned} \tag{2.7}$$

de (2.6) y (2.7):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i g_{ij}$$

por g^{kj}:

$$\begin{aligned} g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= g^{kj} \sum_{i=1}^{n} a_i g_{ij} \\ g^{kj} \sum_{i=1}^{n} a_i g_{ij} &= g^{kj} \sum_{i=1}^{n} a_i g_{ij} \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} g^{kj} g_{ij} a_i &= \sum_{j=1}^{n} g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \end{aligned} \tag{2.8}$$

como: $\sum_{i=1}^{n} \left(g^{kj} g_{ij}\right) = \delta_{ki}$

Se reemplaza en (2.8):

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} a_i = \sum_{j=1}^{n} g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}(p)$$
$$a_k = \sum_{j=1}^{n} g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}(p), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \nabla f(p) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para la variedad $M = \mathbb{R}^n$, se cumple que $g^{ij} = \delta_{ij}$ de aquí:

$$\begin{aligned} \nabla_0 f(p) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(p) \end{aligned}$$

el cual representa al gradiente habitual de f en p de $\mathbb{R}^n$

Ahora se define la divergencia.

Definición 2.2.28 (Divergencia)**.** *Sea M una variedad riemanniana. Dado un campo vectorial $X \in \chi(M)$. Definimos la divergencia de X como la función $div(X) : M \to \mathbb{R}$ dado por:*

$$div(X) = traza\,(Y \mapsto \nabla_Y X)$$

donde: $Y \in \chi(M)$ y ∇ es la conexión riemanniana (Levi-Civita) de M (Do Carmo, 2011, p. 93).

Se nota que la $div(X)$ no depende de Y.

Ahora se halla la divergencia en términos de los simbolos de Christoffel.

En un sistema de coordenadas $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ y una parametrización con coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, se tiene $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_i} = X_i \right\}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ base de $T_p(M)$, $\forall p \in \varphi(U) \subset M$.

Sean, $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ e $Y = X_j$, de aqui, se calcula $\nabla_Y X$.

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X &= \nabla_{X_j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{X_j} \left(a_i X_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(X_j \left(a_i \right) X_i + a_i \nabla_{X_j} X_i \right)
\end{aligned}$$

reemplazando $\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$ en la anterior

$$\begin{aligned}
\nabla_Y X &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_j \left(a_i \right) X_i + a_i \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_j \left(a_i \right) X_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^k X_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_j \left(a_k \right) X_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^k X_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(X_j \left(a_k \right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^k \right) X_k
\end{aligned}$$

o bien,

$$\nabla_Y X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} X_k$$

donde $\alpha_{jk} = X_j \left(a_k \right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^k$.

Luego, se tiene

$$\begin{aligned} div(X) &= traza\,(y \mapsto \nabla_Y X) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i(a_i) + \sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} \right) \end{aligned}$$

o también

$$div(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i} \right) \tag{2.10}$$

Si se tiene la variedad $M = \mathbb{R}^n$, aquí se cumple $\Gamma_{ij}^{k} = 0$, $\forall i, j, k = 1, 2, \ldots, n$; $\forall X \in \chi\,(\mathbb{R}^n)$ se cumple:

$$\begin{aligned} div(X) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{aligned}$$

donde $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = (a_1, a_2, \ldots, a_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $div(X) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el cual representa la divergencia usual en $\mathbb{R}^n$.

2.3. El Espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Los resultados obtenidos al estudiar el espacio $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ han dado lugar al estudio del espacio producto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, en este espacio se estudian propiedades como geodésica, curvatura, entre otros. En esta sección se muestran algunos resultados sobre dicho espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

2.3.1. Métrica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Sea un punto $p = (x, y, t)$ del espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, sean a, b en $T_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ con $a = (u_1, v_1, t_1)$, $b = (u_2, v_2, t_2)$, se recuerda que la métrica para $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g(a,b) &= \langle a, b \rangle_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \\ &= \langle (u_1, v_1, t_1), (u_2, v_2, t_2) \rangle_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}} \\ &= \langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{\mathbb{H}^2} + t_1 t_2 \\ &= \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{y^2} + t_1 t_2 \end{aligned}$$

Se considera la parametrización $\phi(x, y, t) = (x, y, t),\ y > 0$ y la base asociada $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial t} \right\},\ \dfrac{\partial}{\partial x} = \partial_x,\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \partial_y,\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \partial_t.$

Con esto se calcula los g_{ij} de la métrica

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

también se puede calcular los g^{ij} de la métrica

$$G^{-1} = \left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.2. Símbolos de Christoffel en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Para calcular los símbolos de Christoffel del espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, se usa la ecuación (2.3)

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.$$

Se calcula los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{k1} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{11} \right\} g^{k1} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} \right\} g^{11} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} \right\} g^{21} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{31} - \frac{\partial}{\partial x_3} g_{11} \right\} g^{31} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} \right\} g^{11} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y^2} \right) \right\} y^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{k1} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{11} \right\} g^{k2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1} g_{11} \right\} g^{12} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} \right\} g^{22} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{31} - \frac{\partial}{\partial x_3} g_{11} \right\} g^{32} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ - \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} \right\} g^{22} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^2} \right) \right\} y^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{y^3} \right\} y^2 \\
&= \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{11} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{11}\right\}g^{k3}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{11}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{23}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{31}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}\right\}g^{33}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}\right\}g^{33}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{12}\right\}g^{k1}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}\right\}g^{21}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}\right\}g^{31}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{11}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{2}{y^3}\right\}y^2\\
&= -\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{12}^{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{12}\right\}g^{k2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}\right\}g^{22} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}\right\}g^{32} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{22} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{12}^{3} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{12}\right\}g^{k3} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}\right\}g^{23} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}\right\}g^{33} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{13}^{1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{13}\right\}g^{k1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}\right\}g^{21} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}\right\}g^{31} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}\right\}g^{11} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{13}\right\}g^{k2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}\right\}g^{22} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}\right\}g^{32} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k1}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{13}\right\}g^{k3} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}\right\}g^{23} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}1\right\}1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{21}\right\}g^{k1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}\right\}g^{21} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}\right\}g^{31} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}\right\}g^{11} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{2}{y^3}\right\}y^2 \\
&= -\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{21}\right\}g^{k2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}\right\}g^{22} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}\right\}g^{32} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{22} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{21} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{21}\right\}g^{k3} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{21}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}\right\}g^{23} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}\right\}g^{33} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{22}\right\}g^{k1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}\right\}g^{21} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}\right\}g^{31} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{11} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{22}\right\}g^{k2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}\right\}g^{22}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}\right\}g^{32}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}\right\}g^{22}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{2}{y^3}\right\}y^2\\
&= -\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{22} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{22}\right\}g^{k3}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{22}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{22}\right\}g^{23}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}\right\}g^{33}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}\right\}g^{33}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{23}\right\}g^{k1}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}\right\}g^{21}\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}\right\}g^{31}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{23}^{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{23}\right\}g^{k2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}\right\}g^{22} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}\right\}g^{32} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}\right\}g^{22} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{23}^{3} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k2}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{23}\right\}g^{k3} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}\right\}g^{23} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}1\right\}1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{31}^{1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{31}\right\}g^{k1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{31}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}\right\}g^{21} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}\right\}g^{31} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}\right\}g^{11} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{31}^{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{31}\right\}g^{k2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{31}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}\right\}g^{22} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}\right\}g^{32} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{31}^{3} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{1k}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{31}\right\}g^{k3} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{11}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{31}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{31}\right\}g^{23} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}+\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}1\right\}1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{32} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{32}\right\}g^{k1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}\right\}g^{21} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}\right\}g^{31} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{32} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{32}\right\}g^{k2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}\right\}g^{22} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}\right\}g^{32} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}\right\}g^{22} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{32} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{2k}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{32}\right\}g^{k3} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{32}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{22}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{32}\right\}g^{23} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}1\right\}1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{33}\right\}g^{k1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}\right\}g^{11}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}\right\}g^{21} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}\right\}g^{31} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}\right\}g^{11} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}1\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{33}\right\}g^{k2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}\right\}g^{12}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}\right\}g^{22} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}\right\}g^{31} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}\right\}g^{22} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial}{\partial y}1\right\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{33}^{3} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{3k}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{k3}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{33}\right\}g^{k3} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{31}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{13}-\frac{\partial}{\partial x_1}g_{33}\right\}g^{13}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{32}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{23}-\frac{\partial}{\partial x_2}g_{33}\right\}g^{23} \\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}+\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}-\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}g_{33}\right\}g^{33} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}1\right\}1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

En resumen,

$$\Gamma_{11}^{1}=\Gamma_{11}^{3}=\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{12}^{3}=\Gamma_{13}^{1}=\Gamma_{13}^{2}=\Gamma_{13}^{3}=\Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{21}^{3}=\Gamma_{22}^{1}=\Gamma_{22}^{3}=$$

$$\Gamma_{23}^{1}=\Gamma_{23}^{2}=\Gamma_{23}^{3}=\Gamma_{31}^{1}=\Gamma_{31}^{2}=\Gamma_{31}^{3}=\Gamma_{32}^{1}=\Gamma_{32}^{2}=\Gamma_{32}^{3}=\Gamma_{33}^{1}=\Gamma_{33}^{2}=\Gamma_{33}^{3}=0$$

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{y}$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\Gamma_{22}^{2}=-\frac{1}{y}$$

2.3.3. Conexión en $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$

Para hallar una expresión de la conexión de $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, con el modelo del semiplano superior en $\mathbb{H}^2$.

