



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO

ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TESIS

**MODELO SIRD PARA COVID-19 CON DERIVADA
FRACCIONAL DE CAPUTO PARA LA REGIÓN DE
TACNA-2021**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO
EN MATEMÁTICAS**

AUTOR:

Br. ANGEL JESUS CALSIN CARI

ASESOR:

Dr. GUIDO ALVAREZ JAUREGUI

CODIGO ORCID: 0000-0002-2669-9847

CO-ASESOR:

Dr. EDSON ALBERTO COAYLA TERAN

CODIGO ORCID: 0000-0002-6329-4929

Cusco - Perú

2023

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

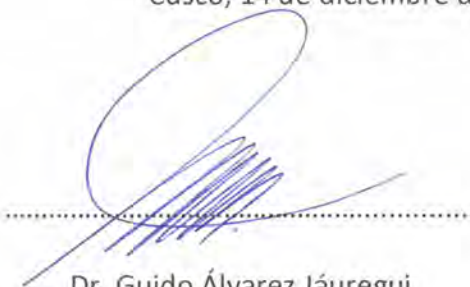
El que suscribe, asesor del trabajo de investigación/tesis titulado: **MODELO SIRD PARA COVID-19 CON DERIVADA FRACCIONAL DE CAPUTO PARA LA REGION DE TACNA -2021** presentado por: **ANGEL JESUS CALSIN CARL** con Nro. de DNI: 44947277, para optar el grado académico de **MAESTRO EN MATEMÁTICAS** Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por **TRES** veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 7 %

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera hoja del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 14 de diciembre de 2023



Dr. Guido Álvarez Jáuregui

Nro. de DNI. 23868575

CODIGO ORCID 0000-0002-6329-4929

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio:
<https://unsaac.turnitin.com/originality/inbox/d9c116b5-f66f-4283-9642-30fd97bf4699>

oid:27259:296280082

NOMBRE DEL TRABAJO

BORRADOR_DE_TESIS_63.pdf

AUTOR

Angel Jesus Calsin Cari

RECUENTO DE PALABRAS

19296 Words

RECUENTO DE CARACTERES

77049 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

85 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

805.3KB

FECHA DE ENTREGA

Dec 14, 2023 8:35 PM GMT-5

FECHA DEL INFORME

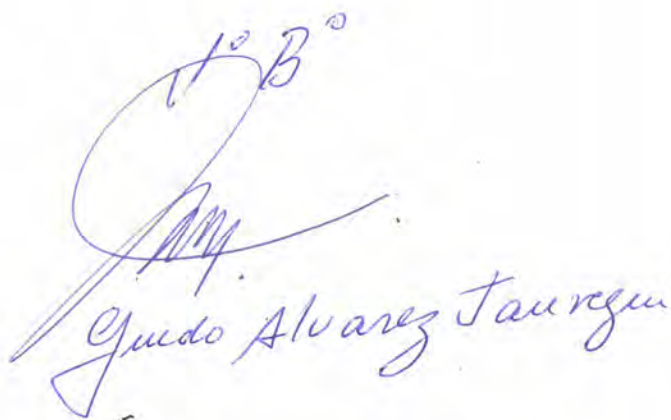
Dec 14, 2023 8:36 PM GMT-5**● 7% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos

- 7% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● Excluir del Reporte de Similitud

- Base de datos de trabajos entregados
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 10 palabras)
- Material bibliográfico
- Material citado



C-14-12-2023

Índice general

Agradecimiento	5
Didicatoria	6
Resumen	i
INTRODUCCIÓN	iii
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1. Situación Problemática	1
1.2. Formulación del Problema	2
1.2.1. Problema General	2
1.2.2. Problemas específicos	2
1.3. Justificación de la Investigación	2
1.4. Objetivos de la Investigación	3
1.4.1. Objetivo General	3
1.4.2. Objetivos Específicos	4
2. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	5
2.1. Antecedentes de la investigación	5
2.1.1. A nivel internacional	5
2.1.2. A nivel nacional	8
2.1.3. A nivel local	9
2.2. Marco Teórico	10

2.2.1. Preliminares	10
2.2.2. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville	13
2.2.3. Derivada fraccional de Caputo	18
2.2.4. Ecuaciones con derivada fraccional de Caputo en el espacio de funciones continuamente diferenciables	23
3. METODOLOGIA	34
3.1. Tipo de Investigación	34
3.2. Nivel de Investigación	34
3.3. Diseño de Investigación	34
3.4. Delimitación de la Investigación	35
3.5. Delimitación del problema	36
3.6. Delimitación Temporal	37
3.7. Simulaciones con Scilab	37
4. RESULTADOS Y DISCUSIONES	39
4.1. Modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo	39
4.2. Existencia y unicidad de solución	40
4.3. Solución numérica	47
4.4. Estimación de tasas	52
4.4.1. Tasa de transmisión (infectados) "x"	52
4.4.2. Tasa de recuperación "y"	53
4.4.3. Tasa de decesos "z"	53
4.5. Simulación numérica	54
4.5.1. Comparación grafica de datos simulados y reales del mes de diciembre-2021 con $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,30$ y $\alpha = 0,50$	57
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	62
5.1. Conclusiones	62
5.2. Recomendaciones	64

Bibliografía	65
ANEXOS	68

AGRADECIMIENTO

Desearía expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas que han tenido un papel destacado en la ejecución de este proyecto de tesis. Quiero reconocer sinceramente su valiosa contribución y agradecerles de corazón.

En primer lugar, deseo transmitir mi más sincero agradecimiento al Dr. Guido Alvarez Jauregui, quien ha sido mi asesor en este proyecto, y a mi co-asesor, Dr. Edson Alberto Coayla Teran, por su orientación, apoyo y paciencia a lo largo de todo el proceso de investigación. Su experiencia y conocimientos fueron indispensables para el desarrollo de este trabajo.

También deseo agradecer a los miembros del jurado de tesis por su tiempo, dedicación y valiosos comentarios durante la evaluación de este proyecto. Sus sugerencias han enriquecido enormemente el contenido y la calidad de la tesis.

Es imprescindible reconocer el papel fundamental que ha desempeñado mi familia a lo largo de mi desarrollo académico. Su amor incondicional, estímulo constante y comprensión han sido pilares fundamentales en el camino hacia este logro. No puedo pasar por alto su importancia como fuente de inspiración y apoyo constante en mi formación académica.

Por último, pero no menos importante, quiero expresar mi reconocimiento a la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado y por proporcionar los recursos y el entorno adecuado para llevar a cabo esta investigación.

A todos ustedes, les agradezco de corazón por su valiosa contribución, ya sea directa o indirectamente, en el desarrollo y conclusión de este proyecto de tesis. Su apoyo ha sido fundamental para mi crecimiento académico y personal.

¡Muchas gracias a todos!

Angel Jesus Calsin Cari

DEDICATORIA

Dedicado a Dios

A mis padres Justina Cari Mamani y German Calsin Juli les dedico este trabajo con profundo amor y gratitud. Es un testimonio de todo lo que he aprendido y logrado gracias a su presencia y guía en mi vida. Espero que este éxito sea también un tributo a su amor y sacrificio.

A mi esposa Aide K. Paye Luna, gracias por ser mi musa y motivacion constante

A mis hermanos Fredy, Maribel y David

RESUMEN

La presente investigación se enfocó en el modelo SIRD para COVID-19 con derivada fraccional de Caputo en la región del sur de Perú-2021, con el propósito de simular y predecir la propagación del virus en la región. En el transcurso de esta investigación, se estableció la existencia y unicidad de soluciones para el modelo, para la resolución de este modelo, se aplicaron métodos numéricos basados en el método de Adams-Bashforth, los datos epidemiológicos recopilados entre los meses de septiembre y noviembre del 2021 se utilizaron para calcular tasas de transmisión, recuperados y decesos. A continuación, se llevó a cabo una simulación en el software scilab utilizando diferentes valores de α ($\alpha = 0,50$, $\alpha = 0,30$ y $\alpha = 0,10$), comparándolos con los datos reales de diciembre del 2021.

Estos análisis proporcionaron una comprensión valiosa de la evolución de la epidemia y respaldaron de manera concluyente que un valor más bajo de α (0,10) se ajusta de manera más precisa a los datos reales, indicando una propagación más gradual de la enfermedad en términos de susceptibles, infectados, recuperados y decesos, cabe destacar que, en lo que respecta a los recuperados, los resultados muestran una notable concordancia, independientemente del valor de α .

Palabras clave: Derivada de Caputo, Covid-19, modelo SIRD, epidemia.

ABSTRACT

The present research focused on the SIRD model for COVID-19 with Caputo fractional derivative in the southern region of Peru-2021, aiming to simulate and predict the virus spread in the region. Throughout this investigation, the existence and uniqueness of solutions for the model were established. To solve this model, numerical methods based on the Adams-Bashforth method were applied. Epidemiological data collected between September and November 2021 were used to calculate transmission, recovery, and death rates. Subsequently, a simulation was conducted in the Scilab software using different values of α ($\alpha = 0,50, \alpha = 0,30$, y $\alpha = 0,10$), comparing them with real data from December 2021.

These analyses provided valuable insights into the evolution of the epidemic and conclusively supported that a lower value of α (0,10) more accurately fits the real data, indicating a more gradual spread of the disease in terms of susceptible individuals, infected individuals, recoveries, and deaths. It is noteworthy that, concerning recoveries, the results show a notable concordance regardless of the value of α .

Keywords: Caputo derivative, Covid-19, SIRD model, epidemic.

INTRODUCCIÓN

En una misiva, Leibniz plantea la posibilidad de asignar a " n " un valor fraccionario, lo cual podría dar lugar a una paradoja con resultados positivos. Asimismo, presenta una aproximación de la derivada fraccionaria mediante el ejemplo de la derivada $\frac{1}{2}$ de " x ". (Guía-Calderón et al. (2015))

El SARS-CoV-2 es un nuevo virus respiratorio que no había sido previamente identificado. La enfermedad infecciosa que este causa ha sido llamada "enfermedad de coronavirus 2019" la enfermedad se propagó alrededor del planeta a un ritmo acelerado, de aquí surge muchas investigaciones para pronosticar el impacto en la población (Díaz-Castrillón and Toro-Montoya, 2021)

En ecuaciones diferenciales ordinarias se tienen muchos modelos matemáticos tales como el modelo SIRD con derivadas de orden 1. En el presente tesis se representa el modelo SIRD a través de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario en el sentido de Caputo, luego se resuelve este sistema de ecuaciones utilizando el método numérico fraccionario de Adams- Bashforth, enseguida se programa los algoritmos obtenidos en el software Scilab, finalmente se compara datos reales con datos simulados.

Además, en los últimos años, el cálculo fraccionario ha recibido un creciente interés debido a su capacidad para representar sistemas complejos y no lineales. La incorporación de derivadas fraccionarias en los modelos epidemiológicos puede proporcionar una mayor precisión en la predicción del comportamiento de una enfermedad infecciosa.

En este contexto, se busca comparar los resultados obtenidos con los datos reales y determinar el valor óptimo del orden de la derivada fraccional para mejorar la precisión del modelo. Con esto se pretende contribuir en la comprensión y control de esta enfermedad en la población.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Situación Problemática

El 30 de enero de 2020, la Organización Mundial de la Salud (OMS) emitió un comunicado oficial en el que declaró la epidemia de COVID-19 como una emergencia de salud pública de importancia global. La calificación de pandemia, otorgada recientemente, señala que la enfermedad se ha propagado a múltiples países, continentes e incluso a nivel mundial, afectando a una gran cantidad de personas. La OMS manifestó una profunda preocupación por la rápida expansión del virus y la gravedad de sus efectos, así como por la insuficiencia de las acciones tomadas hasta ese momento. En base a estas consideraciones, se llegó a la conclusión de que el COVID-19 puede ser descrito como una pandemia (Valencia-Contrera and Valenzuela-Suazo, 2022).

En el contexto peruano, el impacto del coronavirus ha sido considerable y sus implicaciones aún no se han comprendido por completo. Al igual que en otros países, nos enfrentamos a una situación desafiante debido a esta crisis. Tanto en el ámbito de la salud como en el económico, hemos tenido que hacer frente a dificultades significativas. Hasta el 15 de junio de 2020, se han registrado en Perú 232992 casos confirmados de COVID-19 y se han notificado 6688 fallecimientos. No obstante, informes nacionales e

internacionales señalan que la cantidad real de defunciones podría ser tres o cuatro veces mayor que la cifra oficial (Vergara, 2020). Esta situación se ha visto agravada por la falta de recursos médicos y el aumento de la pobreza debido a la crisis económica generada por la pandemia.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿De que manera se puede desarrollar un modelo SIRD para COVID-19 mediante la derivada fraccional de Caputo para la región de Tacna-2021?

1.2.2. Problemas específicos

1. ¿ Como se puede establecer la existencia y unicidad de soluciones para el modelo matemático SIRD con derivadas fraccionarias de Caputo y cómo se realiza la solución numérica de este modelo?
2. ¿De que manera se desarrolló la epidemia de COVID-19 en las regiones del sur de Perú mediante la aplicación del modelo matemático SIRD con derivada fraccional de Caputo en el análisis de datos recopilados en septiembre, octubre y noviembre de 2021 por DIRESA?
3. ¿Qué interpretaciones y simulaciones se pueden obtener al comparar los resultados del modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo (usando valores de $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,30$ y $\alpha = 0,50$) con los datos reales correspondientes a diciembre de 2021?

1.3. Justificación de la Investigación

Las enfermedades infecciosas fueron consecuencia de muchas pérdidas humanas a lo largo de la historia, como: La pandemia de la gripe española, que surgió a principios de

1918, se calcula que el virus afectó a alrededor de un tercio de la población global, y más del 2,5 % de los afectados sufrieron pérdidas de vida (Luthy, 2018).

La Peste Negra, también llamada la Gran Mortandad o la Pestilencia, se cobró la vida de alrededor de 200 millones de personas, convirtiéndola en la pandemia más devastadora de la historia. Se extendió desde Europa hasta el norte de África y alcanzó su punto más crítico en Europa entre los años 1347 y 1351 (Lopez Maria M, 2020) .

La crisis global de Covid-19 ha generado impactos psicológicos y sociales significativos en diversos grupos de la población, como niños, estudiantes universitarios y trabajadores de la salud. Estos grupos tienen una mayor probabilidad de experimentar trastorno de estrés postraumático, ansiedad, depresión y otros síntomas de angustia. Las medidas de distanciamiento social y las precauciones de seguridad han influido en las relaciones interpersonales y han afectado la capacidad de empatía hacia los demás (Saladino et al. 2020).

El modelo clásico para modelar problemas, tiene algunas limitaciones relacionado con el orden de las ecuaciones diferenciales. Para superar estas restricciones muchos autores han buscado la ayuda de un área de las matemáticas como el calculo fraccionario, aquí los operadores diferenciales utilizados son de orden no entero o fraccionario, que poseen propiedades de memoria y son valiosos para demostrar muchos fenómenos naturales. El estudio de los procesos dinámicos epidemiológicos involucran efectos de memoria (Shaikh et al., 2020).

Por eso, el estudio de modelos matemáticos de enfermedades infecciosas utilizando derivada fraccional, es muy importante para entender su comportamiento más aún en las actuales circunstancias en que estamos atravesando por la pandemia de COVID-19.

1.4. Objetivos de la Investigación

1.4.1. Objetivo General

Desarrollar y aplicar el modelo SIRD para COVID-19 mediante la derivada fraccional de Caputo para las regiones del sur del Peru-2021.

