UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

TESIS

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL MODELO SOLOW - SWAN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS APLICADO A LA ECONOMÍA PERUANA

PRESENTADA POR:

Br. CARLOS DOMINGO JUÑO CONDORIMAY
Br. CESAR HUAYHUA CONDORI

PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ASESOR:
Dr. GUIDO ÁLVAREZ JAUREGUI
CÓDIGO ORCID: 0000-0002-2669-9849

CUSCO – PERÚ

2026

Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco

INFORME DE SIMILITUD

(Aprobado por Resolución Nro. CU-978-2025-UNSAAC)

El que suscribe, el Asesor del trabajo de investigación titulada: **ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL MODELO SOLOW - SWAN MEDIANTE ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS APLICADO A LA ECONOMÍA PERUANA**

Presentado por: **CARLOS DOMINGO JUÑO CONDORIMAY** con DNI Nro.: **73712030**, y **CESAR HUAYHUA CONDORI** con DNI Nro.: **42374331** para optar el título profesional académico de **LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por **dos veces**, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de **7%**

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis.

PORCENTAJE	EVALUACIÓN Y ACCIONES	MARCA CON UNA (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11% al 30%	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome acciones correspondientes. Sin perjuicio de sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera página del reporte de Sistema Antiplagio.

Cusco, 30 de septiembre de 2026

.....

POST FIRMA: DR. GÜIDO ÁLVAREZ JAUREGUI

Nro. de DNI: 23868575

ORCID del Asesor: 0000-0002-2669-9849

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del reporte Generado por el Sistema Antiplagio: trn:oid:...27259:632170081

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL MODELO SOLOW - SWAN CON EDF APLICADO A LA ECONOMIA PERUANA 2026 Br. CAR...

Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega
trn:oid:::27259:632170081

Fecha de entrega
30 sep 2026, 10:57 a.m. GMT-5

Fecha de descarga
30 sep 2026, 11:04 p.m. GMT-5

Nombre del archivo
ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL MODELO SOLOW - SWAN CON EDF APLICADO A LA ECONOMIA PE....pdf

Tamaño del archivo
2.1 MB

147 páginas

29.962 palabras

154.008 caracteres

7% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Bibliografía
- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 10 palabras)
- Trabajos entregados

Fuentes principales

6% Fuentes de Internet
5% Publicaciones
0% Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Dedicatoria

A mis padres, Simeón Juño y Tereza Condorimay, por el apoyo inquebrantable y por la fe que incondicionalmente han tenido en mí. A mí, por perseverar con esperanza en los momentos de mayor oscuridad. Este logro, que hoy ve la luz, es el reflejo de su esfuerzo y de mi tenacidad. Gracias por todo.

Carlos Domingo Juño Condorimay

A Sabino Huayhua y María Condori, mis padres, les dedico este trabajo con todo el cariño de mi alma y una gratitud infinita. Por ser la base sólida sobre la que edifiqué mi vida y por su entrega sin límites, que me ha permitido alcanzar esta meta. A Paula Tito, mi madrina, quien con su amor sin condiciones y su apoyo inquebrantable ha sido un soporte esencial en mi trayectoria. A mis hermanos, por su apoyo constante y por ser mi compañía en cada etapa de esta travesía. Este triunfo es tan mío como de ustedes, quienes han sido mi fortaleza y mi inspiración permanente.

Cesar Huayhua Condori

Agradecimiento

Ante todo, doy gracias a Dios Todo poderoso, por ser mi fortaleza y guía a lo largo de este camino, por darme sabiduría y perseverancia para culminar este importante logro.

Quiero agradecer de manera muy especial al **Dr.Guido Álvarez Jauregui** , mi asesor, por su invaluable guía, su paciencia y sus valiosos conocimientos durante todo el proceso de investigación. Ha sido un honor contar con su dirección. Asimismo, expreso mi sincero agradecimiento a los dictaminantes de esta tesis, el **Dr. Leonardo Corahua Salcedo** y el **Dr. Ignacio Velazquez Hacha**, por su tiempo, sus observaciones y sus valiosas sugerencias que contribuyeron a enriquecer este trabajo.

A mis padres, les expreso mi eterna gratitud. Gracias por su amor, su apoyo incondicional y por ser mi ejemplo a seguir. Finalmente, dedico este logro a toda mi familia por su constante apoyo y por estar siempre conmigo.

Carlos Domingo Juño Condorimay

Expreso mi gratitud a Dios, quien ha sido mi guía y mi fuerza en todo este trayecto, brindándome la sabiduría y perseverancia necesarias para culminar este proyecto. Expreso mi profundo agradecimiento al **Dr. Guido Álvarez Jáuregui**, mi asesor, cuya valiosa orientación, paciencia y conocimiento fueron fundamentales para el desarrollo y conclusión de este trabajo. De igual manera, hago extensivo mi agradecimiento a mis dictaminantes, el **Dr. Leonardo Corahua Salcedo** y el **Dr. Ignacio Velásquez Hacha**, por sus acertadas observaciones y aportes que enriquecieron esta investigación. Reconozco asimismo el rol fundamental de la UNSAAC, mi alma máter, por proporcionarme una formación integral y un entorno propicio para mi desarrollo. Agradezco también a todos los maestros de la Escuela Profesional de Matemática, cuyo ejemplo, dedicación y enseñanza rigurosa construyeron los cimientos de mi preparación profesional. Cierro esta dedicatoria ofreciendo el presente trabajo a mi familia, cuyo respaldo sin reservas y ánimo permanente me han acompañado en cada fase de este recorrido.

Cesar Huayhua Condori

Índice general

Índice de tablas vii

Índice de figuras viii

Resumen ix

Abstract x

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 3

1.1. Situación Problemática 3

1.2. Formulación del problema 5

1.2.1. Problema General 7

1.2.2. Problemas Especificos 7

1.3. Justificación 7

1.4. Objetivos 10

1.4.1. Objetivo General 10

1.4.2. Objetivos Específicos 10

2. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL 11

2.1. Fundamentos Matemáticos 11

2.1.1. Funciones Especiales 11

2.1.2. Cálculo Fraccionario 24

2.1.3. Integral y Derivada Fraccionaria 28

2.1.4. No localidad y núcleo de la derivada de Caputo 32

2.1.5. Transformada de Laplace e inversa 35

2.1.6. Transformada de Laplace de la derivada de Caputo 42

2.1.7. Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias 46

2.1.8. Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Lineales 50
2.1.9. Estabilidad de E.D. de sistemas fraccionarios 57
2.1.10. Términos No Lineales mediante Aproximación de Taylor 58
2.1.11. Modelo de Solow-Swan con Función Cobb-Douglas 60
2.1.12. Memoria historica y path-dependence 65
2.1.13. Modelo Solow-Swan Clásico 67
2.2. Marco Conceptual(palabra clave) 72
2.3. Antecedentes empíricos de la investigación 74
2.3.1. Antecedentes Internacionales 74
2.3.2. Antecedentes Nacionales y Locales 76
2.4. HIPOTESIS 78
2.4.1. Hipótesis General 78
2.4.2. Hipótesis Especificas 78

3. METODOLOGÍA **79**
3.1. Tipo y Nivel de Investigación 79
3.2. Unidad de Analisis 80
3.3. Técnicas de Recolección de Información 80
3.4. Tecnicas de Analisis e interpretacion de la informacion 81
3.4.1. Análisis teórico 81
3.4.2. Implementación numérica 81
3.4.3. Validación empírica 82

4. ESTABILIDAD DEL MODELO SOLOW-SWAN CON DERIVADAS FRACCIONARIAS **83**
4.1. Modelo de Solow-Swan, solución: 83
4.2. Análisis de Estabilidad del Estado Estacionario 88
4.3. Interpretación Teórica de la Gráfica del Modelo Solow Swan Fraccionario 90

4.3.1. Comportamiento General 90
4.4. Análisis de la ecuación diferencial fraccionaria del modelo Solow para el caso peruano 93
4.4.1. Parámetros Económicos para el Perú 93
4.4.2. Cálculo del Capital por trabajador efectivo normalizado - Perú 2014-2023 . 97
4.4.3. Proceso de Calibración del Orden Fraccionario α para el Modelo de Solow-Swan (Perú) 99
4.4.4. Interpretación del Gráfico del Modelo Solow-Swan Fraccionario para el Caso Peruano 100
4.5. Simulaciones 104
CONCLUSIONES 106
RECOMENDACIONES 107
BIBLIOGRAFÍA 109
ANEXOS 114

Índice de cuadros

1. Tiempo Estimado para Alcanzar el 90 % de k^* 92
2. Interpretación Económica de Distintos Órdenes α 92
3. Parámetros calibrados para la economía peruana (2014-2023) con ajustes post-pandemia 94
4. valores promedio de Parámetros calibrados de la economia pruana 2014-2023 . . . 94
5. Cálculo del Capital por Trabajador Efectivo Normalizado - Perú 2014-2023 98

Índice de figuras

1. Función Mittag-Leffler de un parámetro $E_\alpha(x)$ 19
2. Dinámica de convergencia del capital por trabajador efectivo. 68
3. Decrecimiento del capital por trabajador efectivo en el modelo Solow-Swan 70
4. Convergencia del capital por trabajador efectivo Modelo de Solow-Swan con derivadas fraccionarias. 91
5. Convergencia del capital por trabajador efectivo en el Modelo de Solow-Swan con derivadas fraccionarias: Perú (2014-2023) 100
6. Proyección de convergencia al estado estacionario - 95 % del valor 102
7. Simulación de Capital per cápita para la Economía Peruana (2014-2064) 104

Resumen

El crecimiento económico sostenible es un objetivo prioritario para el Perú, aunque los modelos tradicionales como el de Solow-Swan presentan limitaciones al ignorar dinámicas complejas como la persistencia de shocks, la memoria histórica y la convergencia no exponencial, características clave en economías emergentes. Esta investigación propone una extensión del modelo de Solow-Swan mediante la incorporación de derivadas fraccionarias (en sentido de Caputo), con el fin de capturar efectos de memoria y dependencia temporal no local. Se formula y resuelve la ecuación diferencial fraccionaria del modelo utilizando la transformada de Laplace, obteniendo soluciones en términos de funciones de Mittag-Leffler. Mediante la calibración de parámetros con datos peruanos (2014-2023), se identifica un orden fraccionario óptimo de $\alpha \approx 0,3$, que refleja una alta persistencia de shocks y rigideces estructurales. Los resultados muestran que el modelo fraccionario supera al clásico en la reproducción de las fluctuaciones observadas, evidenciando una convergencia algebraica más lenta y coherente con la realidad peruana. Se concluye que la incorporación de derivadas fraccionarias ofrece un marco analítico más robusto para el estudio del crecimiento en economías con trayectorias irregulares y dependencia histórica, con implicancias relevantes para el diseño de políticas económicas de largo plazo.

Palabras clave: Crecimiento económico, Derivadas fraccionarias, Modelo Solow-Swan, Memoria histórica, Economía emergente.

Abstract

Sustainable economic growth is a priority for Peru, yet traditional models such as Solow-Swan present limitations by ignoring complex dynamics like shock persistence, historical memory, and non exponential convergence, which are key features of emerging economies. This research proposes an extension of the Solow-Swan model through the incorporation of fractional derivatives (in the Caputo sense), aiming to capture memory effects and non-local temporal dependencies. The fractional differential equation of the model is formulated and solved using the Laplace transform, yielding solutions in terms of Mittag-Leffler functions. By calibrating parameters with Peruvian data (2014–2023), an optimal fractional order of $\alpha \approx 0{,}3$ is identified, reflecting high shock persistence and structural rigidities. Results show that the fractional model outperforms the classical one in reproducing observed fluctuations, demonstrating a slower algebraic convergence consistent with Peru's economic reality. It is concluded that fractional derivatives provide a more robust analytical framework for studying growth in economies with irregular trajectories and historical path-dependence, with relevant implications for long-term economic policy design.

Keywords: Economic growth, Fractional derivatives, Solow-Swan model, Historical memory, Emerging economy.

INTRODUCCIÓN

El crecimiento económico sostenible constituye un objetivo prioritario para el desarrollo de las naciones, en especial para economías emergentes como el Perú, las cuales enfrentan desafíos estructurales que limitan su capacidad de mantener trayectorias de crecimiento estables y resilientes. Los modelos económicos tradicionales, como el propuesto por Solow y Swan, han sido pilares en la comprensión del crecimiento económico, a través de factores como la inversión del capital, el aumento poblacional y los avances en tecnología. No obstante, estos modelos se sustentan en dinámicas lineales y convergencias exponenciales que suelen subestimar fenómenos clave observados en economías reales: la persistencia de shocks, la memoria histórica y la dependencia de la trayectoria (*path-dependence*). Estas limitaciones se acentúan en contextos como el Perú, donde crisis políticas, sanitarias y dependencia de recursos naturales generan ajustes lentos y heterogéneos que el enfoque clásico no logra entender.

En este marco, el cálculo fraccionario se utiliza como una herramienta matemática importante que permite generalizar las derivadas e integrales a órdenes no enteros, incorporando de forma natural efectos de memoria y no-localidad temporal. Su aplicación en economía de las ecuaciones diferenciales fraccionarias ofrece una herramienta matemática muy potencial aún poco explorado para modelar sistemas con dependencias históricas prolongadas y comportamientos asintóticos no exponenciales, típicos de economías con rigideces estructurales.

Esta investigación se propone extender el modelo de Solow-Swan mediante la incorporación de derivadas fraccionarias, específicamente utilizando la derivada de Caputo, con el fin de analizar cómo la dinámica de convergencia al estado estacionario modifica el análisis económico. El trabajo no solo desarrolla el marco teórico de esta generalización, sino que también propone resolver la ecuación diferencial fraccionaria mediante la transformada de Laplace y funciones de Mittag-Leffler, y también implementa una calibración empírica con datos peruanos (2014-2023) para determinar el orden fraccionario óptimo α que mejor se ajusta a la realidad del país.

Los resultados demuestran que el modelo fraccionario ($\alpha \approx 0,3$) supera significativamente

al modelo clásico ($\alpha = 1$) en la capacidad de reproducir las fluctuaciones observadas en la economía peruana, especialmente durante periodos de crisis y recuperación lenta. Se evidencia una convergencia de tipo algebraico en lugar de exponencial, coherente con la presencia de rigideces estructurales y una alta persistencia de shocks. Además, se proyecta que, bajo los parámetros actuales, la economía peruana tardaría más de 90 años en alcanzar el 95 % de su estado estacionario, reflejando los profundos desafíos de convergencia que enfrenta. Esta tesis no solo contribuye a la literatura económica al ofrecer un marco teórico más importante para el análisis del crecimiento en economías emergentes, sino que también muestra herramientas cuantitativas para el diseño de políticas económicas mejor adaptadas a contextos con alta inercia histórica y vulnerabilidad externa. Asimismo, genera bases para futuras investigaciones que exploren las aplicaciones del cálculo fraccionario en macroeconomía, dinámicas no lineales y estudios de casos en América Latina.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Situación Problemática

La consolidación de una economía sostenible es un objetivo clave para países en desarrollo como el Perú. Sin embargo, en los últimos años, el país ha enfrentado desafíos estructurales que limitan su capacidad para mantener tasas de crecimiento consistentes. A pesar de haber experimentado un desarrollo favorable en décadas anteriores, persisten debilidades como la dependencia de recursos naturales, la baja productividad y la vulnerabilidad a shocks externos, como crisis políticas (2019) y la pandemia (2020-2022). Estas características no son capturadas adecuadamente por modelos tradicionales de crecimiento económico, entre los que destaca el modelo Solow-Swan, el cual asume dinámicas lineales y convergencia exponencial al estado estacionario.

El modelo teórico de Solow-Swan, fundamentado en función de producción Cobb-Douglas, ha sido ampliamente utilizado para analizar los factores que contribuyen al crecimiento económico, como el capital (K), el trabajo (L) y la tecnología (A). Sin embargo, su formulación clásica omite fenómenos clave observados en economías emergentes:

- **Persistencia de shocks**: Eventos como crisis políticas o sanitarias tienen efectos prolongados que el modelo clásico subestima.
- **Memoria histórica**: Las decisiones económicas pasadas influyen en el desempeño actual, una dinámica no considerada en el enfoque tradicional.
- **Convergencia no exponencial**: Las economías con rigideces estructurales, como el Perú, muestran trayectorias de ajuste más lentas y complejas.

En este contexto, la omisión de la derivada fraccionaria en la modelización del capital total limita la capacidad del modelo para representar estas dinámicas. El cálculo fraccionario, al

generalizar las derivadas a órdenes no enteros ($\alpha \in (0, 1)$), permite incorporar efectos de memoria y dependencias temporales no locales, lo que podría mejorar significativamente la representación de economías con características heterogéneas y trayectorias irregulares.

El modelo tradicional de crecimiento económico no logra explicar adecuadamente la lenta recuperación que experimentó el Perú después de la crisis, particularmente en el periodo 2019-2020. Según la teoría clásica, el capital por trabajador ($k(t)$) debería ajustarse rápidamente hacia su equilibrio de largo plazo, mostrando una convergencia exponencial. Sin embargo, en la realidad peruana, se observó una caída abrupta seguida de una recuperación mucho más lenta, lo que sugiere que el modelo subestima las fricciones y rigideces propias de una economía emergente.

Además, el enfoque matemático convencional, basado en derivadas ordinarias ($\alpha = 1$), no permite capturar la persistencia de shocks pasados ni la influencia de las condiciones iniciales en la dinámica económica actual. Esto es clave en contextos como el peruano, donde factores institucionales, ineficiencias en los mercados y estructuras productivas rígidas generan inercias que retrasan el ajuste.

Finalmente, el modelo clásico parte del supuesto de mercados perfectamente eficientes y ajustes instantáneos, una idealización que contrasta con la realidad de economías en desarrollo, donde las imperfecciones institucionales, la informalidad y otros factores estructurales impiden una rápida recuperación. Por ello, se requiere un enfoque más flexible que incorpore estas complejidades para entender mejor la dinámica del crecimiento en el Perú.

- Datos del BCRP (2023) y del INEI (2023) muestran que la economía peruana exhibe una velocidad de convergencia más lenta que la predicha por el modelo clásico, especialmente después de shocks externos.

- Estudios recientes, como los de Tarasov (2019) y Johansyah et al. (2022), demuestran que las derivadas fraccionarias son herramientas efectivas para modelar dinámicas económicas con memoria histórica y persistencia.

No se ha aplicado sistemáticamente el cálculo fraccionario al modelo de Solow-Swan para

analizar el caso peruano, a pesar de su potencial para mejorar la comprensión de las rigideces estructurales y la convergencia no exponencial. Esta investigación busca llenar ese vacío, proponiendo una extensión del modelo que incorpore derivadas fraccionarias y permita una representación más precisa de la dinámica económica del Perú.

Los resultados de este estudio podrían aportar:

- Un marco teórico más robusto para el análisis del crecimiento en economías emergentes.
- Herramientas cuantitativas para diseñar políticas económicas adaptadas a contextos con alta persistencia de shocks.
- Una base para futuras investigaciones en dinámica económica no lineal y aplicaciones del cálculo fraccionario en macroeconomía.

1.2 Formulación del problema

El modelo clásico de Solow-Swan, basado en la función de producción Cobb-Douglas $Y(t) = K(t)^{\beta}[A(t)L(t)]^{1-\beta}$ donde $Y(t)$, $K(t)$, $L(t)$ y $A(t)$ representan la producción, el capital, el trabajo y la tecnología (que crece exógenamente), respectivamente, y han sido fundamentales para comprender el crecimiento económico a través de la dinámica de acumulación de capital (variable endógena), la cual está condicionada por factores exógenos como el crecimiento poblacional (n) y progreso tecnológico (g). Sin embargo, su formulación tradicional que describe la dinámica del capital en unidades de trabajo efectivo ($k(t) = K/AL$) mediante la ecuación diferencial $\frac{dk(t)}{dt} = sk(t)^{\beta} - (n+g+\delta)k(t)$ presenta limitaciones significativas al aplicarse a economías emergentes como la peruana. Entre estas limitaciones destacan su incapacidad para capturar la persistencia histórica en el desarrollo, la heterogeneidad estructural y los lentos ajustes hacia el estado estacionario, fenómenos que sugieren la presencia de dependencia de trayectoria (*path dependence*) y memoria de largo plazo en el crecimiento.

Estas características, ignoradas por el enfoque clásico de derivadas enteras, han sido do-

cumentadas en estudios como los de Diebolt & Hippe (2016) y Comin & Hobijn (2010), quienes evidencian que el progreso tecnológico y su difusión en países en desarrollo siguen patrones no lineales, donde shocks pasados tienen efectos persistentes. Tal comportamiento, análogo al observado en sistemas modelados con derivadas fraccionarias ($\alpha \neq 1$), plantea la necesidad de extender el marco de Solow-Swan para incorporar dinámicas más complejas y realistas, propias de contextos con rigideces institucionales y trayectorias históricas críticas.

Esta brecha teórica y empírica justifica extender el modelo de Solow-Swan mediante derivadas fraccionarias, lo que permitiría modelar la persistencia en variables como el capital o la productividad, reflejando rigideces institucionales y heterogeneidad estructural propias de economías emergentes. Además, facilitaría una reinterpretación del estado estacionario, donde la dinámica fraccionaria podría revelar equilibrios dependientes de la trayectoria histórica y capturar no linealidades en la adopción tecnológica. Por ello, la pregunta central de investigación es:

¿Cómo afecta la inclusión de la derivación fraccionaria en el modelo de crecimiento de Solow-Swan al estado estacionario del crecimiento económico?