Se usa la notación $X_1=\partial_x,\ X_2=\partial_y$ y $X_3=\partial_t$, se consideran los campos:

$$X=\sum_{i=1}^{3}a_iX_i \qquad\qquad Y=\sum_{j=1}^{3}b_jX_j$$

Por otro lado se tiene

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{3} \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Reemplazando los símbolos de Christoffel calculados anteriormente, se tiene:

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1} X_1 &= \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 + \Gamma_{11}^3 X_3 \\
&= \frac{1}{y} X_2 \\
\nabla_{X_1} X_2 &= \Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2 + \Gamma_{12}^3 X_3 \\
&= -\frac{1}{y} X_1 \\
\nabla_{X_1} X_3 &= \Gamma_{13}^1 X_1 + \Gamma_{13}^2 X_2 + \Gamma_{13}^3 X_3 \\
&= 0 \\
\nabla_{X_2} X_1 &= \Gamma_{21}^1 X_1 + \Gamma_{21}^2 X_2 + \Gamma_{21}^3 X_3 \\
&= -\frac{1}{y} X_1 \\
\nabla_{X_2} X_2 &= \Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2 + \Gamma_{22}^3 X_3 \\
&= -\frac{1}{y} X_2 \\
\nabla_{X_2} X_3 &= \Gamma_{23}^1 X_1 + \Gamma_{23}^2 X_2 + \Gamma_{23}^3 X_3 \\
&= 0 \\
\nabla_{X_3} X_1 &= \Gamma_{31}^1 X_1 + \Gamma_{31}^2 X_2 + \Gamma_{31}^3 X_3 \\
&= 0 \\
\nabla_{X_3} X_2 &= \Gamma_{32}^1 X_1 + \Gamma_{32}^2 X_2 + \Gamma_{32}^3 X_3 \\
&= 0 \\
\nabla_{X_3} X_3 &= \Gamma_{33}^1 X_1 + \Gamma_{33}^2 X_2 + \Gamma_{33}^3 X_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Con estos resultados se calcula la conexión $\nabla_X Y$.

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{a_1X_1+a_2X_2+a_2X_3} Y \\ &= a_1\nabla_{X_1}Y + a_2\nabla_{X_2}Y + a_3\nabla_{X_3}Y \qquad (2.11)\end{aligned}$$

Se calcula cada uno de los tres sumandos:

$$\begin{aligned}a_1\nabla_{X_1}Y &= a_1\nabla_{X_1}(b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3) \\ &= a_1\nabla_{X_1}b_1X_1 + a_1\nabla_{X_1}b_2X_2 + a_1\nabla_{X_1}b_3X_3 \\ &= a_1\frac{\partial}{\partial x}b_1X_1 + a_1b_1\nabla_{X_1}X_1 + a_1\frac{\partial}{\partial x}b_2X_2 + a_1b_2\nabla_{X_1}X_2 + a_1\frac{\partial}{\partial x}b_3X_3 + a_1b_3\nabla_{X_1}X_3 \\ &= a_1\frac{\partial}{\partial x}b_1X_1 + a_1b_1\frac{1}{y}X_2 + a_1\frac{\partial}{\partial x}b_2X_2 - a_1b_2\frac{1}{y}X_1 + a_1\frac{\partial}{\partial x}b_3X_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2\nabla_{X_2}Y &= a_2\nabla_{X_2}(b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3) \\ &= a_2\nabla_{X_2}b_1X_1 + a_2\nabla_{X_2}b_2X_2 + a_2\nabla_{X_2}b_3X_3 \\ &= a_2\frac{\partial}{\partial y}b_1X_1 + a_2b_1\nabla_{X_2}X_1 + a_2\frac{\partial}{\partial y}b_2X_2 + a_2b_2\nabla_{X_2}X_2 + a_2\frac{\partial}{\partial y}b_3X_3 + a_2b_3\nabla_{X_2}X_3 \\ &= a_2\frac{\partial}{\partial y}b_1X_1 - a_2b_1\frac{1}{y}X_1 + a_2\frac{\partial}{\partial y}b_2X_2 - a_2b_2\frac{1}{y}X_2 + a_2\frac{\partial}{\partial y}b_3X_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3\nabla_{X_3}Y &= a_3\nabla_{X_3}(b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3) \\ &= a_3\nabla_{X_3}b_1X_1 + a_3\nabla_{X_3}b_2X_2 + a_3\nabla_{X_3}b_3X_3 \\ &= a_3\frac{\partial}{\partial t}b_1X_1 + a_3b_1\nabla_{X_3}X_1 + a_3\frac{\partial}{\partial t}b_2X_2 + a_3b_2\nabla_{X_3}X_2 + a_3\frac{\partial}{\partial t}b_3X_3 + a_3b_3\nabla_{X_3}X_3 \\ &= a_3\frac{\partial}{\partial t}b_1X_1 + a_3\frac{\partial}{\partial t}b_2X_2 + a_3\frac{\partial}{\partial t}b_3X_3\end{aligned}$$

Reemplazando en (2.11), se tiene:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \left\{a_1\frac{\partial}{\partial x}b_1 - a_1b_2\frac{1}{y} + a_2\frac{\partial}{\partial y}b_1 - a_2b_1\frac{1}{y} + a_3\frac{\partial}{\partial t}b_1\right\}X_1 \\ &+ \left\{a_1b_1\frac{1}{y} + a_1\frac{\partial}{\partial x}b_2 + a_2\frac{\partial}{\partial y}b_2 - a_2b_2\frac{1}{y} + a_3\frac{\partial}{\partial t}b_2\right\}X_2 \\ &+ \left\{a_1\frac{\partial}{\partial x}b_3 + a_2\frac{\partial}{\partial y}b_3 + a_3\frac{\partial}{\partial t}b_3\right\}X_3.\end{aligned}$$

2.3.4. Geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

En esta sección se hallan geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a partir de las geodésicas en $\mathbb{H}^2$, luego se muestra que las rectas verticales son geodésicas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Sea la curva α dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), t)$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, donde $(x(t), y(t))$ es una geodésica de $\mathbb{H}^2$, se muestra que α es una geodésica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

En efecto, se tiene: $\alpha' = x'\partial_x + y'\partial_y + \partial_t$

$$\begin{aligned}\frac{D\alpha'}{dt} &= x''\partial_x + x'\frac{D}{dt}\partial_x + y''\partial_y + y'\frac{D}{dt}\partial_y + \frac{D}{dt}\partial_t \\ &= x''\partial_x + y''\partial_y + x'\frac{D}{dt}\partial_x + y'\frac{D}{dt}\partial_y + \frac{D}{dt}\partial_t \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Ahora se calcula por separado los tres ultimos sumandos:

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}\partial_x &= \nabla_{\alpha'}\partial_x = x'\nabla_{\partial_x}\partial_x + y'\nabla_{\partial_y}\partial_x + \nabla_{\partial_t}\partial_x \\ &= x'\frac{1}{y}\partial_y - y'\frac{1}{y}\partial_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dt}\partial_y &= \nabla_{\alpha'}\partial_y = x'\nabla_{\partial_x}\partial_y + y'\nabla_{\partial_y}\partial_y + \nabla_{\partial_t}\partial_y \\
&= -x'\frac{1}{y}\partial_x - y'\frac{1}{y}\partial_y \\
\frac{D}{dt}\partial_t &= 0.
\end{aligned}$$