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Establecer la existencia y unicidad de soluciones para el modelo matemático SIRD con derivadas fraccionarias de Caputo y llevar a cabo una solución numérica de este modelo.
2. Estudiar la evolución de la epidemia de COVID-19 mediante la aplicación del modelo matemático SIRD con derivada fraccional de Caputo en el análisis de datos recopilados en setiembre, octubre y noviembre de 2021 por DIRESA.
3. Interpretar y simular la evolución de la epidemia, comparando los resultados obtenidos a través del modelo matemático SIRD con derivada fraccional de Caputo (usando valores de $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,30$ y $\alpha = 0,50$) con los datos reales correspondientes a diciembre 2021.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1. Antecedentes de la investigación

2.1.1. A nivel internacional

1. Nisar et al. (2021) En la ciudad de Wuhan, China, se llevó a cabo una investigación que abordó "Un modelo matemático SIRD de orden fraccionario de la enfermedad COVID-19 en el sentido de Caputo". El objetivo principal fue calcular el número de reproducción básico a través de la matriz de próxima generación. La metodología incluyó la demostración de los resultados de existencia y unicidad de la solución mediante la teoría del punto fijo. Además, se empleó el método fraccional de Adams-Bashforth para obtener una solución aproximada del modelo propuesto. Se compararon los resultados con datos reales de infección confirmada y muerte. En conclusión, el estudio propuso y validó un modelo matemático fraccional SIRD para COVID-19, mostrando resultados coherentes con datos reales de Wuhan durante los primeros 67 días.
2. Shaikh et al. (2020) En este estudio titulado "Modelo COVID-19 de orden fraccional de transmisión Murciélagos-Hospedadores-Reservorio-Personas" realizado en

la India, el objetivo fue investigar la simulación de la transmisión del COVID-19 considerando medidas de respuesta individual y gubernamentales. Se utilizaron datos reales de casos hasta marzo de 2020, y la metodología incluyó la estimación de parámetros con técnicas matemáticas y la evaluación de estrategias de control. Como conclusión, se presentaron los resultados gráficamente que demuestran la validez del modelo.

3. Zambrano-Serrano et al. (2021) En la investigación realizada en México en la Universidad Autónoma de Nuevo León, titulada "Comportamiento de orden fraccionario en la respuesta de un circuito RC mediante derivada de núcleo singular", el objetivo fue obtener una solución analítica precisa utilizando propiedades de la transformada de Laplace y la función Mittag-Leffler. Se definió el orden de la derivada fraccionaria en el rango $0 < q \leq 1$, manteniendo constante la dimensionalidad de los parámetros R y C del circuito. La metodología incluyó la comparación de los resultados experimentales del circuito propuesto con soluciones analíticas previamente desarrolladas, destacando una relación directa entre el orden fraccionario y el voltaje del capacitor. En conclusión, el estudio proporciona una comprensión detallada del impacto del orden fraccionario en la respuesta del circuito RC, resaltando la relevancia del voltaje del capacitor como factor clave.
4. Qureshi (2020) En la Universidad de Ingeniería y Tecnología en Jamshoro, Sindh, Pakistán, se realizó una investigación sobre la "Aplicación práctica del operador fraccional de Caputo en un sistema epidemiológico autónomo para el sarampión". Se enfocó en utilizar este operador fraccional para modelar la dinámica del sarampión en epidemias reales, capturando características como la memoria y la no localidad. El modelo se basó en datos reales de casos de sarampión en Pakistán en 2018. El análisis matemático confirmó una solución única y estable en un rango biológicamente plausible. En conclusión, este estudio profundiza en los efectos de diferentes parámetros biológicos en la dinámica y transmisión de la epidemia de sarampión mediante simulaciones.

5. Monteiro and Mazorche (2021) En la Universidad Federal de Juiz de Fora, en Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil, se llevó a cabo una investigación titulada "Análisis y Aplicación de un Modelo SIR Fraccional Construido con Distribución de Mittag-Leffler". El objetivo de dicho estudio fue derivar derivadas de orden arbitrario de leyes potenciales en funciones que describen infectividad y remoción. La metodología empleada incluyó la utilización de la distribución de Mittag-Leffler para desarrollar el modelo y realizar análisis matemático. El trabajo buscó ampliar discusiones previas y presentar nuevos hallazgos en un modelo que incorpora la distribución de Mittag-Leffler, destacando puntos de equilibrio y números de reproducción. También se examinó la aplicación previa de este modelo en el contexto del COVID-19 desde una perspectiva actualizada. En conclusión, el trabajo contribuyó significativamente a la comprensión del comportamiento de la enfermedad y la aplicación de modelos fraccionarios en epidemiología.
6. De Cezaro et al. (2023) En la Universidad Federal de Rio Grande, Brasil, se llevó a cabo una investigación titulada "Modelo SIRC Fraccional para Comprender la Propagación de Enfermedades en el Contexto de Dos Poblaciones que Interactúan". Este estudio abordó un modelo compartimental multifraccional considerando personas Susceptibles (S), Infectadas (I), Recuperadas (R), e Inmunes Cruzadas (C). La metodología de la investigación incluyó la formulación del modelo, la determinación de parámetros y la realización de simulaciones numéricas utilizando el software MATLAB. La dinámica intrapoblacional se modeló con derivadas fraccionarias, y la interacción entre poblaciones se caracterizó mediante la proporción de interacción entre susceptibles e infectados. La robustez del enfoque se respaldó con evidencia sólida, y las simulaciones ilustraron cómo las derivadas fraccionarias, al incorporar memoria, afectan la dinámica epidemiológica. En conclusión, este estudio destaca la importancia de las derivadas fraccionarias para comprender y modelar la propagación de enfermedades en contextos de interacción entre poblaciones
7. Paul et al. (2023) En la Arambagh Government Polytechnic de West Bengal, India, se llevó a cabo una investigación titulada "Comportamiento de un Modelo SIR

(Susceptibles-Infectados-Recuperados) de Orden Fraccional Utilizando la Derivada Fraccional de Caputo". El objetivo de este estudio fue establecer criterios para la existencia, unicidad, no negatividad y acotación de las soluciones del modelo. La metodología involucró el uso del enfoque de Taylor de orden fraccional para estimar las soluciones, junto con representaciones gráficas y simulaciones numéricas en MATLAB. En conclusión, los resultados respaldan la robustez y aplicabilidad del modelo propuesto para comprender la dinámica de enfermedades infecciosas mediante herramientas matemáticas y numéricas.

2.1.2. A nivel nacional

1. Coayla-Teran (2021) En la ciudad de Tacna, se llevó a cabo una investigación titulada "Un modelo SIRD dependiente del tiempo de COVID-19 usando ecuaciones diferenciales funcionales". El objetivo principal de este estudio fue desarrollar un modelo matemático para pronosticar la expansión de la enfermedad del COVID-19, considerando el número de personas infectadas, recuperadas y fallecidas. La metodología aplicada se centró en la formulación de un modelo SIRD dependiente del tiempo, que tiene en cuenta la interacción entre individuos susceptibles, infectados y recuperados a lo largo del tiempo, utilizando ecuaciones diferenciales funcionales. En conclusión, el modelo proporciona una herramienta efectiva para pronosticar el curso de la enfermedad, considerando las complejidades temporales y las medidas de mitigación. Este enfoque contribuye significativamente a una comprensión más profunda y precisa de la dinámica del COVID-19, facilitando la toma de decisiones informadas en la gestión de la pandemia.
2. Olivera and Rivera (2021) Realizaron una investigación titulada "Modelo SIR de tendencia pandémica de COVID-19 en Perú (2020)". El objetivo principal de este estudio fue analizar la evolución epidémica del COVID-19 en Perú a lo largo de un período de 200 días mediante la aplicación del modelo SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados o Fallecidos). Se utilizaron registros de la evolución temporal del COVID-19 recopilados entre el 6 de marzo y el 14 de mayo de 2020,

proporcionados por el Ministerio de Salud peruano. La metodología incluyó la generación de supuestos estimados al variar la tasa básica de reproducción. Según el modelo SIR, se observó que el punto máximo de personas infectadas ocurrió aproximadamente 30 días después del 30 de mayo, alrededor del día 86 desde el inicio de la propagación de la epidemia. A partir de ese punto, se evidenció una disminución en el número total de casos infectados. Los resultados sugieren que las medidas estrictas implementadas en Perú en ese momento pueden prevenir de manera efectiva la propagación del COVID-19, resaltando la importancia de mantener estas medidas para lograr resultados eficientes.

2.1.3. A nivel local

1. López Mamani (2019) Realizó una investigación titulada "Ecuación de calor y de onda mediante una ecuación diferencial de orden fraccional", llevada a cabo en la ciudad de Cusco. El objetivo principal de este estudio fue extender las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, específicamente las ecuaciones de calor y de onda, transformándolas en ecuaciones de orden fraccional. El enfoque se centró en proporcionar soluciones analíticas para estas ecuaciones desde una perspectiva puramente analítica. La metodología involucró la aplicación de técnicas matemáticas para abordar problemas bien establecidos desde un nuevo enfoque. En conclusión, este estudio contribuye al entendimiento de las ecuaciones de calor y onda de orden fraccional, proporcionando soluciones analíticas que pueden tener aplicaciones en diversos campos.
2. Velásquez Ayma (2019) Realizó una investigación titulada "Modelos matemáticos del movimiento de un proyectil mediante la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineal". El objetivo principal fue describir el movimiento de un proyectil utilizando ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales. La metodología se centró en identificar condiciones para formular ecuaciones fraccionarias, empleando el operador de Caputo y condiciones iniciales. Se aplicó el teorema de Peano y la búsqueda de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias. El enfoque se

ampli6 utilizando el polinomio de Taylor para desarrollar modelos matem6ticos. Se utilizaron herramientas computacionales, especialmente Wolfram Mathematica 8, para generar representaciones gr6ficas precisas. En conclusi3n, este estudio proporciona una compresi3n detallada del movimiento del proyectil mediante modelos fraccionarios, respaldado por an6lisis te3ricos y representaciones visuales.

2.2. Marco Te3rico

2.2.1. Preliminares

Definici3n 2.2.1. Sea $\Omega = [a; b]$ con a y b pertenecientes al conjunto de n6meros reales $\mathbb{R}$, donde $a \leq b$ puede ser un intervalo finito o infinito del conjunto de los n6meros reales $\mathbb{R}$.

Se define el espacio $L_p(a; b)$ ($1 \leq p \leq \infty$) como el conjunto de funciones medibles de valor complejo de Lebesgue f en Ω para las cuales $\|f\| < \infty$, donde

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}; \quad 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

donde $\operatorname{ess\,sup}_{a \leq x \leq b} |f(x)|$: es el m6ximo esencial de la funci3n de $|f(x)|$. (Kilbas et al. (2006))

Definici3n 2.2.2. Sea $[a; b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) un intervalo finito y sea $AC[a; b]$ el espacio de funciones absolutamente continuas en $[a; b]$

El espacio $AC[a; b]$ coincide con el espacio de primitivas de funciones sumables de Lebesgue:

$$f(x) \in AC[a; b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt; \quad (\varphi(t) \in L(a; b)). \quad (2.2.1)$$

Aquí, c es una constante, y $\varphi(t)$ pertenece al espacio de funciones Lebesgue-integrables en el intervalo $[a; b]$. En otras palabras, una función $f(x)$ está en $AC([a; b])$ si y solo si puede expresarse como la suma de una constante y la integral definida de una función $\varphi(t)$ que es Lebesgue-integrable en el intervalo dado. (Kilbas et al. (2005))

Una función absolutamente continua $f(x)$ tiene una derivada sumable $f'(x) = \varphi(x)$ casi en todo $[a; b]$. Por lo tanto de (2.2.1) se tiene:

$$\varphi(t) = f'(t) \quad \text{y} \quad c = f(a)$$

Para cualquier número natural n usaremos $AC^n[a; b]$ para referirnos al espacio de funciones de valores complejos $f(x)$ que poseen derivadas continuas hasta el orden $n - 1$ en el intervalo $[a; b]$ de manera que $f^{n-1}(x)$ sea absolutamente continua en $[a, b]$

$$AC^n[a; b] = \{f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ y } (D^{n-1}f)(x) \in AC[a; b]\}$$

Específicamente cuando $n = 1$, tenemos $AC^1[a; b] = AC[a; b]$. (Kilbas et al. (2005))

Lema 2.2.1. *El espacio $AC^n[a; b]$ consta solo de las funciones $f(x)$ que se puede representar de la forma:*

$$f(x) = (I_{a+}^n \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x - a)^k$$

donde $\varphi(t) \in L(a; b)$, $c_k (k = 1; 2; \dots; n - 1)$ son constantes arbitrarias, y

$$(I_{a+}^n \varphi)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt$$

(Para la demostración ver Kilbas et al. (1993).Pg 39)

Definición 2.2.3. *Se define el espacio ponderado $C_\gamma[a; b]$ como el conjunto de funciones f en el intervalo finito $[a; b]$, donde con $\gamma \in \mathbb{C}$ con $(0 \leq \Re(\gamma) < 1)$. En este espacio, la función ponderada $(x - a)^\gamma f(x)$ pertenece al espacio clásico $C[a; b]$ y la norma en C_γ es:*

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(x - a)^\gamma f(x)\|_C, \quad C_0[a; b] = C[a; b]. \quad (\text{Kilbas et al. (2006)})$$

Para valores naturales n , se representa por $C_\gamma^n[a, b]$ el espacio de Banach que incluye funciones $f(x)$ que son continuamente diferenciables en $[a; b]$ hasta el orden $n - 1$ y tienen derivada $f^{(n)}(x)$ de orden n en $[a; b]$ tal que $f^{(n)}(x) \in C_\gamma[a; b]$ donde:

$$C_\gamma^n[a, b] = \left\{ f : \|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma} \right\}, \quad C_\gamma^0[a; b] = C_\gamma[a; b] \quad (\text{Kilbas et al. (2006)})$$

Lema 2.2.2. *Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma \in \mathbb{C}$ ($0 \leq \Re(\gamma) < 1$). El espacio $C_\gamma^n[a; b]$, consta de aquellos y solo aquellos funciones que están representadas en la forma:*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

donde $\varphi(t) \in C_\gamma[a; b]$ y c_k ($k = 0; 1; 2; \dots; n-1$) son constantes arbitrarias

además

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), \quad c_k = \frac{f^{(n)}(a)}{k!} \quad (k = 0; 1; 2 \dots n-1)$$

(Para la demostración ver el Lema 1 de Kilbas et al. (2000))

Función Gamma

Definición 2.2.4. *La función gamma de Euler, denotada como $\Gamma(z)$ se define mediante la integral conocida como integral de Euler:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\Re(z) > 0)$$

donde $\Re(z) > 0$ se refiere a la parte real de z y representa los valores de z que son mayores que cero. Esta integral es convergente para todo número complejo $z \in \mathbb{C}$, además: $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ llamada formula de reducción. (Bell, 2004)

Función Beta

La función beta $B(z; w)$ esta definida por la integral de Euler de primera clase:

$$B(z; w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (\Re(z) > 0; \Re(w) > 0)$$

esta función esta relacionada con la función gamma: $B(z; w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+W)} \quad (z, w \notin \mathbb{Z}_0^-)$.
(Bell, 2004)

2.2.2. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville

Definición 2.2.5. Tomemos $\Omega = [a; b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ como un intervalo limitado en $\mathbb{R}$. Definimos las integrales fraccionarias del lado derecho $I_{a+}^\alpha f$ e izquierdo $I_{b-}^\alpha f$ de Riemann-Liouville donde $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$), de la siguiente manera:

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a; \Re(\alpha) > 0) \quad (2.2.2)$$

y

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b; \Re(\alpha) > 0) \quad (2.2.3)$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma, y estas integrales se llaman las integrales fraccionarias del lado derecho y del lado izquierdo. (Kilbas et al., 2006)

Cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, Las definiciones (2.2.2) y (2.2.3) coincide con las integrales de la forma

$$\begin{aligned} (I_{a+}^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

y

$$\begin{aligned} (I_{b-}^n f)(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \dots \int_{t_n}^b f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

(Kilbas et al., 2006)

Demostración. La prueba se realizará por inducción

- Para $n = 1$

$$(I_{a+}^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt$$

- Ahora supongamos cierto para $n = k$, entonces:

$$(I_{a+}^k f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{k-1}} f(t_k) dt_k$$

$$(I_{a+}^k f)(x) = \int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_{k-1}} f(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1$$

$$(I_{a+}^k f)(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t) dt$$

- Se demostrará para $n = k + 1$

por hipótesis

$$(I_{a+}^{k+1} f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_k} f(t_{k+1}) dt_{k+1}$$

luego:

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{k+1} f)(x) &= \int_a^x \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_k} f(t_{k+1}) dt_{k+1} \dots dt_2 dt_1 \\ &= \int_a^x \frac{1}{(k-1)!} \int_a^{t_1} (t_1 - t)^{k-1} f(t) dt dt_1 \\ &= \int_a^x \frac{d}{dt_1} \left[\frac{1}{k!} \int_a^{t_1} (t_1 - t)^k f(t) dt \right] dt_1 \\ &= \frac{1}{k!} \int_a^x (x - t)^k f(t) dt \end{aligned}$$

luego se cumple la igualdad:

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N})$$

La demostración de la ecuación (2.2.5) es análogo a lo demostrado. (Kilbas et al., 2006)

■

Definición 2.2.6. Las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville $D_{a+}^\alpha y$ y $D_{b-}^\alpha y$ de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$), están definidos por

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha y)(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1; x > a) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

y

$$\begin{aligned} (D_{b-}^\alpha y)(x) &= \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1; x < b) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

respectivamente, donde $\llbracket \Re(\alpha) \rrbracket$ es el máximo entero de $\Re(\alpha)$, derivada de Riemann-Liouville $D_{a+}^\alpha y$ del lado derecho y $D_{b-}^\alpha y$ del lado izquierdo. (Kilbas et al., 2006)

1. En particular, cuando $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$

$$\blacksquare \text{ Si } \alpha = 0, \text{ entonces: } (D_{a+}^0 y)(x) = (D_{b-}^0 y)(x) = y(x)$$

en efecto

$$\begin{aligned} (D_{a+}^0 y)(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right) (I_{a+}^1 y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx} \right) \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{-1+1}} \\ &= \frac{d}{dx} \int_a^x y(t)dt \\ &= y(x) \end{aligned}$$

análogamente $(D_{b-}^0 y)(x) = y(x)$.

■ Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, entonces: $(D_{a+}^m y)(x) = y^{(m)}(x)$

en efecto

$$\begin{aligned} (D_{a+}^\alpha y)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} (I_{a+}^{m+1-m} y)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m+1-m)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{m-m-1+1}} \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} \int_a^x y(t)dt \\ &= y^{(m)}(x). \end{aligned}$$

análogamente $(D_{b-}^m y)(x) = (-1)^m y^{(m)}(x) \quad (m \in \mathbb{N})$

Aquí, $y^{(m)}(x)$ es la derivada convencional de orden m de la función $y(x)$.

2. Si $0 < \Re(\alpha) < 1$, entonces

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha} \quad (x > a) \quad (2.2.8)$$

$$(D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^\alpha} \quad (x < b) \quad (2.2.9)$$

Cuando $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces de las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.7) toma la siguiente forma:

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = \llbracket \alpha \rrbracket + 1; \ x > a) \quad (2.2.10)$$

y

$$(D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (n = \llbracket \alpha \rrbracket + 1; \ x < b) \quad (2.2.11)$$

mientras que (2.2.8) y (2.2.9) están dados por:

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1; x > a) \quad (2.2.12)$$

y

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1; x < b) \quad (2.2.13)$$

respectivamente. (Kilbas et al., 2006)

Propiedades

Si α y $\beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) \geq 0$ y ($\Re(\beta) > 0$), entonces

$$\begin{aligned} \left(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0) \\ \left(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left(I_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0) \\ \left(D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0) \quad (\text{Kilbas et al., 2006}) \end{aligned}$$

En situaciones específicas, cuando β es igual a uno y $\Re(\alpha) \in \mathbb{R}_0^+$, por lo general, la derivada fraccional de Riemann-Liouville de una constante no se considera igual a cero.

$$(D_{a+}^{\alpha}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (D_{b-}^{\alpha}1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (0 < \Re(\alpha) < 1)$$

Lema 2.2.3. Sea $\Re(\alpha) > 0$, $n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1$ y sea $f_{n-1}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)$ la integral fraccional (2.2.2) de orden $n - \alpha$

1. Si $1 \leq p < \infty$ y $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_p)$, entonces

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x) = f(x) \quad (2.2.14)$$

2. Si $f(x) \in L_1(a, b)$ y $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$, entonces la igualdad

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} \quad (2.2.15)$$

para casi todo $[a, b]$

en particular, si $0 < \Re(\alpha) < 1$, entonces

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1} \quad (2.2.16)$$

donde $f_{1-\alpha}(x) = (I_{a+}^{1-\alpha} f)(x)$, mientras $\alpha = n \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.2.17)$$

(Kilbas et al., 2006)

Lema 2.2.4. Si $\Re(\alpha) > 0$ y $f(x) \in L_p(a, b)$ ($1 \leq p \leq \infty$), entonces se tiene las siguientes igualdades

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) \text{ y } (D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = f(x) \quad (\Re(\alpha) > 0) \quad (2.2.18)$$

(Kilbas et al., 2006)

2.2.3. Derivada fraccional de Caputo

Sea $[a; b]$ un intervalo finito de la recta real $\mathbb{R}$, y sea

$$D_{a+}^{\alpha} [y(t)](x) \equiv (D_{a+}^{\alpha} y)(x) \text{ y } D_{b-}^{\alpha} [y(t)](x) \equiv (D_{b-}^{\alpha} y)(x)$$

la derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$)

Las derivadas fraccionarias de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) en $[a; b]$ se definen:

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x) \quad (2.2.19)$$

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) = \left(D_{b-}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right)(x) \quad (2.2.20)$$

respectivamente, donde

$$n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1 \text{ para } \alpha \notin \mathbb{N}_0 \text{ ó } n = \alpha \text{ para } \alpha \in \mathbb{N}_0 \quad (2.2.21)$$

estas derivadas se denominan derivadas fraccionarias de Caputo del lado derecho y del lado izquierdo de orden α . (Kilbas et al., 2006)

En particular, cuando $0 < \Re(\alpha) < 1$

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha [y(t) - y(a)])(x) \quad (2.2.22)$$

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha [y(t) - y(b)])(x) \quad (2.2.23)$$

Si α no es un número natural no nulo ($\alpha \notin \mathbb{N}_0$), y $y(x)$ es una función en la cual existen las derivadas fraccionarias de Caputo $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ y $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) junto con las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville $(D_{a+}^\alpha y)(x)$ y $(D_{b-}^\alpha y)(x)$

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha} \quad (n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1) \quad (2.2.24)$$

y

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = (D_{b-}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - x)^{k-\alpha} \quad (n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1) \quad (2.2.25)$$

en particular, cuando $0 < \Re(\alpha) < 1$, tenemos:

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha} \quad (n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1) \quad (2.2.26)$$

$$\left({}^C D_{b-}^\alpha y\right)(x) = \left(D_{b-}^\alpha y\right)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha} \quad (n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1) \quad (2.2.27)$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, entonces las derivadas fraccionarias de Caputo (2.2.19) y (2.2.20) coinciden con las derivadas de Riemann- Liouville en los siguientes casos:

$$\left({}^C D_{a+}^\alpha y\right)(x) = \left(D_{a+}^\alpha y\right)(x) \quad (2.2.28)$$

si $y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0 \quad (n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1); y$

$$\left({}^C D_{b-}^\alpha y\right)(x) = \left(D_{b-}^\alpha y\right)(x) \quad (2.2.29)$$

si $y(b) = y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0 \quad (n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1).$

En particular, cuando $0 < \Re(\alpha) < 1$, tenemos:

$$\left({}^C D_{a+}^\alpha y\right)(x) = \left(D_{a+}^\alpha y\right)(x), \text{ cuando } y(a) = 0 \quad (2.2.30)$$

$$\left({}^C D_{b-}^\alpha y\right)(x) = \left(D_{b-}^\alpha y\right)(x), \text{ cuando } y(b) = 0 \quad (2.2.31)$$

si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ y la derivada habitual $y^{(n)}(x)$ de orden n existe:

$$\left({}^C D_{a+}^\alpha y\right)(x) = y^{(n)}(x) \text{ y } \left({}^C D_{b-}^\alpha y\right)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.2.32)$$

es decir $\left({}^C D_{a+}^\alpha y\right)(x)$ coincide con $y^{(n)}(x)$, mientras que $\left({}^C D_{b-}^\alpha y\right)(x)$ coincide con $(-1)^n y^{(n)}(x)$ (Kilbas et al., 2006)

Teorema 2.2.1. Sea $\Re(\alpha) \geq 0$ y sea $n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}_0$; $n = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{N}_0$

Si $y(x) \in AC^n[a; b]$, entonces la derivada fraccional de Caputo $\left({}^C D_{a+}^\alpha y\right)(x)$ y

$\left({}^C D_{b-}^\alpha y\right)(x)$ existe casi en todas partes de $[a; b]$

a) Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, $\left({}^C D_{a+}^\alpha y\right)(x)$ y $\left({}^C D_{b-}^\alpha y\right)(x)$ están representados por:

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = (I_{a+}^{n-\alpha} D^n y)(x) \quad (2.2.33)$$

y

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} = (-1)^n (I_{b-}^{n-\alpha} D^n y)(x) \quad (2.2.34)$$

respectivamente, donde $D = \frac{d}{dx}$ y $n = \lceil \Re(\alpha) \rceil + 1$.

En particular, cuando $0 < \Re(\alpha) < 1$ y $y(x) \in AC[a; b]$

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y'(t)dt}{(x-t)^\alpha} = (I_{a+}^{1-\alpha} Dy)(x) \quad (2.2.35)$$

y

$$({}^C D_{b-}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y'(t)dt}{(t-x)^\alpha} = -(I_{b-}^{1-\alpha} Dy)(x) \quad (2.2.36)$$

b) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, entonces $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x)$ y $({}^C D_{b-}^\alpha y)(x)$ están representados por (2.2.32)

En particular, para $n = 0$

$$({}^C D_{a+}^0 y)(x) = ({}^C D_{b-}^0 y)(x) = y(x) \quad (\text{Kilbas et al., 2006})$$

Demostración. Sea $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ usando (2.2.19) y (2.2.6):

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) &= \left(D_{a+}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) dt \end{aligned}$$

Sea: $I = \int (x-t)^{n-\alpha-1} \left(y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) dt$, integrando por partes:

$$u = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \quad dv = (x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

$$du = \left(y'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right) dt \quad v = -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}$$

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left\{ -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right\}_{t=a}^x \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left(y'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right) dt \Big\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} \left\{ \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(y'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right) dt \right\} \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right) \left\{ \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (y^{n-1}(t) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=n-1}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{(k-(n-1))!} (t-a)^{k-(n-1)}) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right) \left\{ \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (y^{n-1}(t) - y^{n-1}(a)) dt \right\} \end{aligned}$$

Sea $I = \int (x-t)^{n-\alpha-1} (y^{n-1}(t) - y^{n-1}(a)) dt$, integrando por partes:

$$\begin{aligned} u &= y^{n-1}(t) - y^{n-1}(a) \quad dv = (x-t)^{n-\alpha-1} dt \\ du &= y^n(t) dt \quad v = -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right) \left\{ -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} [y^{n-1}(t) - y^{n-1}(a)] \right\}_{t=a}^x \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} y^n(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \end{aligned}$$

■

Lema 2.2.5. Sea $\Re(0) > 0$ y sea $n = \llbracket \Re(\alpha) \rrbracket + 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}_0$; $n = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{N}_0$

Si $y(x) \in AC^n[a, b]$ o $y(x) \in C^n[a, b]$, entonces

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

y

$$\left(I_{b-}^{\alpha} {}^C D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k$$

(Para la demostración ver Kilbas et al. (2005).Pg 96)

En particular, si $0 < \Re(\alpha) \leq 1$ y $y(x) \in AC[a, b]$ o $y(x) \in C[a, b]$, entonces

$$\left(I_{a+}^{\alpha} {}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - y(a), \text{ y } \left(I_{b-}^{\alpha} {}^C D_{b-}^{\alpha} y\right)(x) = y(x) - y(b) \quad (2.2.37)$$

2.2.4. Ecuaciones con derivada fraccional de Caputo en el espacio de funciones continuamente diferenciables

El problema de Cauchy con condiciones iniciales en el punto final del intervalo. Solución global

En esta sección consideramos la ecuación diferencial no lineal de orden $\alpha > 0$

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)] \quad (\alpha > 0; a \leq x \leq b) \quad (2.2.38)$$

que involucra la derivada fraccional de Caputo definida en (2.2.19), en un intervalo finito $[a, b]$ del eje real $\mathbb{R}$, con condiciones iniciales

$$y^{(k)}(a) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1; n = -\llbracket -\alpha \rrbracket) \quad (2.2.39)$$

Damos las condiciones para una solución única $y(x)$ a este problema en el espacio $C_{\gamma}^r[a, b]$ definido para $\alpha > 0$, $r \in \mathbb{N}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ ($0 \leq \gamma < 1$) por:

$$C_{\gamma}^{\alpha, r}[a, b] = \{y(x) \in C^r[a, b] : {}^C D_{a+}^{\alpha} y \in C_{\gamma}[a, b]\}, \quad C_{\gamma}^{r, r}[a, b] = C_{\gamma}^r[a, b] \quad (2.2.40)$$

Considerando la ecuación integral de Volterra:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.2.41)$$

Cuando $\alpha \in \mathbb{N}$, entonces de acuerdo con (2.2.32) $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y^{(n)}$ para una función $y(x)$, y por lo tanto (2.2.38)-(2.2.39) es el problema de Cauchy para la ecuación diferencial ordinaria de orden $n \in \mathbb{N}$:

$$y^{(n)}(x) = f[x, y(x)] \quad (a \leq x \leq b), \quad y^{(k)}(a) = b_k \in \mathbb{R} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.2.42)$$

La ecuación integral correspondiente a (2.2.40) toma la forma:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f[t, y(t)] dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.2.43)$$

Primero estableceremos una equivalencia entre (2.2.38)-(2.2.39) y la ecuación integral (2.2.41) en el espacio $C^r[a, b]$ de funciones continuamente diferenciables. (Kilbas et al., 2006)

Teorema 2.2.2. *Sea $\alpha > 0$ y $n = -\llbracket -\alpha \rrbracket$. Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y sea $f : \langle a, b \rangle \times G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para cualquier $y \in G$, $f[x, y] \in C_\gamma[a, b]$ con $0 \leq \gamma < 1$ y $\gamma \leq \alpha$. Sea $n = r$ para $\alpha \in \mathbb{N}$ y $r = n - 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}$*

Si $y(x) \in C^r[a, b]$, entonces $y(x)$ satisface las relaciones (2.2.38) y (2.2.39) si y solo si, $y(x)$ satisface la ecuación integral de Volterra (2.2.41) (Kilbas et al., 2006)

Demostración. .

■ Sea $\alpha = n \in \mathbb{N}$

Primero probaremos la condición necesaria. Sea $y(x) \in C^n[a, b]$ la solución al problema de Cauchy (2.2.42).

Aplicando el operador I_{a+}^n a la primera relación de (2.2.42)

$$I_{a+}^n y^n(x) = I_{a+}^n f[x, y(x)] \quad (2.2.44)$$

recordando el resultado en (2.2.17):

$$(I_{a+}^n D_{a+}^n f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

aplicando al lado izquierdo de la ecuación (2.2.44) se tiene:

$$y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = I_{a+}^n f[x, y(x)]$$

y despejando $y(x)$:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + I_a^n f[x, y(x)]$$

considerando las condiciones iniciales en (2.2.42), llegamos a la ecuación (2.2.43).

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f[t, y(t)] dt$$

recíprocamente, si $y(x) \in C^n[a, b]$ satisface (2.2.43), entonces derivando k - veces $y(x)$ se tiene:

$$y(x) = \frac{b_0}{0!} (x-a)^0 + \frac{b_1}{1!} (x-a)^1 + \frac{b_2}{2!} (x-a)^2 + \frac{b_3}{3!} (x-a)^3 + \dots + \frac{b_{n-1}}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} +$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f[t, y(t)] dt$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1b_1}{1!} (x-a)^{1-1} + \frac{2b_2}{2!} (x-a)^{2-1} + \frac{3b_3}{3!} (x-a)^{3-1} + \dots + \frac{(n-1)b_{n-1}}{(n-1)!} (x-a)^{n-1-1} \\ &\quad + \frac{(n-1)}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1-1} f[t, y(t)] dt \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{(j-1)!} (x-a)^{j-1} + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x (x-t)^{n-2} f[t, y(t)] dt \\ y''(x) &= \frac{2b_2}{2!} (x-a)^{2-2} + \frac{(3)(2)b_3}{3!} (x-a)^{3-2} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)b_{n-1}}{(n-1)!} (x-a)^{n-1-2} \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-2-1} f[t, y(t)] dt \\ &= \sum_{j=2}^{n-1} \frac{b_j}{(j-2)!} (x-a)^{j-2} + \frac{1}{(n-3)!} \int_a^x (x-t)^{n-2-1} f[t, y(t)] dt \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &= \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} (x-a)^{j-k} + \frac{1}{(n-k-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-k-1} f[t, y(t)] dt, \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

tomando el limite $x \rightarrow a$, y teniendo en cuenta la continuidad de los integrandos en (2.2.43) y (2.2.45)

$$y^{(k)}(a) = b_k, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Reemplazando en (2.2.45) $k = n-1$

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{j=n-1}^{n-1} \frac{b_j}{(j-n+1)!} (x-a)^{j-n+1} + \frac{1}{(0)!} \int_a^x (x-t)^0 f[t, y(t)] dt$$

$y^{(n-1)}(x) = b_{n-1} + \int_a^x f[t, y(t)] dt$, derivando respecto a x tenemos:

$$y^{(n)}(x) = f[x, y(x)]$$

por lo tanto el teorema fue probado para $n \in \mathbb{N}$

- Sea $n - 1 < \alpha < n$ y $y(x) \in C^{n-1}[a, b]$.