La ecuación fundamental del modelo modificado con derivadas fraccionarias se expresa como:

$$ {}^{C}D^{\alpha}k(t) = sk^{\beta}(t) - (n + g + \delta)k(t); \quad k(0) = k_0 \tag{1.1} $$

${}^{C}D^{\alpha}$: Derivada de Caputo de orden $\alpha \in (0, 1]$ (caso general)

$k(t) = \dfrac{K(t)}{A(t)L(t)}$: Capital por unidad de trabajo efectivo(variable dinámica que evoluciona en el tiempo)

$K(t)$ Stock de capital físico

$s \in (0, 1)$: Tasa de ahorro

$\beta \in (0, 1)$: Elasticidad output-capital

$\delta \in (0, 1)$: Tasa de depreciación del capital

$n > 0$: Tasa de crecimiento poblacional

$g > 0$: Tasa de progreso tecnológico

k_0 : Capital inicial por unidad de trabajo efectivo

1.2.1 Problema General

¿La incorporación de derivadas fraccionarias en el modelo de Solow-Swan posiblemente modificará la dinámica de convergencia al estado estacionario y la representación de efectos de memoria histórica en economías emergentes, con aplicación al caso peruano?

1.2.2 Problemas Especificos

1. ¿Qué condiciones deben cumplir los parámetros económicos y el orden fraccionario para garantizar la estabilidad dinámica del modelo de Solow-Swan con derivadas fraccionarias?
2. ¿Cómo difiere la velocidad de convergencia al estado estacionario entre el modelo clásico y el fraccionario, y qué implicaciones tiene esto para políticas económicas en el Perú?
3. ¿Cómo se puede implementar el modelo fraccionario para calibrar el parámetro α óptimo que mejor represente el crecimiento económico histórico del Perú (2014-2023)?
4. ¿En qué medida el modelo fraccionario (con α óptimo) supera al modelo clásico en la reproducción de fluctuaciones y shocks observados en la economía peruana?

1.3 Justificación

La presente investigación se justifica en tres dimensiones fundamentales teórica, metodológica y empírica que en conjunto sustentan la pertinencia y originalidad de la incorporación de derivadas fraccionarias en el modelo de Solow-Swan, con aplicación al caso peruano.

1. **Justificación teórica**: El modelo de Solow-Swan ha sido fundamental en la teoría del crecimiento económico al ofrecer un marco analítico para entender la dinámica de acumulación de capital y convergencia al estado estacionario. Sin embargo, su formulación clásica se basa en derivadas ordinarias que suponen un ajuste instantáneo y, sobre todo, desprecian la influencia del pasado en el comportamiento presente de las variables económicas. Esta limitación resulta crítica en economías emergentes como la peruana, donde fenómenos como la persistencia de shocks, la dependencia de la trayectoria (path-dependence) y la memoria histórica son determinantes en su desempeño. La incorporación de derivadas fraccionarias específicamente en el sentido de Caputo permite generalizar el modelo clásico al introducir no localidad temporal y efectos de memoria, tal como lo han señalado Tarasov (2019) y Podlubny (1999). El uso de derivadas fraccionarias posibilita capturar dinámicas de convergencia no exponencial y ajustes lentos, propios de economías con rigideces estructurales, ofreciendo un marco teórico más flexible y realista para el análisis del crecimiento en contextos de alta volatilidad y persistencia de perturbaciones.

   La elección de la derivada de Caputo sobre la de Riemann-Liouville no es arbitraria: mientras que Riemann-Liouville requiere condiciones iniciales de orden fraccionario cuya interpretación económica es problemática, Caputo utiliza condiciones de tipo entero ($k(0) = k_0$) directamente observables en las series del BCRP. Esta propiedad, señalada por Diethelm (2010) y Podlubny (1999), hace que Caputo sea el operador natural para modelos económicos calibrados con datos institucionales.

2. **Justificación metodológica**: Desde el punto de vista metodológico, este trabajo introduce derivadas fraccionarias como herramienta avanzada del cálculo matemático junto con la transformada de Laplace, funciones de Mittag-Leffler y la linealización de sistemas no lineales en el estudio de modelos macroeconómicos. Esta aproximación no solo enriquece la base metodológica disponible para la economía cuantitativa, sino que también establece un precedente para la aplicación de ecuaciones diferenciales fraccionarias en el análisis de sistemas dinámicos con memoria extendida. La resolución analítica del modelo mediante derivadas

fraccionarias en sentido de Caputo y transformadas de Laplace, junto con la calibración numérica con datos peruanos, representan una contribución metodológica concreta, replicable en estudios similares para otras economías emergentes. Asimismo, la implementación en Python de simulaciones con órdenes fraccionarios variables permite evaluar escenarios de política económica bajo supuestos más realistas sobre la velocidad de ajuste y la influencia del pasado.

3. **Justificación empírica**: La economía peruana presenta características estructurales como su dependencia de recursos naturales, alta exposición a shocks externos y una lenta recuperación ante crisis que no son adecuadamente capturadas por el modelo de Solow-Swan clásico. La evidencia empírica del periodo 2014-2023 muestra fluctuaciones y una convergencia más lenta de lo predicho por el modelo tradicional, especialmente durante eventos como la crisis política de 2019 y la pandemia de 2020-2022. La incorporación de derivadas fraccionarias permite superar estas limitaciones al proveer un marco que captura explícitamente la memoria económica y la no-localidad temporal, que esta investigación busca llenar mediante la aplicación de derivadas fraccionarias al contexto peruano.

Este trabajo contribuye a la literatura económica al:

a) Generalizar el modelo de Solow-Swan mediante un enfoque fraccionario

b) Proporcionar herramientas para el análisis de economías con dinámicas complejas

c) Ofrecer un marco teórico para estudios de caso en economías emergentes

Como demuestran Johansyah et al. (2022) en estudios recientes, los modelos fraccionarios tienen especial relevancia para analizar economías donde los supuestos de crecimiento balanceado del modelo clásico no se cumplen plenamente.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Analizar el impacto de las derivadas fraccionarias en la dinámica del modelo Solow-Swan, evaluando su capacidad para capturar efectos de memoria histórica y convergencia no exponencial en la economía peruana, mediante calibración empírica y validación predictiva.

1.4.2 Objetivos Específicos

1. Formular y resolver analíticamente la extensión fraccionaria del modelo Solow-Swan mediante la derivada de Caputo utilizando transformada de Laplace, cuya solución es en términos de las funciones de Mittag-Leffler.

2. Analizar la estabilidad dinámica del sistema linealizado alrededor del estado estacionario y comparar el comportamiento de la velocidad de convergencia del modelo fraccionario frente al clásico.

3. Calibrar empíricamente el orden fraccionario óptimo (α) para la economía peruana (2014-2023) mediante minimización del error cuadrático medio, determinando el valor que mejor refleje la rigidez económica estructural del país.

4. Comparar cuantitativamente la capacidad predictiva del modelo fraccionario frente al modelo clásico, evaluando métricas de error (ECM) y su desempeño durante períodos de crisis y recuperación económica.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1 Fundamentos Matemáticos

2.1.1 Funciones Especiales

Función Gamma

Una función fundamental del cálculo fraccionario es la función Gamma, que amplia el concepto de factorial a todos los números reales positivos. Desarrollada originalmente por Euler, esta función permite generalizar diversas operaciones matemáticas más allá de los enteros (Oldham & Spanier, 2010).

Definición 2.1. *Sean $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.*

*Se llama **función "Gamma"**, denotada por Γ, a la función $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad \forall z \in \mathbb{R}^+$$

Nota:

1. La función gamma tiene relación con el factorial para los números enteros positivos, esto es:

$$\Gamma(z) = (z-1)! \quad \forall z \in \mathbb{Z}^+$$

2. Las funciones Gamma, Beta y Mittag-Leffler se definen formalmente en el semiplano complejo $\mathbb{C}^+$ (requisito para la convergencia de la Transformada de Laplace), pero en esta inves-

tigación se evalúan en $\mathbb{R}^+$ porque los parámetros económicos son estrictamente reales.

Propiedades

Se cumplen:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),\ \forall z \in \mathbb{R}^+$
4. $\Gamma(z+1) = z!\,,\ \forall z \in \mathbb{Z}^+$

Demostración

1. $\Gamma(1) = 1$

Demostración.

Partimos de la definición de la función Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^+$$

Evaluamos en $z = 1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^0 e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}\, dt$$

La integral es inmediata:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b}) - (-e^0) = 0 + 1 = 1.$$

Por lo tanto:

$$\Gamma(1) = 1$$

□

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demostración.

En efecto, de acuerdo a la definición 2.1:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt.$$

Si $t = x^2$ y $dt = 2x\, dx$.

Se tiene:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty (x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} \cdot 2x\, dx = \int_0^\infty x^{-1} e^{-x^2} \cdot 2x\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy\right) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Transformamos a coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, con $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Se tiene:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^\infty e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta.$$

Calculamos la integral interior con la sustitución $u = r^2$, $du = 2r\, dr$:

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\, du = \frac{1}{2}.$$

Luego:

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4\left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \pi.$$

Por lo tanto:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

□

3. $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z), \qquad \forall z \in \mathbb{R}^+$

Demostración.

En efecto, de acuerdo con la definición 2.1, se tiene que:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt.$$

Integramos por partes.

Sean:

$\phi = t^z$, $d\phi = zt^{z-1}dt$

$\rho = -e^{-t}$, $d\rho = e^{-t}dt$.

Luego:

$$\Gamma(z+1) = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt.$$

Evaluando los límites:

$$\left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\left(-t^z e^{-t}\right) - \lim_{t\to 0}\left(-t^z e^{-t}\right) = 0 - 0 = 0$$

$$\Gamma(z+1) = z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\, dt.$$

Se tiene:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \qquad \forall z \in \mathbb{R}^+$$

□

4. $\Gamma(z+1) = z!, \forall z \in \mathbb{Z}^+$

Demostración.

En efecto:

De acuerdo a la definición 2.1, se tiene:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt.$$

Para $z \in \mathbb{Z}_0^+$, por inducción:

a) **Base de la inducción** ($z = 0$)**:**

La propiedad $\Gamma(z+1) = z!$ se verifica para $z = 0$ mediante:

$$\Gamma(0+1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \int_0^\infty d(-e^{-t}) = [-e^{-t}]_0^\infty$$

$$= [\lim_{t\to\infty}(-e^{-t})] - \left(\frac{-1}{e^0}\right) = 0 + 1$$

$\therefore \Gamma(0+1) = 1 = 0!$

b) **Hip. inductiva:**

Supongamos que para $z = k$, se cumple:

$$\Gamma(k+1) = k!$$

Paso inductivo ($z = k+1$)**:** Demostramos que:

$$\Gamma((k+1)+1) = (k+1)!$$

Usando la propiedad 3 de función Gamma:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \text{ para } z \in \mathbb{Z}^+, \text{ se tiene}$$

$$\Gamma((k+1)+1) = (k+1)\cdot\Gamma(k+1)$$

Por la hipótesis de inducción:

$$\Gamma(k+1) = k!$$

se tiene:

$$\Gamma((k+1)+1) = (k+1)\cdot k! = (k+1)!$$

Por lo tanto, para $z = k+1$, se cumple que:

$$\Gamma(z+1) = z!, \forall z \in \mathbb{Z}^+$$

□

Función Beta

La función Beta está vinculada a la función Gamma y se emplea frecuentemente para simplificar expresiones que involucran combinaciones de valores gamma. Esta relación permite manejar cálculos complejos de manera más eficiente (Abramowitz & Stegun (1964)).

Definición 2.2. *Sean $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Se llama* ***función "beta"*** *denotada por β a la función*

$\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *,definida por:*

$$\beta(m,n) := \int_0^1 s^{m-1}(1-s)^{n-1}\,ds, \quad m,n \in \mathbb{R}^+$$

Propiedad

1. Relación con la función Gamma:

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Demostración.

Por definición, 2.1 y 2.2 se tiene:

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty u^{m-1}e^{-u}\,du, \qquad \Gamma(n) = \int_0^\infty v^{n-1}e^{-v}\,dv.$$

Multiplicando:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty\int_0^\infty u^{m-1}v^{n-1}e^{-(u+v)}\,du\,dv. \tag{1}$$

Realizando el cambio a coordenadas polares mediante la transformación:

$$u = r\cos^2\theta, \qquad v = r\sin^2\theta,$$

con $r \geq 0$ y $\theta \in [0, \pi/2]$. El jacobiano de la transformación es:

$$J = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & -2r\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & 2r\cos\theta\sin\theta \end{vmatrix} = 2r\cos\theta\sin\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r\sin(2\theta).$$

Por tanto, $du\,dv = r\sin(2\theta)\,dr\,d\theta$. El integrando se convierte en:

$$u^{m-1}v^{n-1}e^{-(u+v)} = (r\cos^2\theta)^{m-1}(r\sin^2\theta)^{n-1}e^{-r} = r^{m+n-2}\cos^{2(m-1)}\theta\,\sin^{2(n-1)}\theta\,e^{-r}.$$

Sustituyendo en (1):

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\infty} r^{m+n-2} \cos^{2m-2}\theta \, \sin^{2n-2}\theta \, e^{-r} \left(r \sin(2\theta)\right) dr \, d\theta.$$

Simplificando $r^{m+n-2} \cdot r = r^{m+n-1}$ y usando $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-2}\theta \, (\sin^{2n-2}\theta) 2\sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^{\infty} r^{m+n-1} e^{-r} \, dr.$$

Es decir:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \, \sin^{2n-1}\theta \, d\theta \int_0^{\infty} r^{m+n-1} e^{-r} \, dr.$$

La integral en r es $\Gamma(m+n)$. Por otra parte, la integral en θ es una representación conocida de la función Beta:

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \, \sin^{2n-1}\theta \, d\theta.$$

Así pues:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n) \, B(m,n).$$

Finalmente, despejando $B(m,n)$ se obtiene:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

□

Funcion Mittag-Leffler

Definición 2.3. *Sean $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos, $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos, $z \in \mathbb{C}$ una variable compleja, $\alpha \in \mathbb{C}$ un parámetro complejo con $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ y $\Gamma(\cdot)$ la*

función Gamma. Se llama "función Mittag-Leffler de un parámetro", denotada por E_α, a la función $E_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por la serie de potencias (Podlubny (1999)):

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

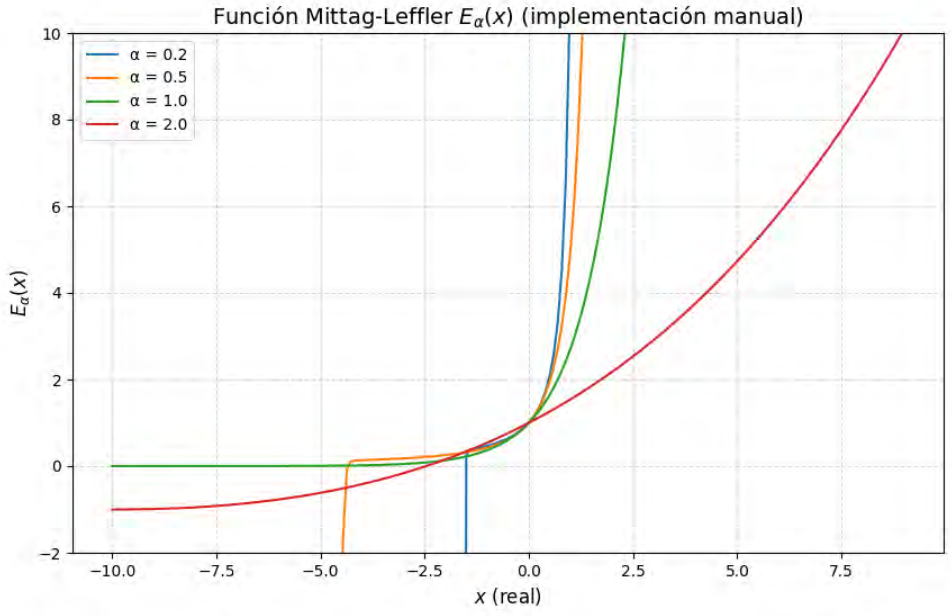
Notas:

1. La función exponencial e^z, es fundamental en el estudio de ecuaciones de orden entero, y su extensión natural a órdenes fraccionarios viene dada por las funciones de Mittag-Leffler, las cuales generalizan su comportamiento.

2. Se llama función Gamma a una extensión de la función factorial de los números reales y complejos.

3. Representación gráfica de Mittag-Leffler de un parámetro α

Figura 1
Función Mittag-Leffler de un parámetro $E_\alpha(x)$



Nota. $E_\alpha(x)$ coincide con e^x cuando $\alpha = 1$, decae más lentamente para $\alpha < 1$ y oscila como $\cosh(\sqrt{x})$ si $\alpha = 2$.

Propiedad: La convergencia de la serie que define $E_\alpha(z)$ depende del parámetro α:

1. Si $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$:

   La serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, lo que implica que $E_\alpha(z)$ es una función entera (analítica en todo el plano complejo). *Ejemplo:* $E_1(z) = e^z$ (la exponencial clásica).(Gorenflo et al. (2014))

Casos Particulares

- Para $\alpha = 0$:

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

  Es la serie geométrica, válida solo dentro del disco unitario.

- Para $\alpha = 1$:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

  Recupera la función exponencial.

- Para $\alpha = 2$:

$$E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(\sqrt{z}).$$

  Relacionada con funciones hiperbólicas.

Definición 2.4. *(Función Mittag-Leffler de dos parámetros). Sean $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos, $z \in \mathbb{C}$ una variable compleja, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos parámetros complejos con sus partes reales positivas $\mathrm{Re}(\alpha) > 0 \quad y \quad \mathrm{Re}(\beta) > 0$, y Γ la función gamma de Euler. Se llama* ***función de Mittag-Leffler de dos parámetros****, denotada por $E_{\alpha,\beta}(z)$, a la función $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la cual pertenece al espacio de funciones holomorfas $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, definida por la serie de potencias (Mittag-Leffler (1903))*

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Nota:

1. A la función Mittag-Leffler, donde $z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\mathrm{Re}(\alpha) > 0 \quad$ y $\quad \mathrm{Re}(\beta) > 0$, se le conoce función generalizada.

Observación:

a) Para valores particulares de α y β se tiene:

La condición $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ es esencial para garantizar la convergencia absoluta de la serie en todo $\mathbb{C}$. Si se considera $\alpha = 0$ (que no satisface $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$), la serie se convierte en

$$E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(0 \cdot k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{0!} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k,$$

que es la serie geométrica. Esta serie converge solo para $|z| < 1$ y diverge para $|z| \geq 1$, por lo que no representa una función entera. En consecuencia, el caso $\alpha = 0$ queda fuera del alcance de la definición.

Se obtiene una serie geométrica con razón z. Sabemos que converge si $|z| < 1$, y su suma es:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \quad \text{para } |z| < 1.$$

b) Si $\alpha = 1 + 0i$ y $\beta = 1 + 0i$, se tiene:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 \cdot k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Se halla la serie de Taylor de la función exponencial e^z, que converge $\forall z \in \mathbb{C}$.

Finalmente:

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

Comportamiento Asintótico de la Función Mittag-Leffler de un parámetro $E_\alpha(z)$

El comportamiento asintótico de una función describe cómo se comporta cuando su variable $|z|$ tiende a infinito, siguiendo una determinada dirección en el plano complejo (dada por $\arg(z)$). Para la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ con $0 < \alpha < 1$, este comportamiento es muy diferente al de la exponencial e^z, en lugar de crecer o decaer exponencialmente, presenta un **decaimiento algebraico** (como una potencia negativa) en ciertos sectores del plano complejo. Concretamente, para $|z| \to \infty$ y cuando el argumento de z se encuentra fuera del sector $|\arg(z)| > \alpha\pi/2$, la función admite el siguiente desarrollo asintótico (Gorenflo et al. (2014)).

Observación 2.1 (Comportamiento asintótico de $E_\alpha(z)$)**.** *Para* $0 < \alpha < 1$ *y* $|z| \to \infty$ *con* $|\arg(z)| > \alpha\pi/2$*, la función Mittag-Leffler tiene la expansión en serie asintótica Gorenflo et al. (2014); Podlubny (1999)*

$$E_\alpha(z) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}.$$

El término dominante ($k = 1$) *proporciona:*

$$E_\alpha(z) \sim -\frac{z^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \textit{para } |z| \to \infty.$$

Esto significa que, para grandes $|z|$*,* $E_\alpha(z)$ *decae como* $1/|z|$ *multiplicado por un factor constante* $(-1/\Gamma(1-\alpha))$*. Este comportamiento es típico de sistemas con memoria larga y contrasta con el decaimiento exponencial de la función* e^{-t} *en el dominio del tiempo.*

Nota:

1. El símbolo $\sim$ indica que dos funciones son asintóticamente equivalentes; es decir, $f(z) \sim g(z)$.

Caso a) Sector de crecimiento exponencial: $|\arg(z)| < \dfrac{\alpha\pi}{2}$

Condición. $|z| \to \infty$ con $|\arg(z)| < \alpha\pi/2$.

Comportamiento asintótico. En este sector la función $E_\alpha(z)$ presenta un crecimiento de tipo exponencial. La expansión asintótica completa es (Gorenflo et al., 2014, Theorem 4.3):

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \exp\left(z^{1/\alpha}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}, \qquad |z| \to \infty,\ |\arg(z)| < \frac{\alpha\pi}{2}.$$

El primer término (exponencial) domina sobre la serie de potencias negativas. Por tanto, el comportamiento principal es

$$E_\alpha(z) \ \sim\ \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \exp\left(z^{1/\alpha}\right).$$

Interpretación. - Si $\alpha = 1$: $E_1(z) \sim e^z$ (recupera la exponencial). - Si $0 < \alpha < 1$: el crecimiento es más lento que el de una exponencial pura (crecimiento de tipo Mittag-Leffler).

- Si $1 < \alpha < 2$: el crecimiento es más rápido que el de una exponencial pura.

Caso b) Sector de decaimiento algebraico: $|\arg(z)| > \dfrac{\alpha\pi}{2}$

Condición. $|z| \to \infty$ con $|\arg(z)| > \alpha\pi/2$. Este sector incluye, en particular, el eje real negativo cuando $\alpha < 1$ (pues $\pi > \alpha\pi/2$).