Reemplazando y ordenando en (2.12), se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{D\alpha'}{dt} &= x''\partial_x + y''\partial_y + x'\left(\frac{x'}{y}\partial_y - \frac{y'}{y}\partial_x\right) + y'\left(-\frac{x'}{y}\partial_x - \frac{y'}{y}\partial_y\right) \\
&= \left(x'' - 2\frac{x'y'}{y}\right)\partial_x + \left(y'' + \frac{(x')^2}{y} - \frac{(y')^2}{y}\right)\partial_y. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que una geodésica satisface el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x_k'' + \sum_{i,j} x_i' x_j' \Gamma_{i,j}^k = 0.$$

Si: $k = 1$, y reemplazando los símbolos de Christoffel calculados anteriormente, se tiene:

$$\begin{aligned}
x_1'' + \sum_{i,j} x_i' x_j' \Gamma_{i,j}^1 &= 0 \\
x'' + (x')^2\Gamma_{11}^1 + x'y'\Gamma_{12}^1 + x'y'\Gamma_{21}^1 + (y')^2\Gamma_{22}^1 &= 0 \\
x'' - 2\frac{x'y'}{y} &= 0.
\end{aligned}$$

Si: $k = 2$. y reemplazando los símbolos de Christoffel calculados anteriormen-

te, se tiene:

$$\begin{aligned} x_2'' + \sum_{i,j} x_i' x_j' \Gamma_{i,j}^2 &= 0 \\ y'' + (x')^2 \Gamma_{11}^2 + x'y'\Gamma_{12}^2 + x'y'\Gamma_{21}^2 + (y')^2 \Gamma_{22}^2 &= 0 \\ y'' + \frac{(x')^2}{y} - \frac{(y')^2}{y} &= 0. \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.13), se tiene

$$\frac{D}{dt}\alpha' = 0.$$

Entonces, α es un geodésica.

Ahora se muestra que las rectas de forma $L : P_0 + t(0,0,1) = \alpha(t)$ son geodésicas, para lo cual, $\alpha'(t) = (0,0,1) = \dfrac{\partial}{\partial t} = \partial_t$

De aqui:

$$\begin{aligned} \frac{D\alpha'}{dt} &= \frac{D}{dt}\partial_t \\ &= \nabla_{\partial_t}\partial_t \\ &= \Gamma_{33}^1\partial_x + \Gamma_{33}^2\partial_y + \Gamma_{33}^3\partial_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta L es una geodésica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

2.3.5. Curvatura Seccional en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

En esta sección se calcula la curvatura seccional en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Para la cual, se tiene:

$$K = \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}}$$

donde

$$\begin{aligned} R_{ijij} &= \sum_l R^l_{iji} g_{lj} \\ &= R^j_{iji} g_{jj} \\ &= g_{jj}\left(\sum_l \Gamma^l_{ii}\Gamma^j_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{ji}\Gamma^j_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^j_{ii} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^j_{ji} \right). \end{aligned}$$

Reemplazando los símbolos de Christoffel calculados anteriormente, para cada caso:

- Si $i = 1$ y $j = 2$, se tiene:

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{y^2}\left(\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{11}\Gamma^2_{23} - \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{21}\Gamma^2_{13} + \frac{\partial}{\partial y}\Gamma^2_{11} - \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^2_{21} \right) \\ &= \frac{1}{y^2}\left(0.(0) + \frac{1}{y}.\left(-\frac{1}{y}\right) + 0.(0) - \left(-\frac{1}{y}\right).\left(\frac{1}{y}\right) - 0.(0) - 0.(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(0) \right) \\ &= -\frac{1}{y^4} \end{aligned}$$

luego, $K = -1$.

Análogamente, calculamos la curvatura seccional para los otros valores de i y j:

- Si $i = 2$ y $j = 1$ se tiene: $R_{2121} = -\dfrac{1}{y^4}$. Luego, $K = -1$.
- Si $i = 1$ y $j = 3$, se tiene: $R_{1313} = 0$. Luego $K = 0$.
- Si $i = 3$ y $j = 1$, se tiene: $R_{3131} = 0$. Luego $K = 0$.
- Si $i = 2$ y $j = 3$, se tiene: $R_{2323} = 0$. Luego $K = 0$.
- Si $i = 3$ y $j = 2$, se tiene: $R_{3232} = 0$. Luego $K = 0$.

2.3.6. Curvatura Media y Curvatura de Gauss

Una propiedad importante de la curvatura media de las superficies es, si su curvatura media es cero, a la superficie se le denomina superficie mínima. En la presente sección se calcula la curvatura media en función de los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Para ello, se considera a S como una superficie con parametrización local

$$\begin{aligned} X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \\ (u_1, u_2) &\mapsto X(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Definición 2.3.1. *Sea I_p la primera forma fundamental en $T_p(S)$ de la superficie $S \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ la cual es una forma bilineal simétrica positiva dada por,*

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,$$

donde $p \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *y* $w \in T_p(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R})$ *(Do Carmo, 2011, p. 39).*

En la parametrización X, se considera la base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$, se nota que el vector $w \in T_pS$ es tangente a una curva parametrizada $\alpha(t) = X(u_1(t), u_2(t))$, con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,
donde $p = \alpha(0) = X(u_{1_0}, u_{2_0})$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\
&= \langle X_{u_1} u_1' + X_{u_2} u_2', X_{u_1} u_1' + X_{u_2} u_2' \rangle_p \\
&= \langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle_p (u_1')^2 + 2 \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle_p u_1' u_2' + \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle_p (u_2')^2 \\
&= g_{11}(u_1')^2 + 2g_{12} u_1' u_2' + g_{22}(u_2')^2
\end{aligned}$$

A los coeficientes $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, donde $X_i = \dfrac{\partial X}{\partial u_i}$, se les denomina coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$.

Dado N un vector normal unitario a la superficie S en $p \in S$, se define la segunda forma fundamental.

Definición 2.3.2. *Sea* $\mathbf{II}_p$ *la segunda forma fundamental en* $T_p(S)$ *de la superficie* $S \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *la cual es una forma bilineal simétrica dada por:*

$$\mathbf{II}_p(w) = \left\langle -\overline{\nabla}_w N, w \right\rangle = \langle A(w), w \rangle ,$$

donde $p \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $w \in T_pS$, N *vector normal unitario a* S *y* $\overline{\nabla}$ *es la conexión riemanniana (Do Carmo, 2011, p. 141).*

Se denomina operador de Weingartein al operador $A(w) = -\overline{\nabla}_w N$.

En seguida se expresa la segunda forma fundamental $\mathbf{II}_p$ en la base $\{X_{u_1}, X_{u_2}\}$

asociada a la parametrización X, para lo cual se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{II}_p(\alpha'(0)) &= \left\langle -\overline{\nabla}_{\alpha'(0)}N, \alpha'(0)\right\rangle_p \\
&= \left\langle N, \overline{\nabla}_{\alpha'(0)}\alpha'(0)\right\rangle_p \\
&= \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_1}u_1'+X_{u_2}u_2'}(X_{u_1}u_1' + X_{u_2}u_2')\right\rangle_p \\
&= \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_1}}X_{u_1}\right\rangle (u_1')^2 + 2\left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_2}}X_{u_1}\right\rangle u_1'u_2' + \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_2}}X_{u_2}\right\rangle (u_2')^2 \\
&= b_{11}(u_1')^2 + b_{12}u_1'u_2' + b_{22}(u_2')^2
\end{aligned}$$

Los coeficientes dados por:

$$b_{ij} = \left\langle -\overline{\nabla}_{X_{u_i}}N, X_{u_j}\right\rangle = \left\langle N, \overline{\nabla}_{X_{u_i}}X_{u_j}\right\rangle,$$

se les denomina los coeficientes de la segunda forma fundamental, donde $\overline{\nabla}$ es la conexión riemanniana de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y N es el vector normal unitario.

Se denota por $B = (b_{ij})$ a la matriz de la segunda forma fundamental.

Se observa que el operador $A = -\overline{\nabla}N$ es lineal y autoadjunto.