Según la definición (2.2.19):

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \left(D_{a+}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x)$$

y aplicando la ecuación (2.2.6)

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(I_{a+}^{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right)(x)$$

por hipótesis del teorema, $f[x, y(x)] \in C_\gamma[a, b]$, y se sigue de (2.2.38) que $({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) \in C_\gamma[a, b]$, y por lo tanto por el lema 2.2.2

$$\left(I_{a+}^{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right)(x) \in C_\gamma^n[a, b]$$

Sea $g(t) = y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j$, obtenemos (2.2.15)

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{g_{n-\alpha}^{n-j}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j}$$

$$\left[I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha \left(y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right) \right](x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{g_{n-\alpha}^{n-j}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j}$$

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{g_{n-\alpha}^{n-j}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j}$$

$$(I_{a+}^\alpha {}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j - \sum_{k=1}^n \frac{g_{n-\alpha}^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x-a)^{\alpha-k} \quad (2.2.46)$$

donde

$$g_{n-\alpha}(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right) (x) \quad (2.2.47)$$

aplicando derivada respecto a x a la función $g_{n-\alpha}(x)$

$$g'_{n-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} \left(I_{a+}^{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right] \right) (x)$$

aplicando integral de Riemann-Liouville (2.2.2)

$$g'_{n-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} g(t) dt \right)$$

integrando por partes tenemos

$$g'_{n-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(g(a) \cdot \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} g'(t) dt \right) \right]$$

derivando respecto a x

$$\begin{aligned} g'_{n-\alpha}(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(g(a) \cdot (x-a)^{n-\alpha-1} + \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha+1-1}}{n-\alpha} g'(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} g(a) \cdot (x-a)^{n-\alpha-1} + \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g'(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} g(a) \cdot (x-a)^{n-\alpha-1} + \frac{d}{dx} I_{a+}^{n-\alpha+1} g'(x) \\ &= \left(I_{a+}^{n-\alpha} \left[y'(t) - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{y^{(j)}(a)}{(j-1)!} (t-a)^{j-1} \right] \right) (x) \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

repitiendo el proceso $n-k$ veces ($k = 1, \dots, n$),

$$g''_{n-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} (I_{a+}^{n-\alpha} g)(x) \right] = \frac{d}{dx} [I_{a+}^{n-\alpha} g'(x)] = I_{a+}^{n-\alpha} g''(x)$$

$$g'''_{n-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d''}{dx} (I_{a+}^{n-\alpha} g)(x) \right] = \frac{d}{dx} [I_{a+}^{n-\alpha} g''(x)] = I_{a+}^{n-\alpha} g'''(x)$$

$\vdots$

$$g_{n-\alpha}^{n-k}(x) = I_{a+}^{n-\alpha} g^{n-k}(x)$$

llegamos a la siguiente relación:

$$y_{n-\alpha}^{n-k}(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} \left[y^{(n-k)}(t) - \sum_{j=n-k}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^{j-n+k} \right] \right) (x) \quad (2.2.49)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(y^{(n-k)}(t) - \sum_{j=n-k}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^{j-n+k} \right) dt \quad (2.2.50)$$

haciendo cambio de variable

$$t = a + s(x-a) \Rightarrow dt = (x-a)ds$$

Si $t = a \Rightarrow s = 0$, $t = x \Rightarrow s = 1$, sustituyendo en (2.2.49), para $k = 1, \dots, n$, obtenemos

$$y_{n-\alpha}^{n-k}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (x - (a + s(x-a)))^{n-\alpha-1} \left(y^{(n-k)}(a + s(x-a)) - \sum_{j=n-k}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (s(x-a))^{j-n+k} \right) (x-a) ds$$

$$y_{n-\alpha}^{n-k}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{n-\alpha-1} (1-s)^{n-\alpha-1} \left(y^{(n-k)}(a + s(x-a)) - \sum_{j=n-k}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (s(x-a))^{j-n+k} \right) (x-a) ds$$

$$y_{n-\alpha}^{(n-k)}(x) = \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} \left[y^{(n-k)}[a+s(x-a)] - \sum_{j=n-k}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} [s(x-a)]^{j-n+k} \right] ds$$

ya que $\alpha < n$ y $y_{n-\alpha}^{(n-k)}(x) \in C[a, b]$ para $k = 1, \dots, n$, entonces calculando el limite $x \rightarrow a+$ a (2.2.4), se tiene $y_{n-\alpha}^{(n-k)}(a+) = 0$ ($k = 1, \dots, n$), luego (2.2.46) toma la forma

$$(I_{a+}^{\alpha} {}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j \quad (2.2.51)$$

ya que $f[x, y(x)] \in C_{\gamma}[a, b]$ y $\gamma \leq \alpha$. Aplicando el operador I_{a+}^{α} a ambos lados de (2.2.38):

$$[I_{a+}^{\alpha} ({}^C D_{a+}^{\alpha} y)](x) = I_{a+}^{\alpha} (f[x, y(x)])$$

tomando (2.2.51) y de las condiciones iniciales (2.2.39):

$$y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j = I_{a+}^{\alpha} (f[x, y(x)])$$

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j + I_{a+}^{\alpha} (f[x, y(x)])$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{b_0}{0!} (x-a)^0 + \frac{b_1}{1!} (x-a)^1 + \frac{b_2}{2!} (x-a)^2 + \frac{b_3}{3!} (x-a)^3 + \dots + \frac{b_{n-1}}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f[t, y(t)] dt \\ y'(x) &= \frac{1b_1}{1!} (x-a)^{1-1} + \frac{2b_2}{2!} (x-a)^{2-1} + \frac{3b_3}{3!} (x-a)^{3-1} + \dots + \frac{(n-1)b_{n-1}}{(n-1)!} (x-a)^{n-1-1} + \\ &\frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t) f[t, y(t)] dt \\ y'(x) &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j}{(j-1)!} (x-a)^{j-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f[t, y(t)] dt \\ y''(x) &= \frac{2b_2}{2!} (x-a)^{2-2} + \frac{(3)(2)b_3}{3!} (x-a)^{3-2} + \dots + \frac{(n-1)(n-2)b_{n-1}}{(n-1)!} (x-a)^{n-1-2} + \\ &\frac{(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2-1} f[t, y(t)] dt \\ y''(x) &= \sum_{j=2}^{n-1} \frac{b_j}{(j-2)!} (x-a)^{j-2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2-1} f[t, y(t)] dt \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x) &= \sum_{j=n-1}^{n-1} \frac{b_j}{(j-n+1)!} (x-a)^{j-n+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-n} f[t, y(t)] dt, \end{aligned}$$

de aquí tenemos $y(x) \in C^{n-1}[a, b]$ es la solución de la ecuación integral (2.2.41) y así se prueba la condición necesaria.

Ahora $y(x) \in C^{n-1}[a, b]$ es la solución a la ecuación integral (2.2.41). Mostremos que $y(x)$ satisface la condición inicial (2.2.39). Derivando ambos lados de (2.2.41), para todo $k = 1, \dots, n-1$, obtenemos

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} (x-a)^{j-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha+k}} \quad (2.2.52)$$

haciendo el cambio de variable

$$t = a + s(x-a) \Rightarrow dt = (x-a)ds$$

en la integral (2.2.51) y (2.2.52), para todo $k = 1, \dots, n-1$, tenemos:

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} (x-a)^{j-k} + \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^1 \frac{f[a + s(x-a), y(a + s(x-a))] dt}{(x-t)^{1-\alpha+k}}$$

ya que $\alpha > n-1$ y $f[x, y(x)]$ es continua, los integrandos en esta relación son continuas, y tomando límite $x \rightarrow a+$, obtenemos la relación (2.2.39)

$$y^{(k)}(a) = b_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1; n = -\llbracket -\alpha \rrbracket).$$

Recíprocamente, ahora mostremos que si $y(x)$ es la solución de la ecuación de Volterra, entonces satisface la ecuación (2.2.38) se tiene:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (a \leq x \leq b)$$

Usando la definición de la integral de Riemann-Liouville:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + I_{a+}^{\alpha} (f[x, y(x)])$$

esto es equivalente a la siguiente ecuación:

$$y(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j = I_{a+}^{\alpha} (f[x, y(x)])$$

aplicando el operador D_{a+}^α , a la ecuación anterior:

$$\left[D_{a+}^\alpha \left(y(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (t-a)^j \right) \right] (x) = D_{a+}^\alpha [I_{a+}^\alpha (f[x, y(x)])]$$

por definición de derivada de Caputo y la primera relación en (2.2.18)

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = f[x, y(x)]$$

se llega a la ecuación (2.2.38) y argumentando como en el caso para $\alpha \in \mathbb{N}$ se prueba que es satisfecho (2.2.39). Por lo tanto el teorema queda probado para $\alpha \notin \mathbb{N}$ (Kilbas et al., 2006). ■

Corolario 2.2.1. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea G un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ y sea $f : \langle a, b \rangle \times G \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cualquier $y \in G$, $f[x, y] \in C_\gamma[a, b]$ con $0 \leq \gamma < 1$

Si $y(x) \in C^n[a, b]$, entonces $y(x)$ satisface a relación (2.2.42) si y solo si $y(x)$ satisface la ecuación integral de Volterra (2.2.43) (Kilbas et al., 2006)

Demostración. .

La prueba es una consecuencia del teorema anterior y la primera parte de su prueba. ■

Corolario 2.2.2. Sea $0 < \alpha < 1$ y $0 \leq \gamma \leq \alpha$. Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ y sea $f : \langle a, b \rangle \times G \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cualquier $y \in G$, $f[x, y] \in C_\gamma[a, b]$.

Si $y(x) \in C[a, b]$, entonces $y(x)$ satisface las relaciones

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = f[x, y(x)], \quad y(a) = b_0 \in \mathbb{R}$$

si y solo si, $y(x)$ satisface la ecuación integral de Volterra

$$y(x) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.2.53)$$

(Kilbas et al., 2006)

Demostración. .

Considerando $n = 1$, en el teorema anterior se tiene la demostración. ■

Capítulo 3

METODOLOGIA

3.1. Tipo de Investigación

Esta investigación tiene un enfoque cuantitativo, ya que implica la adquisición y el análisis de datos numéricos para abordar preguntas específicas de investigación relacionadas con la aplicación del modelo matemático en el contexto de la epidemia de COVID-19 en la región de Tacna.

3.2. Nivel de Investigación

El nivel de investigación adoptado es exploratorio, orientado a comprender y analizar el proceso del COVID-19 aplicando el modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo para estudiar la evolución de epidemias, específicamente en la región Tacna del año 2021. A través de esta exploración, se busca obtener una comprensión más profunda y detallada de su aplicabilidad y resultados.

3.3. Diseño de Investigación

El diseño de investigación se caracteriza por ser no experimental, ya que nuestro objetivo principal es el desarrollo y aplicación del modelo SIRD para el COVID-19 con derivada fraccional de Caputo en la región Tacna del sur de Perú. En lugar de interve-

nir y manipular deliberadamente variables para obtener datos, se recopilaban datos ya existentes proporcionados por DIRESA.

La decisión de no incluir una hipótesis en esta investigación es debido a la naturaleza del trabajo que es exploratoria y descriptiva en su desarrollo. (Hernández Sampieri et al., 2018)

- **Naturaleza Exploratoria:** El enfoque principal de esta investigación es explorar y comprender el comportamiento de la epidemia de COVID-19 en las regiones del sur de Perú utilizando un modelo SIRD con derivadas fraccionarias de Caputo. Debido a que en el presente enfoque no existe un marco teórico que pueda predecir resultados específicos.
- **Falta de Evidencia Prevista:** En una investigación típica con hipótesis, se parte de una premisa o suposición basada en evidencia previa que se busca probar o refutar. En este caso, no hay una base sólida de evidencia previa que permita formular una hipótesis precisa sobre cómo se comportará la enfermedad COVID-19 en estas regiones utilizando un modelo con derivadas fraccionarias.
- **Enfoque en la Descripción y Comparación:** El objetivo principal de estudio es describir la dinámica de la enfermedad utilizando el modelo SIRD fraccional de Caputo y comparar los resultados con datos reales. Esta comparación se realiza para comprender cómo el modelo se ajusta a la realidad y para proporcionar una perspectiva innovadora. No se busca probar una hipótesis específica, sino más bien obtener una comprensión más profunda de la situación.

3.4. Delimitación de la Investigación

Una limitación significativa de estudio fue conseguir datos necesarios, debido que no se pudieron obtener datos epidemiológicos relevantes de otras regiones fuera de Tacna, la investigación se limita exclusivamente al análisis de la región de Tacna en el sur de Perú. Aunque se reconoce que un enfoque más amplio que incluya múltiples regiones podría

brindar una perspectiva más completa, esta limitación no permitió una comparación exhaustiva con otras áreas geográficas.

3.5. Delimitación del problema

Este estudio se enfoca en el análisis del modelo matemático SIRD (Susceptibles, Infectados, Recuperados y Difuntos) y su adaptación mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias en el contexto de la enfermedad COVID-19. El propósito principal es proporcionar una perspectiva nueva y precisa sobre la evolución de la enfermedad, considerando sus dinámicas correspondientes.

El modelo SIRD se describe mediante ecuaciones diferenciales ordinarias que representan la dinámica de las poblaciones de susceptibles (S), infectados (I), recuperados (R) y difuntos (D) en función del tiempo:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta \frac{S(t) \cdot I(t)}{N} \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta \frac{I(t) \cdot S(t)}{N} - (\gamma + \kappa) I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} = \kappa I(t) \end{cases} \quad (3.5.1)$$

este sistema de ecuaciones se basa en los siguientes parámetros:

N : Población total (homogénea)

β : Es la tasa de transmisión de la enfermedad

γ : Es la tasa de recuperación

κ : Es la tasa de mortalidad (Nisar et al., 2021)

Sin embargo, es importante destacar que este estudio presenta ciertas limitaciones:

- Limitación en el Modelo: La investigación se restringe al estudio del modelo SIRD con derivadas fraccionarias de Caputo, donde el orden de la derivada $0 < \alpha < 1$, restringimos con estos valores en el modelo de estudio para posibilitar mejor el análisis de la propagación de la enfermedad de COVID-19.

- Limitación en la Comparación: Los valores considerados para el orden de la derivada fraccional que se ha considerado es $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,30$ y $\alpha = 0,50$ esto con el propósito de tener un resultado más preciso. No se consideran otras variables que podrían influir en la propagación de la epidemia, como el comportamiento social o las medidas de prevención y control implementadas por las autoridades sanitarias.
- Limitación de Variables Externas: Este estudio se centra en el modelo matemático SIRD (3.5.1) con derivada de primer orden y su adaptación mediante derivadas fraccionarias de Caputo. Se subraya que en este análisis no se incluyen explícitamente los individuos asintomáticos, ni se incorporan distinciones de género o edad. Además, se asume la homogeneidad poblacional, lo que significa que todos los individuos son considerados de manera similar en términos de susceptibilidad, infección, recuperación y mortalidad. Estas simplificaciones se implementan con el objetivo de facilitar la exploración clara y comprensible de los patrones generales de la enfermedad en una población.

3.6. Delimitación Temporal

La investigación toma datos de DIRESA Tacna del mes de setiembre, octubre y noviembre del 2021 y para comparar la simulación se tomó datos del mes de diciembre 2021.