Comportamiento asintótico. En este sector no hay término exponencial; la función decae como una serie de potencias negativas de z. La expansión asintótica es (Gorenflo et al., 2014, Corollary 4.2):

$$E_\alpha(z) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}, \qquad |z| \to \infty, \ |\arg(z)| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Esta serie es asintótica, es decir, para cada N fijo,

$$E_\alpha(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)} + O\big(|z|^{-N-1}\big).$$

Caso c) Término dominante ($k = 1$) y aproximación principal

Extraer el término de orden más bajo en z^{-1} de la expansión asintótica del caso b), que es el que gobierna el comportamiento para $|z|$ grande.

De la serie del caso b), el término correspondiente a $k = 1$ es

$$-\frac{z^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Los términos con $k \geq 2$ son de orden $O(z^{-2})$, $O(z^{-3})$, etc., que son despreciables frente a $O(z^{-1})$ cuando $|z| \to \infty$. Por lo tanto, la aproximación asintótica dominante es

$$E_\alpha(z) \sim -\frac{z^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad |z| \to \infty, \ |\arg(z)| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$

2.1.2 Cálculo Fraccionario

El cálculo fraccionario ha revolucionado las matemáticas modernas al extender los operadores de derivada e integral a órdenes no enteros (Podlubny (1999)). Esta innovación teórica ha demostrado ser invaluable en áreas tan diversas como la medicina personalizada, al modelar con precisión la liberación controlada de fármacos (Magin (2006)); y la economía conductual, permitiendo analizar fenómenos con memoria histórica y dependencias temporales complejas que los modelos tradicionales no pueden capturar; (Tarasov (2016)).

El cálculo fraccionario reside en su capacidad para describir procesos que trascienden lo puramente local o instantáneo (Kilbas et al. (2006)).La integral fraccionaria, como generalización de la integral clásica, se ha consolidado como herramienta fundamental para modelar sistemas con dependencias temporales extendidas. Esta capacidad, que contrasta con modelos basados exclusivamente en derivadas enteras o dependientes de la memoria (Wang & Li (2021)), ha sido ampliamente documentada (Podlubny (1999); Tarasov (2019)). En la práctica actual, conviven dos enfoques principales: el método Riemann-Liouville, apreciado por su elegancia formal en desarrollos teóricos, y el enfoque Caputo, preferido en aplicaciones prácticas por su mejor adaptación a condiciones físicas reales(Caputo (1967)). Estas herramientas están revolucionando múltiples campos (Kilbas et al. (2006)).

La presente investigación propone una adaptación del modelo económico Solow-Swan clásico al modelo fraccionario, mediante la incorporación de operadores fraccionarios. Este enfoque novedoso resuelve las restricciones de la formulación convencional al integrar patrones de memoria a largo plazo y relaciones temporales no locales en la dinámica del desarrollo económico. Como se ha demostrado recientemente (Aibinu, Duffy & Moyo (2025)), la inclusión de operadores fraccionarios en el modelo de Solow-Swan permite capturar efectos de memoria que las ecuaciones diferenciales ordinarias no pueden representar. A través de un marco teórico robusto y su posterior validación analítica, se evidencia la capacidad del enfoque fraccionario para proporcionar interpretaciones más precisas y completas de fenómenos económicos complejos, especialmente valiosas en escenarios de transformación tecnológica acelerada y reconfiguraciones estructurales prolongadas.

Definición 2.5 (Operador integral iterado)**.** *Sea* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *una función continua, con* $a \in \mathbb{R}$. *Se define el operador integral de orden* 1 *como*

$$I^1 f(t) = \int_a^t f(u)\, du, \qquad t \geq a.$$

Para $n \in \mathbb{Z}^+$ *, el operador integral iterado de orden n, denotado por* $I^n f(t)$*, se define recursivamente*

mediante la aplicación sucesiva del operador I^1*:*

$$I^n f(t) = I^1\big(I^{n-1} f\big)(t) = \underbrace{\int_a^t \int_a^{u_1} \cdots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n)\, du_n \cdots du_1}_{n \text{ integrales}}.$$

Una propiedad fundamental de este operador es su representación concisa mediante la fórmula de Cauchy, que se enuncia como un teorema.

Teorema 2.1 (Fórmula de Cauchy para la integral iterada)**.** *Sea n un número entero positivo, a un número real fijo, t un numero real, con* $t \geq a$ *y* f *una función integrable en el intervalo* $[a, t]$*. Entonces la integral iterada de orden n de* f *desde a hasta t, denotada por* $I^n f(t)$*, viene dada por la expresión*

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-u)^{n-1} f(u)\, du.$$

Demostración. ***por inducción***

En efecto, por la definición 2.5, se tiene:

Caso ($n = 1$): Para el caso inicial, demostramos que la fórmula se cumple cuando $n = 1$:

$$\begin{aligned} I^1 f(t) &= \int_a^t f(u) du \\ &= \frac{1}{0!} \int_a^t (t-u)^0 f(u) du \quad \text{(pues } 0! = 1 \text{ y } (t-u)^0 = 1) \end{aligned}$$

Hipótesis Inductiva ($n = k$): Asumimos válida la fórmula para $n = k$:

$$I^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-u)^{k-1} f(u) du$$

Paso Inductivo ($n = k + 1$): Demostramos que la fórmula se cumple para $n = k + 1$:

$$I^{k+1} f(t) = I^1 (I^k f)(t)$$

$$= \int_a^t I^k f(u)du$$

Remplazando por la hipótesis inductiva tenemos

$$= \int_a^t \left(\frac{1}{(k-1)!} \int_a^u (u-\omega)^{k-1} f(\omega)d\omega \right) du$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t \int_a^u (u-\omega)^{k-1} f(\omega)d\omega du$$

Aplicando el teorema de Fubini (válido para f continua) para intercambiar el orden de integración:

$$= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t f(\omega) \left(\int_\omega^t (u-\omega)^{k-1} du \right) d\omega$$

Para evaluar la integral interior, se realiza el cambio de variable $v = u - \omega$, de modo que $dv = du$. Cuando $u = \omega$, $v = 0$; y cuando $u = t$, $v = t - \omega$. Así, la integral se transforma en:

$$\int_\omega^t (u-\omega)^{k-1} du = \int_0^{t-\omega} v^{k-1} dv$$

Al integrar, se obtiene:

$$\frac{v^k}{k}\Big|_0^{t-\omega} = \frac{(t-\omega)^k}{k}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión original:

$$I^{k+1} f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t f(\omega) \cdot \frac{(t-\omega)^k}{k} d\omega = \frac{1}{k!} \int_a^t (t-\omega)^k f(\omega)d\omega$$

Esta expresión coincide con la fórmula buscada para $n = k + 1$, lo cual concluye la demostración por inducción.

Por tanto:

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-u)^{n-1} f(u)du$$

□

La generalización a órdenes fraccionarios se logra sustituyendo el factorial por la función gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du \quad \text{para } \alpha > 0$$

2.1.3 Integral y Derivada Fraccionaria

Definición 2.6 (Integral Fraccionaria de Orden α)**.** *Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable, $\alpha > 0$ y Γ la función Gamma. Se llama* ***integral fraccionaria izquierda de orden*** *α de f, denotada por ${}_aI_t^\alpha f$, a la función definida por:*

$${}_aI_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du, \qquad -\infty \le a < t < b \le \infty.$$

Análogamente, se define la ***integral fraccionaria derecha de orden*** *α como:*

$${}_tI_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (u-t)^{\alpha-1} f(u)\, du, \qquad -\infty \le a < t < b \le \infty.$$

Casos particulares:

- Si $a = 0$, $b = +\infty$ se tiene integral fraccionaria de **Riemann:**

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du.$$

Este es el caso más común en aplicaciones donde el tiempo comienza en $t = 0$

- Si $a = -\infty$, $b = +\infty$ se tiene la integral fraccionaria de **Liouville:**

$${}_{-\infty}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du.$$

Este caso se utiliza cuando se estudian funciones en toda la recta real.

Definición 2.7 (Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville de Orden α (Podlubny (1999)))**.** *Sean $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Se define la* ***derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden*** *α de f, denotada por ${}_aD_t^\alpha f$, como:*

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} f(u)\, du, \qquad a < t < b. $$

Nota:

1. Cuando M es constante la derivada de Riemann-Liouville, para $0 < \alpha < 1$ es

$$ {}_aD_t^\alpha M = \frac{M(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

Definición 2.8 (Derivada fraccionaria de Caputo Caputo (1967))**.** *Sea $\alpha > 0$ y sea $n = \lceil \alpha \rceil$ el entero más pequeño mayor o igual que α. Sea $f : [a, T] \to \mathbb{R}$ una función tal que $f^{(n-1)}$ es absolutamente continua en $[a, T]$ (y por lo tanto $f^{(n)}$ existe casi en todas partes y es integrable). La* ***derivada fraccionaria de Caputo de orden*** *α de f en $t \in (a, T]$ se define como:*

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-u)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{du}\right)^n f(u)\, du. \tag{2.1} $$

Notas:

1. El superíndice C a la izquierda indica que se trata de la derivada en el sentido de Caputo. El subíndice a denota el límite inferior de integración , y el subíndice t es la variable independiente.

2. En particular para $a = 0$, se tiene la notación:

$$ {}^C D_t^\alpha f(t) = cD_t^\alpha f(t) = D_C^\alpha f(t) = D^\alpha f(t). $$

3. Cuando M es constante, entonces la derivada de Caputo: ${}_a^C D_t^\alpha M = 0$ para todo $\alpha > 0$.

Teorema 2.2 (Relación entre Caputo y Riemann-Liouville)**.** *Para $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, y una función $f(t)$ que cumple las condiciones del teorema de Taylor, se cumple la siguiente representación:*

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha}. $$

La demostración se encuentra en (Podlubny, 1999, Teorema 2.14).

Teorema 2.3. *Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $n-1 < \alpha < n$, entonces (Milici et al. (2019)) :*

$$ \lim_{\alpha \to n} {}^C D_t^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t), $$

$$ \lim_{\alpha \to n-1} {}^C D_t^{\alpha} f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). $$

Demostración. Partimos de la definición de la derivada fraccionaria de Caputo:

$$ {}^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t f^{(n)}(u)(t-u)^{n-\alpha-1} du $$

Procedemos aplicando la técnica de integración por partes a la integral:

$$ \int_0^t w(u)\rho'(u)\, du = w(u)\rho(u)\Big|_0^t - \int_0^t w'(u)\rho(u)\, du, $$

con:

$$ w(u) = f^{(n)}(u), \quad \rho'(u) = (t-u)^{n-\alpha-1}, $$

$$ w'(u) = f^{(n+1)}(u), \quad \rho(u) = -\frac{(t-u)^{n-\alpha}}{n-\alpha}. $$

Resulta:

$$ {}^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[-f^{(n)}(u) \frac{(t-u)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_0^t + \frac{1}{n-\alpha} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(u)\, du \right]. $$

Usando la propiedad de la función Gamma:

$$\Gamma(n-\alpha+1) = (n-\alpha)\Gamma(n-\alpha),$$

obtenemos:

$${}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[f^{(n)}(0) t^{n-\alpha} + \int_0^t f^{(n+1)}(u)(t-u)^{n-\alpha}\, du \right].$$

Al considerar el límite cuando α tiende a n, obtenemos:

$$\lim_{\alpha \to n} {}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \left[f^{(n)}(0) + \int_0^t f^{(n+1)}(u)\, du \right] = f^{(n)}(0) + f^{(n)}(u) \Big|_0^t = f^{(n)}(t),$$

$$\lim_{\alpha \to n-1} {}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \left[f^{(n)}(0) t + \int_0^t f^{(n+1)}(u)(t-u) du \right]$$

La integral se convierte en:

$$\int_0^t (t-u) f^{(n+1)}(u)\, du$$

Integramos por partes:

$$w = (t-u), \quad d\rho = f^{(n+1)}(u)\, du$$

$$dw = -du, \quad \rho = f^{(n)}(u)$$

Entonces tendremos :

$$\int_0^t (t-u) f^{(n+1)}(u)\, du = \left[(t-u) f^{(n)}(u) \right]_0^t + \int_0^t f^{(n)}(u)\, du$$

$$= -t f^{(n)}(0) + \left[f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0) \right]$$

Sustituyendo:

$$\lim_{\alpha \to n-1} {}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = t f^{(n)}(0) + \left[-t f^{(n)}(0) + f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0) \right]$$

$$= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$$

□

2.1.4 No localidad y núcleo de la derivada de Caputo

De la definicion 2.8 se tiene:

Observaciones:

1. las derivadas enteras $f'(t)$ y $f''(t)$ son operadores locales (dependen exclusivamente del comportamiento de f en una vecindad infinitesimal de t). La derivada de Caputo es un operador no local; su valor en cada instante t involucra toda la historia de la función desde el punto inicial $u = 0$ hasta el momento actual $u = t$.

2. La derivada de Caputo ${}_0^{C}D_t^{\alpha} f(t)$ no puede determinarse únicamente con información puntual o en una vecindad arbitrariamente pequeña alrededor de t; requiere el conocimiento completo del camino de $f^{(n)}(u)$ en el intervalo $[0, T]$.

Núcleo de memoria y sus propiedades. El núcleo de la integral,

$$K_{\alpha}(t, u) = \frac{(t-u)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)},$$

Actúa como un factor de ponderación: cuando el instante pasado u se aleja del presente t es decir, cuando $(t-u)$ es grande, el valor del núcleo disminuye (para los rangos habituales de α). El término integral actúa así como un núcleo de memoria que posee las siguientes propiedades:

a) **Singularidad en $u = t$.**

$$\lim_{u \to t^{-}} K_{\alpha}(t, u) = +\infty.$$

Esta divergencia refleja una mayor sensibilidad al comportamiento reciente, asignando peso infinito al instante actual.

b) **Decaimiento algebraico.**

$$K_\alpha(t,u) \sim (t-u)^{n-\alpha-1} \quad \text{cuando } u \to t^-.$$

Caracteriza una cola larga en la memoria: eventos pasados mantienen influencia significativa, a diferencia del decaimiento exponencial propio de operadores locales. Para $n = 1$ y $\alpha \in (0,1)$ el decaimiento es $(t-u)^{-\alpha}$. Como $\alpha < 1$, este decaimiento es más lento que cualquier exponencial, lo que implica que perturbaciones históricas conservan una influencia notable durante períodos prolongados. Esta propiedad será fundamental más adelante, al extender el modelo neoclásico de crecimiento económico, para capturar dinámicas de ajuste lentas típicas de economías con rigideces estructurales.

c) **Memoria persistente y dependencia histórica.** Cada valor pasado $f^{(n)}(u)$ influye en ${}^{C}D_t^\alpha$ con un peso $(t-u)^{n-\alpha-1}$ que prioriza el pasado reciente pero nunca olvida completamente los eventos antiguos. Esto permite modelar sistemas donde las condiciones iniciales y los shocks históricos tienen efectos prolongados.

Irreductibilidad de la memoria histórica. La estructura no local de ${}^{C}D_t^\alpha$ es una propiedad fundamental: no existe ningún operador diferencial local que pueda aproximarla uniformemente. Es decir, es imposible construir un operador L que dependa solo de valores de f en una vecindad $[t-\epsilon, t+\epsilon]$ (por pequeña que sea ϵ) y que reproduzca el comportamiento de ${}^{C}D_t^\alpha f(t)$. Esta irreductibilidad explica por qué los modelos que incorporan derivadas de Caputo pueden capturar fenómenos económicos con dependencia histórica compleja, en los cuales el estado actual del sistema (por ejemplo, el nivel de capital) emerge de interacciones acumulativas a lo largo de toda su trayectoria temporal, especialmente en economías con rigideces estructurales y persistencia de shocks.

Corolario 1 (Caso particular $0 < \alpha < 1$)**.** *En el caso particular* $0 < \alpha < 1$*, se tiene que* $n = 1$*. Tomando además el límite inferior* $a = 0$ *(que es el caso estándar en problemas de valor inicial), la definición general (2.8) se reduce a:*

$$ {}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(u)}{(t-u)^\alpha}\, du. \tag{2.2} $$

Este es el operador que se empleará en el modelo de crecimiento económico de la Sección 4.1.

Observaciones:

1. **Núcleo de Memoria Singular:** El kernel $K_\alpha(t,u) = (t-u)^{-\alpha}$ es singular en $u = t$, pero la integral converge porque $\alpha \in (0,1)$ y f' es integrable.

2. **Decaimiento Algebraico del Núcleo:** La función $K_\alpha(t,u)$ satisface:

   $$ \lim_{u \to t^-} K_\alpha(t,u) = +\infty \quad \text{(singularidad)}, $$

   pero para u fijo y $t \to \infty$, decae como:

   $$ K_\alpha(t,u) \sim t^{-\alpha} \quad \text{(decaimiento algebraico)}. $$

   Esto implica que la contribución de $f'(u)$ en el pasado lejano ($u \ll t$) se atenúa lentamente (a diferencia de un decaimiento exponencial en operadores locales).

3. **Memoria No-Local:** La integral acumula información de $f'(u)$ en todo el intervalo $[0,t]$, con un peso $(t-u)^{-\alpha}$ que:

   - Depende de todo el historial: Cada valor pasado $f'(u)$ influye en ${}^C D_t^\alpha f(t)$.
   - Prioriza el pasado reciente: El peso es mayor cerca de $u \approx t$ (singularidad), pero nunca se olvida completamente del pasado (cola larga).

2.1.5 Transformada de Laplace e inversa

Definición 2.9. *Sea* $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ *localmente integrable (*$f \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty))$*) y de orden exponencial: existen constantes* $M > 0$, $T \geq 0$ *y* $\beta \in \mathbb{R}$ *tales que* $|f(t)| \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq T$. *Para* $s \in \mathbb{C}$ *con* $\text{Re}(s) > \beta$, *se define la Transformada de Laplace de* f, *denotada* $\mathcal{L}\{f\}(s)$ *o* $F(s)$, *mediante la integral*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Nota.

1. El número
$$\sigma := \text{ínf}\left\{\lambda \in \mathbb{R} : \int_0^\infty e^{-\lambda t}|f(t)|\, dt < \infty\right\}$$
es la *abscisa de convergencia absoluta* de f.

2. Como $|f(t)| \leq Me^{\beta t}$ para $t \geq T$, se tiene $\sigma \leq \beta$. Por tanto, $\mathcal{L}\{f\}(s)$ converge absolutamente para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(s) > \sigma$.

3. En adelante a la Transformada de Laplace denotaremos con (T.L.)

Propiedades

1. **Linealidad:** Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones, a y b son constantes, entonces:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s).$$

Demostración: Por transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))\, dt$$

Distribuimos la integral:

$$= a \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + b \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt$$

Por la definición de la T.L. se tiene:

$$= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

2. **Transformada de Derivadas:** Si $f(t)$ es una función tal que su derivada $f'(t)$ existe, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Demostración: Por la definición de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

Usamos la integración por partes: $\mu = e^{-st}, \quad d\rho = f'(t)\, dt$

Entonces, $d\mu = -se^{-st}\, dt$ y $\rho = f(t)$.

Aplicando integración por partes: $\int \mu\, d\rho = \mu\rho - \int \rho\, d\mu$

Obtenemos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Evaluamos el término en los límites:

$$\left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty = 0 - f(0) = -f(0)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Realizando una recurrencia con respecto al orden la derivada se obtiene la solución completa

3. **Convolución:** Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, entonces la T.L. de la convolución de $f(t)$ y $g(t)$ es:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s),$$

donde la convolución está definida como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\varphi)g(t-\varphi)d\varphi.$$

Demostración: Aplicamos la definición de la T.L:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\varphi)g(t-\varphi)d\varphi\right)dt.$$

Intercambiamos el orden de integración usando el teorema de Fubini:

$$\int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\varphi)g(t-\varphi)d\varphi dt = \int_0^\infty f(\varphi)\left(\int_\varphi^\infty e^{-st}g(t-\varphi)dt\right)d\varphi.$$

Tomando $u = t - \varphi$, por lo que $du = dt$:

$$\int_\varphi^\infty e^{-s(\varphi+u)}g(u)du = e^{-s\varphi}\int_0^\infty e^{-su}g(u)du.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\int_0^\infty f(\varphi)e^{-s\varphi}\left(\int_0^\infty e^{-su}g(u)du\right)d\varphi.$$

Factorizando la segunda integral:

$$\left(\int_0^\infty e^{-s\varphi} f(\varphi) d\varphi\right)\left(\int_0^\infty e^{-su} g(u) du\right).$$

Reconociendo las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$, obtenemos:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s).$$

Teorema 2.4 (Transformada de Laplace de la derivada n-ésima)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C^{n-1}([0,\infty))$ tal que $f^{(n-1)}$ es absolutamente continua en $[0,\infty)$ y $f^{(n)}$ es continua a trozos y de orden exponencial (donde $f^{(n)}$ denota la derivada de orden n de f). Es decir, existen constantes $M > 0$, $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ y $T \geq 0$ tales que:*

$$|f^{(n)}(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}, \quad \text{para todo } t \geq T.$$

Entonces, para $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$, se cumple:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Demostración. Por el método de inducción matemática.

a) Para $n = 1$.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$$

Por definición de la transformada de Laplace, tenemos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$u = e^{-st} \implies du = -se^{-st}dt$$

$$dv = f'(t)dt \implies v = f(t)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\left(-se^{-st}\right)dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - e^0 f(0) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = 0 - f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)$$

El caso base $n = 1$ es verdadero.

b) Para $n = m$, es decir:

$$\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\}(s) = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0)$$

Debemos demostrar que la expresión se cumple para $n = m + 1$:

$$\mathcal{L}\{f^{(m+1)}(t)\}(s) = s^{m+1}F(s) - \sum_{k=0}^{m} s^{m-k} f^{(k)}(0)$$

En efecto, definamos una función auxiliar $g(t) = f^{(m)}(t)$. Entonces, su primera derivada es $g'(t) = f^{(m+1)}(t)$.