Definición 2.3.3. *Se define la curvatura media $H = H(N)$ y la curvatura de Gauss extrínseca K_{ext} de S mediante*

$$H(N) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\textit{traza } A}{2} \quad y$$

$$K_{ext} = \lambda_1\lambda_2 = \ \textit{det } A,$$

Los autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2$ de A, son llamados curvaturas principales. El vector curvatura media es definido mediante $\overrightarrow{H} = H(N)$ (Lee, 2006, p. 142)

En seguida se obtiene expresiones entre las curvaturas y los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales.

Se observa que $\nabla_{X_u} N$ y $\nabla_{X_v} N$, donde $u = u_1$ y $v = u_2$ son tangentes,

$$\begin{aligned} -\nabla_{X_u} N &= N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ -\nabla_{X_v} N &= N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\nabla_{\alpha'} N = (a_{11} X_u + a_{21} X_v) u' + (a_{12} X_u + a_{22} X_v) v';$$

de aqui,

$$A \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Sobre la base $\{X_u, X_v\}$, la matriz (a_{ij}) representa el operador de Weingartein A. Se observa que esta matriz no es necesariamente simétrica.

Por otra lado

$$\begin{aligned} -b_{12} &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11} X_u + a_{21} X_v, X_v \rangle = a_{11} g_{12} + a_{21} g_{22}, \\ -b_{21} &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12} X_u + a_{22} X_v, X_u \rangle = a_{12} g_{11} + a_{22} g_{21}, \\ -b_{11} &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11} X_u + a_{21} X_v, X_u \rangle = a_{11} g_{11} + a_{21} g_{21}, \\ -b_{22} &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12} X_u + a_{22} X_v, X_v \rangle = a_{12} g_{12} + a_{22} g_{22}, \end{aligned}$$

esto se puede ser escrito es su forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

de donde se puede deducir las expresiones de los coeficientes a_{ij}

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{b_{12}g_{12} - b_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ a_{12} &= \frac{b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ a_{21} &= \frac{b_{11}g_{12} - b_{12}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ a_{22} &= \frac{b_{12}g_{12} - b_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} H(N) &= \frac{1}{2}\text{traza } (A) = \frac{1}{2}\frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ K_{ext} &= \det (A) = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Luego, se tiene: $g_{11} = g_{22} = \dfrac{1}{y^2}$.

Por lo tanto la curvatura media y la curvatura de Gauss están dadas por:

$$H = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{y^2}b_{22} + \frac{1}{y^2}b_{11}}{\frac{1}{y^2}\frac{1}{y^2}} = \frac{y^2}{2}(b_{11} + b_{22})$$

$$K_{ext} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\frac{1}{y^2}\frac{1}{y^2}} = y^4(b_{11}b_{22} - b_{12}^2).$$

2.4. Marco Conceptual

En esta sección se presentan algunas definiciones que serán utilizados en el desarrollo de la investigación.

Curvatura Media y Curvatura de Gauss: La curvatura media H y la curvatura de Gauss extrínseca K_{ext} de S estan dados por:

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{traza\, A}{2}$$

$$K_{ext} = \lambda_1.\lambda_2 = det\, A$$

los autovalores λ_1 y λ_2 del operador de Weingartein A, son llamados curvaturas principales.

Espacio Hiperbólico: El semiespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

es llamado espacio hiperbólico de dimensión 2.

Gráfico Vertical: Un gráfico vertical en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es el conjunto:

$$Gr(f) = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}; (x, y) \in \Omega, t = u(x, y)\},$$

donde Ω es una abierto de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $u : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Tipo y nivel de investigación

La presente investigación pertenece al tipo básico, puesto que según Avila (2001), "está destinada a aportar un cuerpo organizado de conocimientos científicos" basados en la geometría riemanniana, la cual se caracteriza porque los resultados sirven para profundizar e incrementar los conocimientos acerca de los gráficos verticales en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Sumando a ello el autor indica que dicho tipo de investigación se preocupa de recoger información de la realidad para enriquecer el conocimiento teórico científico, orientada al descubrimiento de principios y leyes en el campo mencionado.

El enfoque de la presenta investigación es cualitativo puesto que según Sampieri et al. (2014) "El enfoque cualitativo es recomendable cuando el tema del estudio ha sido poco explorado o no se ha hecho investigación al respecto" (p. 358), es de nivel descriptivo puesto que se recolecta información no numérica como definiciones y propiedades importantes de la geometría riemanniana, y por su naturaleza el diseño es no experimental, según Sampieri et al. (2014) "se realizan sin la manipulación

deliberada de variables y en los que sólo se observan los fenómenos en su ambiente natural para analizarlos" (p. 154).

3.2. Unidad de análisis

Según Sampieri et al. (2014), "la unidad de análisis es un segmento de contenido textual, auditivo o visual que se analiza para generar categorías" (p. 461). En la presente investigación se estudia a los gráficos verticales en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

3.3. Técnica de recolección de información

Según Avila (2001), "es recomendable tener la garantia de obtener los datos que necesite, y verificar el tipo de información disponible" (p. 125). Para la recolección de información se usó libros, tesis y artículos que están relacionados al tema de investigación.

Capítulo 4

Gráficos Verticales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

4.1. Gráficos verticales

En la presente sección se estudia los gráficos verticales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, dando ejemplos de gráficos verticales, se muestra algunas propiedades las cuales serán útiles para la demostración del teorema final.

Definición 4.1.1. *Un gráfico vertical en* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *es un conjunto dado por*

$$Gr(u) = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{H}^2 \ y \ t = u(x, y)\},$$

donde Ω *es un abierto de* $\mathbb{H}^2$ *y* $u : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ *es una función de clase* $\mathcal{C}^2$ *(Elbert et al., 2012, p. 1180).*

Se halla una expresión para la curvatura media de una superficie dada por un gráfico vertical que está parametrizada por $X(x, y) = (x, y, u(x, y))$, donde $(x, y) \in \Omega$ y u es una función de clase $\mathcal{C}^2$.

Para lo cual, se calcula los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental.

Se tienen las derivadas parciales:

$$X_x(x,y) = (1, 0, u_x(x,y)),\ X_y(x,y) = (0, 1, u_y(x,y)).$$

Por lo que los coeficientes de la primera forma fundamental están dados por:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_x, X_x \rangle = \frac{1}{y^2} + u_x^2 \\ g_{12} = g_{21} &= \langle X_x, X_y \rangle = u_x u_y \\ g_{22} &= \langle X_y, X_y \rangle = \frac{1}{y^2} + u_y^2. \end{aligned}$$

Antes de calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental, se necesita el vector normal unitario a la superficie. Para lo cual, sea $\bar{N} = (N_1, N_2, N_3)$, un vector normal a la superficie, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{N}, X_x \right\rangle &= 0 \\ \langle (N_1, N_2, N_3), (1, 0, u_x) \rangle &= 0 \\ \frac{1}{y^2} N_1 + N_3 u_x &= 0 \\ \Rightarrow N_1 &= -y^2 N_3 u_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{N}, X_y \right\rangle &= 0 \\ \langle (N_1, N_2, N_3), (0, 1, u_y) \rangle &= 0 \\ \frac{1}{y^2} N_2 + N_3 u_y &= 0 \\ \Rightarrow N_2 &= -y^2 N_3 u_y. \end{aligned}$$

De aquí, resulta que

$$\bar{N} = (-y^2 N_3 u_x, -y^2 N_3 u_y, N_3).$$

También

$$\begin{aligned}
|\bar{N}|^2 &= \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle \\
&= \langle (-y^2 N_3 u_x, -y^2 N_3 u_y, N_3), (-y^2 N_3 u_x, -y^2 N_3 u_y, N_3) \rangle \\
&= \frac{1}{y^2}(y^4 N_3^2 u_x^2 + y^4 N_3^2 u_y^2) + N_3^2 \\
&= N_3^2 y^2 \left(u_x^2 + u_y^2 + \frac{1}{y^2} \right) \\
\Rightarrow |\bar{N}| &= N_3 y \left(u_x^2 + u_y^2 + \frac{1}{y^2} \right)^{1/2} \\
&= N_3 (y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Entonces el vector unitario normal a la superficie está dado por:

$$N = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{(-y^2 u_x, -y^2 u_y, 1)}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \tag{4.1}$$

Ahora, para calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental, se tiene:

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_x} X_x &= \nabla_{\partial_x + u_x \partial_t}(\partial_x + u_x \partial_t) \\
&= \nabla_{\partial_x}(\partial_x + u_x \partial_t) + u_x \nabla_{\partial_t}(\partial_x + u_x \partial_t) \\
&= \nabla_{\partial_x} \partial_x + u_x \nabla_{\partial_x} \partial_t + \frac{\partial}{\partial x} u_x \partial_t \\
&= \frac{1}{y} \partial_y + u_{xx} \partial_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_x} X_y &= \nabla_{\partial_x + u_x \partial_t}(\partial_y + u_y \partial_t) \\
&= \nabla_{\partial_x}(\partial_y + u_y \partial_t) + u_x \nabla_{\partial_t}(\partial_y + u_y \partial_t) \\
&= \nabla_{\partial_x} \partial_y + u_y \nabla_{\partial_x} \partial_t + \frac{\partial}{\partial x} u_y \partial_t \\
&= -\frac{1}{y} \partial_x + u_{xy} \partial_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_y} X_y &= \nabla_{\partial_y + u_y \partial_t}(\partial_y + u_y \partial_t) \\
&= \nabla_{\partial_y}(\partial_y + u_y \partial_t) + u_y \nabla_{\partial_t}(\partial_y + u_y \partial_t) \\
&= \nabla_{\partial_y} \partial_y + u_y \nabla_{\partial_y} \partial_t + \frac{\partial}{\partial y} u_y \partial_t \\
&= -\frac{1}{y} \partial_y + u_{yy} \partial_t.
\end{aligned}$$

los cuales reemplazando a las expresiones de los coeficientes de la segunda forma fundamental, se tiene

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \langle N, \nabla_{X_x} X_x \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{(-y^2 u_x, -y^2 u_y, 1)}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \right), \left(0, \frac{1}{y}, u_{xx} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \left[\frac{1}{y^2} \left(-y^2 u_y \right) \left(\frac{1}{y} \right) + u_{xx} \right] \\
&= \frac{1}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \left(-\frac{u_y}{y} + u_{xx} \right) \\
&= \frac{-u_y + y u_{xx}}{y(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{12} &= \langle N, \nabla_{X_x} X_y \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{(-y^2 u_x, -y^2 u_y, 1)}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \right), \left(-\frac{1}{y}, 0, u_{xy} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \left[\frac{1}{y^2} \left(-y^2 u_x \right) \left(-\frac{1}{y} \right) + u_{xy} \right] \\
&= \frac{1}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \left(\frac{u_x}{y} + u_{xy} \right) \\
&= \frac{u_x + y u_{xy}}{y(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_{22} &= \langle N, \nabla_{X_y} X_y \rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{(-y^2 u_x, -y^2 u_y, 1)}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \right), \left(0, -\frac{1}{y}, u_{yy} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \left[\frac{1}{y^2} \left(-y^2 u_y \right) \left(-\frac{1}{y} \right) + u_{yy} \right] \\
&= \frac{1}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \left(\frac{u_y}{y} + u_{yy} \right) \\
&= \frac{u_y + y u_{yy}}{y(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Como la curvatura media en términos de los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales mostrada en (2.14) está dada por:

$$
H = \frac{1}{2} \frac{g_{11} b_{22} + g_{22} b_{11} - 2 g_{12} b_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}
$$

Se halla

$$
\begin{aligned}
g_{11} b_{22} &= \frac{1}{y^2} (1 + y^2 u_x^2) \frac{u_y + y u_{yy}}{y(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \\
&= \frac{y(1 + y^2 u_x^2) u_{yy} + u_y + y^2 u_x^2 u_y}{y^3 (y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{22} b_{11} &= \frac{1}{y^2} (1 + y^2 u_y^2) \frac{-u_y + y u_{xx}}{y(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \\
&= \frac{y(1 + y^2 u_y^2) u_{xx} - u_y - y^2 u_y^3}{y^3 (y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2g_{12}b_{12} &= -2u_xu_y\frac{u_x+yu_{xy}}{y(y^2u_x^2+y^2u_y^2+1)^{1/2}} \\
&= \frac{-2y^2u_x^2u_y-2y^3u_xu_yu_{xy}}{y^3(y^2u_x^2+y^2u_y^2+1)^{1/2}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{11}g_{22}-g_{12}^2 &= \frac{1}{y^2}(1+y^2u_x^2)\frac{1}{y^2}(1+y^2u_y^2)-u_x^2u_y^2 \\
&= \frac{1}{y^4}(1+y^2(u_x^2+u_y^2)+y^4u_x^2u_y^2)-u_x^2u_y^2 \\
&= \frac{1}{y^4}\left(1+y^2u_x^2+y^2+u_y^2\right).
\end{aligned}
$$

Reemplazando estas relaciones, tenemos:

$$
\begin{aligned}
2H &= \frac{\dfrac{y(1+y^2u_x^2)u_{yy}+y^2u_x^2u_y+y(1+y^2u_y^2)u_{xx}-y^2u_y^3-2y^2u_x^2u_y-2y^3u_xu_yu_{xy}}{y^3(y^2u_x^2+y^2u_y^2+1)^{1/2}}}{\dfrac{1}{y^4}\left(1+y^2u_x^2+y^2u_y^2\right)} \\
&= \frac{y^2((1+y^2u_x^2)u_{yy}+(1+y^2u_y^2)u_{xx}-(u_x^2+u_y^2)yu_y-2y^2u_xu_yu_{xy})}{\left(1+y^2u_x^2+y^2u_y^2\right)^{3/2}}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Para un caso en particular, sea la superficie $t=x^2+y^2,\ y>0$, se calcula su curvatura media, el cual está dada por la relación (4.2).

Sea $u(x,y)=x^2+2y^2,\ y>0$, el gráfico vertical.

donde $u_x=2x,\ u_y=4y,\ u_{xx}=2,\ u_{xy}=u_{yx}=0,\ u_{yy}=4$.

El cual al reemplazar en la ecuación (4.2), se tiene

$$
\begin{aligned}
2H &= \frac{y^2(4(1+4x^2y^2)+2(1+16y^4)-(4x^2+16y^2)4y^2-2y^2(2x)(2y)(0))}{(1+4x^2y^2+16y^4)^{3/2}} \\
&= \frac{y^2(4+16x^2y^2+2+32y^4-16x^2y^2-64y^4)}{(1+4y^2(x^2+4y^2))^{3/2}} \\
&= \frac{2y^2(3-16y^4)}{(1+4y^2(x^2+4y^2))^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Entonces, la curvatura media del gráfico vertical dado por:

$u(x,y) = x^2 + 2y^2,\ y > 0$, es:

$$H = \frac{y^2(3 - 16y^4)}{(1 + 4y^2(x^2 + 4y^2))^{3/2}}.$$

Ahora se relaciona la curvatura media con el divergencia, es decir:

Proposición 4.1.2. *Para un gráfico vertical $Gr(u)$ de u en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura media H constante y $N = -\dfrac{\nabla_{\mathbb{H}} u}{W_u} + \dfrac{1}{W_u}\dfrac{\partial}{\partial t}$ campo de vectores unitarios normales, con $W_u = \sqrt{1 + |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2_{\mathbb{H}}}$ siendo $|\cdot|_{\mathbb{H}}$ la norma en $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$, se cumple:*

$$div_{\mathbb{H}}\left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}} u}{W_u}\right) = 2H \tag{4.3}$$

donde $div_{\mathbb{H}}$, $\nabla_{\mathbb{H}}$ son la divergencia hiperbólica y gradiente hiperbólico respectivamente (Elbert et al., 2012, p. 1180).