3.7. Simulaciones con Scilab

Las simulaciones numéricas desempeñaron un papel fundamental en esta investigación al proyectar la dinámica de la epidemia de COVID-19 en la región de Tacna, Perú, utilizando el modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo. A continuación, se describen los pasos seguidos en las simulaciones:

- Implementación del Modelo: El modelo matemático SIRD con derivada fraccional de Caputo se implementó en el entorno de programación Scilab, este se eligió co-

mo la plataforma de simulación debido a su capacidad para resolver ecuaciones diferenciales y generar datos simulados de manera eficiente.

- **Generación de Datos Simulados:** Se utilizaron las ecuaciones diferenciales fraccionarias del modelo SIRD con derivada de Caputo en Scilab para generar datos simulados que representaran la propagación del COVID-19 en la región de Tacna. Estos datos simulados se generaron para el mes de diciembre de 2021.
- **Variación de Parámetros:** Se realizaron múltiples simulaciones variando el parámetro α en el modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo. Los valores de α considerados fueron $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,30$ y $\alpha = 0,50$. Esto permitió evaluar cómo diferentes valores de α afectaron la dinámica de la epidemia en las simulaciones.
- **Comparación con Datos Reales:** Los resultados de las simulaciones se compararon con los datos reales de casos notificados de susceptibles, infectados, recuperados y decesos en la región de Tacna. Estos datos reales se obtuvieron de la Dirección Regional de Salud (DIRESA) de Tacna y se utilizaron para evaluar la precisión de las simulaciones.

Capítulo 4

RESULTADOS Y DISCUSIONES

4.1. Modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo

El modelo matemático SIRD (S: Susceptible, I: Infectado, R: Recuperados, D: Decesos), expresado mediante ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario de Caputo para $0 < \alpha < 1$ es de la forma:

$$\begin{cases} {}^C D_{t_0+}^\alpha [S(t)] = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N}, \\ {}^C D_{t_0+}^\alpha [I(t)] = \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - (\gamma + \kappa) I(t), \\ {}^C D_{t_0+}^\alpha [R(t)] = \gamma I(t), \\ {}^C D_{t_0+}^\alpha [D(t)] = \kappa I(t). \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Al tiempo inicial t_0 , se asignan los valores iniciales S_0 a la variable S , I_0 a la variable I , R_0 a la variable R y D_0 a la variable D , donde:

N : Población total.

β : Es la tasa de transmisión.

γ : Es la tasa de recuperación.

κ : Es la tasa de decesos. (Nisar et al. (2021))

Lema 4.1.1. *La solución del modelo bajo consideración está restringida a la región factible dada por:*

$$T = \{(S, I, R, D) \in \mathbb{R}_+^4 : 0 \leq N(t) \leq N_0\}.$$

(Nisar et al. (2021))

Demostración. Si $N(t) = S(t) + I(t) + R(t) + D(t)$, entonces

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0}^\alpha [N(t)] &= {}^C D_{t_0}^\alpha [S(t)] + {}^C D_{t_0}^\alpha [I(t)] + {}^C D_{t_0}^\alpha [R(t)] + {}^C D_{t_0}^\alpha [D(t)] \\ &= -\beta \frac{S(t)I(t)}{N} + \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - (\gamma + \kappa) I(t) + \gamma I(t) + \kappa I(t) = 0 \end{aligned}$$

de aquí ${}^C D_{t_0+}^\alpha [N(t)] = 0$, y de la ecuación (2.2.37) se tiene:

$$\begin{aligned} I_{t_0+}^\alpha {}^C D_{t_0+}^\alpha [N(t)] &= I_{t_0+}^\alpha (0) \\ N(t) - N(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

entonces $N(t) = N(t_0)$ pero como $N(t_0) \leq N_0$, donde N_0 es la población total inicial en $t \in [0, T]$, luego $N(t) \leq N_0$ esto muestra el carácter acotado del modelo dinámico de población considerado. ■

4.2. Existencia y unicidad de solución

Sea $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, donde

$$\begin{cases} f_1(S, I, R, D) &= -\beta \frac{SI}{N}, \\ f_2(S, I, R, D) &= \beta \frac{IS}{N} - (\gamma + \kappa)I, \\ f_3(S, I, R, D) &= \gamma I, \\ f_4(S, I, R, D) &= \kappa I \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Lema 4.2.1. Si f es definido como en (4.2.1) en $\Omega = I_a \times B_b$ donde $I_a = \{t : t_0 \leq t \leq a\}$,

$$B_b = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : |(x_1, x_2, x_3, x_4) - (S_0, I_0, R_0, D_0)| \leq b\},$$

entonces existe $M > 0$ tal que $\|f\| \leq M$ en Ω , f es lipschitziana, en particular f es continua. (Nisar et al. (2021))

Demostración. En efecto, como $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, donde

$$\begin{cases} f_1(S, I, R, D) &= -\beta \frac{SI}{N}, \\ f_2(S, I, R, D) &= \beta \frac{IS}{N} - (\gamma + \kappa)I, \\ f_3(S, I, R, D) &= \gamma I, \\ f_4(S, I, R, D) &= \kappa I \end{cases}$$

de aquí

$$\|f\|^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2$$

luego para cada coordenada de f se tiene:

$$\begin{aligned} f_1^2 &= \left(-\beta \frac{SI}{N}\right)^2 = \beta^2 \frac{S^2 I^2}{N^2} \leq \beta^2 N^2, \\ f_2^2 &= \left(\beta \frac{IS}{N} - (\gamma + \kappa)I\right)^2 = \left(\beta \frac{IS}{N}\right)^2 - 2\left(\beta \frac{IS}{N}\right)((\gamma + \kappa)I) + ((\gamma + \kappa)I)^2 \\ &\leq \beta^2 N^2 + \beta^2 N^2 + (\gamma + \kappa)^2 N^2 + (\gamma + \kappa)^2 N^2 = 2(\beta^2 + (\gamma + \kappa)^2) N^2, \\ f_3^2 &= (\gamma I)^2 \leq \gamma^2 N^2, \\ f_4^2 &= (\kappa I)^2 \leq \kappa^2 N^2, \end{aligned}$$

de aquí

$$\|f\|^2 \leq (\beta^2 + 2(\beta^2 + (\gamma + \kappa)^2) + \gamma^2 + \kappa^2) N^2, \text{ por lo tanto } \|f\| \leq M, \text{ donde:}$$

$$M = \sqrt{\beta^2 + 2(\beta^2 + (\gamma + \kappa)^2) + \gamma^2 + \kappa^2} N.$$

Por otro lado,

$$|f(S_1, I_1, R_1, D_1) - f(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2$$

$$= (f_1(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_1(S_2, I_2, R_2, D_2))^2 + (f_2(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_2(S_2, I_2, R_2, D_2))^2 \\ + (f_3(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_3(S_2, I_2, R_2, D_2))^2 + (f_4(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_4(S_2, I_2, R_2, D_2))^2$$

de aquí, para cada término se tiene:

$$\text{sea } A = |f_1(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_1(S_2, I_2, R_2, D_2)| = \left| -\beta \frac{S_1 I_1}{N} + \beta \frac{S_2 I_2}{N} \right|$$

$$A = \frac{|\beta|}{|N|} |S_1 I_1 - S_2 I_2|$$

$$A = \frac{|\beta|}{|N|} |S_1 I_1 - S_1 I_2 + S_1 I_2 - S_2 I_2|,$$

por la desigualdad triangular se sigue

$$A \leq \frac{|\beta|}{|N|} (|S_1| |I_1 - I_2| + |I_2| |S_1 - S_2|)$$

$$A \leq \frac{|\beta|}{|N|} (|N| |I_1 - I_2| + |N| |S_1 - S_2|) = |\beta| (|I_1 - I_2| + |S_1 - S_2|)$$

de aquí

$$|f_1(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_1(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2 \leq |\beta|^2 (|I_1 - I_2| + |S_1 - S_2|)^2 \\ \leq 2\beta^2 (|I_1 - I_2|^2 + |S_1 - S_2|^2).$$

Para el segundo término, considere

$$B = |f_2(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_2(S_2, I_2, R_2, D_2)| = \left| \beta \frac{I_1 S_1}{N} - (\gamma + \kappa) I_1 - \beta \frac{I_2 S_2}{N} + (\gamma + \kappa) I_2 \right| \\ B = \left| \left(\frac{\beta}{N} \right) (I_1 S_1 - I_2 S_2) + (\gamma + \kappa) (I_2 - I_1) \right|$$

por la desigualdad triangular

$$B \leq \left| \left(\frac{\beta}{N} \right) (I_1 S_1 - I_2 S_2) \right| + |(\gamma + \kappa) (I_2 - I_1)|$$

$$B \leq \frac{\beta}{N} |I_1 S_1 - I_2 S_2| + (\gamma + \kappa) |I_2 - I_1|$$

$$B \leq \frac{\beta}{N} |I_1 S_1 - I_1 S_2 + I_1 S_2 - I_2 S_2| + (\gamma + \kappa) |I_2 - I_1|$$

$$B \leq \frac{\beta}{N} (|I_1| |S_1 - S_2| + |S_2| |I_1 - I_2|) + (\gamma + \kappa) |I_2 - I_1|$$

$$B \leq \frac{\beta}{N} |I_1| |S_1 - S_2| + \left(\frac{\beta}{N} |S_2| + \gamma + \kappa \right) |I_2 - I_1|$$

$$B \leq \frac{\beta}{N} N |S_1 - S_2| + \left(\frac{\beta}{N} N + \gamma + \kappa \right) |I_2 - I_1|$$

$$B \leq \beta |S_1 - S_2| + (\beta + \gamma + \kappa) |I_2 - I_1|$$

de donde

$$|f_2(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_2(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2 \leq (\beta |S_1 - S_2| + (\beta + \gamma + \kappa) |I_2 - I_1|)^2$$

luego,

$$|f_2(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_2(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2 \leq 2(\beta^2 |S_1 - S_2|^2 + (\beta + \gamma + \kappa)^2 |I_2 - I_1|^2).$$

Para el tercer término se tiene:

$$|f_3(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_3(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2 = |\gamma I_1 - \gamma I_2|^2 = \gamma^2 |I_1 - I_2|^2.$$

Finalmente, para el cuarto término se tiene:

$$|f_4(S_1, I_1, R_1, D_1) - f_4(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2 = |\kappa I_1 - \kappa I_2|^2 = \kappa^2 |I_1 - I_2|^2$$

luego

$$|f(S_1, I_1, R_1, D_1) - f(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2 \leq 2\beta^2 (|I_1 - I_2|^2 + |S_1 - S_2|^2) + 2(\beta^2 |S_1 - S_2|^2 + (\beta + \gamma + \kappa)^2 |I_2 - I_1|^2) + \gamma^2 |I_1 - I_2|^2 + \kappa^2 |I_1 - I_2|^2$$

$$|f(S_1, I_1, R_1, D_1) - f(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2 \leq (2\beta^2 + 2(\beta + \gamma + \kappa)^2 + \gamma^2 + \kappa^2) |I_1 - I_2|^2 +$$

$4\beta^2 |S_1 - S_2|^2$, de aquí se sigue :

$$C = |f(S_1, I_1, R_1, D_1) - f(S_2, I_2, R_2, D_2)|^2 \leq (4\beta^2 + 2(\beta + \gamma + \kappa)^2 + \gamma^2 + \kappa^2) |I_1 - I_2|^2 + (4\beta^2 + 2(\beta + \gamma + \kappa)^2 + \gamma^2 + \kappa^2) |S_1 - S_2|^2$$

$$C \leq (4\beta^2 + 2(\beta + \gamma + \kappa)^2 + \gamma^2 + \kappa^2) (|I_1 - I_2|^2 + |S_1 - S_2|^2 + |R_1 - R_2|^2 + |D_1 - D_2|^2)$$

$$C \leq L^2 (|I_1 - I_2|^2 + |S_1 - S_2|^2 + |R_1 - R_2|^2 + |D_1 - D_2|^2)$$

$$\text{donde } L^2 = 4\beta^2 + 2(\beta + \gamma + \kappa)^2 + \gamma^2 + \kappa^2$$

$$\text{por lo tanto } |f(S_1, I_1, R_1, D_1) - f(S_2, I_2, R_2, D_2)| \leq L |(S_1, I_1, R_1, D_1) - (S_2, I_2, R_2, D_2)|.$$

Esto muestra que f es lipschitziana. Además, como f es lipschitziana y S, I, R, D son continuas, por lo tanto f es continua. ■

Teorema 4.2.1. *El modelo matemático SIRD expresado mediante ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario de Caputo definido en (4.1.1) tiene una única solución. (Nisar et al., 2021)*

Demostración. Ahora se considera la ecuación (4.1.1) :

$$\begin{cases} {}^C D_{t_0+}^\alpha [S(t)] &= f_1(S, I, R, D), \\ {}^C D_{t_0+}^\alpha [I(t)] &= f_2(S, I, R, D), \\ {}^C D_{t_0+}^\alpha [R(t)] &= f_3(S, I, R, D), \\ {}^C D_{t_0+}^\alpha [D(t)] &= f_4(S, I, R, D). \end{cases} \quad (4.2.2)$$

por la ecuación (4.1.1) se tiene:

$$\begin{cases} f_1(S, I, R, D) &= -\beta \frac{S(t)I(t)}{N} \\ f_2(S, I, R, D) &= \beta \frac{I(t)S(t)}{N} - (\gamma + \kappa)I(t) \\ f_3(S, I, R, D) &= \gamma I(t) \\ f_4(S, I, R, D) &= \kappa I(t) \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Para demostrar la existencia y unicidad de solución, (4.2.2) se transforma en un problema de punto fijo, para lo cual por el Corolario 2.2.2 se tiene:

$$\begin{cases} S(t) - S(t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_1(S, I, R, D, \gamma) d\gamma, \\ I(t) - I(t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_2(S, I, R, D, \gamma) d\gamma, \\ R(t) - R(t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_3(S, I, R, D, \gamma) d\gamma, \\ D(t) - D(t_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_4(S, I, R, D, \gamma) d\gamma. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

despejando las funciones S , I , R , y D se tiene:

$$\begin{cases} S(t) &= S(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_1(S, I, R, D, \gamma) d\gamma, \\ I(t) &= I(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_2(S, I, R, D, \gamma) d\gamma, \\ R(t) &= R(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_3(S, I, R, D, \gamma) d\gamma, \\ D(t) &= D(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_4(S, I, R, D, \gamma) d\gamma. \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Esto significa que resolver (4.1.1) es equivalente a encontrar funciones S, I, R y D que satisfacen las ecuaciones anteriores.

Para encontrar las funciones S, I, R y D se considera $X = C(I_a, B_b)$ un espacio de Banach de funciones continuas $\varphi : I_a \rightarrow B_b$, tal que para $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ y con la métrica del supremo dada por,

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_\infty = \sup_{t \in I_a} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Por otro lado, sea $F : X \rightarrow X$ y para cada $\varphi \in X$ se define

$$F(\varphi)(t) = X_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f(\varphi(\gamma)) d\gamma$$

donde $X_0 = (S(t_0), I(t_0), R(t_0), D(t_0))$, $\varphi(t) = (S(t), I(t), R(t), D(t))$ y

$$f(\varphi(t)) = (f_1(S(t), I(t), R(t), D(t)), f_2(S(t), I(t), R(t), D(t)), f_3(S(t), I(t), R(t), D(t)), f_4(S(t), I(t), R(t), D(t)))$$

Para mostrar que F esta bien definida se prueba que $\|F(\varphi)(t) - X_0\|_\infty \leq b$, para todo $t \in I_\eta$, y todo $\varphi \in X$ donde

$$\eta < \min \left\{ a, \sqrt[\alpha]{\frac{b\Gamma(\alpha+1)}{M}}, \sqrt[\alpha]{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{L}} \right\}$$

$$\|F(\varphi)(t) - X_0\|_\infty = \sup_{t \in I_\eta} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma \right|$$

$$\|F(\varphi)(t) - X_0\|_\infty = \sup_{t \in I_\eta} |F(\varphi)(t) - X_0| = \sup_{t \in I_\eta} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma \right|$$

$$\|F(\varphi)(t) - X_0\|_\infty \leq \sup_{t \in I_\eta} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} \|f(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma))\| d\gamma \right\}$$

$$\|F(\varphi)(t) - X_0\|_\infty \leq \sup_{t \in I_\eta} \left\{ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} d\gamma \right\} \leq \frac{M\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq b$$

Se nota que encontrar un punto fijo $\varphi = (S, I, R, D)$ de F es lo mismo que encontrar funciones S, I, R y D que satisface (4.2.5).