Aplicando $(n = 1)$ a la función $g(t)$, tenemos:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{g(t)\}(s) - g(0)$$

Sustituyendo $g(t)$ por su definición original en función de f:

$$\mathcal{L}\{f^{(m+1)}(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\}(s) - f^{(m)}(0)$$

Ahora, sustituimos la hipótesis de inducción en el término $\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\}(s)$:

$$\mathcal{L}\{f^{(m+1)}(t)\}(s) = s\left[s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0)\right] - f^{(m)}(0)$$

Distribuyendo el factor s:

$$\mathcal{L}\{f^{(m+1)}(t)\}(s) = s^{m+1}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k} f^{(k)}(0) - f^{(m)}(0)$$

Observemos el último término, $f^{(m)}(0)$. Podemos reescribirlo convenientemente como $s^0 f^{(m)}(0)$ (ya que $s^{m-m} = s^0 = 1$).

$$\mathcal{L}\{f^{(m+1)}(t)\}(s) = s^{m+1}F(s) - \sum_{k=0}^{m} s^{m-k} f^{(k)}(0)$$

La estructura obtenida es idéntica a la tesis inductiva para $n = m + 1$.

Finalmente habiendo demostrado para $n = 1$ y que la validez para $n = m$ implica la validez para $n = m + 1$, queda demostrado por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

□

Definición 2.10. *Sea la función $F(s)$ de variable real s (donde $s > \sigma_0$, siendo σ_0 la abscisa de convergencia), la Transformada de Laplace Inversa de $F(s)$, denotada como $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, es una función $f(t)$ en el dominio del tiempo $t \geq 0$ tal que:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t).$$

donde:

$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ *es decir, F(s) es la T.L. de f(t).*

Propiedad

1. Linealidad: $\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = af(t) + bg(t)$.

Proposición 1 :

Sean $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $t \geq 0$. Sea $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$ la transformada inversa de Laplace, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\lambda}\right\}(t) = E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$$

donde $E_{\alpha}(z)$ es la función de Mittag-Leffler de un parámetro, definida por la serie de potencias

Demostración. Expansión en Serie de $E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$:

$$E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^{k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Transformada de Laplace Término a Término:

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \mathcal{L}\{t^{\alpha k}\}.$$

Usando $\mathcal{L}\{t^{\beta}\} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}$:

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha k}\} = \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k+1}}.$$

Remplazando y Simplificando:

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{s^{\alpha k+1}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right)^{k}.$$

La serie es una serie geometrica converge si $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$ (es decir, $|s| > |\lambda|^{1/\alpha}$):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s^\alpha}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{s^\alpha}} = \frac{s^\alpha}{s^\alpha-\lambda}.$$

Finalmente se tiene:

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(\lambda t^\alpha)\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{s^\alpha}{s^\alpha-\lambda} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha-\lambda}.$$

Por tanto, la transformada inversa es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha-\lambda}\right\} = E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

□

2.1.6 Transformada de Laplace de la derivada de Caputo

Teorema 2.5 (Transformada de Laplace de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville)**.** *Sea $\alpha > 0$ y sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable y de orden exponencial σ_0, es decir, existen constantes $M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{\sigma_0 t}, \quad \forall\, t \geq T$. Entonces la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de f, denotada por ${}_0I_t^\alpha f(t)$, admite transformada de Laplace y se tiene*

$$\mathcal{L}\{{}_0I_t^\alpha f\}(s) = s^{-\alpha}F(s), \quad \mathrm{Re}(s) > \max\{0,\sigma_0\},$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ denota la transformada de Laplace de f.

Demostración. Por la Definición 2.6 de integral fraccionaria de Riemann-Liouville con límite inferior $a = 0$:

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}f(u)\,du.$$

Definamos el núcleo

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

La integral fraccionaria se escribe como la convolución.

$${}_0I_t^{\alpha} f(t) = (g * f)(t) = \int_0^t g(t-u) f(u)\, du.$$

Como f es de orden exponencial σ_0 y g es localmente integrable con transformada de Laplace bien definida, el Teorema de Convolución para la transformada de Laplace garantiza que

$$\mathcal{L}\{{}_0I_t^{\alpha} f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) \cdot F(s),$$

para todo s en la intersección de los semiplanos de convergencia.

Utilizando la propiedad

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0,$$

se tiene

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}} = s^{-\alpha}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Sustituyendo en la expresión se tiene:

$$\mathcal{L}\{{}_0I_t^{\alpha} f\}(s) = s^{-\alpha} F(s).$$

El dominio de validez es la intersección de $\mathrm{Re}(s) > 0$ (requerido por $\mathcal{L}\{g\}$) y $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ (requerido por $\mathcal{L}\{f\}$), es decir,

$$\mathrm{Re}(s) > \max\{0, \sigma_0\}.$$

□

Teorema 2.6 (Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo)**.** *Sean $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < \alpha < n$ y $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n en $[0,\infty)$ tal que f y todas sus derivadas hasta orden n son de orden exponencial σ_0, Entonces la derivada fraccionaria de Caputo de orden α de f, denotada por ${}^C D_t^\alpha f(t)$, admite transformada de Laplace y se tiene*

$$\mathcal{L}\{{}^C D_t^\alpha f\}(s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad \text{Re}(s) > \text{máx}\{0, \sigma_0\},$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ denota la transformada de Laplace de f.

Demostración. Por definición 2.9 de la derivada de Caputo se expresa como la integral de Riemann-Liouville de la derivada *n*-ésima:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u)\, du$$

De la definición 2.6 (integral de Riemann-Liouville):

$${}_0 I_t^\gamma g(t) := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-u)^{\gamma-1} g(u)\, du, \gamma > 0.$$

Sean $\gamma = n - \alpha$ y $g(u) = f^{(n)}(u)$.

Sustituyendo en la integral fraccionaria, obtenemos:

$${}_0 I_t^{n-\alpha} \left(f^{(n)}(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{(n-\alpha)-1} f^{(n)}(u)\, du.$$

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0 I_t^{n-\alpha} \left(f^{(n)}(t) \right)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha f\}(s) = \mathcal{L}\left\{ {}_0 I_t^{n-\alpha} \left(f^{(n)}(t) \right) \right\}(s)$$

Por el teorema 2.5 de la integral fraccionaria: $\mathcal{L}\{{}_0 I_t^\beta g\}(s) = s^{-\beta} \mathcal{L}\{g\}(s)$, se sustituye

$\beta = n - \alpha$:

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha f\}(s) = s^{-(n-\alpha)}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^{\alpha-n}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$$

Por la propiedad clásica de la derivada de orden n:

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha f\}(s) = s^{\alpha-n}\left[s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)\right]$$

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha f\}(s) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$$

□

Corolario 2 (Caso particular $0 < \alpha < 1$)**.** *Sea* $0 < \alpha < 1$ *y sea* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *en* $[0, \infty)$ *tal que* f *y* f' *son de orden exponencial* σ_0*. Entonces la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de orden* α *de* f *dado por:*

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha f(t)\}(s) = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0), \quad \text{Re}(s) > \text{máx}\{0, \sigma_0\},$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$.

Observación 2.2. *Cuando* $\alpha = 1$*, la fórmula anterior se reduce a la transformada de Laplace de la derivada ordinaria:*

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0),$$

lo cual es consistente con el cálculo clásico. En este sentido, el corolario para $0 < \alpha < 1$ *se conecta naturalmente con la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.*

2.1.7 Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

Definición 2.11 (Ecuación Diferencial Fraccionaria Kilbas et al. (2006); Podlubny (1999))**.** *Sea* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo,* $a \in I$*, y sean* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}^+$ *con* $\alpha_m = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$*. Una* ecuación diferencial fraccionaria *(EDF) es una relación funcional de la forma*

$$F\big(t, y(t), (\mathcal{D}_a^{\alpha_1} y)(t), (\mathcal{D}_a^{\alpha_2} y)(t), \ldots, (\mathcal{D}_a^{\alpha_m} y)(t)\big) = 0, \qquad t \in I,$$

donde $y : I \to \mathbb{R}$ *es la función incógnita,* F *es una función dada, y* $\mathcal{D}_a^{\alpha_k}$ *denota un operador fraccionario (Riemann-Liouville, Caputo, etc.) de orden* α_k *con límite inferior* a*. El* orden *de la EDF es* $n = \lceil \alpha_m \rceil$*.*

Observación 2.3. *Cuando* $\alpha_m = n, n \in \mathbb{Z}^+$ *y todos los operadores son derivadas ordinarias, la definición anterior se reduce a la ecuación diferencial ordinaria clásica.*

Definición 2.12 (Milici et al. (2019))**.** *Sean* $\mathbb{R}^+$ *el conjunto de los números reales positivos,* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *con* $n = \lceil \alpha \rceil$ *(el menor entero mayor o igual que* α*), y* $a \in \mathbb{R}$ *un punto inicial. Sea* $f : [a, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua. Se llama* ***problema de valor inicial fraccionario de Riemann-Liouville*** *al sistema:*

$$\begin{cases} \big({}_aD_t^{\alpha} y\big)(t) = f\big(t, y(t)\big), \quad t > a, \alpha > 0 \\ \big({}_aD_t^{\alpha-k} y\big)(a+) = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

donde ${}_aD_t^{\alpha}$ *es el operador de Riemann-Liouville y* $b_k \in \mathbb{R}$ *son constantes dadas. La notación* $a+$ *indica el límite por la derecha en* $t = a$*.*

Nota:

1. Las condiciones iniciales son de tipo fraccionario (derivadas de orden no entero evaluadas en $a+$).

2. Esta formulación aparece naturalmente en problemas teóricos (por ejemplo, en la teoría

de semigrupos, ecuaciones integrales singulares) y en problemas de contorno donde las condiciones en el origen se expresan mediante derivadas fraccionarias.[Helal et al. (2025)]

Definición 2.13 (Milici et al. (2019))**.** *Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ con $n = \lceil \alpha \rceil$, $a \in \mathbb{R}$, y $f : [a, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Se llama* ***problema de valor inicial fraccionario de Caputo*** *al sistema:*

$$\begin{cases} \left({}_a^C D_t^\alpha y\right)(t) = f\big(t, y(t)\big), \quad \alpha > 0, t > a, \\ y^{(k)}(a) = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

donde ${}_a^C D_t^\alpha$ es el operador de Caputo y $b_k \in \mathbb{R}$ son constantes dadas.

Nota:

1. Las condiciones iniciales son de tipo entero (valores de la función y sus derivadas enteras en a).

2. Esta formulación es la más utilizada en aplicaciones físicas e ingenierías, ya que las condiciones iniciales (posición, velocidad, aceleración, etc.) son directamente medibles [Diethelm (2010)].

3. Es adecuada cuando se desea resolver el problema mediante la transformada de Laplace o métodos numéricos estándar.

Lema 2.1 (Volterra-Caputo)**.** *[Kilbas et al. (2006); Podlubny (1999)] Sea $y(t)$ una función con derivada continua en el intervalo $I_h(0) = [0, h]$ con valores en $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$. Entonces, $y(t)$ satisface la EDF de tipo Caputo:*

$$D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0,$$

$$y(0) = y_0,$$

si y solo si satisface la integral de Volterra:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u))\, du.$$

Este resultado fundamental establece la equivalencia entre la formulación diferencial e integral para ecuaciones fraccionarias de tipo Caputo (Podlubny, 1999, Teorema 3.1). La demostración detallada puede consultarse en (Kilbas et al., 2006, Capítulo 2).

Demostración. Sea $L[y(t)] = Y$ la transformada de Laplace de $y(t)$. Tenemos:

$$s^\alpha Y - s^{\alpha-1} y_0 = L[f(t, y(t))],$$

$$Y = \frac{y_0}{s} + \frac{1}{s^\alpha} L[f(t, y(t))],$$

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u))\, du.$$

□

Definición 2.14 (Norma de ChebyshevRivlin (1969))**.** *Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto (cerrado y acotado), y $f : S \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define la norma de Chebyshev de f sobre S, denotada por $\|f\|_\infty$, como:*

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in S} |f(x)|.$$

Si f no es necesariamente continua pero es acotada, se define mediante el supremo:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

En el contexto de funciones continuas sobre un compacto, el máximo existe y es finito.

Lema 2.2 (Criterio de Weierstrass para convergencia uniforme Rudin (1976))**.** *Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$.*

Supongamos que existe una sucesión $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de números reales positivos tales que:*

$$|f_n(t)| \leq R_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in A,$$

y además la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$ *es convergente. Entonces la serie de funciones* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ *converge absoluta y uniformemente en A, y por tanto converge puntualmente a una función* $f : A \to \mathbb{R}$.

Teorema de Existencia y Unicidad

Teorema 2.7 (Existencia y Unicidad para el Problema de Caputo)**.** *Sea la EDF de Caputo:*

$$_a^C D_t^{\alpha} f(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t > 0,$$

Con condición inicial $y(0) = y_0$.

Con f *función definida en el dominio:* $D = [0, \eta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$, *que satisface las condiciones:*

- $f(t, y)$ *es continua*
- $|f(t, y)| < M$ *donde* $M = \max_{(t,y)\in D} |f(t, y)|$
- $f(t, y)$ *satisface en D la condición de Lipschitz en y, esto es:*

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$$

Entonces existe $\delta > 0$ *y una función* $y(t) \in C[0, \eta]$ *única solución del PVI de EDF de Caputo para:*

$$\delta = \min \left\{ \eta, \left(\frac{\eta \Gamma(\alpha + 1)}{M} \right)^{1/\alpha} \right\}.$$

La demostración se basa en transformar la ecuación diferencial fraccionaria en una ecuación integral de Volterra equivalente (Lema 2.1) y aplicar el método de aproximaciones sucesivas,

demostrando la convergencia uniforme mediante el criterio de Weierstrass. La demostracion del Teorema 2.1. se encuentra en el libro Milici, Drăgănescu y Machado (2019, pp. 48–51).

2.1.8 Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Lineales

Una E.D.F. lineal está dada por:

$$\left(D^{\alpha_n} + a_{n-1}D^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1 D^{\alpha_1} + a_0\right) y(t) = f(t), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con las condiciones iniciales:

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Teorema 2.8 (Existencia y unicidad (Milici et al., 2019))**.** *Sea la ecuación diferencial fraccionaria lineal de Caputo:*

$${}_0^C D_t^{\alpha} y(t) + a_{n-1}(t)\, {}_0^C D_t^{\alpha_{n-1}} y(t) + \cdots + a_0(t) y(t) = f(t), \quad t \in (0, T],$$

con condiciones iniciales $y^{(k)}(0) = b_k$, $k = 0, \ldots, \lceil \alpha \rceil - 1$. *Si* f *es acotada en* $(0, T]$ *y los coeficientes* $a_k : [0, T] \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas, entonces el problema tiene una única solución.*

Demostración. La demostración se basa en los resultados de existencia y unicidad para ecuaciones integrales de tipo Volterra. □

Teorema 2.9. *La ecuación diferencial fraccionaria lineal:* ${}^C D^{\alpha} y(t) = f(t)$, *donde:* $n - 1 < \alpha < n$, *con condiciones iniciales:* $y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, *tiene por solución:*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du.$$

Demostración. Aplicamos la T.L. a ambos lados de la EDF:

$$\mathcal{L}\left[{}^{C}D^{\alpha}y(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right].$$

Denotamos: $\mathcal{L}\left[y(t)\right] = Y(s)$, $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$.

Para la derivada fraccionaria de Caputo con $n-1 < \alpha < n$:

$$\mathcal{L}\left[{}^{C}D^{\alpha}y(t)\right] = s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}y^{(k)}(0).$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $y^{(k)}(0) = 0$:

$$\mathcal{L}\left[{}^{C}D^{\alpha}y(t)\right] = s^{\alpha}Y(s).$$

La ecuación transformada queda: $s^{\alpha}Y(s) = F(s)$.

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^{\alpha}}.$$

La solución $y(t)$ se obtiene aplicando la TL inversa:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^{\alpha}}\right].$$

Sabemos que:$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\alpha}}\right] = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Por el teorema de convolución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\cdot\frac{1}{s^{\alpha}}\right] = f(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \int_0^t f(u)\frac{(t-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,du.$$

La solución es entonces:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du.$$

□

Teorema 2.10. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $n-1 < \alpha < n$, con $n \in \mathbb{N}$, y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un parámetro constante. Considérese el problema de valor inicial (PVI) definido por la ecuación diferencial fraccionaria lineal homogénea en el sentido de Caputo:*

$$^C D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t), \quad \textit{donde:} \quad n-1 < \alpha < n,$$

con la condición inicial:

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

tiene por solución:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha).$$

Demostración. Aplicamos el método de la T.L. a ambos miembros de la EDF:

$$\mathcal{L}\left[{}^C D_t^\alpha y(t)\right] = \mathcal{L}\left[\lambda y(t)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[{}^C D_t^\alpha y(t)\right] = \lambda \mathcal{L}[y(t)],$$

Denotamos $\mathcal{L}\left[y(t)\right] = Y(s)$.

Para la derivada fraccionaria de Caputo, la TL es:

$$\mathcal{L}\left[{}^C D_t^\alpha y(t)\right] = s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0).$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $y^{(k)}(0) = b_k$:

$$\mathcal{L}\left[{}^{C}D_t^{\alpha}y(t)\right] = s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}y^{(k)}(0) = s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k s^{\alpha-k-1}.$$

$$s^{\alpha}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k s^{\alpha-k-1} = \lambda Y(s).$$

$$s^{\alpha}Y(s) - \lambda Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k s^{\alpha-k-1},$$

$$Y(s)(s^{\alpha} - \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k s^{\alpha-k-1},$$

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} - \lambda}.$$

Cada término de la suma se puede reescribir como:

$$\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} - \lambda} = s^{-k-1} \cdot \frac{1}{1 - \lambda s^{-\alpha}}.$$

Usando la serie geométrica $\frac{1}{1-z} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m$ para $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1 - \lambda s^{-\alpha}} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m s^{-\alpha m},$$

por lo que:

$$\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha} - \lambda} = s^{-k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m s^{-\alpha m} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m s^{-\alpha m-k-1}.$$

Aplicando la T.L. Inversa a ambos mienbros

La TL inversa de $s^{-\beta}$ es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[s^{-\beta}\right] = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

Entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\lambda^m s^{-\alpha m-k-1}\right] = \lambda^m \frac{t^{\alpha m+k}}{\Gamma(\alpha m + k + 1)}.$$

Por lo tanto, la T.L. inversa de $Y(s)$ es:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \frac{t^{\alpha m+k}}{\Gamma(\alpha m + k + 1)}.$$

La función Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\alpha m + \beta)}.$$

Reconocemos que la serie interna coincide con $E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m t^{\alpha m+k}}{\Gamma(\alpha m + k + 1)} = t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha).$$

Sustituyendo en la expresión de $y(t)$:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(\lambda t^\alpha).$$

□

Teorema 2.11. *Dada la EDF* ${}^C D^\alpha y(t) = \lambda y(t)$ *con condición inicial* $y(0) = y_0$*, tiene única solución*

$$y(t) = y_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha), \tag{2.2}$$

donde $E_\alpha(z)$ *es la función Mittag-Leffler de un parámetro definida por*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Demostración. Aplicando T.L. y usando la propiedad de la derivada de Caputo:

$$\mathcal{L}\{{}^C D^\alpha y(t)\}(s) = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0),$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$.

La ecuación transformada es:

$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}y_0 = \lambda Y(s).$$

Despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{y_0 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda}.$$

La inversa de $\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\lambda}$ es $E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$ ver Podlubny (1999).

Por tanto:

$$y(t) = y_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda}\right\} = y_0 E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}).$$

□

Comportamiento Asintótico de la Solución

Teorema 2.12 (Decaimiento Algebraico)**.** *Dado el problema de valor inicial de Caputo*

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = y_0,$$

Si $\alpha \in (0,1)$ *y* $\lambda < 0$*, la solución única del PVI decrese asintóticamente a:*

$$y(t) \sim \frac{y_0}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \quad \textit{cuando } t \to \infty.$$

Demostración.

- **Expansión Asintótica de $E_{\alpha}(z)$:**

  Para $z \to -\infty$, la función Mittag-Leffler tiene la expansión Gorenflo et al. (2014):

$$E_{\alpha}(z) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}.$$

El término dominante ($k = 1$) para $|z| \gg 1$ es:

$$E_\alpha(z) \sim -\frac{z^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

- **Sustitución de $z = \lambda t^\alpha$:**

  Como $\lambda < 0$ y $t \to \infty$, entonces $z = \lambda t^\alpha \to -\infty$. Sustituyendo:

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) \sim -\frac{(\lambda t^\alpha)^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} = -\frac{t^{-\alpha}}{\lambda\Gamma(1-\alpha)}.$$

- **Solución asintótica:** La solución es $y(t) = y_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha)$, luego:

$$y(t) \sim -\frac{y_0 t^{-\alpha}}{\lambda\Gamma(1-\alpha)}.$$

  Como $\lambda < 0$, tenemos $-\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{|\lambda|}$, por tanto:

$$y(t) \sim \frac{y_0}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

□

Para una demostración rigurosa de este comportamiento asintótico, véase la Sección 1.2.5 de Podlubny (1999) y la Sección 4.7 de Gorenflo et al. (2014).

Comportamiento de la Función Mittag-Leffler para $\alpha = 1$ y $\alpha < 1$

1. Caso Clásico ($\alpha = 1$): Decaimiento Exponencial La función Mittag-Leffler de un parámetro $E_\alpha(z)$ generaliza la función exponencial. Cuando $\alpha = 1$, la función se reduce exactamente a la exponencial:

$$E_1(\lambda t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda t}.$$

Interpretación:

- Si $\lambda < 0$, $e^{\lambda t}$ decae exponencialmente a cero cuando $t \to \infty$. Por ejemplo, para $\lambda = -1$, $y(t) = y_0 e^{-t}$.
- Este comportamiento es típico de sistemas sin memoria, donde la tasa de cambio en un instante t depende únicamente del estado actual (ejemplo: ecuaciones diferenciales ordinarias).