Antes de demostrar la proposición 4.1.2, se verifica lo siguiente:
De la ecuación (2.9), se tiene:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbb{H}} u &= \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= y^2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_1} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&= y^2 u_x \frac{\partial}{\partial x_1} + y^2 u_y \frac{\partial}{\partial x_2} \\
&= y^2 (u_x, u_y) \\
&= y^2 \nabla_0 u
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
|\nabla_{\mathbb{H}} u|_{\mathbb{H}}^2 &= \langle \nabla_{\mathbb{H}} u, \nabla_{\mathbb{H}} u \rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \left\langle y^2 \nabla_0 u, y^2 \nabla_0 u \right\rangle_{\mathbb{H}} \\
&= y^4 \langle \nabla_0 u, \nabla_0 u \rangle_{\mathbb{H}} \\
&= y^4 \frac{\langle \nabla_0 u, \nabla_0 u \rangle}{y^2} \\
&= y^2 |\nabla_0 u|^2 \\
&= y^2 \left(u_x^2 + u_y^2 \right)
\end{aligned}$$

de aqui, W_u esta dado por:

$$\begin{aligned}
W_u &= \sqrt{1 + |\nabla_{\mathbb{H}} u|_{\mathbb{H}}^2} \\
&= \sqrt{1 + y^2 u_x + y^2 u_y}
\end{aligned}$$

Ahora, de (4.1):

$$\begin{aligned}
N = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} &= \frac{(-y^2 u_x, -y^2 u_y, 1)}{(y^2 u_x^2 + y^2 u_y^2 + 1)^{1/2}} \\
&= -\frac{y^2 u_x}{W_u} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y^2 u_y}{W_u} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{W_u} \frac{\partial}{\partial t} \\
&= -\frac{1}{W_u} \left(y^2 u_x \frac{\partial}{\partial x} + y^2 u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{W_u} \frac{\partial}{\partial t} \\
&= -\frac{\nabla_{\mathbb{H}} u}{W_u} + \frac{1}{W_u} \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

Por otro lado, la divergencia hiperbólica $div_{\mathbb{H}}(X)$ para un campo X dado por $X = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial}{\partial y}$, usando (2.10), tenemos:

$$
\begin{aligned}
div_{\mathbb{H}}(X) &= \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{2} a_j \Gamma_{ij}^{i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{2}\left(a_1\Gamma_{i1}^{i} + a_2\Gamma_{i2}^{i}\right) \\
&= \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + a_1\left(\Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{21}^{2}\right) + a_2\left(\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{2}\right)
\end{aligned}
$$

reemplazando los simbolos de Christoffel hallados en (2.3):

$$
\Gamma_{11}^{1} = \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{22}^{1} = 0, \quad \Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{y}.
$$

$$
\begin{aligned}
div_{\mathbb{H}}(X) &= \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} - \frac{2}{y}a_2 \\
&= div(X) - \frac{2}{y}a_2
\end{aligned}
$$

donde div es la divergencia usual en $\mathbb{R}^2$.

Ahora se procede con la demostración de la proposición 4.1.2.

prueba de la proposición 4.1.2. Con lo anterior, se prueba la ecuación (4.3): Para facilitar el cálculo se hace el siguiente cambio:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{1 + y^2u_x^2 + y^2u_y^2} \\
r_x &= \frac{y^2\left(u_xu_{xx} + u_yu_{yx}\right)}{r} \\
r_y &= \frac{y(u_x^2 + u_y^2) + y^2(u_xu_{xy} + u_yu_{yy})}{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
div_{\mathbb{H}}\left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}}u}{\sqrt{1+|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2_{\mathbb{H}}}}\right) &= div_{\mathbb{H}}\left(\frac{y^2\left(u_x,u_y\right)}{r}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2u_x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2u_y}{r}\right)-\frac{2}{y}\left(\frac{y^2u_y}{r}\right)\\
&= \frac{y^2\left(ru_{xx}-u_xr_x\right)}{r^2}+\frac{r\left(y^2u_{yy}+\cancel{u_y2y}\right)-y^2u_yr_y}{r^2}-\cancel{\frac{2yu_y}{r}}\\
&= \frac{y^2}{r^3}\left(r^2u_{xx}-u_xrr_x+r^2u_{yy}-u_yrr_y\right)\\
&= \frac{y^2}{r^3}(\left(1+y^2u_x^2+y^2u_y^2\right)u_{xx}-u_xy^2\left(u_xu_{xx}+u_yu_{yx}\right)+\\
&\quad+\left(1+y^2u_x^2+y^2u_y^2\right)u_{yy}-u_y\left(y(u_x^2+u_y^2)+y^2(u_xu_{xy}+u_yu_{yy})\right))\\
&= \frac{y^2}{r^3}(\left(1+y^2u_x^2+\cancel{y^2u_y^2}-\cancel{y^2u_y^2}\right)u_{yy}+\left(1+\cancel{y^2u_x^2}+y^2u_y^2-\cancel{u_x^2y^2}\right)u_{xx}-\\
&\quad-y^2u_xu_yu_{yx}-\left(u_x^2+u_y^2\right)yu_y-y^2u_xu_yu_{xy}\\
&= \frac{y^2\left(\left(1+y^2u_x^2\right)u_{yy}+\left(1+y^2u_y^2\right)u_{xx}-\left(u_x^2+u_y^2\right)yu_y-2y^2u_xu_yu_{xy}\right)}{\left(1+y^2u_x^2+y^2u_y^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

por la ecuación (4.2):

$$
div_{\mathbb{H}}\left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}}u}{\sqrt{1+|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2_{\mathbb{H}}}}\right)=2H
$$

con lo que concluye la demostración. □

Definición 4.1.3. *Sea $0<\beta<\alpha\leq 1$. Se define la distancia horizontal entre $\mathcal{H}_\alpha$ y $\mathcal{H}_\beta$ como la distancia entre $\mathcal{H}_\alpha\cap\{t=0\}$ y $\mathcal{H}_\beta\cap\{t=0\}$, es decir, como el número positivo $r_\beta-r_\alpha=-\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$ (Elbert et al., 2012, p. 1182).*

La siguiente proposición garantiza que, para un n particular, la distancia entre $\mathcal{H}_\alpha\cap\{t=n\}$ y $\mathcal{H}_\beta\cap\{t=n\}$ es casi la misma que la distancia a la altura cero, es decir, la distancia horizontal. El cual es un resultado importante para el barrier en la demostración del teorema 4.1.11.

Proposición 4.1.4. *Sea $0<\beta<\alpha\leq 1$. El radio de $\mathcal{H}_\alpha\cap\{t=n\}$ es denotado por R_α y el radio de $\mathcal{H}_\beta\cap\{t=n\}$ por R_β. Entonces, $R_\alpha\approx 2\ln n+\ln\alpha$ y $R_\beta\approx 2\ln n+\ln\beta$, para algún n, esto es, $R_\alpha-R_\beta\approx-\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$ (Elbert et al., 2012, p. 1182).*

El objetivo es construir gráficos verticales que tengan curvatura media $H = \frac{1}{2}$ en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ sobre un dominio exterior en $\mathbb{H}^2$. Los extremos de estos gráficos están dentro de dos superficies rotacionales. Este hecho sugiere que son asintóticamente rotacionales.

Para lo cual se define la condición geométrica en la curva límite. Sea $r > 0$, definida por C_r el círculo hiperbólico centrado en el origen del radio r cuya curvatura hiperbólica es $\coth r$.

Definición 4.1.5. *Sea $\Gamma \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ una curva de Jordan de clase $\mathcal{C}^2$ y sean b y c dos números reales con $0 < b < c$. Γ satisface la condición de los círculos (b, c) cuando se tiene:*

1. *Γ está contenido en el anillo cuyo borde es $C_c \cup C_b$.*
2. *La curvatura de Γ en cualquier punto está en el intervalo $\langle \coth c, \coth b \rangle$ (Elbert et al., 2012, p. 1184)..*

Se nota que si Γ satisface la condición de círculos (b, c), entonces se tiene que para un $p \in \Gamma$ existe una traslación hiperbólica de C_b y C_c con longitud menor que $c - b$ tal que C_b y C_c es tangente a Γ en p respectivamente.

Definición 4.1.6. *Sea D un dominio acotado y sea E el gráfico de una función u de clase C^2 definida en el dominio exterior $\mathbb{H}^2 \times \{0\} \setminus D$. Si $u|_{\partial D}$ está acotado y $u(p) \to +\infty$ o $u(p) \to -\infty$, cuando p se aproxima al borde asintótico de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$. Se denomina a E un gráfico vertical extremo (Elbert et al., 2012, p. 1184).*

Definición 4.1.7. *Sea $E = Gr(u)$ un gráfico vertical extremo de curvatura media $H = \frac{1}{2}$.*

1. *Se dice que E tiene crecimiento $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ si el comportamiento asintótico de u es el mismo que de u_α.*

2. *Se dice que E tiene crecimiento débil $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ si existe una constante K tal que $|u - u_\alpha| < K$ (Elbert et al., 2012, p. 1184).*

En lo posterior, Ω será un dominio abierto de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$.