Para encontrar un punto fijo de F es suficiente verificar que F es una contracción, es decir, existe $H \in \langle 0, 1 \rangle$ tal que

$$\|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_\infty \leq H \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \quad (4.2.6)$$

para todo $\varphi_1(t) = (S_1(t), I_1(t), R_1(t), D_1(t))$ y $\varphi_2(t) = (S_2(t), I_2(t), R_2(t), D_2(t))$ en

X.

Para el lado izquierdo de la desigualdad 4.2.6 y por el Lema anterior

sea $E = \|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)\|_\infty$

$$E = \sup_{t \in I_\eta} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f(S_1(\gamma), I_1(\gamma), R_1(\gamma), D_1(\gamma)) d\gamma - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f(S_2(\gamma), I_2(\gamma), R_2(\gamma), D_2(\gamma)) d\gamma \right|$$

$$E = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in I_\eta} \left| \int_{t_0}^t [f(S_1(\gamma), I_1(\gamma), R_1(\gamma), D_1(\gamma)) - f(S_2(\gamma), I_2(\gamma), R_2(\gamma), D_2(\gamma))] (t - \gamma)^{\alpha-1} d\gamma \right|$$

$$E \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in I_\eta} \int_{t_0}^t \|f(S_1(\gamma), I_1(\gamma), R_1(\gamma), D_1(\gamma)) - f(S_2(\gamma), I_2(\gamma), R_2(\gamma), D_2(\gamma))\| (t - \gamma)^{\alpha-1} d\gamma$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in I_\eta} \int_{t_0}^t L \|(S_1, I_1, R_1, D_1) - (S_2, I_2, R_2, D_2)\| (t - \gamma)^{\alpha-1} d\gamma$$

de aquí

$$E \leq \frac{L \sup_{t \in I_\eta} (\|(S_1, I_1, R_1, D_1) - (S_2, I_2, R_2, D_2)\|)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \gamma)^{\alpha-1} d\gamma$$

$$E \leq \frac{L \eta^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty. \quad (4.2.7)$$

Por otro lado, se observa que

$$H = \frac{L \eta^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \text{ donde } \eta = \min \left\{ a, \sqrt[\alpha]{\frac{b\Gamma(\alpha + 1)}{M}}, \sqrt[\alpha]{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{L}} \right\}.$$

Así de (4.2.7) se concluye que F es una contracción. Por el lema de contracción (ver Sotomayor (1979), pág. 12) F tiene un único punto fijo, el cual es también solución única del modelo matemático SIRD expresado mediante ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario de Caputo definido en (4.1.1).

■

4.3. Solución numérica

A continuación, se presentará el enfoque general utilizado para encontrar la solución del sistema mediante el método fraccionario de Adams-Bashforth (Wang et al., 2013)

El modelo considerado es el siguiente:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha [S(t)] &= f_1(S(t), I(t), R(t), D(t)), \\ {}^C D_t^\alpha [I(t)] &= f_2(S(t), I(t), R(t), D(t)), \\ {}^C D_t^\alpha [R(t)] &= f_3(S(t), I(t), R(t), D(t)), \\ {}^C D_t^\alpha [D(t)] &= f_4(S(t), I(t), R(t), D(t)). \end{cases} \quad (4.3.1)$$

al tiempo inicial t_0 , se asignan los valores iniciales S_0 a la variable S , I_0 a la variable I , R_0 a la variable R y D_0 a la variable D , donde $t \in [0; T]$, $T > 0$ fijo.

De la ecuación (4.2.4) y usando las condiciones iniciales, se tiene:

$$\begin{cases} S(t) - S_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_1(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma, \\ I(t) - I_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_2(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma, \\ R(t) - R_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_3(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma, \\ D(t) - D_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_4(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma. \end{cases}$$

luego el esquema numérico para la primera ecuación del sistema es

$$S(t) - S_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \gamma)^{\alpha-1} f_1(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma \quad (4.3.2)$$

sea $t_r = rh$, $r = 0, 1, 2, \dots, J$, donde $h = \frac{T}{J}$ es el tamaño de paso y $J > 0$ es un número entero.

Sustituyendo $t = t_{r+1}$, en la ecuación (4.3.2) se tiene

$$S(t_{r+1}) - S_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{r+1}} (t_{r+1} - \gamma)^{\alpha-1} f_1(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma \quad (4.3.3)$$

y reemplazando $t = t_r$ se tiene

$$S(t_r) - S_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_r} (t_r - \gamma)^{\alpha-1} f_1(S(\gamma), I(\gamma), R(\gamma), D(\gamma)) d\gamma \quad (4.3.4)$$

restando las ecuaciones (4.3.3) y (4.3.4)

$$\begin{aligned} S(t_{r+1}) - S(t_r) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{r+1}} (t_{r+1} - t)^{\alpha-1} f_1(S, I, R, D) dt \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_r} (t_r - t)^{\alpha-1} f_1(S, I, R, D) dt \end{aligned}$$

despejando $S(t_{r+1})$

$$\begin{aligned} S(t_{r+1}) &= S(t_r) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{r+1}} (t_{r+1} - t)^{\alpha-1} f_1(S, I, R, D) dt \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_r} (t_r - t)^{\alpha-1} f_1(S, I, R, D) dt \end{aligned}$$

la ecuación anterior se escribe como

$$S(t_{r+1}) = S(t_r) + A_{\alpha,1} - A_{\alpha,2} \quad (4.3.5)$$

donde

$$A_{\alpha,1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{r+1}} (t_{r+1} - t)^{\alpha-1} f_1(S, I, R, D) dt$$

y

$$A_{\alpha,2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_r} (t_r - t)^{\alpha-1} f_1(S, I, R, D) dt$$

usando el polinomio de interpolación de Lagrange (Nisar et al., 2021), se aproxima la función $f_1(S, I, R, D)$, así:

$$P(t) = \frac{t - t_{r-1}}{t_r - t_{r-1}} f_1(S_r, I_r, R_r, D_r) + \frac{t - t_r}{t_{r-1} - t_r} f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})$$

donde $S_r = S(t_r)$, análogamente para I_r, R_r, D_r , también $S_{r-1} = S(t_{r-1})$ y análoga-

mente para $I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1}$

reemplazando $t_r - t_{r-1} = rh - (r-1)h = h$

$$P(t) = \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h} (t - t_{r-1}) - \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h} (t - t_r)$$

luego reemplazando en $A_{\alpha,1}$ se tiene

$$A_{\alpha,1} \simeq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{r+1}} (t_{r+1} - t)^{\alpha-1} \left[\frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h} (t - t_{r-1}) - \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h} (t - t_r) \right] dt$$

$$A_{\alpha,1} \simeq \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{r+1}} (t_{r+1} - t)^{\alpha-1} (t - t_{r-1}) dt - \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{r+1}} (t_{r+1} - t)^{\alpha-1} (t - t_r) dt$$

sea $u = t_{r+1} - t$ luego $-du = dt$,

si $t = 0$ entonces $u = t_{r+1}$ y $t = t_{r+1}$ entonces $u = 0$

$$A_{\alpha,1} \simeq \frac{-f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \int_{t_{r+1}}^0 (u)^{\alpha-1} (t_{r+1} - t_{r-1} - u) du + \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \int_{t_{r+1}}^0 (u)^{\alpha-1} (t_{r+1} - t_r - u) du$$

se tiene $t_{r+1} - t_{r-1} = 2h$ y $t_{r+1} - t_r = h$, reemplazando en la ecuación anterior

$$A_{\alpha,1} \simeq \frac{-f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \int_{t_{r+1}}^0 (u)^{\alpha-1} (2h - u) du + \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \int_{t_{r+1}}^0 (u)^{\alpha-1} (h - u) du$$

$$A_{\alpha,1} \simeq \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \int_{t_{r+1}}^0 (u^\alpha - 2hu^{\alpha-1}) du \\ + \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \int_{t_{r+1}}^0 (hu^{\alpha-1} - u^\alpha) du$$

integrando se tiene lo siguiente

$$A_{\alpha,1} \simeq \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{2hu^\alpha}{\alpha} \right) \Big|_{t_{r+1}}^0 \\ + \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{hu^\alpha}{\alpha} - \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \Big|_{t_{r+1}}^0$$

y evaluando los limites de integración

$$A_{\alpha,1} \simeq \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2ht_{r+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{t_{r+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) - \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{ht_{r+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{t_{r+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

análogamente reemplazando en $A_{\alpha,2}$ se tiene:

$$A_{\alpha,2} \simeq \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{ht_r^\alpha}{\alpha} - \frac{t_r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) + \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t_r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

reemplazando $A_{\alpha,1}$ y $A_{\alpha,2}$ en la ecuación (4.3.5)

$$S(t_{r+1}) \simeq S(t_r) + \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2ht_{r+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{t_{r+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \\ - \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{ht_{r+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{t_{r+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \\ - \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{ht_r^\alpha}{\alpha} - \frac{t_r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) - \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t_r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

agrupando

$$S(t_{r+1}) \simeq S(t_r) + \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{h\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2ht_{r+1}^\alpha}{\alpha} - \frac{t_{r+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{ht_r^\alpha}{\alpha} + \frac{t_r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \\ + \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{h\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{ht_{r+1}^\alpha}{\alpha} + \frac{t_{r+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{t_r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

sustituyendo $t_{r+1} = (r+1)h$ y $t_r = rh$ se tiene:

$$\blacksquare S(t_{r+1}) \simeq S(t_r) + \frac{f_1(S_r, I_r, R_r, D_r)}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$+ \frac{f_1(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

de manera análoga se tiene para los demás casos:

$$\blacksquare I(t_{r+1}) \simeq I(t_r) + \frac{f_2(S_r, I_r, R_r, D_r)}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$+ \frac{f_2(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

$$\blacksquare R(t_{r+1}) \simeq R(t_r) + \frac{f_3(S_r, I_r, R_r, D_r)}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$+ \frac{f_3(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

$$\blacksquare D(t_{r+1}) \simeq D(t_r) + \frac{f_4(S_r, I_r, R_r, D_r)}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$+ \frac{f_4(S_{r-1}, I_{r-1}, R_{r-1}, D_{r-1})}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

y sustituyendo los datos de la ecuación (4.1.1), las ecuaciones anteriores se reescriben así:

$$\begin{aligned} S(t_{r+1}) &\simeq S(t_r) + \frac{-\beta S(t_r)I(t_r)}{N\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \\ &+ \frac{-\beta S(t_{r-1})I(t_{r-1})}{N\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$\begin{aligned} I(t_{r+1}) &\simeq I(t_r) + \left(\beta \frac{I(t_r)S(t_r)}{N} - (\gamma + \kappa)I(t_r) \right) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right) (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) + \left(\beta \frac{I(t_{r-1})S(t_{r-1})}{N} - (\gamma + \kappa)I(t_{r-1}) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right) (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

$$\begin{aligned}
R(t_{r+1}) &\simeq R(t_r) + \frac{\gamma I(t_r)}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \\
&+ \frac{\gamma I(t_{r-1})}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

$$\begin{aligned}
D(t_{r+1}) &\simeq D(t_r) + \frac{\kappa I(t_r)}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \\
&+ \frac{\kappa I(t_{r-1})}{\Gamma(\alpha)} (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

4.4. Estimación de tasas

4.4.1. Tasa de transmisión (infectados) "x"

Despejando β de la ecuación (4.3.6):

$$\beta \simeq \frac{[S(t_{r+1}) - S(t_r)] N \Gamma(\alpha)}{P - Q}, \text{ donde}$$

$$P = -S(t_r)I(t_r) (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$Q = S(t_{r-1})I(t_{r-1}) (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

$$\text{el algoritmo será: } \beta_i = \frac{[S(i+1) - S(i)] N \Gamma(\alpha)}{p - q}, \text{ donde}$$

$$p = -S(i)I(i) (h^\alpha) \left(\frac{2(i+1)^\alpha - i^\alpha}{\alpha} - \frac{(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$q = S(i-1)I(i-1) (h^\alpha) \left(\frac{(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(i+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

$i = 1, 2, \dots, n$; de aquí se tomó la tasa de transmisión como:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i}{n} \tag{4.4.1}$$

donde: $S(i+1)$, $S(i-1)$, $S(i)$ y $I(i)$ son datos reales tomados de DIRESA

4.4.2. Tasa de recuperación "y"

Despejando γ de la ecuación (4.3.8):

$$\gamma \simeq \frac{[R(t_{r+1}) - R(t_r)] \Gamma(\alpha)}{P + Q}; \text{ donde}$$

$$P = I(t_r) (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$Q = I(t_{r-1}) (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

el algoritmo será

$$\gamma = \frac{[R(i+1) - R(i)] \Gamma(\alpha)}{p + q}, \text{ donde}$$

$$p = I(i) (h^\alpha) \left(\frac{2(i+1)^\alpha - i^\alpha}{\alpha} - \frac{(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$q = I(i-1) (h^\alpha) \left(\frac{(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(i+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

$i = 1, 2, \dots, n$; de aquí se tomó la tasa de recuperación como

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i}{n} \quad (4.4.2)$$

donde: $R(i+1)$, $R(i-1)$ y $I(i)$ son datos reales tomados de DIRESA

4.4.3. Tasa de decesos "z"

Despejando κ de la ecuación (4.3.9):

$$\kappa \simeq \frac{[D(t_{r+1}) - D(t_r)] \Gamma(\alpha)}{P + Q}, \text{ donde}$$

$$P = I(t_r) (h^\alpha) \left(\frac{2(r+1)^\alpha - r^\alpha}{\alpha} - \frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$Q = I(t_{r-1}) (h^\alpha) \left(\frac{(r+1)^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(r+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

el algoritmo será

$$\kappa = \frac{[D(i+1) - D(i)] \Gamma(\alpha)}{p + q}, \text{ donde}$$

$$p = I(i) (h^\alpha) \left(\frac{2(i+1)^\alpha - i^\alpha}{\alpha} - \frac{(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

$$q = I(i-1) (h^\alpha) \left(\frac{(i+1)^{\alpha+1} - i^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(i+1)^\alpha}{\alpha} \right)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ de aquí se tomó la tasa de decesos como

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \kappa_i}{n} \quad (4.4.3)$$

donde: $D(i + 1)$, $D(i - 1)$ y $I(i)$ son datos reales tomados de DIRESA Tacna

4.5. Simulación numérica

Con el objetivo de analizar los efectos del modelo, se llevaron a cabo simulaciones numéricas utilizando datos de la ciudad de Tacna. Se consideró una población total de 346,000 habitantes, cuyos datos demográficos fueron obtenidos del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI). Este tamaño poblacional proporciona una base sustancial para las simulaciones, permitiendo capturar la variabilidad inherente a una población de esta magnitud.

Para los datos epidemiológicos de los meses de septiembre, octubre, noviembre y diciembre, se recurrió a la información suministrada por DIRESA Tacna a través de su página oficial en Facebook. Este enfoque se fundamenta en la necesidad de obtener resultados representativos y significativos que reflejen la dinámica epidemiológica de Tacna. La elección del tamaño de muestra se llevó a cabo con la intención de equilibrar la precisión de las simulaciones con consideraciones prácticas, como los recursos disponibles y la logística de recopilación de datos.

Esta combinación de datos demográficos precisos y epidemiológicos confiables provenientes de fuentes oficiales refuerza la solidez de esta investigación. La selección del tamaño de muestra se respalda mediante el uso de información verificada, contribuyendo así a la validez y representatividad de los resultados obtenidos en el análisis de los efectos del modelo en la ciudad de Tacna.