2. Caso Fraccionario ($\alpha < 1$): Decaimiento Algebraico Para $\alpha < 1$, la función Mittag-Leffler $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ ya no es una exponencial. Su comportamiento asintótico para $t \to \infty$ y $\lambda < 0$ está dado por:

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) \sim \frac{t^{-\alpha}}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)}.$$

Interpretación:

- La solución $y(t) = y_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ decae como $t^{-\alpha}$, es decir, algebraicamente (no exponencialmente).
- Este decaimiento lento refleja la memoria del sistema: la derivada fraccionaria ${}^C D^\alpha$ depende de toda la historia pasada de $y(t)$ en el intervalo $[0, T]$, lo que causa persistencia (condiciones iniciales influyen por más tiempo).
- Ejemplo: Para $\alpha = 0{,}5$ y $\lambda = -1$, $y(t) \sim y_0 \cdot t^{-0{,}5}$, lo que significa que el sistema tarda mucho más en estabilizarse comparado con e^{-t}.

2.1.9 Estabilidad de E.D. de sistemas fraccionarios

Teorema 2.13 (Criterio de Estabilidad de Matignon, 1996)**.** *Sea el sistema lineal autónomo de orden fraccionario $\alpha \in (0, 1]$: ${}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \qquad t \geq 0,$*

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz constante, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ para todo $t \geq 0$, ${}^C D_0^\alpha$ denota la derivada fraccionaria de Caputo de orden α con límite inferior 0, y $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial.

El sistema es asintóticamente estable si y solo si todo valor propio $\lambda \in \sigma(A)$ satisface:

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2},$$

donde $\arg(\lambda)$ *denota el argumento principal de* $\lambda \in \mathbb{C}$*, con* $-\pi < \arg(\lambda) \leq \pi$*. En caso de estabilidad asintótica, la norma de la solución decae algebraicamente según:* $\|x(t)\| = O(t^{-\alpha}), \qquad t \to \infty.$

Corolario 3 (Caso escalar del Teorema de Matignon)**.** *Sea la ecuación diferencial fraccionaria escalar de orden* $\alpha \in (0, 1]$*:*

$${}^{C}D_0^{\alpha} x(t) = \lambda x(t), \qquad x(0) = x_t \in \mathbb{R},$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$*. El sistema es asintóticamente estable si y solo si* $\lambda < 0$*.*

Demostración. Este resultado se obtiene aplicando el Teorema 2.13 al caso $n = 1$, donde la matriz A se reduce al escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\sigma(A) = \{\lambda\}$, la condición $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ se satisface si y solo si $\lambda < 0$, pues:

- Si $\lambda < 0$: $\arg(\lambda) = \pi$, y $\pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ para todo $\alpha \in (0, 1]$.
- Si $\lambda > 0$: $\arg(\lambda) = 0$, y $0 \not> \frac{\alpha\pi}{2}$.
- Si $\lambda = 0$: la solución es constante, no asintóticamente estable.

La solución explícita $y(t) = y_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ confirma el decaimiento asintótico cuando $\lambda < 0$ (véase Teorema 2.12). □

2.1.10 Términos No Lineales mediante Aproximación de Taylor

En el análisis de sistemas dinámicos, tanto clásicos como fraccionarios, es común encontrar términos no lineales que dificultan su estudio analítico. Una estrategia fundamental para simplificar

estos sistemas es la linealización alrededor de un punto de equilibrio, la cual permite aproximar el comportamiento local del sistema mediante una versión lineal más manejable Khalil (2002).

La linealización es especialmente útil cuando:

- El sistema presenta no linealidades complejas (ej. $f(k) = k^{\beta}$ donde $k \in \mathbb{R}^{+}$ y $\beta \in (0, 1)$).
- Se requiere estudiar la estabilidad local o dinámica transitoria cerca de un punto de operación.
- Se buscan soluciones aproximadas analíticamente estables.

Definición 2.15 (Series de Taylor)**.** *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable en un intervalo abierto I, y sea $a \in I$. La serie de Taylor de f centrada en a está definida como la serie de potencias:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

donde $f^{(n)}(a)$ denota la n-ésima derivada de f evaluada en $x = a$, con $f^{(0)}(a) = f(a)$. Stewart (2012).

Definición 2.16 (Series de Taylor de Primer Orden)**.** *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo abierto I que contiene al punto a . El polinomio de Taylor de primer orden de f en a se define como:*

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

donde $f'(a)$ denota la primera derivada de f evaluada en $x = a$ Rudin (1976).

Este polinomio representa la aproximación lineal de f alrededor del punto a. Stewart (2012).

2.1.11 Modelo de Solow-Swan con Función Cobb-Douglas

Función de Producción Cobb-Douglas

El estudio de la relación entre los factores productivos y el nivel de producción ha mostrado una importante evolución teórica. La formulación más general y abstracta se expresa como:

$$q = F(K, L)$$

En esta ecuación, F representa el proceso genérico que transforma los insumos capital (K) y trabajo (L) en productos (q). Esta forma es útil para el desarrollo de teoría microeconómica, pero no define la relación exacta entre los factores, lo que limita su uso para análisis con datos del mundo real.

Un avance crucial en esta línea de pensamiento lo constituyó la función **Cobb-Douglas**. El origen de esta función se remonta a las investigaciones empíricas de Paul Douglas, quien documentó que en la economía estadounidense el trabajo recibía alrededor del 75 % del ingreso y el capital el 25 % restante. Al observar que la participación del trabajo en el ingreso era aproximadamente constante, pidió a su colega matemático Charles Cobb una forma funcional que reprodujera ese hecho. En 1928 publicaron juntos la función:

$$Q = A \cdot L^{\beta} \cdot K^{1-\beta}$$

Cobb & Douglas (1928) mostraron que el exponente β coincide con la participación del trabajo en el ingreso y $1 - \beta$ con la del capital, siempre que los mercados sean competitivos y haya rendimientos constantes a escala.

La evolución conceptual culmina cuando Solow (1956) y Swan (1956) adoptan la estructura Cobb-Douglas para sus modelos de crecimiento, escribiendo $Y(t) = K(t)^{\beta}[A(t)L(t)]^{1-\beta}$.

Al introducir el progreso tecnológico A(t) como factor que amplifica la eficiencia del trabajo, esta especificación permite analizar trayectorias de crecimiento equilibrado en las que el aumento de

A(t) es la fuerza fundamental que impulsa el crecimiento del ingreso por persona Acemoglu (2009). Para derivar la ecuación fundamental de Solow, a continuación se desarrollan los componentes y supuestos clave de esta función de producción

$$Y(t) = K(t)^{\beta}[A(t)L(t)]^{1-\beta} \tag{2.3}$$

donde:

- $Y(t)$ = Funcion de producción total en el tiempo t
- $K(t)$ = stock de capital
- $L(t)$ = cantidad de trabajo
- $A(t)$ = nivel tecnológico
- β = elasticidad del capital $(0 < \beta < 1)$

Esta formulación sigue la especificación estándar del modelo de crecimiento neoclásico Solow (1956).

Transformación a Variables por Unidad de Trabajo Efectivo

Las variables se expresan en términos de trabajo efectivo $E(t) = A(t)L(t)$.

La producción por unidad de trabajo efectivo está dado como:

$$y(t) = \frac{Y(t)}{E(t)} = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} \tag{2.4}$$

donde:

- $Y(t)$ es la producción agregada en el tiempo t,
- $E(t) = A(t)L(t)$ es el **trabajo efectivo**, que combina la cantidad de trabajo $L(t)$ con el nivel tecnológico $A(t)$.

- $y(t)$ mide la *productividad del trabajo efectivo*, es decir, cuánta producción se genera por unidad de trabajo ajustada por tecnología.
- Esta transformación permite aislar el efecto del crecimiento poblacional ($L(t)$) y del progreso tecnológico ($A(t)$) sobre la producción Acemoglu (2009).

La dinámica del capital por trabajador efectivo, describe cómo evoluciona el stock de capital ajustado por tecnología y población, está dado como:

$$k(t) = \frac{K(t)}{E(t)} = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \tag{2.5}$$

donde:

- $K(t)$ es el stock de capital agregado
- Simplifica el análisis de la acumulación de capital al eliminar los efectos de escala de $L(t)$ y $A(t)$.

Combinando la función de producción con la definición de $y(t)$, obtenemos la relación fundamental entre producción y capital por unidad de trabajo efectivo:

$$y(t) = \frac{K(t)^{\beta}[A(t)L(t)]^{1-\beta}}{A(t)L(t)} = K(t)^{\beta} \cdot \frac{[A(t)L(t)]^{1-\beta}}{[A(t)L(t)]^{1}}$$

$$= K(t)^{\beta}[A(t)L(t)]^{-\beta} = \left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\right)^{\beta} = k(t)^{\beta} \tag{2.6}$$

Esta transformación es fundamental para analizar la dinámica per cápita Acemoglu (2009); Barro & Sala-i-Martin (2004).

Ecuación de Acumulación de Capital

El stock de capital aumenta con la inversión y disminuye por la depreciación. Formalmente, la evolución del capital agregado sigue la ecuación:

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t) - \delta K(t) = sY(t) - \delta K(t) \tag{2.7}$$

donde:

- s = tasa de ahorro ($0 < s < 1$)
- δ = tasa de depreciación del capital

Esta ecuación diferencial constituye el núcleo dinámico del modelo de Solow y determina la trayectoria de crecimiento de la economía, gobernando su convergencia hacia el estado estacionario

Derivando la Dinámica del Capital por Trabajador Efectivo

Aplicando la regla del cociente para derivar $k(t) = K(t)/E(t)$:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{\frac{dK(t)}{dt}E(t) - K(t)\frac{dE(t)}{dt}}{[E(t)]^2} \tag{2.8}$$

Simplificando:

$$\frac{dk(t)}{dt} = \frac{\frac{dK(t)}{dt}}{E(t)} - k(t)\frac{\frac{dE(t)}{dt}}{E(t)} \tag{2.9}$$

Crecimiento del Trabajo Efectivo

Asumiendo:

- Crecimiento poblacional: $\frac{dL(t)}{dt} = nL(t)$
- Progreso tecnológico: $\frac{dA(t)}{dt} = gA(t)$

Entonces:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[A(t)L(t)] = gA(t)L(t) + nA(t)L(t) = (g+n)E(t) \tag{2.10}$$

Por tanto:

$$\frac{\frac{dE(t)}{dt}}{E(t)} = g + n \tag{2.11}$$

sustituyendo los resultados de las ecuaciones 2.7 y 2.11 en 2.9

$$\begin{aligned}\frac{dk(t)}{dt} &= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{E(t)} - k(t)(n+g) \\ &= s \cdot \frac{Y(t)}{E(t)} - \delta \cdot \frac{K(t)}{E(t)} - k(t)(n+g) \\ &= sy(t) - \delta k(t) - k(t)(n+g) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sustituyendo 2.6 en 2.12 y factorizando se llega al modelo fundamental clásico (Solow, 1956; Swan, 1956)

$$\frac{dk(t)}{dt} = sk(t)^{\beta} - (n+g+\delta)k(t) \tag{2.13}$$

Interpretación de la Ecuación Fundamental

La ecuación 2.13 representa la dinámica clave del modelo de Solow-Swan:

- $sk(t)^{\beta}$: Inversión por unidad de trabajo efectivo
- $(n+g+\delta)k(t)$:
  - $nk(t)$: Dilución por crecimiento poblacional
  - $gk(t)$: Dilución por progreso tecnológico
  - $\delta k(t)$: Depreciación del capital

El estado estacionario se alcanza cuando $\frac{dk(t)}{dt} = 0$:

$$k^* = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{2.14}$$

En resumen, el desarrollo matemático del modelo demuestra que, según Solow-Swan Solow (1956), el crecimiento económico se explica por tres factores fundamentales: la inversión en capital, el aumento de la población y la innovación tecnológica

La ecuación 2.13 y su solución de estado estacionario 2.14 constituyen el núcleo analítico del modelo neoclásico de crecimiento Acemoglu (2009); Barro & Sala-i-Martin (2004).

2.1.12 Memoria historica y path-dependence

En el análisis económico tradicional, muchos modelos asumen que los agentes y sistemas toman decisiones basadas únicamente en información presente, ignorando la influencia estructural de eventos pasados. Esta limitación conceptual pasa por alto el papel fundamental de la **memoria económica**, un fenómeno omnipresente en sistemas reales que explica por qué las trayectorias económicas emergen de procesos acumulativos más que de estados instantáneos.

La memoria se manifiesta empíricamente en tres dimensiones clave: primero, en crisis financieras cuyos efectos persisten por años en los mercados, donde la volatilidad exhibe correlaciones de largo alcance; segundo, en ciclos tecnológicos donde el conocimiento se acumula históricamente, creando dependencias de trayectoria; y tercero, en políticas públicas cuyos impactos dependen críticamente de medidas anteriores, generando efectos de histéresis. Estos fenómenos no son meras anomalías, sino manifestaciones de que el pasado condiciona estructuralmente el espacio de posibilidades presentes y futuras.

Naturaleza de la Memoria Económica

La **memoria** en modelos económicos se refiere a la propiedad emergente de un sistema para conservar y ser influenciado de manera no trivial por su historia pasada. Esta noción se materializa a través de tres mecanismos interrelacionados:

1. **Persistencia de shocks**: Perturbaciones como crisis financieras o cambios tecnológicos producen efectos que decaen más lentamente que lo predicho por modelos exponenciales. Por ejemplo, el desempleo generado por recesiones profundas puede persistir incluso después de recuperaciones macroeconómicas, fenómeno conocido como histéresis laboral.

2. **Dependencia histórica**: Las decisiones pasadas restringen las oportunidades futuras mediante mecanismos de retroalimentación positiva. En el desarrollo tecnológico, esto se manifiesta como "bloqueos"(lock-in) donde tecnologías inicialmente adoptadas dominan el mercado independientemente de su eficiencia posterior.

3. **Adaptabilidad retardada**: Los agentes económicos ajustan sus expectativas y comportamientos no instantáneamente, sino en respuesta a trayectorias temporales completas. Esta inercia conductual explica por qué políticas monetarias pueden tener efectos con retardos variables.

Matemáticamente, estos fenómenos requieren operadores no locales que capturan cómo el estado actual del sistema depende integralmente de toda su historia previa. El cálculo fraccionario proporciona el marco adecuado al generalizar los conceptos de derivación e integración para incorporar esta dependencia histórica de manera rigurosa.

El concepto de memoria transforma radicalmente nuestra comprensión de las dinámicas económicas al revelar que:

- Las fluctuaciones no son meramente aleatorias, sino portadoras de información histórica acumulada
- Los equilibrios no son puntos estáticos, sino atractores con dependencia de trayectoria
- Las políticas económicas tienen efectos que se propagan en escalas temporales no triviales

Esta perspectiva unificadora explica fenómenos empíricos como las cicatrices duraderas de las crisis, los retardos en la difusión tecnológica y los efectos acumulativos de intervenciones políticas, que los modelos tradicionales basados en Markov no pueden capturar adecuadamente.

Importancia en teoría económica

La incorporación de memoria en los modelos económicos revoluciona la teoría tradicional al permitir explicar fenómenos clave que los enfoques clásicos no capturan adecuadamente. Des-

tacan especialmente su capacidad para modelar **convergencias lentas** entre economías, donde las diferencias iniciales persisten por décadas debido a efectos acumulativos de capital humano e institucional, y para analizar **efectos prolongados** de políticas públicas, donde intervenciones fiscales o regulatorias generan impactos que se propagan no linealmente en el tiempo. Estos avances teóricos proveen herramientas para entender por qué economías con características similares pueden seguir trayectorias divergentes, y cómo decisiones políticas aparentemente menores pueden generar consecuencias estructurales a largo plazo. La memoria, al formalizar estas dependencias históricas, ofrece un marco unificado para estudiar desde la persistencia de desigualdades regionales hasta los retardos en la difusión tecnológica.

Path-Dependence

Path-dependence (dependencia de la trayectoria) se refiere a un fenómeno en el cual las decisiones o resultados económicos presentes están condicionados por eventos o elecciones pasadas, incluso si aquellas decisiones ya no son óptimas en el contexto actual. Esto implica que la historia importa: pequeñas diferencias iniciales o eventos aleatorios pueden llevar a resultados divergentes a largo plazo, con posibles "bloqueos" (*lock-in*) en tecnologías, instituciones o mercados ineficientes.

2.1.13 Modelo Solow-Swan Clásico

El modelo neoclásico de crecimiento económico, desarrollado seminalmente por Solow (1956), describe la evolución temporal del capital por trabajador efectivo mediante una E.D. no lineal de primer orden. En su formulación estándar con función de producción Cobb-Douglas, el modelo establece que:

$$\frac{dk(t)}{dt} = s \cdot k(t)^{\beta} - (n + g + \delta) \cdot k(t) \tag{2.15}$$

Donde:

- $k(t) = K/AL$: Capital por trabajador efectivo
- $s \in (0, 1)$: Tasa de ahorro
- $F(K, AL) = K^{\beta}(AL)^{1-\beta}$: Función Cobb-Douglas
- $f(k) = k^{\beta}$: Función de producción en términos intensivos
- n : Tasa de crecimiento poblacional
- g : Tasa de progreso tecnológico
- $\delta \in (0, 1)$: Tasa de depreciación del capital
- $\beta \in (0, 1)$: Elasticidad del capital en la producción

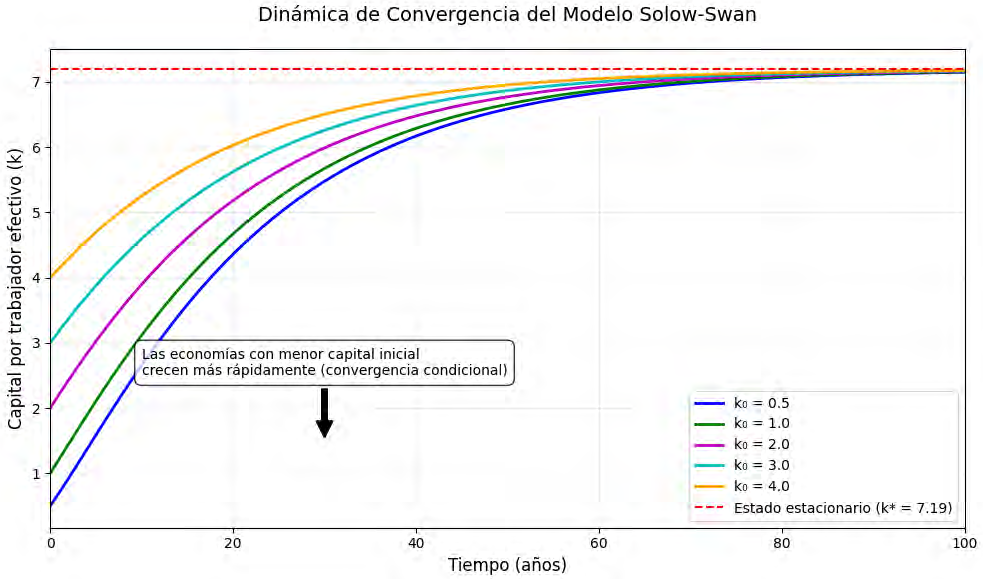
El estado estacionario k^* se obtiene cuando $\frac{dk(t)}{dt} = 0$:

$$k^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

veamos la Dinamica del crecimiento y la convergencia del Modelo Solow-Swan

Figura 2

Dinámica de convergencia del capital por trabajador efectivo.



Nota. La gráfica muestra la convergencia condicional hacia $k^* = 7{,}19$. Economías con k_0 bajo crecen más rápido (Solow, 1956; Swan, 1956).

Interpretación de la Gráfica del Modelo Solow-Swan

- **Tendencia creciente general:** La gráfica muestra que el capital por trabajador efectivo ($k(t)$) presenta una tendencia creciente hacia su estado estacionario (k^*). Esto ocurre porque cuando $k(t) < k^*$, la inversión ($s \cdot k^\beta$) supera a la depreciación efectiva ($(n+g+\delta)k$), cumpliéndose que:

$$\frac{dk(t)}{dt} = s \cdot k(t)^\beta - (n+g+\delta) \cdot k(t) > 0$$

- **Interpretación por trayectorias:**
  - **Curva azul** ($k_0 = 0{,}5$): Muestra el crecimiento más acelerado, característico de economías con bajo capital inicial donde los rendimientos marginales del capital son mayores.
  - **Curva verde** ($k_0 = 1{,}0$): Representa una economía intermedia, con una tasa de crecimiento moderada que disminuye gradualmente.
  - **Curva naranja** ($k_0 = 4{,}0$):Representa una economía que parte con un nivel de capital relativamente alto, pero aún inferior al estado estacionario ($k_0 < k^*$). La tasa de crecimiento es positiva pero menor en comparación con economías de menor capital inicial, debido a la disminución de los rendimientos marginales del capital.

- **Estado estacionario:** La línea roja discontinua en $k^* \approx 7{,}19$ marca el punto donde:

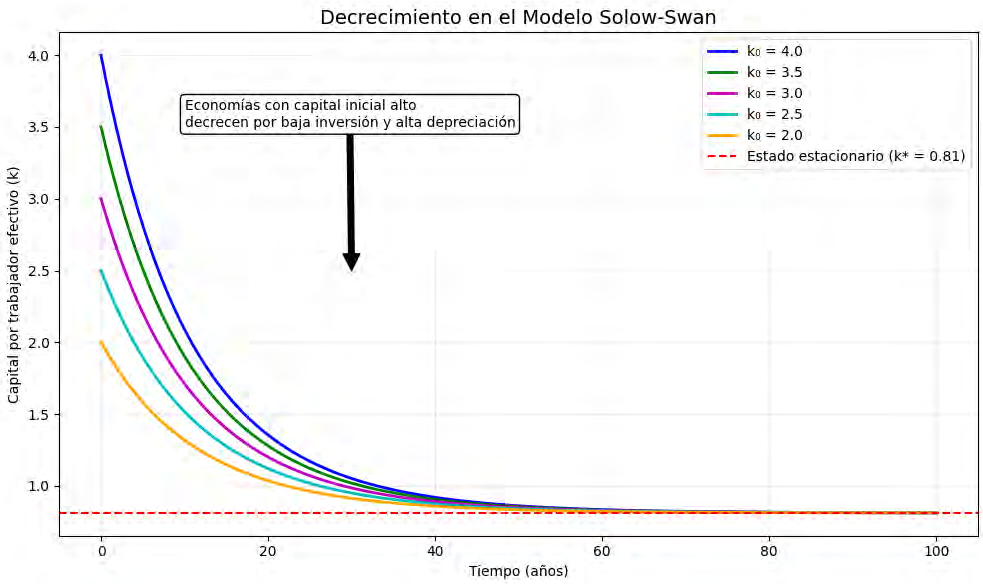
$$s \cdot (k^*)^\beta = (n+g+\delta) \cdot k^* \tag{2.16}$$

- En resumen el gráfico evidencia la convergencia condicional predicha por el modelo - economías con menor k_0 crecen más rápido, pero todas convergen al mismo k^* cuando comparten parámetros estructurales (s, β, etc.).