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Por la ecuación (4.3), el gráfico de u tiene curvatura media $H = \frac{1}{2}$ con respecto al campo vectorial normal si y solo si u satisface

$$div_{\mathbb{H}} \left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}} u}{W_u} \right) = 1. \tag{4.4}$$

Sea $f : \partial\Omega \to [0, +\infty\rangle$ una función contínua. Se considera el problema de Dirichlet

$$P(\Omega, f) \begin{cases} \mathcal{D}(u) = div_{\mathbb{H}} \left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}} u}{W_u} \right) - 1 = 0 \text{ en } \Omega,\ u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

Definición 4.1.8. *Sea u y Ω mostrados anteriormente, se define una función contínua $M_U(u)$ en $\bar{\Omega}$ por*

$$M_U(u) = \begin{cases} u(x), & si\ x \in \bar{\Omega} \setminus U, \\ \tilde{u}_U(x), & si\ x \in U. \end{cases}$$

se dice que $u \in \mathcal{C}^0\left(\bar{\Omega}\right)$ es una subsolución (supersolución) del problema $P(\Omega, f)$ si

1. *Para cada disco cerrado pequeño $U \subset \Omega$, se tiene $u \leq M_U(u)$ $(u \geq M_U(u))$,*

2. *$u|_{\partial\Omega} \leq f$ $(u|_{\partial\Omega} \geq f)$.*

(Elbert et al., 2012, p. 1187).

Definición 4.1.9. *Sea Ω un dominio acotado. Se dice que $p \in \partial\Omega$ admite un barrier por el problema $P(\Omega, f)$ si existe una supersolución ϕ y una subsolución φ ambos en $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ tal que $\phi(p) = \varphi(p) = f(p)$ (Elbert et al., 2012, p. 1188).*

Proposición 4.1.10 (Proceso de Perron)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ *un dominio y sea* $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *una función contínua. Supongamos que el problema* $P(\Omega, f)$ *tiene una supersolución* ϕ*. Sea*

$$S_\phi = \{v |\, v \text{ es una subsolución de } P(\Omega, f) \text{ con } v \leq \phi\}.$$

Luego, se tiene:

1. *Si* $S_\phi \neq \Phi$*, entonces la función* $u(x) = \sup_{v \in S_\phi} v(x)$ *es definido para cualquier* $x \in \Omega$*, es de clase* $\mathcal{C}^2$ *sobre* Ω *y satisface la ecuación* (4.4)*.*

2. *Se Supone que* Ω *es acotado y que* $p \in \partial\Omega$ *admite un barrier para el problema* $P(\Omega, f)$*. Entonces la solución* u *se extiende contínuamente en* p *con* $u(p) = f(p)$ *(Elbert et al., 2012, p. 1188).*

Con lo anterior, se enuncia el teorema principal del presente trabajo.

Teorema 4.1.11. *Sea* c *el radio del círculo* $S \cup \{t = 1\}$*. Sea* Γ *una curva cerrada simple de clase* $\mathcal{C}^2$ *contenida en el disco* $\mathbb{H}^2 \times \{1\}$ *acotada por* $S \cup \{t = 1\}$ *y sea* D *el dominio compacto acotado por la proyección de* Γ *en* $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$*. Supongamos que para algún* b *con* $2c < 3b$*,* Γ *satisface la condición de círculo* (b, c)*. Entonces, para algún* α *con* $e^{c-2b} < \alpha < e^{-c+b}$*, existe un gráfico vertical completo definido sobre* $\Omega = \mathbb{H}^2 \times \{0\} \setminus D$ *con contorno* Γ*, curvatura media* $H = \frac{1}{2}$ *y crecimiento débil* $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ *(Elbert et al., 2012, p. 1184).*

Demostración. Según la proposición 4.1.10 con el objetivo de construir una sucesión de superficies con curvatura media $H = \frac{1}{2}$, los cuales con el gráfico de una función v_n definida sobre un anillo Ω_n cuyo borde interior es $\partial\Omega$ y borde exterior es el círculo γ_n definidas a continuación. Los anillos Ω_n completan Ω y la función v_n toma valores 1 en $\partial\Omega$ y n en γ_n. Luego, cuando n tiende al infinito, se demuestra que la sucesión

$\{v_n\}$ converge a una solución u del problema

$$\begin{cases} div_{\mathbb{H}}\left(\dfrac{\nabla_{\mathbb{H}} u}{W_u}\right) = 1 \text{ en } \mathbb{H}^2 \times \{0\} \setminus \overline{\Omega}, \\ u = 1 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

con el crecimiento débil deseado.

Se inicia construyendo el círculo γ_n, para lo cual se considera la superficie $\mathcal{H}_\beta$ con $\beta = e^{-b}$. Por la proposición 4.1.4 para algún $\alpha > e^{c-2b}$, la superficie $\mathcal{H}_\alpha$ posee la siguiente propiedad: la distancia entre $\mathcal{H}_\beta \cap \{t = n\}$ y $\mathcal{H}_\alpha \cap \{t = n\}$ es casi $-\ln\beta + \ln\alpha$ el cual es mayor que $c - b$, para algun n. Se denota por $\bar{\mathcal{H}}_\beta$ y $\bar{\mathcal{H}}_\alpha$ la traslación vertical hacia arriba de longitud 1 de la superficie $\mathcal{H}_\beta \cap \{t \geq 0\}$ y $\mathcal{H}_\alpha \cap \{t \geq 0\}$ respectivamente. Se denota $\Gamma_n = \bar{\mathcal{H}}_\alpha \cap \{t = n\}$ y la proyección de Γ_n sobre el plano $t = 0$ sea γ_n. La elección de α nos permite trasladar horizontalmente $\bar{\mathcal{H}}_\beta$ por una distancia $c - b$, sin tocar Γ_n con $\bar{\mathcal{H}}_\beta \cap \{t = n\}$.

Sea $f_n : \partial\Omega_n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(p) = \begin{cases} 1; \text{ si } p \in \partial\Omega, \\ 0; \text{ si } p \in \gamma_n. \end{cases}$$

Sea $\bar{u}_\alpha$ la función cuya gráfica es $\bar{\mathcal{H}}_\alpha$ el cuál es claramente una supersolución del problema $P(\Omega_n, f_n)$.

Se considera la siguiente función:

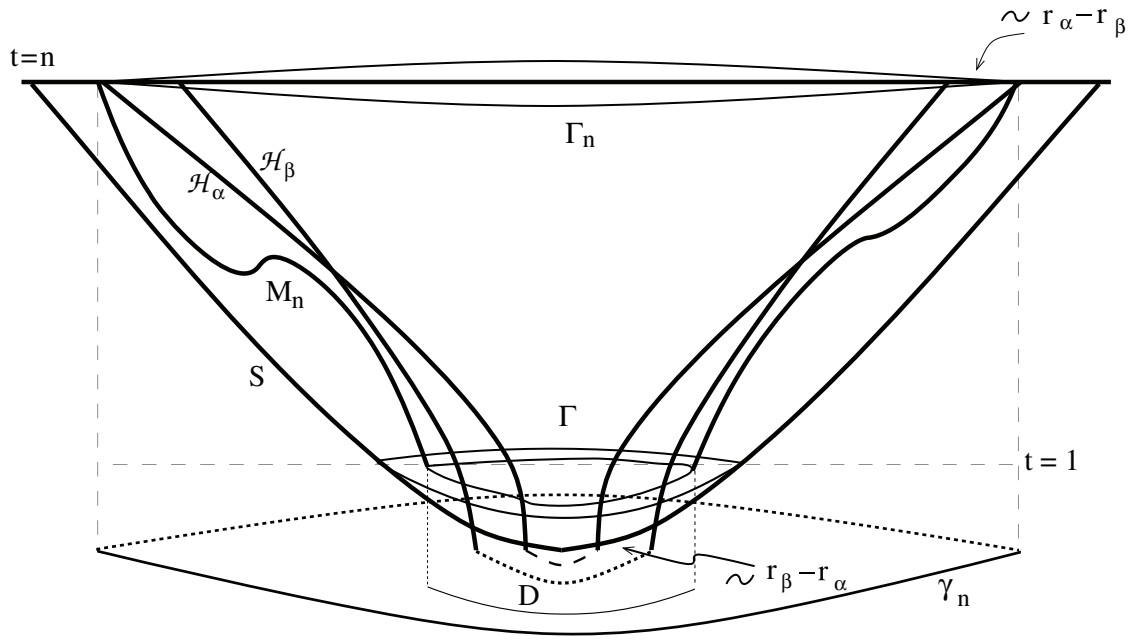
$$v_n(x) = sup\{v(x) |\, v \text{ es una subsolución de } P(\Omega_n, f_n) \text{ con } v \leq \bar{u}_\alpha\}. \tag{4.5}$$

Como la función u_1 cuya gráfica es S, es una subsolución de $P(\Omega_n, f_n)$, $u_1 \leq \bar{u}_\alpha$, el conjunto dado en (4.5) es no vacío (ver figura 4.1). Por (1) de la proposición (4.1.10),

se concluye que v_n está bien definida y satisface

$$div_{\mathbb{H}}\left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}} v_n}{W_{v_n}}\right) = 1 \text{ sobre } \Omega_n.$$

Figura 4.1
Existencia del gráfico vertical



Nota: Adaptado de "Existence of vertical ends of mean curvature 1/2 in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$" (p. 1189), por Elbert et al, 2012, Transactions of the american mathematical society, 364 (3).