- Se tomó datos del 01 setiembre al 30 de noviembre del 2021, para obtener las tasas de transmisión, recuperados y decesos:

Datos de setiembre

F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I	28	4	12	4	4	3	15	6	5	6	2	8	5	3	8	13
R	26	8	10	12	8	6	20	11	10	8	6	10	5	7	5	8
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

F	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
I	4	2	2	8	9	7	6	4	2	9	7	4	10	8
R	11	6	4	5	6	5	8	5	7	8	10	6	5	8
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Datos de octubre

F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I	17	2	9	4	7	7	5	9	11	17	2	7	14	14	22	19
R	7	10	6	5	7	6	5	7	9	6	9	8	10	8	10	9
D	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

F	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
I	12	21	13	21	26	15	13	9	9	14	28	13	37	37	21
R	8	10	9	11	9	9	10	8	7	9	9	10	9	25	18
D	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

Datos de noviembre

F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I	27	12	11	18	19	24	12	30	50	35	32	24	10	22	20
R	19	15	10	21	27	35	17	23	39	28	25	25	29	16	25
D	0	4	0	0	2	2	0	0	0	0	0	2	0	0	1

F	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
I	16	17	45	81	27	11	5	24	51	31	36	22	14	6	18
R	12	12	58	47	13	8	7	18	32	24	29	16	8	5	11
D	1	0	1	0	2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

donde **F**: fecha

Las tasas estimadas de transmisión, recuperados y decesos, obtenidas a través de las

ecuaciones (4.4.1), (4.4.2) y (4.4.3), respectivamente, son las siguientes:

- Para orden de derivada $\alpha = 0,10$

Tasa de transmisión (x) : 0,5391376

Tasa de recuperados (y) : 0,0000003

Tasa de decesos (z) : 0,0004910

- Para orden de derivada $\alpha = 0,30$

Tasa de transmisión (x) : 0,3346062

Tasa de recuperados (y) : 0,0000001

Tasa de decesos (z) : 0,0003892

- Para orden de derivada $\alpha = 0,50$

Tasa de transmisión (x) : 0,2373527

Tasa de recuperados (y) : $6,911 \times 10^{-8}$

Tasa de decesos (z) : 0,0003315

Estos valores representan las tasas de cambio esperadas para cada valor específico de α . Sin embargo, es importante tener en cuenta que estas estimaciones se basan en un modelo específico y están sujetas a ciertas limitaciones y variaciones debido a diversos factores, como las medidas de prevención, el comportamiento de la enfermedad y otros aspectos relacionados con su dinámica.

Para comparar datos simulados con datos reales, se toma datos de diciembre 2021:

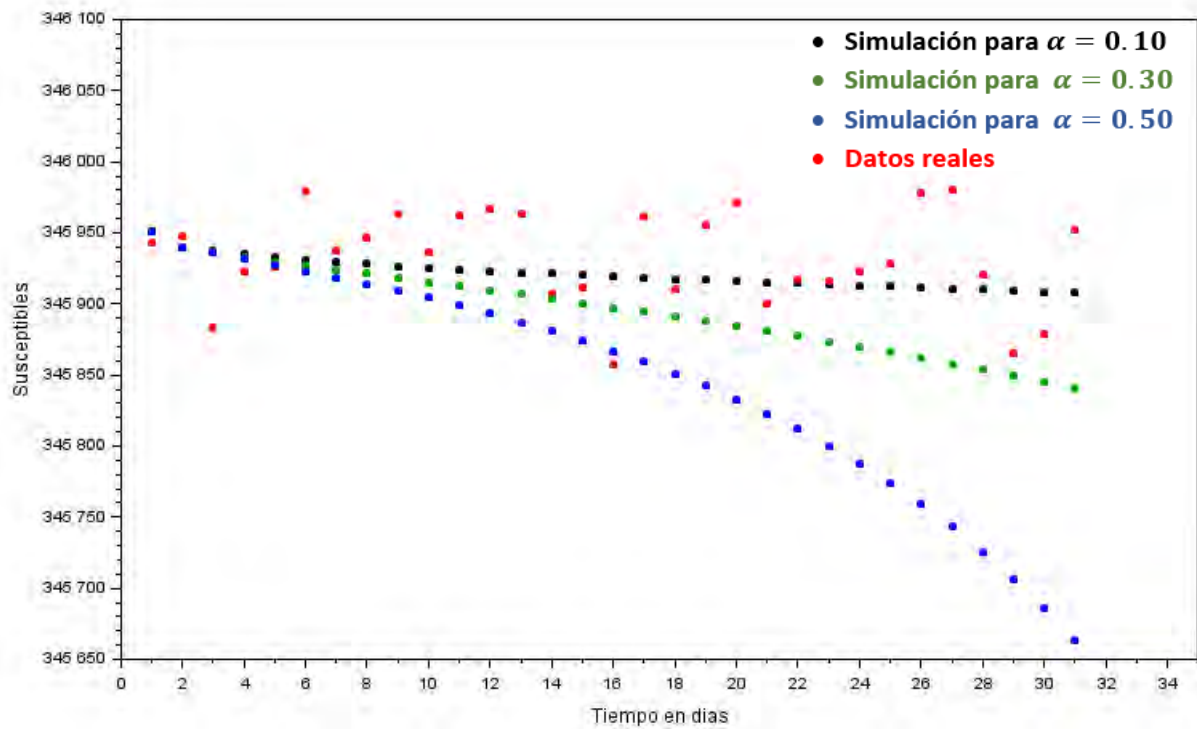
F	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I	35	38	49	32	30	6	28	40	14	38	25	19	19	52	39	66
R	13	21	67	45	44	14	34	12	22	26	13	14	17	41	49	66
D	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

F	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
I	21	53	25	18	43	46	38	35	33	13	11	36	82	74	24
R	18	36	19	11	56	37	46	41	38	9	9	42	53	47	24
D	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0

4.5.1. Comparación grafica de datos simulados y reales del mes de diciembre-2021 con $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,30$ y $\alpha = 0,50$

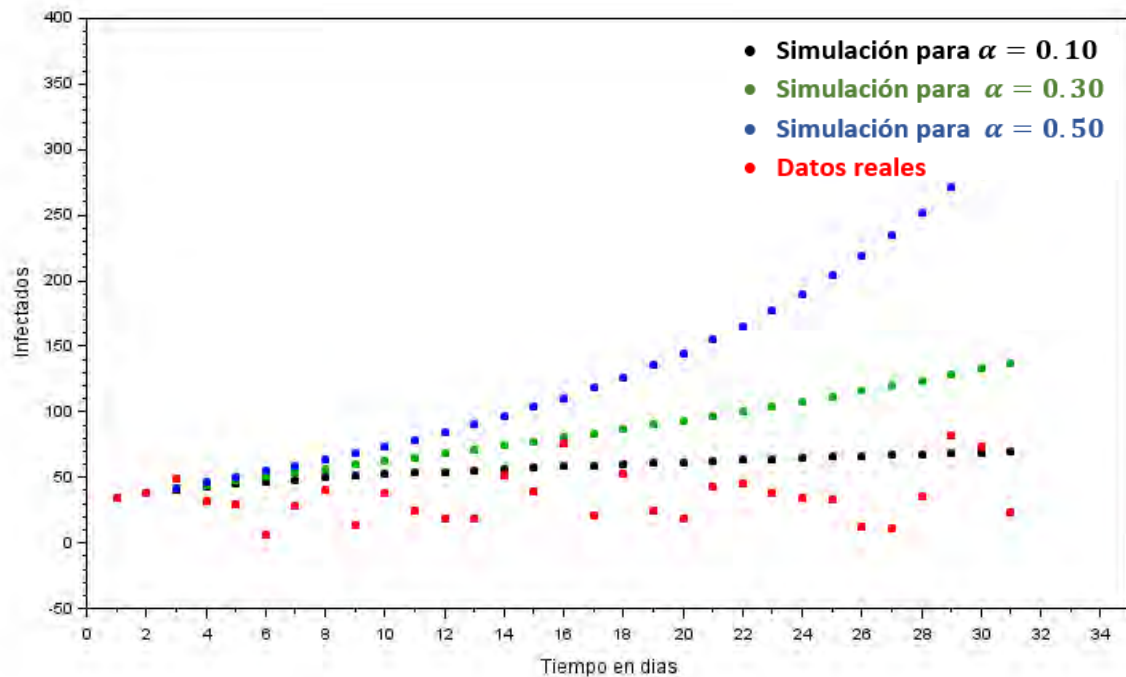
Para llevar a cabo una comparación gráfica entre los datos simulados y los datos reales, se implementó un programa en el software Scilab. En este proceso, se discretizó la variable, tomando un tamaño de paso $h = 1$. Ajustando los valores del orden de derivada ($\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,30$ y $\alpha = 0,50$), se utilizaron las ecuaciones 4.3.6, 4.3.7, 4.3.8 y 4.3.9 en la programación. Las tasas de obtenidas con los datos de setiembre,octubre y noviembre, fueron incorporadas en el código para simular los eventos correspondientes al mes de diciembre. Este enfoque permitió una representación más precisa y detallada de la dinámica del modelo.

Figura 4.5.1: Comparación de datos simulados y reales para los susceptibles



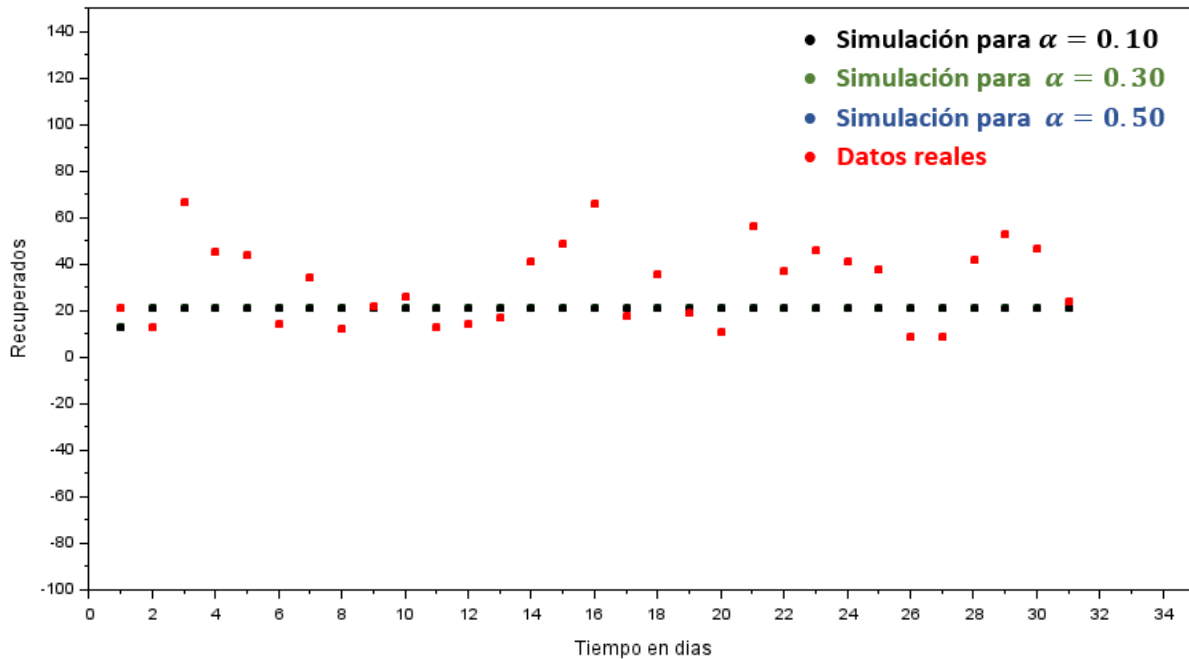
En la gráfica se compara la cantidad de personas susceptibles, se nota que cuando $\alpha = 0,50$, representado en azul, el número de susceptibles desciende más rápidamente en comparación con otros valores de α . Los datos simulados se muestran en negro, verde y azul, mientras que los datos reales están en rojo. Sin embargo, para $\alpha = 0,10$ en negro, se observa que los datos simulados se ajustan de manera más cercana a los datos reales en rojo, lo que sugiere una mejor correspondencia del modelo con una propagación más gradual de la enfermedad.

Figura 4.5.2: Comparación de datos simulados y reales para los infectados



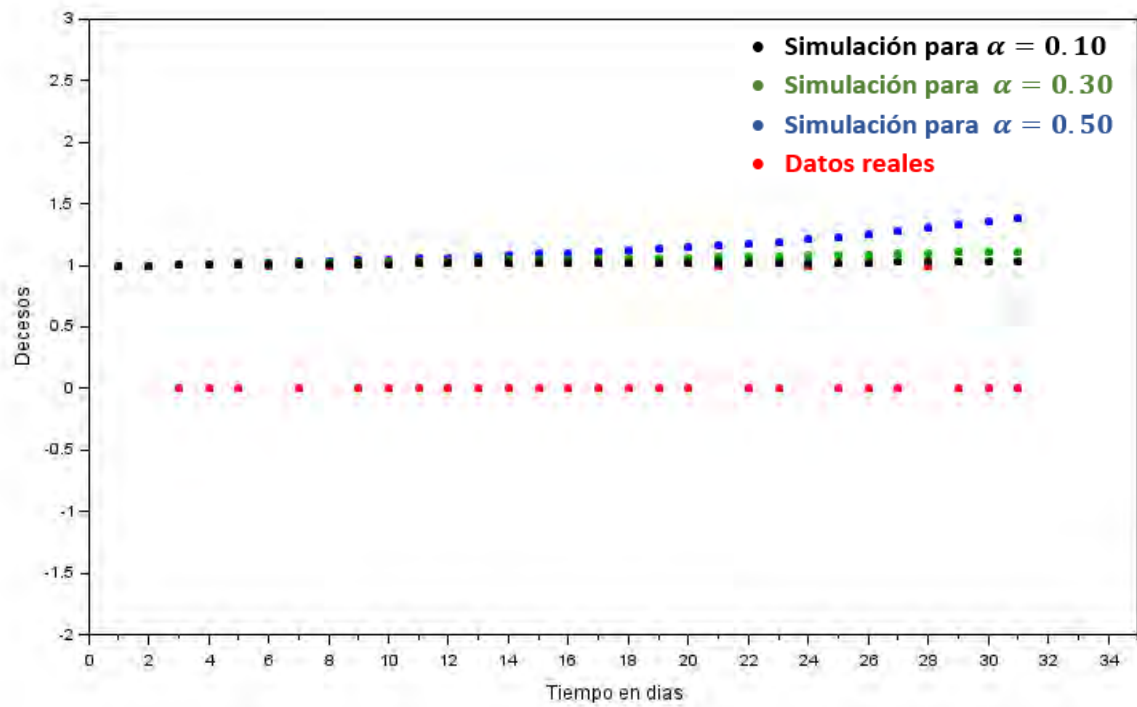
En el análisis de un modelo matemático SIRD con derivada fraccional de Caputo, se examinan tres valores distintos para el parámetro α (0.10, 0.30 y 0.50) en comparación con datos reales de infectados representados en rojo, mientras que los colores verde, azul y negro denotan datos simulados. Los resultados indican que para α más bajo (0.10) se adapta mejor a los datos reales, sugiriendo una propagación más gradual de la enfermedad en la población infectada. Esto sugiere que la situación del mundo real se asemeja más a una propagación más lenta de la enfermedad. Sin embargo, es esencial reconocer las limitaciones inherentes al modelo y otras variables que puedan influir en la dinámica del fenómeno estudiado.

Figura 4.5.3: Comparación de datos simulados y reales para los recuperados



En la gráfica que se presenta a continuación, que se refiere a la evolución de los recuperados, se observa que, para los distintos órdenes de derivada empleados en las simulaciones con α igual a 0.10, 0.30 y 0.50, las curvas coinciden y muestran una estrecha similitud con los datos reales representados en color rojo. Este resultado sugiere que, sin importar el valor específico de α , las simulaciones tienden a ajustarse de manera uniforme a la realidad en lo que respecta a la dinámica de la propagación de la enfermedad.

Figura 4.5.4: Comparación de datos simulados y reales para los decesos



En la gráfica que representa los decesos, se destaca que el valor $\alpha = 0,10$, representado en color negro, muestra una mayor proximidad a los datos reales en color rojo.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

- Se desarrolló un modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo para COVID-19 en la región de Tacna del sur de Perú en 2021. La utilidad y eficacia de este modelo han sido demostradas mediante su aplicación en la región de Tacna durante dicho período.
- Se ha establecido la existencia y unicidad de soluciones para el modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo. Este resultado fue esencial en la modelización epidemiológica, ya que garantiza que el modelo sea sólido y que las soluciones sean únicas, lo que facilita su aplicación y análisis. A partir de esta base, se procedió a calcular una solución numérica utilizando el metodo fraccionario de Adams-Bashforth del modelo, lo que permitió obtener predicciones y evaluaciones cuantitativas de la propagación del COVID-19 en la región Tacna.
- El estudio de la evolución de la epidemia de COVID-19 mediante la aplicación del modelo matemático SIRD con derivada fraccional de Caputo en el análisis de datos

recopilados en septiembre, octubre y noviembre de 2021 por DIRESA Tacna ha proporcionado una comprensión más profunda y detallada de cómo la enfermedad se desarrolló durante ese período específico. Con la utilización de datos recopilados en esos meses, se obtuvieron las tasas de transmisión, recuperados y decesos, lo que permitió llevar a cabo simulaciones para el mes de diciembre de 2021.