Ahora veremos el decrecimiento del Modelo Solow-Swan

Figura 3

Decrecimiento del capital por trabajador efectivo en el modelo Solow-Swan



Nota. La gráfica muestra el decrecimiento de economías con capital inicial alto ($k_0 > k^*$) debido a baja inversión y alta depreciación, convergiendo al estado estacionario ($k^* = 0{,}81$).

Causas del decrecimiento:

- Tasa de ahorro reducida ($s = 0{,}1$): Menor inversión en capital nuevo.
- Alta depreciación ($\delta = 0{,}08$): El capital se desgasta rápidamente.
- Crecimiento poblacional alto ($n = 0{,}03$): Diluye el capital por trabajador.
- Progreso tecnológico lento ($g = 0{,}005$): Menor productividad.

Dinámica observada:

- Las economías parten de un capital inicial alto ($k_0 > k^*$), pero la inversión es insuficiente para compensar la depreciación y el crecimiento poblacional.
- Convergencia descendente: Todas las trayectorias caen hacia un nuevo estado estacionario

más bajo (k^* disminuye por los parámetros ajustados).

- Interpretación por trayectorias:

  - **Curva azul** ($k_0 = 4{,}0$): Muestra el decrecimiento más acelerado inicialmente, ya que parte de un capital muy superior al estado estacionario, con alta depreciación relativa.
  - **Curva verde** ($k_0 = 3{,}5$): Presenta una contracción económica sostenida, donde la inversión no logra compensar la erosión del capital.
  - **Curva naranja** ($k_0 = 2{,}0$): Ilustra una economía que parte más cerca del equilibrio, con un ajuste descendente más gradual hacia k^*.
  - **Estado estacionario** ($k^* \approx 0{,}81$): Punto de convergencia común donde $s \cdot f(k^*) = (n + g + \delta)k^*$.

Teorema 2.14 (Linealización de Sistemas Fraccionarios No Lineales)**.** *Sea el sistema fraccionario no lineal:*

$$ {}^{C}D^{\alpha}x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad 0 < \alpha \leq 1 $$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable. Sea x^* un punto de equilibrio tal que $f(x^*) = 0$. Definiendo la variable de desviación $y(t) = x(t) - x^*$, el sistema linealizado alrededor de x^* es:

$$ {}^{C}D^{\alpha}y(t) = J \cdot y(t) + O(\|y\|^2) $$

donde $J = f'(x^*)$ es el jacobiano del sistema (en este caso escalar).

Demostración. Aplicamos el desarrollo de Taylor de primer orden alrededor de x^*:

$$ f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + O((x - x^*)^2) $$

Dado que $f(x^*) = 0$ y $y = x - x^*$, tenemos:

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = f'(x^*) \cdot y(t) + O(y^2)$$

Despreciando los términos de orden superior obtenemos el sistema linealizado. □

Para nuestro modelo:

$$f(k) = sk^{\beta} - (n + g + \delta)k$$

El jacobiano evaluado en el estado estacionario k^* es:

$$J = f'(k^*) = s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n + g + \delta)$$

Usando la condición de estado estacionario $s(k^*)^{\beta} = (n + g + \delta)k^*$, obtenemos:

$$J = (n + g + \delta)(\beta - 1) < 0 \quad (\text{pues } \beta < 1)$$

Corolario 2.1: El sistema linealizado es localmente estable para todo $\alpha \in (0, 1]$.

2.2 Marco Conceptual(palabra clave)

El marco conceptual se estructura en torno a seis términos clave que articulan la aplicación del cálculo fraccionario al modelo Solow-Swan en el contexto peruano. Cada concepto se define técnicamente y se vincula con la literatura revisada.

Crecimiento económico: Incremento sostenido en la capacidad de una economía para producir bienes y servicios en el largo plazo, obtenido por la acumulación de capital, el crecimiento poblacional y el progreso tecnológico.

Cálculo fraccionario: Sistema matemático que generaliza las derivadas e integrales a órdenes no enteros ($\alpha \in \mathbb{R}^+$), permitiendo modelar fenómenos con memoria histórica y dependencia temporal no local Podlubny (1998). En economía, esta propiedad captura rigideces estructurales y persistencia de shocks, como demuestran Tarasov (2019) en dinámicas de depreciación y en

modelos de crecimiento con efecto memoria Johansyah et al. (2022).

Modelo Solow-Swan fraccionario: Extensión del modelo neoclásico de crecimiento que incorpora derivadas fraccionarias de Caputo para capturar efectos de memoria histórica y dependencias temporales no locales. Esta generalización modifica sustancialmente la dinámica de convergencia al estado estacionario, reemplazando el ajuste exponencial por uno algebraico gobernado por funciones Mittag-Leffler.

Estado estacionario: Punto de equilibrio de largo plazo donde las variables económicas por unidad de trabajo efectivo permanecen constantes. En el modelo fraccionario, mientras su expresión matemática coincide con el caso clásico, la dinámica de convergencia hacia este equilibrio se modifica sustancialmente, volviéndose más lenta y dependiente de la trayectoria histórica.

Memoria económica: Propiedad fundamental de los sistemas fraccionarios donde el estado económico actual emerge de la acumulación histórica de decisiones, shocks y condiciones pasadas. Esta dependencia temporal no-local permite modelar fenómenos como la persistencia estructural de crisis, efectos de histéresis y convergencias lentas típicas de economías emergentes.

Economia emergente: llamado también mercado emergente, es un país que está en proceso de desarrollo y que muestra un crecimiento económico acelerado, industrialización y mejora en los estándares de vida, aunque aún no alcanza el nivel de las economías avanzadas Banco Mundial (2023).

2.3 Antecedentes empíricos de la investigación

2.3.1 Antecedentes Internacionales

La aplicación de las ecuaciones diferenciales fraccionarias a modelos económicos, en particular al modelo de crecimiento de Solow-Swan, ha sido abordado por diversos investigadores en los últimos años. Seguidamente, se presenta una revisión de los trabajos más destacados que han sentado las bases para esta investigación:

Skovránek, T., Podlubny, I., & Petráš, I. (2012) Este estudio pionero aplicó derivadas fraccionarias para modelar el comportamiento macroeconómico de tres países de la Commonwealth. Los autores demostraron que el uso de ecuaciones diferenciales fraccionarias permite capturar dinámicas no lineales y efectos de memoria histórica en economías con estructuras heterogéneas. Sus hallazgos resaltan la flexibilidad de este enfoque para adaptarse a contextos económicos dinámicos y complejos.

Tarasov, V. E. (2019) estableció un marco teórico para la generalización de modelos dinámicos mediante derivadas fraccionarias. Su trabajo abordó las dificultades técnicas en la construcción de estos modelos y propuso reglas para su aplicación en sistemas económicos. Este estudio es fundamental para entender cómo incorporar efectos de memoria y dependencias temporales no locales en modelos de crecimiento económico.

Johansyah, M., Supriatna, A., Rusyaman, E., & Saputra, J. (2022) En su artículo titulado *Modelado del crecimiento natural con efecto memoria en economía*, los autores exploraron el crecimiento económico utilizando ecuaciones diferenciales lineales de orden fraccionario. Destacaron las limitaciones de los modelos tradicionales para capturar la persistencia de shocks y propusieron un enfoque fraccionario que incorpora el efecto memoria. Sus resultados son especialmente relevantes para economías emergentes con trayectorias de crecimiento irregulares.

Tarasov, V. E. (2022) Este trabajo profundizó en la dinámica fraccionaria aplicada a la depreciación del capital y la obsolescencia tecnológica. Tarasov utilizó derivadas fraccionarias e integrales de

Prabhakar para modelar procesos económicos con memoria histórica, proporcionando herramientas matemáticas avanzadas para analizar la evolución del capital en el largo plazo. Su investigación es clave para entender cómo las rigideces estructurales afectan la convergencia al estado estacionario. **Gómez (2023)** realizó un análisis dinámico del modelo de crecimiento de Solow, explorando su comportamiento con funciones de producción Cobb-Douglas y CES. A través de la resolución analítica y numérica de la ecuación fundamental de Solow, el autor evaluó la estabilidad del equilibrio y la trayectoria del capital per cápita en el largo plazo. Además, amplió el modelo estándar para incorporar el gasto público y las exportaciones netas, considerando una economía abierta con equilibrio presupuestario. Sus resultados muestran que, bajo ciertas condiciones de ahorro y productividad, el modelo puede presentar equilibrios inestables o crecimiento explosivo, lo que pone en cuestión la validez empírica de supuestos tradicionales como el rendimiento decreciente del capital. Esta contribución es relevante para el presente estudio, ya que evidencia la necesidad de explorar enfoques alternativos como los modelos con memoria o no linealidades que capturen mejor las dinámicas reales de las economías en desarrollo.

Los estudios revisados coinciden en que las derivadas fraccionarias mejoran la capacidad de los modelos económicos para representar dinámicas complejas, como la persistencia de shocks y la convergencia no exponencial. Sin embargo, se identifican brechas importantes:

- La mayoría de los trabajos se centran en economías desarrolladas, con menos atención a las emergentes.
- Existe una necesidad de validación empírica con datos reales, especialmente en contextos latinoamericanos.
- Falta explorar la relación entre el orden fraccionario (α) y características estructurales de las economías, como la dependencia de recursos naturales o la calidad institucional.

2.3.2 Antecedentes Nacionales y Locales

En el contexto peruano, si bien el uso de derivadas fraccionarias en economía es incipiente, existen investigaciones relevantes que abordan el modelo de Solow-Swan y dinámicas de crecimiento con enfoques innovadores:

Loyola et al. (2022) En su trabajo de ivestigacion del "Modelo de crecimiento económico de Robert Solow en el Perú (1950-2021)". Analizó la aplicabilidad del modelo clásico de Solow-Swan a la economía peruana, identificando limitaciones para explicar periodos de crisis (como la hiperinflación de los 80 o la pandemia del 2020), pero no incorporaron herramientas matemáticas avanzadas como EDF para modelar la persistencia de shocks.

Este trabajo justifica la necesidad de extender el modelo con derivadas fraccionarias, dado que el Perú exhibe dinámicas no lineales y dependencia de condiciones iniciales.

Guzmán Díaz (2014) argumentó que los modelos neoclásicos de crecimiento económico, como el de Solow, subestiman el papel de la demanda agregada y los choques externos en economías como la peruana. Sin embargo, su análisis fue predominantemente cualitativo y no incorporó ajustes formales o matemáticos a los modelos tradicionales (Guzmán Díaz, 2014, pp. 24–25). Esta ausencia de formalización matemática dejó un vacío en la modelización del crecimiento, especialmente en la captura de efectos persistentes de crisis o bonanzas. En respuesta, el presente estudio incorpora memoria histórica mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Vega (2021) aplico el modelo de Solow-Swan a las 24 regiones peruanas entre 2000 y 2020, concluye que no existe convergencia regional y que el proceso de ajuste hacia el estado estacionario es lento y heterogéneo. Aunque su estudio aporta evidencia empírica valiosa sobre las brechas estructurales del crecimiento peruano, su enfoque se limita a técnicas econométricas clásicas, sin considerar efectos de memoria histórica ni rigideces institucionales que podrían explicar la persistencia de shocks y la velocidad de convergencia no exponencial. Esta limitación metodológica refuerza la necesidad de explorar enfoques alternativos, como el uso de derivadas fraccionarias, que permiten modelar dinámicas con dependencia temporal no local y path-dependence, características típicas

de economías emergentes como la peruana.

Velásquez Ayma (2019) en su trabajo de investigación "Modelos matemáticos del movimiento de un proyectil mediante la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineal" analizó la formulación de modelos para el movimiento de proyectiles incorporando derivadas fraccionarias de orden no lineal, identificando que los modelos newtonianos clásicos (basados en derivadas enteras) no logran representar adecuadamente efectos como la fricción dependiente de la historia del movimiento o la heterogeneidad del medio; su trabajo es metodológicamente relevante por dos razones fundamentales: uno demuestra la aplicabilidad de las ecuaciones diferenciales fraccionarias para modelar fenómenos complejos con dependencia de condiciones iniciales y dos valida el uso de la derivada de Caputo como operador adecuado para problemas con condiciones iniciales bien definidas. Estos elementos metodológicos son trasladables al modelado de sistemas económicos con memoria de largo plazo.

Estos antecedentes demuestran que el uso de derivadas fraccionarias en modelos económicos es un área activa de investigación, con aplicaciones en dinámica de capital, crecimiento económico y efectos de memoria.

2.4 HIPOTESIS

2.4.1 Hipótesis General

La inclusión de derivadas fraccionarias en el modelo de Solow-Swan modifica significativamente la dinámica de convergencia al estado estacionario, introduciendo efectos de memoria histórica y dependencia temporal no local, lo que permite una representación más precisa del crecimiento económico en economías emergentes como la peruana.

2.4.2 Hipótesis Especificas

1. La solución del modelo fraccionario muestra un comportamiento de convergencia no exponencial, con una velocidad de ajuste decreciente a medida que el orden fraccionario α se reduce, especialmente notable para $\alpha < 0,5$.

2. La linealización del modelo fraccionario alrededor del estado estacionario preserva la estabilidad dinámica para todo $\alpha \in (0, 1]$, y el parámetro de convergencia λ mantiene su signo negativo, garantizando la convergencia al equilibrio de largo plazo.

3. El orden fraccionario óptimo α está inversamente relacionado con el grado de rigideces estructurales de la economía, de modo que economías con alta dependencia de recursos naturales y persistencia de shocks presentan valores de α significativamente menores a $\ll 1$.

4. El modelo fraccionario mostrará con mayor precisión las fluctuaciones del crecimiento económico en economías emergentes , especialmente en periodos de crisis.

CAPITULO III

METODOLOGÍA

3.1 Tipo y Nivel de Investigación

Tipo:

Este trabajo incorpora un **enfoque teórico-numérico**, integrando el desarrollo analítico de una extensión del modelo económico de Solow-Swan mediante derivadas fraccionarias con la implementación de simulaciones para validar su comportamiento dinámico. Se clasifica como **investigación aplicada** al orientarse a la solución de un problema específico: el mejoramiento de la modelización del crecimiento económico en contextos de economías emergentes, con aplicación concreta al caso peruano. Metodológicamente, corresponde a un diseño **cuantitativo**, fundamentado en el uso de herramientas matemáticas avanzadas (cálculo fraccionario, Transformada de Laplace) y técnicas de análisis numérico aplicadas a datos empíricos.

Nivel:

La investigación posee un carácter predominantemente **explicativo**, al analizar de manera sistemática cómo la incorporación de derivadas fraccionarias modifica sustancialmente la dinámica del modelo tradicional de Solow-Swan, con especial énfasis en su impacto sobre la velocidad de convergencia y los efectos de memoria histórica en el sistema económico. Complementariamente, presenta componentes **exploratorios** derivados de la propuesta innovadora de modificación del marco teórico clásico, así como elementos **descriptivos** manifestados en la caracterización detallada de los parámetros macroeconómicos peruanos (tasas de ahorro, depreciación, crecimiento poblacional y tecnológico) requeridos para la calibración del modelo.

3.2 Unidad de Analisis

La unidad de análisis fundamental corresponde al modelo de crecimiento económico de Solow-Swan extendido mediante derivadas fraccionarias, con enfoque en el capital por trabajador efectivo ($k = K/AL$), donde K representa el stock de capital físico, A el nivel tecnológico ($A(t) = A_0 e^{gt}$), y L la fuerza laboral ($L(t) = L_0 e^{nt}$). El análisis incorpora los parámetros económicos específicos del Perú (período 2014-2023), incluyendo la tasa de ahorro ($s \in [21{,}24\,\%; 19{,}88\,\%]$), elasticidad capital ($\beta \in [0{,}4; 0{,}44]$), y las tasas de crecimiento poblacional (n), tecnológico (g) y depreciación (δ) reportadas en las fuentes oficiales.

Un elemento distintivo es el orden fraccionario $\alpha \in (0; 1]$, calibrado en $\alpha \approx 0{,}3$ para el caso peruano mediante minimización del error cuadrático medio entre el modelo teórico y los datos empíricos. El estudio compara sistemáticamente tres dimensiones: las predicciones del modelo clásico ($\alpha = 1$), su versión fraccionaria ($0 < \alpha < 1$), y los datos observados de la economía peruana, permitiendo evaluar la capacidad predictiva de la extensión propuesta.

3.3 Técnicas de Recolección de Información

Se realizó mediante la consulta de fuentes secundarias oficiales y públicas. Los datos macroeconómicos del Perú para el período 2014-2023, necesarios para la calibración del modelo, se obtuvieron del BCRP (2023), el INEI (2022) y los Indicadores de Desarrollo Mundial del Banco Mundial (2025). Estas fuentes proporcionaron las series temporales para la tasa de ahorro (s), la elasticidad output-capital (β), el crecimiento poblacional (n), el progreso tecnológico (g) y la tasa de depreciación (δ).

3.4 Tecnicas de Analisis e interpretacion de la informacion

El presente estudio combinó métodos analíticos, numéricos y empíricos para examinar el impacto de las derivadas fraccionarias en el modelo Solow-Swan, siguiendo el enfoque propuesto por Tarasov (2019) para sistemas económicos con memoria histórica.

3.4.1 Análisis teórico

La ecuación diferencial fraccionaria (EDF) del modelo se resolvió mediante la transformada de Laplace Churchill (1972), obteniendo soluciones en términos de la función Mittag-Leffler E_α Podlubny (1998). Dada la no linealidad del término k^β, se linealizó la EDF alrededor del estado estacionario k^* (4.2) mediante una aproximación de Taylor de primer orden, estrategia válida en la vecindad del equilibrio donde el comportamiento dinámico está dominado por el término lineal. Para garantizar estabilidad dinámica, se verificó que $\lambda = (n+g+\delta)(\beta-1) < 0$ para todo $\alpha \in (0,1]$ Johansyah et al. (2022), condición que asegura la estabilidad del sistema linealizado según el Teorema de Matignon Matignon (1996).

Se opta por la derivada de Caputo porque permite condiciones iniciales de tipo entero ($k(0) = k_0$), directamente observables en datos económicos, a diferencia de Riemann-Liouville que requiere condiciones fraccionarias de difícil interpretación económica Diethelm (2010); Podlubny (1998).

3.4.2 Implementación numérica

Se calibró el orden fraccionario α mediante minimización del error cuadrático medio (ECM) entre las predicciones del modelo y los datos peruanos (2014-2023). Las simulaciones se ejecutaron en Python 3.8, utilizando la librería `scipy.optimize` con el algoritmo Nelder-Mead y aproximaciones numéricas de la función Mittag-Leffler (ver Anexo B)

3.4.3 Validación empírica

La validación empírica del modelo se realizó mediante un procedimiento cuantitativo que comparó las predicciones del modelo fraccionario con los datos históricos del Perú (2014-2023). Este proceso consistió en:

1. La calibración del orden fraccionario α mediante minimización del error cuadrático medio (ECM) entre la serie teórica y los datos observados de capital por trabajador efectivo;
2. La comparación del ECM resultante con el obtenido por el modelo clásico ($\alpha = 1$);
3. El análisis gráfico de ajuste para evaluar visualmente la capacidad de cada modelo para reproducir las fluctuaciones históricas, especialmente durante periodos de crisis; y
4. La proyección comparativa de la convergencia al estado estacionario para verificar la coherencia temporal de las trayectorias predichas.

CAPITULO IV

ESTABILIDAD DEL MODELO SOLOW-SWAN CON DERIVADAS FRACCIONARIAS

4.1 Modelo de Solow-Swan, solución:

Considerando el modelo de Solow-Swan esta definido por:

$$F\left(t, k(t), {}_0^C D_t^\alpha k(t)\right) = {}_0^C D_t^\alpha k(t) - \left[sk(t)^\beta - (n+g+\delta)k(t)\right] = 0$$

$$^C D^\alpha k(t) = sk^\beta - (n+g+\delta)k, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k(0) = k_0 \tag{4.1}$$

donde:

- $^C D^\alpha k(t)$: Derivada fraccionaria (sentido de Caputo)
- s: Tasa de ahorro
- β: Elasticidad del capital $(0 < \beta < 1)$
- n, g, δ: Tasas de crecimiento poblacional, tecnológico y depreciación
- $k = K/AL$: La dinámica del capital por trabajador efectivo

La no linealidad del término k^β en la ecuación diferencial fraccionaria dificulta su resolución analítica directa. Para superar este obstáculo, se linealizará la ecuación alrededor del estado estacionario mediante una aproximación de series de Taylor de primer orden.