Se puede afirmar que para cada $p \in \partial\Omega$ y n suficientemente grande, Se puede construir un barrier en p, es decir, una subsolución h_p y una supersolución H_p de $P(\Omega_n, f_n)$ tal que $h_p(p) = H_p(p) = 1$. En efecto, en vista de la proposición 4.1.4 y la desigualdad $\alpha < e^{-c+b}$, se puede mover S horizontalmente hasta que la curva $S \cap \{t = 1\}$ sea tangente a Γ en el punto $(p, 1)$ sin tocar Γ_n. De este modo, se obtiene la subsolución h_p de $P(\Omega_n, f_n)$. Como se ha señalado anteriormente, se puede trasladar $\bar{H}_\beta$ horizontalmente hasta que toque Γ en $(p, 1)$ sin tocar Γ_n. El gráfico así obtenido proporciona una supersolución H_p de $P(\Omega_n, f_n)$. Entonces, por

(2) de la proposición (4.1.10), v_v se extiende contínuamente en p con $v_n(p) = 1$.

Ahora se construye una supersolución y una subsolución para probar que v_n se extiende contínuamente a cualquier punto de $p \in \gamma_n$. En el plano horizontal $t = n$ se obtiene la supersolución. Para la subsolución, debido al comportamiento asintótico de S, se hace una adecuada traslación hacia abajo de S y luego se traslada horizontalmente hasta que toque Γ_n en (p, n). En efecto, trasladamos hacia abajo S mediante una constante $C(n)$. Dado que S representa el gráfico de $u_1(\rho) = 2\cosh(\rho/2)$, la superficie trasladada $\tilde{S}$ viene dado por la gráfica de $2\cosh(\rho/2) - C(n)$. Sea $\rho(s)$ el radio del círculo $\tilde{S} \cap \{t = s\}$. La función $\rho(s)$ es estrictamente creciente en $s \in [1, n]$. Además, por la proposición 4.1.4, para n suficientemente grande,

$$\rho(n) - \rho(1) \approx 2 \ln \frac{1 + \dfrac{n}{C(n)}}{1 + \dfrac{1}{C(n)}}$$

Si elegimos $C(n)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{C(n)} = 0$, entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(n) - \rho(1) = 0$. Esto es, $\tilde{S} \cap \{1 \leq t \leq n\}$ es casi un cilindro vertical. Luego, por (2) de la proposición (4.1.10), v_n se extiende contínuamente en algún $p \in \gamma_n$, con $v_n(p) = n$. Para n lo cufientemente grande, la sucesión $\{v_n\}$ esta uniformemente acotado superiormente por H_p e inferiormente por h_p, para cualquier $p \in \partial\Omega$ (ver Simon (1977) y Spruck (2007)). Luego, $\{v_n\}$ en un subconjunto compacto de Ω. Gracias al teorema Ascoli-Arzelà, en un conjunto compacto con la topología C^2 una subsucesión de $\{v_n\}$ converge uniformemente a una solución u de la ecuación $\mathcal{D}(u) = 0$ en Ω.

Además, para algún $q \in \Omega$,

$$h_p(q) \leq u(q) \leq H_p(q). \tag{4.6}$$

Ahora, se asume que q sea $p \in \partial\Omega$ en (4.6), se obtiene $u(p) = 1$ y $u \in$

$C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Por último se muestra la propiedad de crecimiento para la solución u. Sea Γ_α la intersección de $\bar{\mathcal{H}}_\alpha$ con el cilindro $\Gamma \times \mathbb{R}$. Se traslada $\bar{\mathcal{H}}_\alpha$ hasta que Γ_α esté debajo de Γ. De aqui, se tiene que para cada n, la traslación de $\bar{\mathcal{H}}_\alpha$ brinda una subsolución de $P(\Omega_n, f_n)$, el cual nos indica que está por debajo de la gráfica de v_n más aún por debajo de la gráfica de u.

□

Conclusiones

- Dados los números reales positivos b y c con $2c < 3b$, para algún número real α con $e^{c-2b} < \alpha < e^{-c+b}$, existe un gráfico vertical completo en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ definido sobre el dominio exterior de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ con curvatura media $H = \dfrac{1}{2}$ y crecimiento débil $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ mostrado en el teorema 4.1.11.

- Todas las propiedades de métrica, conexión, geodésica, gradiente, divergencia y curvatura dadas sobre una variedad riemanniana M, se pueden también hallar los mismos sobre el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, las cuales ayudan a resolver problemas de gráficos verticales en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como las que tienen curvatura media constante $H = \frac{1}{2}$.

- La ecuación diferencial parcial de segundo orden obtenida en (4.2):

$$2H = \frac{y^2((1+y^2u_x^2)u_{yy} + (1+y^2u_y^2)u_{xx} - (u_x^2+u_y^2)yu_y - 2y^2u_xu_yu_{xy})}{\left(1+y^2u_x^2+y^2u_y^2\right)^{3/2}}$$

  y por la relación dada en la proposición 4.1.2:

$$div_{\mathbb{H}}\left(\frac{\nabla_{\mathbb{H}}u}{W_u}\right) = 2H$$

  se demuestra la relación entre la divergencia de gráficos verticales con su curvatura media.

Recomendaciones y Sugerencias

- El espacio ambiente en este trabajo es la variedad $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Se recomienda estudiar en la variedad $M^2 \times \mathbb{R}$ donde M^2 es una variedad riemanniana de dimensión 2.

- Para el estudio del espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, se recomienda leer conceptos básicos de geometría de la aplicación de Gauss, geometría intrínseca de superficies, variedades diferenciales, campos vectoriales y corchetes de Lie; a fin de que el lector no tenga dificultad en entender el presente trabajo.

- Para demostrar que existe una relación entre la divergencia y curvatura media en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ se ha usado la fórmula de curvatura media que envuelve una ecuación diferencial parcial de segundo orden, se recomienda demostrar una relación análoga en el espacio $M^2 \times \mathbb{R}$ utilizando los operadores laplaciano y hessiano.

Bibliografía

Avila, R. (2001). *Metodología de la investigación: cómo elaborar la tesis y/o investigación : ejemplos de diseños de tesis y/o investigación.* Estudios y Ediciones R.A.

Do Carmo, M. P. (2011). *Geometría Riemanniana.* Rio de Janeiro: IMPA.

Earp, R. S. and Toubiana, E. (2009). *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Cassini.

Elbert, M., Nelli, B., and Sa Earp, R. (2012). Existence of vertical ends of mean curvature 1/2 in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(3):1179–1191.

Lee, J. (2006). *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.

Medrano, J. S. (2016). Principio del máximo en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. *Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.*

Pari, D. (2019). Gráficos horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.*

Ruys, W. d. S. et al. (2008). Superfícies mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Universidade Federal de Goiás.*

Sampieri, R., Collado, C., and Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Education.

Santos, J. L. T. d. et al. (2019). Aplicação de gauss hiperbólica e superfícies cmc em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Universidade Federal do Amazonas*.

Simon, L. (1977). Equations of mean curvature type in 2 independent variables. *Pacific journal of Mathematics*, 69(1):245–268.

Spruck, J. (2007). Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in mn× r. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 3(3):785–800.