- La realización de simulaciones con el modelo SIRD y derivada fraccional de Caputo, respaldadas por datos reales de DIRESA Tacna y realizadas con el programa Scilab, ha mejorado nuestra comprensión de la dinámica epidémica. Estas simulaciones subrayan la importancia de elegir un valor específico de $\alpha = 0,10$ para obtener una representación más precisa de la propagación de la enfermedad en diciembre del 2021. Al analizar los resultados del modelo SIRD con derivada fraccional de Caputo, utilizando diferentes valores de α ($\alpha = 0,50, \alpha = 0,30$, y $\alpha = 0,10$), y comparándolos con los datos reales de diciembre de DIRESA Tacna, se ha obtenido una valiosa comprensión de la evolución de la epidemia. Estos análisis respaldan de manera concluyente que un valor más bajo de α (0.10) se ajusta de manera más precisa a los datos reales, indicando una propagación más gradual de la enfermedad en términos de susceptibles, infectados y decesos. Además, es importante destacar que, en el caso de los recuperados, los resultados con diferentes valores de α muestran una notable concordancia.

5.2. Recomendaciones

Concluida la tesis, se recomienda lo siguiente:

1. Explorar el análisis de error mediante el uso del método fraccional de Adams-Bashforth, lo que podría proporcionar una evaluación más precisa del modelo.
2. Investigar la influencia de otros factores en la evolución de la epidemia, como la edad de la población, la densidad demográfica, la movilidad, entre otros.
3. Aplicar el modelo SIRD con derivada fraccional a diferentes epidemias para comparar su eficacia y aplicabilidad en distintos contextos.
4. Realizar un análisis de sensibilidad para evaluar la capacidad del modelo para adaptarse a diversas situaciones y medir su precisión.
5. Establecer un sistema de monitoreo continuo y actualización de los datos reales de casos de susceptibles, infectados, recuperados y decesos en la región de Tacna. Esto permitirá disponer de información precisa y actualizada para la toma de decisiones y ajuste de medidas de prevención y control.
6. Explorar el uso de derivadas fraccionarias para el estudio de otras enfermedades en la región, lo que facilitaría la planificación y toma de decisiones por parte del Ministerio de Salud en cuanto a la atención y prevención de enfermedades infecciosas.

Bibliografía

- Bell, W. W. (2004). *Special functions for scientists and engineers*. Courier Corporation.
- Cascales, B., Mira, J. M., Orihuela, J., and Raja, M. (2012). *Análisis funcional*. Ediciones Electolibris.
- Coayla-Teran, E. (2021). A covid-19 time-dependent sird model using functional differential equations. *International Journal of Ecology and Development*, 2021:1–11.
- De Cezaro, A., Maurmann, A. C., and De Cezaro, F. T. T. (2023). A fractional sirc model for the spread of diseases in two interacting populations. *Latin-American Journal of Computing*, 10(2):46–57.
- Díaz-Castrillón, F. J. and Toro-Montoya, A. I. (2021). Sars-cov-2/covid-19: el virus, la enfermedad y la pandemia. *Medicina & laboratorio*, 24(3):183–205.
- Guía-Calderón, M., Rosales-García, J., Guzmán-Cabrera, R., González-Parada, A., and Álvarez-Jaime, J. (2015). El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. *Acta universitaria*, 25(2):20–27.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P., et al. (2018). *Metodología de la investigación*, volume 4. McGraw-Hill Interamericana México.
- Kilbas, A., Bonilla, B., Trujillo, J., et al. (2000). Fractional integrals and derivatives, and differential equations of fractional order in weighted spaces of continuous functions. 44(6):18–22.
- Kilbas, A. A., Marichev, O. I., and Samko, S. G. (1993). *Fractional integrals and derivatives (theory and applications)*. Gordon and Breach, Switzerland.

- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2005). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies 204, Radarweg 29 P.O. Box 211, 1000 AE Amsterdam The Netherlands, 1st edition.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204. elsevier.
- Kiseliov, A., Krasnov, Leontévich, M., and Makarenko (1982). *Ecuaciones integrales*. Mir.
- López Mamani, M. (2019). Ecuación de calor y de onda mediante una ecuación diferencial de orden fraccional.
- Lopez Maria M, C. A. F. (2020). *La peste negra: El enemigo incorporeo*. PhD thesis, Bogota, Colombia.
- Luthy, Isabel A, R. V. . K. I. N. (2018). A cien años de la gripe española.
- Monteiro, N. Z. and Mazorche, S. R. (2021). Analysis and application of a fractional sir model constructed with mittag-leffler distribution. In *Proceedings of the XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, On-line*.
- Nisar, K. S., Ahmad, S., Ullah, A., Shah, K., Alrabaiah, H., and Arfan, M. (2021). Mathematical analysis of sird model of covid-19 with caputo fractional derivative based on real data. *Results in Physics*, 21:103772.
- Olivera, R. H. and Rivera, A. L. (2021). Modelo sir de la tendencia pandémica de covid-19 en Perú. *Revista de la Facultad de Ciencias Médicas*, 78(3):236.
- Paul, S., Mahata, A., Mukherjee, S., Mali, P. C., and Roy, B. (2023). Dynamical behavior of a fractional order sir model with stability analysis. *Results in Control and Optimization*, 10:100212.
- Qureshi, S. (2020). Real life application of caputo fractional derivative for measles epidemiological autonomous dynamical system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 134:109744.

- Saladino, V., Algeri, D., and Auriemma, V. (2020). The psychological and social impact of covid-19: New perspectives of well-being. *Frontiers in Psychology*, 11.
- Shaikh, A. S., Shaikh, I. N., and Nisar, K. S. (2020). A mathematical model of covid-19 using fractional derivative: outbreak in india with dynamics of transmission and control. *Advances in Difference Equations*, 2020(1):1–19.
- Sotomayor, J. (1979). *Lecciones de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ed. Campus, RÃo de Janeiro.
- Valencia-Contrera, M. A. and Valenzuela-Suazo, S. V. (2022). El valor relegado de la atención primaria durante la pandemia covid-19: una perspectiva de enfermería. *Revista de Salud Pública*, 24(3).
- Velásquez Ayma, A. (2019). Modelos matemáticos del movimiento de un proyectil mediante la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineal.
- Vergara, A. (2020). La crisis del covid-19 como aleph peruano, por alberto vergara. *Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico*. <https://ciup.up.edu.pe/analisis/la-crisis-covid-19-como-aleph-peruano>.
- Wang, Z. et al. (2013). A numerical method for delayed fractional-order differential equations. *Journal of Applied Mathematics*, 2013.
- Zambrano-Serrano, E., Platas-Garza, M. A., Loya-Cabrera, A. E., Cedillo-Garza, G. E., and Posadas-Castillo, C. (2021). Comportamiento de orden fraccionario en la respuesta de un circuito rc mediante derivada de núcleo singular. *Ingenierías*, 24(91):22–32.

ANEXOS

Programa de algoritmo en Scilab

Para el calculo de las tasas de infección x , recuperación y y decesos z .

Este programa del algoritmo en Scilab permite calcular las tasas empleando los algoritmos obtenidos, para la tasa infección 4.4.1 , recuperación 4.4.2 y decesos 4.4.3. Al ejecutar el programa con los datos apropiados en la matriz "datos", se obtendrán las tasas correspondientes.

```
h=1;
//a=0.50
//a=0.10
a=0.30
p=346000;
N=346000;
//datos de setiembre , octubre y noviembre
//INFECTADOS I=[28//setiembre 4 12 4 4 3 15 6 5 6 2 8 5 3
8 13 4 2 2 8 9 7 6 4 2 9 7 4 10 8 //octubre 17 2 9 4 7 7
5 9 11 17 2 7 14 14 22 19 12 21 13 21 26 15 13 9 9 14 28
13 37 37 21//noviembre 27 12 11 18 19 24 12 30 50 35 32
24 10 22 20 16 17 45 81 27 11 5 24 51 31 36 22 14 6 18];
//RECUPERADOS R=[28 4 12 4 4 3 15 6 5 6 2 8 5 3 8 13 4 2
2 8 9 7 6 4 2 9 7 4 10 8 17 2 9 4 7 7 5 9 11 17 2 7 14 14
22 19 12 21 13 21 26 15 13 9 9 14 28 13 37 37 21 27 12 11
18 19 24 12 30 50 35 32 24 10 22 20 16 17 45 81 27 11 5 24
51 31 36 22 14 6 18];
//DECESOS
D=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```

0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 4 0 0 2 2 0 0 0 0 0 2 0 0 1 1 0 1 0 2
0 1 0 0 0 1 0 0 0 0];

```

```

b=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];

```

```

g=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];

```

```

k=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

```

```

S=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];

```

```

E=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0];

```

```

F=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0];

```

```

B=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];

```

```

C=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];

```

```

for j=1:91

```

```

S(j,1)=p-I(j,1)-R(j,1)-D(j,1) end;

```

```

//TASA DE INFECCION

```

```

for j=2:90

```

```

b(1,1)=1;

```

```

b(2,1)=1;

```

```

b(j+1,1)=((S(j+1,1)-S(j,1))*N*gamma(a))/(-S(j,1)*I(j,1)

```

```

*h^(a)*((2*(j+1)^(a)-j^(a))/a-((j+1)^(a+1)-j^(a+1))/(a+1))

```

```

+I(j-1,1)*h^(a)*(((j+1)^(a+1)-j^(a+1))/(a+1)-(j+1)^(a)/a))

```

```

// TASA DE RECUPERACION

```

```

g(1,1)=1;          g(2,1)=1;          g(j+1,1)=(R(j+1,1)-

```

```

R(j,1))*gamma(a))/(I(j,1)*h^(a)*((2*(j+1)^(a)-j^(a))/a

```

```

-((j+1)^(a+1)-j^(a+1))/(a+1))-S(j-1,1)*I(j-1,1)*h^(a)*

```

```

(((j+1)^(a+1)-j^(a+1))/(a+1)-(j+1)^(a)/a))

```

```

//TASA DE DECESOS

```

```

k(1,1)=1;

```

```

k(2,1)=1;

```

```

k(j+1,1)=((D(j+1,1)-D(j,1))*gamma(a))/(I(j,1)*h^(a)*

```

```

((2*(j+1)^(a)-j^(a))/a-((j+1)^(a+1)-j^(a+1))/(a+1))-

```

```

I(j-1,1)*h^(a)*(((j+1)^(a+1)-j^(a+1))/(a+1)

```

```

-(j+1)^(a)/a)) end;

```

```

m=0;
for j=3:91
m=m+b(j,1);
x=m/89; end
n=0;
for j=3:91
n=n+g(j,1);
y=n/89; end
t=0;
for j=3:91
t=t+k(j,1);
z=t/89; end
// TASA DE INFECCION
disp(x)
// TASA DE RECUPERACION
disp(y)
// TASA DE DECESOS
disp(z)

```

Para simular datos del mes de diciembre 2021

Para simular los datos del mes de diciembre utilizando el programa Scilab, se empleó el algoritmo 4.3.6 para los susceptibles, 4.3.7 para los infectados, 4.3.8 para los recuperados y 4.3.9 para los decesos. Estos algoritmos fueron implementados en Scilab para calcular y obtener los datos simulados correspondientes al mes de diciembre.

```

//Simulacion para diciembre
h=1;
p=346000;

```

```

//a es orden de derivada
a=0.1
x=0.5391376
y=0.0000003
z=0.0004910
//a=0.30
//x=0.3346062
//y=0.0000001
//z=0.0003892
//a=0.50
//x=0.2373527
//y=6.911D-08
//z=0.0003315
I=[35 38 49 32 30 6 28 40 14 38 25 19 19 52 39 76 21 53 25 18
43 46 38 35 33 13 11 36 82 74 24];
R=[21 13 67 45 44 14 34 12 22 26 13 14 17 41 49 66 18 36 19 11
56 37 46 41 38 9 9 42 53 47 24];
D=[1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0
0 0];
for j=1:31
S(j,1)=p-I(j,1)-R(j,1)-D(j,1);
end
E(1,1)=35;
E(2,1)=38;
F(1,1)=21;
F(2,1)=13;
B(1,1)=1;
B(2,1)=1;
C(1,1)=p-E(1,1)-F(1,1)-B(1,1);

```

$$C(2,1)=p-E(2,1)-F(2,1)-B(2,1);$$

for j=2:30

//SUCEPTIBLES

$$C(j+1,1)=C(j,1)+((-x*C(j,1)*E(j,1)/p)/\text{gamma}(a))*h^a*((2*(j+1)^a-j^a)/a)-((j+1)^{a+1}-j^{a+1})/(a+1))+((-x*E(j-1,1)*C(j-1,1)/p)/\text{gamma}(a))*(h^a)*((j+1)^{a+1}-j^{a+1})/(a+1)-(j+1)^a/a);$$

//INFECTADOS

$$E(j+1,1)=E(j,1)+(((x*E(j,1)*C(j,1)/p)-(y+z)*E(j,1))/\text{gamma}(a))*((2*(j+1)^a-j^a)/a)-((j+1)^{a+1}-j^{a+1})/(a+1))+(((x*E(j-1,1)*C(j-1,1)/p)-(y+z)*E(j-1,1))/\text{gamma}(a))*(((j+1)^{a+1}-j^{a+1})/(a+1)-(j+1)^a/a));$$

// RECUPERADOS

$$F(j+1,1)=F(j,1)+(y*E(j,1)/\text{gamma}(a))*h^a*((2*(j+1)^a-j^a)/a)-((j+1)^{a+1}-j^{a+1})/(a+1)+(y*E(j-1,1)/\text{gamma}(a))*h^a*((j+1)^{a+1}-j^{a+1})/(a+1)-(j+1)^a/a);$$

// DECESOS

$$B(j+1,1)=B(j,1)+(z*E(j,1)/\text{gamma}(a))*h^a*((2*(j+1)^a-j^a)/a)-((j+1)^{a+1}-j^{a+1})/(a+1)+(z*E(j-1,1)/\text{gamma}(a))*h^a*((j+1)^{a+1}-j^{a+1})/(a+1)-(j+1)^a/a);$$

// infectados

$$//E(j+1,1)=p-C(j+1,1)-F(j+1,1)-B(j+1,1);$$

end

//disp(C)

//disp(E)

//disp(F)

//disp(B)

```

dias=1:31
//Para graficar
plot((dias,C),(dias,S))
//plot((dias,E),(dias,I))
//plot((dias,F),(dias,R))
//plot((dias,B),(dias,D))
legend(["Datos simulados","Datos reales"]);

```

Espacio de Banach

Definición 5.2.1. *Un espacio normado se define como un conjunto de vectores X junto con una norma $\|\cdot\|$.*

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se llama espacio de Banach si la distancia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ asociada a la norma mediante la fórmula

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

es completa, es decir cada sucesión de Cauchy en (X, d) es convergente (Cascales et al., 2012).

El problema de Cauchy

Definición 5.2.2. *El problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden se define como sigue:*

Dada la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = F(t, y)$$

con una condición inicial $y(t_0) = y_0$, donde F es una función no lineal de t e y , el objetivo es determinar una función $y(t)$ que sea solución de la ecuación diferencial y que también satisfaga la condición inicial proporcionada en t_0 (Sotomayor, 1979).

Función Lipschitziana

Definición 5.2.3. Una aplicación $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se llama Lipschitziana en Ω , si existe una constante K tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k |x - y|$$

para todo $(t, x), (t, y) \in \Omega$; K se llama constante de Lipschitz de f (Sotomayor, 1979).

Lema de contracción

Lema 5.2.1. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $F : X \rightarrow X$ una función. Si existe una constante $0 < k < 1$ tal que, para todo par de puntos $x, y \in X$, se cumple la desigualdad

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$$

entonces, f tiene un único punto fijo en X . Además para cualquier elección inicial x_0 en X , la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ converge al punto fijo (Sotomayor, 1979).

Ecuación integral de Volterra

Definición 5.2.4. La ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie se expresa mediante la siguiente relación:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

donde $f(x)$, $K(x, t)$ son funciones conocidas, $\varphi(x)$ es una función incógnita, λ un parámetro numérico, y la función $K(x, t)$ se denomina núcleo de la ecuación de Volterra (Kiseliov et al., 1982).