El estado estacionario k^* se define cuando la derivada fraccionaria del capital por trabajador efectivo es nula: $^C D^\alpha k(t) = 0$

$$s(k^*)^\beta - (n+g+\delta)k^* = 0$$

$$s(k^*)^\beta = (n + g + \delta)k^*$$

$$(k^*)^{\beta-1} = \frac{n + g + \delta}{s}$$

$$k^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{4.2}$$

Observaciones

- La expresión (4.2) es idéntica a la del modelo de Solow clásico ($\alpha = 1$).
- El valor de k^* depende de los parámetros fundamentales (s, β, n, g, δ), pero **no** del orden fraccionario α.

linealizacion alrededor del estado estacionario

Definimos una variable ($x(t) \approx 0$) que representa de desviación del estado estacionario. En el Modelo de Solow con derivadas fraccionarias, es fundamental estudiar el comportamiento cerca del equilibrio. Para esto, introducimos la variable de desviación que en este caso mide la diferencia entre el capital por trabajador efectivo ($k(t)$) y su valor de estado estacionario (k^*):

$$x(t) = k(t) - k^* \tag{4.3}$$

- Cuando $k(t) > k^*$, $x(t) > 0$ La economía tiene más capital que el equilibrio
- Cuando $k(t) = k^*$, $x(t) = 0$ La economía está en el equilibrio
- Cuando $k(t) < k^*$, $x(t) < 0$ La economía tiene menos capital que el equilibrio

Linealizamos el término no lineal k^β alrededor de k^* mediante serie de Taylor de primer orden:

$$P_1(y) = f(a) + f'(a)(y - a)$$

$$k^{\beta} \approx (k^*)^{\beta} + \beta(k^*)^{\beta-1}x(t) \tag{4.4}$$

Sustituimos en la EDF reemplazando (4.4) en (4.1):

$${}^{C}D^{\alpha}k(t) \approx s\left[(k^*)^{\beta} + \beta(k^*)^{\beta-1}x(t)\right] - (n+g+\delta)(k^* + x(t))$$

$${}^{C}D^{\alpha}[x(t)+k^*] = \underbrace{s(k^*)^{\beta} - (n+g+\delta)k^*}_{\text{=0 por estado estacionario}} + \left[s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n+g+\delta)\right]x(t)$$

$${}^{C}D^{\alpha}x(t) + {}^{C}D^{\alpha}k^* = \left[s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n+g+\delta)\right]x(t)$$

$${}^{C}D^{\alpha}x(t) + 0 = \left[s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n+g+\delta)\right]x(t)$$

Sea

$$\lambda = s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n+g+\delta) \tag{4.5}$$

$${}^{C}D^{\alpha}x(t) = \lambda x(t)$$

Aplicando la T.L. a la ecuacion linealizada.

$$\mathcal{L}\left\{{}^{C}D^{\alpha}x(t)\right\} = \mathcal{L}\{\lambda x(t)\}$$

La T.L. de la derivada fraccionaria de Caputo es: $\mathcal{L}\{{}^{C}D^{\alpha}x(t)\} = s^{\alpha}X(s) - s^{\alpha-1}x(0)$

entonces se tiene:

$$s^{\alpha}X(s) - s^{\alpha-1}x_0 = \lambda X(s)$$

Despejamos $X(s)$:

$$s^{\alpha}X(s) - \lambda X(s) = s^{\alpha-1}x_0$$

$$X(s)(s^{\alpha} - \lambda) = s^{\alpha-1}x_0$$

$$X(s) = x_0\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda} \tag{4.6}$$

- Para $\alpha = 1$ recupera la forma clásica:

$$X(s) = \frac{x_0}{s - \lambda}$$

Ahora aplicando inversa de la T.L. a ambos miembros a (4.6)

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{x_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}\right\}$$

La transformada inversa de $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha-\lambda}\right\} = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ es la función de Mittag-Leffler.

Por tanto, la solución en el dominio temporal es:

$$x(t) = x_0 E_\alpha(\lambda t^\alpha) \tag{4.7}$$

Y para el capital por trabajador efectivo:

$$k(t) = k^* + (k_0 - k^*)E_\alpha(\lambda t^\alpha) \tag{4.8}$$

$$k(t) = k^* + (k_0 - k^*)E_\alpha\left[\left(s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n + g + \delta)\right) t^\alpha\right] \tag{4.9}$$

Comportamiento Asintótico

Caso Clásico ($\alpha = 1$)

La solución (4.8) se convierte en:

$$k(t) = k^* + (k_0 - k^*)e^{\lambda t} \tag{4.10}$$

Interpretación:

- Decaimiento exponencial hacia el equilibrio
- Tasa de convergencia dada por $|\lambda| = (n + g + \delta)(1 - \beta)$
- Comportamiento clásico del modelo de Solow original

Caso Fraccionario $(0 < \alpha < 1)$

Aplicando el Teorema 2.12 (Decaimiento Algebraico) se tiene que para $t \to \infty$, con $\lambda < 0$ y $0 < \alpha < 1$:

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) \sim -\frac{1}{\lambda \Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$

Sustituyendo en la solución para $k(t)$:

$$k(t) - k^* = (k_0 - k^*) E_\alpha(\lambda t^\alpha) \sim -\frac{k_0 - k^*}{\lambda \Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$

Definiendo $C = -\frac{k_0 - k^*}{\lambda \Gamma(1-\alpha)}$, obtenemos el decaimiento algebraico:

$$k(t) - k^* \sim C t^{-\alpha}, \quad t \to \infty$$

Este resultado explica cualitativamente la convergencia más lenta observada en las simulaciones numéricas.Esto implica que:

- Convergencia algebraica más lenta que la exponencial
- Memoria a largo plazo del sistema
- Dependencia de la historia pasada.

4.2 Análisis de Estabilidad del Estado Estacionario

Derivación del Parámetro de Convergencia λ

Usando la condición de estado estacionario: $s = (n + g + \delta)(k^*)^{1-\beta}$

$$\begin{aligned}
\lambda &= s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n + g + \delta) \\
\lambda &= \left[(n + g + \delta)(k^*)^{1-\beta}\right] \beta(k^*)^{\beta-1} - (n + g + \delta) \\
\lambda &= (n + g + \delta) \left[\beta(k^*)^{\beta-1} \cdot (k^*)^{1-\beta} - 1\right] \\
\lambda &= (n + g + \delta)(\beta - 1) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

El parámetro λ que gobierna la dinámica linealizada alrededor del estado estacionario resulta ser:

$$\lambda = (n + g + \delta)(\beta - 1)$$

Dado que $n + g + \delta > 0$ y $\beta - 1 < 0$ (pues $0 < \beta < 1$), se concluye que $\lambda < 0$. Esto garantiza la estabilidad del sistema para todo $\alpha \in (0, 1]$, ya que el signo negativo de λ asegura que las desviaciones del estado estacionario se corrigen con el tiempo.

- Magnitud $|\lambda|$ cuantifica la velocidad de convergencia:

$$\text{Mayor } |\lambda| \Rightarrow \text{convergencia más rápida}$$

Verificación con Teorema de Matignon

- Identificamos el argumento de λ

  Como λ es un número real negativo, en el plano complejo está sobre el eje real negativo:

$$\lambda = -|\lambda| \quad \Rightarrow \quad \arg(\lambda) = \pi \text{ radianes } (180°)$$

- Aplicamos condición de Matignon

$$|\arg(\lambda)| > \alpha\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \pi > \alpha\frac{\pi}{2}$$

- Simplificando la desigualdad

$$\pi > \alpha\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 > \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha < 2$$

$$\alpha \in (0, 1] \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq 1 < 2$$

Dado que en nuestro modelo $\alpha \in (0, 1]$, la condición de estabilidad **siempre se cumple**.

El análisis mediante el Teorema de Matignon demuestra que el modelo Solow-Swan fraccionario linealizado:

- Es **asintóticamente estable** para todo $\alpha \in (0, 1]$
- Las trayectorias $k(t)$ **convergen** al estado estacionario k^* cuando $t \to \infty$
- La estabilidad **no depende del valor específico de** α
- El estado estacionario es un **punto de equilibrio estable**

Interpretación económica: El mecanismo de acumulación de capital en el modelo fraccionario mantiene la propiedad fundamental de convergencia al equilibrio de largo plazo del modelo clásico, aunque la velocidad de convergencia se modifica (exponencial a algebraica).

Efecto del Orden Fraccionario (α), la linealización revela que α controla:

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) \sim \begin{cases} e^{\lambda t} & \alpha = 1 \quad \text{(Decaimiento exponencial)} \\ \frac{t^{-\alpha}}{|\lambda|\Gamma(1-\alpha)} & \alpha < 1 \quad \text{(Decaimiento algebraico)} \end{cases}$$

- $\alpha < 1$ introduce *memoria histórica* y convergencia más lenta

4.3 Interpretación Teórica de la Gráfica del Modelo Solow Swan Fraccionario

La Figura 4 muestra la evolución temporal del capital por trabajador efectivo ($k(t)$) en el modelo de Solow-Swan extendido con derivadas fraccionarias de orden α, comparando los casos, cuando α toma los valores $\{0{,}3; 0{,}5; 0{,}7; 0{,}9; 1\}$.

4.3.1 Comportamiento General

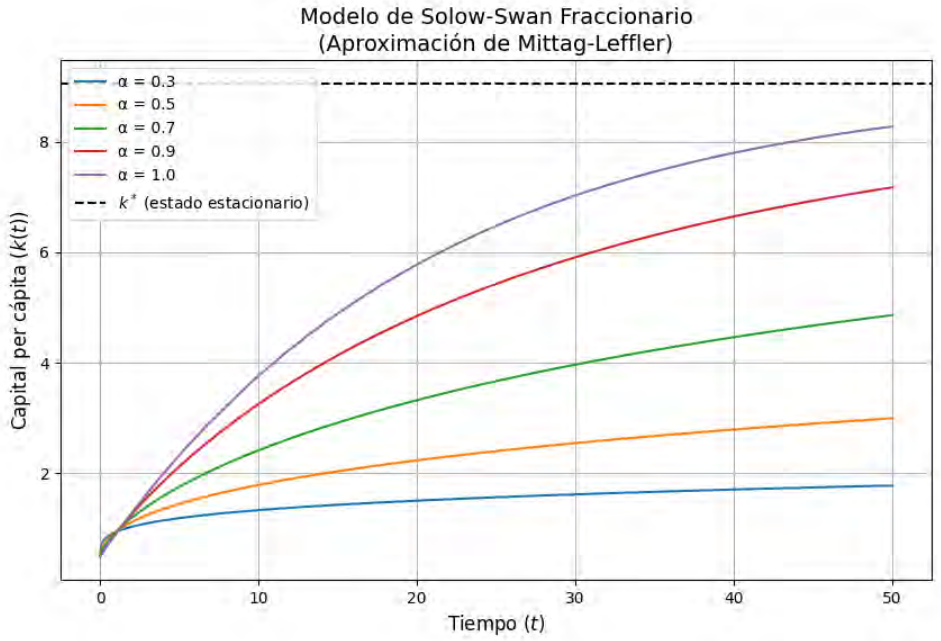
Estado Estacionario (k^*)

El estado estacionario se define cuando ${}^{C}D^{\alpha}k(t) = 0$, lo que implica:

- Independencia de α: Todas las trayectorias convergen al mismo k^* pues la derivada fraccionaria de una constante es cero, para todo $\alpha > 0$.
- En la gráfica, esto se refleja en que todas las curvas tienden a la línea discontinua de equilibrio.

Figura 4

Convergencia del capital por trabajador efectivo Modelo de Solow-Swan con derivadas fraccionarias.



Nota. La gráfica muestra la convergencia condicional hacia k^*. Economías con k_0 bajo crecen más rápido (Solow, 1956; Swan, 1956). Las curvas muestran la dinámica no clásica cuando $\alpha \in (0, 1)$ frente al caso estándar ($\alpha = 1$).

Dinámica de Convergencia

- **Caso clásico** ($\alpha = 1$):

$$k(t) = k^* + (k_0 - k^*)e^{\lambda t}, \quad \lambda = (n + g + \delta)(\beta - 1) < 0$$

  Convergencia exponencial (curva morada).

- **Caso fraccionario** ($\alpha < 1$): $k(t) = k^* + (k_0 - k^*)E_\alpha(\lambda t^\alpha)$

  - E_α: Función Mittag-Leffler (decaimiento algebraico $\sim t^{-\alpha}$)
  - Convergencia más lenta (ej. $\alpha = 0{,}3$, curva azul)

Velocidad de Convergencia

Los valores del Cuadro 1 se obtuvo mediante cálculos numéricos basados en la solución linealizada del modelo fraccionario, utilizando la aproximación asintótica de la función Mittag-Leffler y resolviendo para el tiempo t en que $k(t)$ alcanza el 90 % de k^*

Cuadro 1

Tiempo Estimado para Alcanzar el 90 % de k^*

Orden α	$T_{90\,\%}$ (años)
1.0	9
0.9	10
0.7	20
0.3	200

Nota. Los valores de $T_{90\,\%}$ representan el tiempo estimado en años requerido para que el proceso alcance el 90 % del valor objetivo k^*.

Análisis por Orden Fraccionario

A partir de las propiedades dinámicas del orden fraccionario (α), interpretado como grado de memoria y persistencia de shocks, se propone una clasificación ilustrativa de economías según su persistencia, rigidez institucional y velocidad de convergencia.

Cuadro 2

Interpretación Económica de Distintos Órdenes α

α	Características económicas asociadas
1.0	Economías avanzadas con mercados eficientes
0.9	Economías emergentes industrializadas
0.6	Países en desarrollo con instituciones medianamente rígidas
0.3	Economías dependientes de recursos con alta persistencia de shocks

Implicaciones Teóricas y Críticas al Modelo Clásico

- Subestima la persistencia de desigualdades
- Asume convergencia universal al mismo ritmo
- Ignora efectos de Memoria (path-dependence)

4.4 Análisis de la ecuación diferencial fraccionaria del modelo Solow para el caso peruano

4.4.1 Parámetros Económicos para el Perú

a) **Tasa de ahorro (s)**

La tasa de ahorro (s) corresponde al porcentaje del ingreso nacional que se destina al ahorro en lugar del consumo. Según el World Bank (2025), en Perú (2014-2023) este indicador fluctuó entre **21.24 % y 19.88 %**, reflejando la capacidad de la economía para acumular recursos destinados a la inversión. Este parámetro es clave en modelos de crecimiento económico, pues determina la formación bruta de capital fijo.

b) **Elasticidad del capital (β)**

La elasticidad del capital (β) para la economía peruana, estimada por el Banco Central de Reserva del Perú BCR Perú (2023), fluctuó entre **0.40 y 0.44**. Este rango refleja la estabilidad estructural de la participación del capital en el producto total, característica de economías en desarrollo.

c) **Crecimiento poblacional (n)**

El crecimiento poblacional (n) en Perú durante el período 2014-2023 registró una tasa anual entre **0.99 % y 1.10 %** World Bank (2025). Este indicador demográfico incide directamente sobre la expansión de la fuerza laboral y la demanda agregada. La desaceleración observada responde principalmente a la reducción en las tasas de fecundidad.

d) **Progreso tecnológico (g)**

El progreso tecnológico (g), que mide el crecimiento de la productividad total de factores, presentó un rango de **0.2 % a 1.0 %** BCRP (2024)anual en el Perú . Este parámetro captura las mejoras en eficiencia no atribuibles a incrementos en capital o trabajo.

e) **Tasa de depreciación (δ)**

La tasa de depreciación (δ), que cuantifica la pérdida anual de valor del stock de capital, se estimó entre **4.5 % y 5.5 %** para el caso peruano INEI (2022). Este rango incorpora tanto el desgaste normal de los activos productivos como pérdidas por eventos extraordinarios.

f) **FBKF: Formación bruta de capital fijo (US$ a precios actuales):** Indica el valor total de las adquisiciones netas de activos fijos por parte de los residentes de un país durante un período determinado, expresado en dólares estadounidenses corrientes Banco Mundial (2025).

g) **PEA:** Conocida como Población Económicamente Activa, comprende a las personas 15 años o más que están en edad de trabajar. Este segmento incluye a quienes se encuentran empleados en la generación de bienes y servicios, así como a los desempleados que están en búsqueda activa de un empleo, incorporando también a quienes buscan trabajo por primera vez. World Bank (2025).

Cuadro 3
Parámetros calibrados para la economía peruana (2014-2023) con ajustes post-pandemia

Parámetro	**Símbolo**	**Valor estimado**	**Fuente**
Tasa de ahorro	s	21.24 % - 19.88 %	World Bank (2025)
Elasticidad del capital	β	40 % - 44 %	BCR Perú (2023)
Crecimiento poblacional	n	0.99 % - 1.10 %	World Bank (2025)
Progreso tecnológico	g	0.2 % - 1.0 %	BCRP (2024)
Tasa de depreciación	δ	4.5 % - 5.5 %	INEI (2022)

Cuadro 4
valores promedio de Parámetros calibrados de la economia pruana 2014-2023

Parámetro	**Símbolo**	**Valor promedio**	**Rango**
Tasa de ahorro	s	0.2023	21.24 % - 19.88 %
Elasticidad del capital	β	0.4200	40 % - 44 %
Crecimiento poblacional	n	0.0127	0.99 % - 1.10 %
Progreso tecnológico	g	0.0060	0.2 % - 1.0 %
Depreciación	δ	0.0500	4.5 % - 5.5 %

Cálculo del Estado Estacionario (k^*)

La fórmula para el estado estacionario es:

$$k^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Reemplazamos con los valores para Perú:

$$\begin{aligned} k^* &= \left(\frac{0{,}2023}{0{,}0127 + 0{,}006 + 0{,}05} \right)^{\frac{1}{1-0{,}42}} \\ &= \left(\frac{0{,}2023}{0{,}0687} \right)^{\frac{1}{0{,}58}} \\ &= (2{,}9447)^{1{,}72413} \\ &\approx 6{,}437 \end{aligned}$$

$k^* \approx 6{,}437$ (unidades de capital por trabajador efectivo)

El valor calculado indica que en el estado estacionario

- El numerador ($s = 0{,}2023$) representa la inversión bruta
- El denominador ($n + g + \delta = 0{,}0687$) representa la "tasa de depreciación efectiva"
- El exponente ($\frac{1}{1-\beta} = 1{,}72413$) refleja los rendimientos decrecientes del capital

Cálculo de la Velocidad de Convergencia (λ)

La fórmula para la velocidad de convergencia es:

$$\lambda = s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n + g + \delta)$$

Calculando $(k^*)^{\beta-1}$

$$\beta - 1 = 0{,}42 - 1 = -0{,}58$$

$$(k^*)^{\beta-1} = 6{,}437^{-0{,}58} = 0{,}3396$$

Calculando $s\beta(k^*)^{\beta-1}$

$$s\beta(k^*)^{\beta-1} = 0{,}2023 \times 0{,}42 \times 0{,}3396$$

$$\approx 0{,}0289$$

Calculando $(n + g + \delta)$

$$n + g + \delta = 0{,}0127 + 0{,}006 + 0{,}05 = 0{,}0687$$

finalmente Calculamos λ

$$\lambda = 0{,}0289 - 0{,}0687$$

$$= -0{,}0398$$

$$\approx -0{,}04$$

Interpretación del Resultado

La velocidad de convergencia es:

$$\lambda \approx -0{,}04 \quad \text{o} \quad -4{,}0\,\%$$

- El signo negativo indica convergencia hacia el estado estacionario
- Un λ de 4.0 % significa que la economía cierra aproximadamente el 4 % de la brecha que la separa de su estado estacionario cada año
- La semivida de la convergencia es $\frac{\ln(2)}{0{,}04} \approx 17{,}3$ años

4.4.2 Cálculo del Capital por trabajador efectivo normalizado - Perú 2014-2023

Estimación del Stock de Capital Inicial (2014):

Para inicializar la serie del stock de capital $K(t)$ en 2014, se utilizó la Formación Bruta de Capital Fijo de ese año bajo el supuesto de estado estacionario, mediante la expresión $K_{2014} = I_{2014}/(g + \delta)$. Esta metodología estándar se aplica cuando no se dispone de series históricas completas del stock de capital. Si bien la formulación teórica del modelo de Solow incluiría la tasa de crecimiento poblacional n, en esta implementación empírica se omitió dicho parámetro dado que el efecto poblacional ya se captura directamente al utilizar datos observados de PEA en el cálculo de $k = K/(A \cdot L)$. La inclusión de n en la inicialización habría resultado en una duplicación del efecto poblacional, generando inconsistencia con el uso de datos empíricos.

$$K_{2014} = \frac{I_{2014}}{g + \delta}$$

Donde:

- I_{2014}: Formación Bruta de Capital Fijo (FBKF) en 2014
- g: Tasa de progreso tecnológico (0.6 %)
- δ: Tasa de depreciación (5 %)

Stock de Capital para años subsiguientes (2015-2023):

$$K_t = K_{t-1} \cdot (1 - \delta) + I_t$$

Donde:

- K_t: Stock de capital en el año t
- I_t: Inversión (FBKF) en el año t

Progreso Tecnológico (A):

$A_t = e^{g\cdot(t-2014)}$, con $A_{2014} = 1$ (valor base)

Capital por Trabajador Efectivo (en términos absolutos)

$$k_{\text{abs}}(t) = \frac{K_t}{A_t \cdot L_t}$$

Donde L_t es Población Económicamente Activa (PEA) en el año t

Capital por Trabajador Efectivo Normalizado

$$k_{\text{real (norm)}}(t) = \frac{k_{\text{abs}}(t)}{k_{\text{abs}}(2014)}$$

Donde 2014 es el año base con valor 1.0

Normalizando en Python (ver Listing 4 en el Apéndice 4.5) Capital por Trabajador Efectivo se tiene:

Cuadro 5

Cálculo del Capital por Trabajador Efectivo Normalizado - Perú 2014-2023

Año	FBKF (US$)	PEA	K(t) (US$)	A(t)	k_abs(t)	k(t)real (norm)
2014	49,273,980,960	16,746,275	879,892,517,139	1.000	52,542.58	1.000
2015	43,822,789,509	16,759,049	879,720,680,791	1.006	52,178.27	0.993
2016	41,156,280,981	16,939,632	876,890,927,732	1.012	51,148.17	0.973
2017	43,483,674,836	17,644,346	876,530,056,182	1.018	48,791.47	0.929
2018	46,574,533,036	18,124,121	879,278,086,409	1.024	47,363.77	0.901
2019	47,887,740,109	18,599,717	883,201,922,198	1.030	46,081.31	0.877
2020	40,164,054,272	16,861,243	879,205,880,359	1.037	50,299.82	0.957
2021	52,260,579,288	17,853,296	887,506,165,630	1.043	47,666.43	0.907
2022	57,286,735,620	18,756,175	900,417,592,968	1.049	45,756.58	0.871
2023	56,579,018,362	18,608,668	911,975,731,682	1.055	46,431.86	0.884

Nota. Parámetros utilizados: $\delta = 0{,}050$, $g = 0{,}006$. FBKF = Formación Bruta de Capital Fijo. PEA = Población Económicamente Activa.

4.4.3 Proceso de Calibración del Orden Fraccionario α para el Modelo de Solow-Swan (Perú)

Nuestro es objetivo es encontrar el orden fraccionario α óptimo que minimice el error entre el modelo teórico y los datos reales de capital per cápita del Perú (2014-2023).

Ecuaciones Clave

Solución del Modelo de Solow-Swan fraccionario: $k(t) = k^* + (k_0 - k^*)E_\alpha(\lambda t^\alpha)$

Esta función pertenece al espacio $C^1([0, +\infty), \mathbb{R}^+)$, lo que garantiza que sea continuamente diferenciable y que la derivada de Caputo ${}^C D^\alpha k(t)$ esté bien definida para $0 < \alpha < 1$. Asimismo, la función Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ es holomorfa, lo que garantiza la convergencia de la solución. Esta propiedad asegura que la función objetivo (ECM) sea suave, justificando el uso del algoritmo Nelder-Mead, el cual no requiere derivadas y es especialmente adecuado para funciones no lineales.

Estado estacionario: $$k^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Velocidad de convergencia: $\lambda = s\beta(k^*)^{\beta-1} - (n + g + \delta)$

Para determinar el valor del parámetro α que mejor se ajusta a la economía peruana, se implementó un proceso de minimización del **error cuadrático medio (ECM)** entre las predicciones del modelo y los datos observados. La función objetivo está definida como:

$$\text{ECM}(\alpha) = \sum_{t=2014}^{2023} \left(k_{\text{modelo}}(t) - k_{\text{real (norm)}}(t)\right)^2$$

Donde:

$$k_{\text{modelo}}(t) = k^* + (k_0 - k^*) \cdot E_\alpha(\lambda t^\alpha)$$

La minimización de esta función se realizó mediante el **algoritmo de Nelder-Mead**, un método de optimización directa que no requiere el cálculo de derivadas y es particularmente robusto para funciones no lineales.

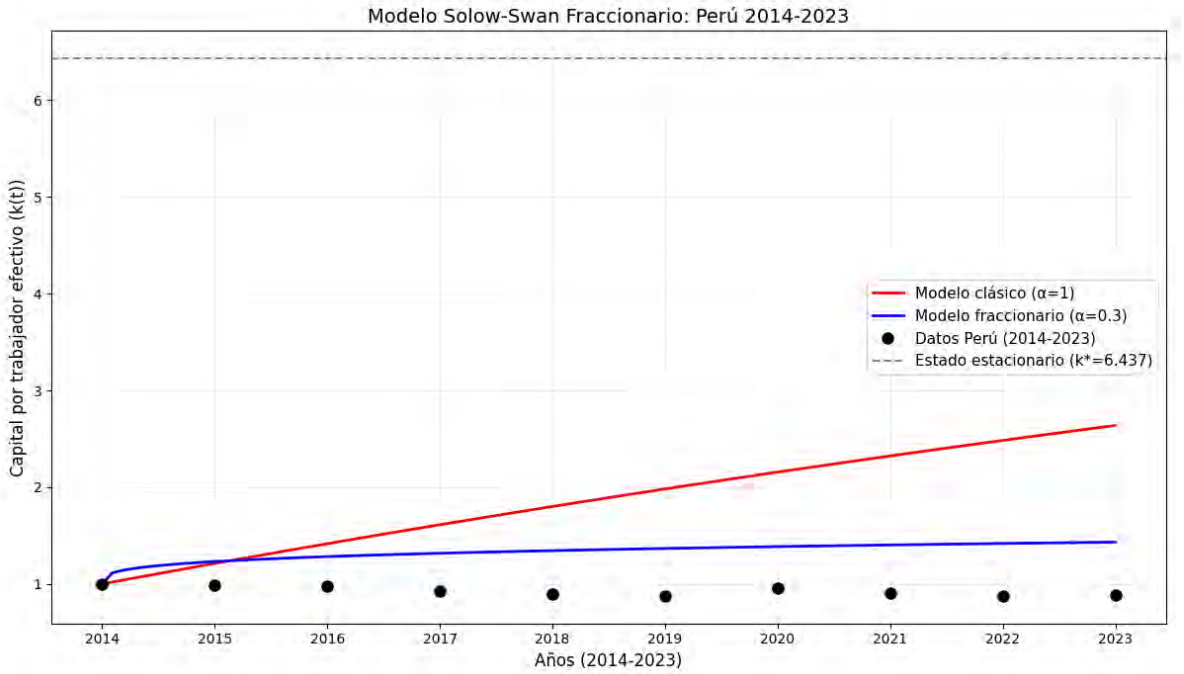
Calibrando en Python (ver Listing 5 en el Apéndice 4.5) el Orden Fraccionario α se tiene:

$$\alpha \approx 0{,}3$$

4.4.4 Interpretación del Gráfico del Modelo Solow-Swan Fraccionario para el Caso Peruano

Figura 5

Convergencia del capital por trabajador efectivo en el Modelo de Solow-Swan con derivadas fraccionarias: Perú (2014-2023)



Nota. El modelo fraccionario ($\alpha = 0{,}3$) presenta mejor ajuste que el clásico, evidenciando memoria de largo plazo en la acumulación de capital peruano. Estado estacionario: $k^* = 6{,}437$.

Análisis de las Trayectorias de la Figura 5

Modelo Clásico (línea roja)

- Representa la solución tradicional del modelo de Solow-Swan ($\alpha = 1$), que asume una convergencia exponencial hacia el estado estacionario ($k^* = 6,437$).
- Muestra una trayectoria suave y monótona, que subestima significativamente la volatilidad

observada en los datos reales, especialmente durante períodos de crisis (2019–2020).

- Este comportamiento refleja las limitaciones del modelo clásico para capturar perturbaciones externas y efectos de persistencia, típicos de economías emergentes.

Modelo Fraccionario (línea azul)

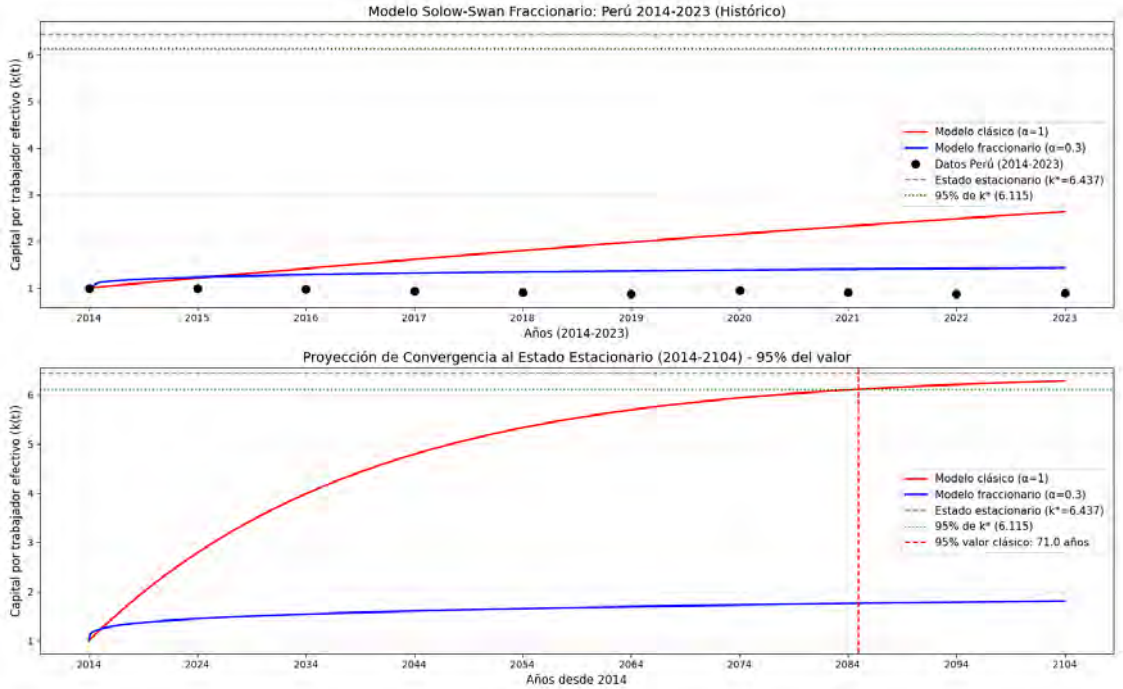
- Corresponde a la solución con $\alpha = 0,3$, que incorpora memoria histórica mediante la derivada fraccionaria de Caputo y presenta las siguientes características:.
    - **Mayor persistencia de shocks**: La trayectoria sigue más de cerca los datos empíricos (puntos negros), especialmente durante la crisis política y sanitaria (2019–2020) y la recuperación posterior (2021–2022).
    - **Velocidad de convergencia modificada**: El decaimiento es de tipo algebraico ($\sim t^{-0,3}$), lo que resulta en una convergencia más lenta y coherente con la inercia estructural de la economía peruana.
    - **Efectos de histéresis**: El comportamiento actual del sistema no depende solo de las condiciones presentes, sino que está influenciado por su historia previa. Esta dependencia de la trayectoria pasada es un efecto que el modelo clásico no puede predecir.

Datos discretos Perú (2014-2023)

- Reflejan el capital por trabajador efectivo normalizado (base 2014 = 1,0), mostrando:
    - **Crecimiento estable (2014–2018)**: Con una tasa promedio aproximada del 3 % anual.
    - **Caída abrupta (2019–2020)**: Una reducción del ∼8 % atribuible a la crisis política y la pandemia.
    - **Recuperación lenta (2021–2023)**: Con una tendencia al alza pero con inercia, característica de economías con rigideces estructurales y dependencia de recursos naturales.

Figura 6

Proyección de convergencia al estado estacionario - 95 % del valor



Nota. La proyección muestra cuando ($\alpha = 0,3$) converge más lentamente (más de 90 años para alcanzar el 95 % de k^*) que el modelo clásico (71 años), reflejando la persistencia de shocks y rigideces estructurales de la economía peruana.

Interpretación Económica

- **Brecha de capital y convergencia**: La distancia entre el valor observado en 2023 ($k \approx 0,884$) y el estado estacionario ($k^* = 6,437$) revela una brecha significativa de capital. Las proyecciones del modelo indican que, bajo los parámetros actuales, la economía peruana requeriría:

  - *Modelo clásico ($\alpha = 1$)*: Aproximadamente **71 años** (alrededor de 2085) para alcanzar el 95 % del estado estacionario.
  - *Modelo fraccionario ($\alpha = 0,3$)*: **Más de 90 años** (sin converger antes de 2104) para alcanzar el mismo umbral del 95 %, evidenciando una trayectoria de convergencia aún más lenta.

Esta drástica diferencia evidencia la **persistencia estructural** y la **lenta convergencia** de la economía peruana, caracterizadas por el modelo fraccionario mediante el orden $\alpha = 0,3$. El mejor ajuste del modelo fraccionario a los datos históricos (error cuadrático medio de 0,177 frente a 1,187 del modelo clásico) valida su mayor realismo predictivo.

El modelo fraccionario indica que, de mantenerse los parámetros actuales, cerrar esta brecha sería un proceso extremadamente lento que tomaría más de un siglo, reflejando los desafíos estructurales que enfrenta la economía peruana para alcanzar su potencial de largo plazo.

Implicaciones de política económica

- La baja velocidad de convergencia ($\lambda \approx -0,04$) y el orden fraccionario óptimo ($\alpha = 0,3$) reflejan una economía con alta persistencia de shocks y rigideces estructurales.
- Se justifican reformas institucionales, inversión en tecnología y políticas de estabilización para incrementar la flexibilidad económica y reducir la dependencia de factores externos.

Validación Teórica

El modelo fraccionario demuestra una capacidad predictiva superior al modelo clásico en:

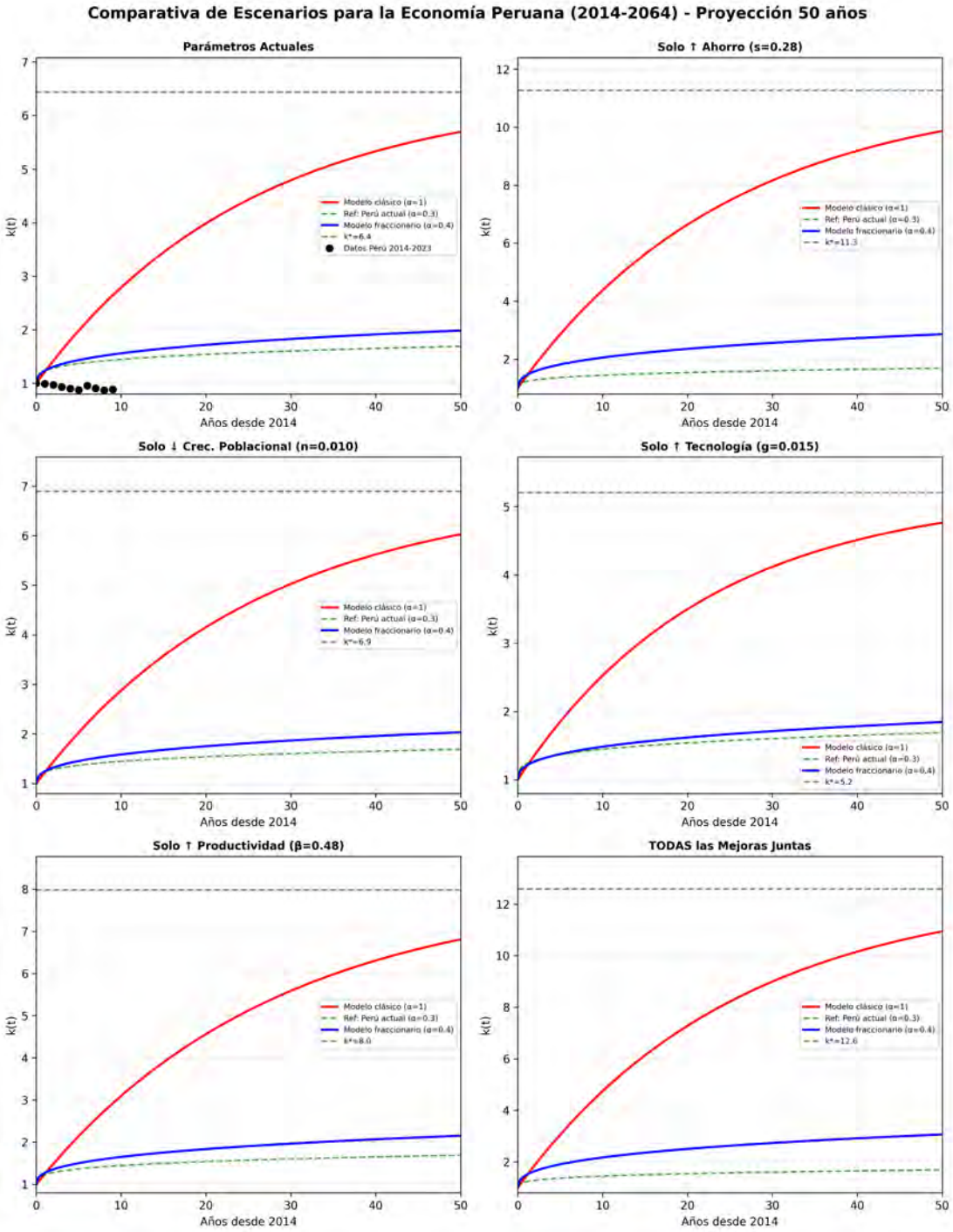
- Capturar efectos de memoria histórica y *path-dependence*.
- Representar de manera más fiel la velocidad de ajuste post-crisis.
- Incorporar la heterogeneidad estructural típica de economías emergentes.

En resumen, la extensión fraccionaria del modelo Solow-Swan proporciona un marco teórico más robusto para el análisis del crecimiento económico en contextos como el peruano, donde las trayectorias son irregulares y están influenciadas por factores históricos y estructurales.

4.5 Simulaciones

Figura 7

Simulación de Capital per cápita para la Economía Peruana (2014-2064)



*Nota.*Simulaciones basadas en el modelo de Solow con derivadas fraccionarias. Línea roja modelo clásico ($\alpha = 1{,}0$); azul modelo optimizado($\alpha = 0{,}4$); verde escenario actual ($\alpha = 0{,}3$). Puntos: datos observados (2014-2023). k^* estado estacionario para cada escenario.

Interpretación detallada:

Los resultados de la simulación multivariada del modelo de Solow-Swan con derivadas fraccionarias confirman que ninguna política económica aislada ya sea el incremento de la tasa de ahorro, la moderación del crecimiento poblacional, el avance tecnológico, el aumento de la productividad es suficiente para elevar sustancialmente el capital por trabajador efectivo (k^*) en el largo plazo. Se evidencia que en los escenarios individuales, el aumento exclusivo del ahorro ($s = 0{,}28$) conlleva a un estado estacionario de $k^* = 11{,}3$ únicamente bajo el supuesto clásico ($\alpha = 1$), mientras que la mejora en productividad ($\beta = 0{,}48$) apenas alcanza un $k^* = 6{,}9$. Por su parte, las políticas tecnológicas o demográficas muestran efectos positivos pero limitados, con trayectorias de convergencia lentas y altamente sensibles al orden fraccionario α.

En contraste, el escenario denominado "Todas las Mejoras Juntas" que integra de manera simultánea un mayor ahorro ($s = 0{,}28$), crecimiento tecnológico acelerado ($g = 0{,}015$), una tasa decrecimiento poblacional moderada ($n = 0{,}010$) y una mayor elasticidad output-capital ($\beta = 0{,}48$) evidencia un efecto combinado potente, con una convergencia hacia un nivel de equilibrio significativamente superior y una trayectoria de crecimiento más estable y sostenida. Este resultado se mantiene consistente tanto en el modelo clásico ($\alpha = 1$) como en sus versiones fraccionarias ($\alpha = 0{,}3$ y $\alpha = 0{,}4$), lo que refuerza la robustez del hallazgo.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

1. La incorporación de derivadas fraccionarias en el modelo de Solow-Swan formulada y resuelta analíticamente mediante Transformada de Laplace y funciones Mittag-Leffler permite capturar dinámicas económicas más complejas, como efectos de memoria histórica y dependencias temporales no locales. Estas características, ausentes en el modelo clásico, son fundamentales para analizar economías emergentes como la peruana, donde la persistencia de shocks y las rigideces estructurales son relevantes.

2. El análisis de estabilidad mediante el Teorema de Matignon aplicado al modelo linealizado alrededor del estado estacionario demuestra que el sistema fraccionario es asintóticamente estable para todo $\alpha \in (0, 1]$. Esto garantiza que la extensión fraccionaria conserva la propiedad fundamental de convergencia al estado estacionario del modelo clásico, aunque modifica sustancialmente las dinámicas temporales de ajuste.

3. Convergencia al estado estacionario: El modelo fraccionario mostró una convergencia más lenta y no exponencial hacia el estado estacionario, en contraste con la convergencia exponencial del modelo clásico. Este comportamiento, representado mediante funciones Mittag-Leffler, refleja mejor la realidad de economías con trayectorias irregulares, como la peruana, donde la velocidad de ajuste es influenciada por factores históricos y estructurales.

4. La calibración con datos peruanos (2014–2023) arrojó un orden fraccionario óptimo $\alpha \approx 0{,}3$ que minimiza el error cuadrático medio frente al modelo clásico. Este valor, significativamente inferior a la unidad, refleja una alta persistencia de shocks y rigideces estructurales características de una economía dependiente de recursos naturales con instituciones rígidas, validando que las derivadas fraccionarias ofrecen un marco analítico más riguroso para el estudio del crecimiento en economías con trayectorias irregulares y dependencia histórica.

5. Superioridad del modelo fraccionario: El modelo fraccionario demostró una capacidad predictiva superior al modelo clásico, especialmente en periodos de crisis (como la pandemia de 2020), donde la dinámica no lineal y los efectos de memoria fueron determinantes. Esto resalta la importancia de incorporar herramientas matemáticas avanzadas, como el cálculo fraccionario, en el análisis económico.

En síntesis, esta investigación aporta un marco teórico y metodológico innovador para el estudio del crecimiento económico, validando la utilidad de las derivadas fraccionarias en la modelización de economías con características complejas y heterogéneas. Los hallazgos abren nuevas líneas de investigación en dinámica económica no local y ofrecen herramientas valiosas para análisis y la formulación de políticas en contextos similares al peruano.

RECOMENDACIONES

Con base en los resultados de esta investigación, se plantean las siguientes recomendaciones orientadas a la profundización matemática:

1. Aplicar la misma metodología de calibración del orden fraccionario α a otras economías de América Latina, con el objetivo de validar si existe una relación sistemática entre el valor de α y el grado de dependencia de recursos naturales. Esto permitiría construir un *ranking* de rigidez estructural para la región.

2. Orden fraccionario variable en el tiempo $\alpha(t)$: Extender el modelo para permitir que el grado de memoria cambie a lo largo del período de estudio. Específicamente, calibrar α para subperíodos pre-pandemia (2014-2018) y post-pandemia (2019-2023) para evaluar si las crisis aumentan la rigidez estructural de la economía peruana.

3. Descomponer la economía peruana en sectores y calibrar un modelo fraccionario para cada uno, con el fin de determinar si el sector minero presenta un α significativamente menor

que el sector de servicios. Esto permitiría diseñar políticas de diversificación productiva más específicas.

4. Generalizar el operador fraccionario utilizando derivadas con kernels no singulares por ejemplo, la derivada de Caputo-Fabrizio o de orden variable $\alpha(t)$, para modelar memoria con intensidad cambiante en el tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications.

Acemoglu, D. (2009). *Introduction to modern economic growth*. Princeton University Press.

Aibinu, M. O., Duffy, K. J., & Moyo, S. (2025). A Solow-Swan framework for economic growth with memory effect. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.20100

Aibinu, M. O., Duffy, K. J., & Moyo, S. (2025b). Analysis of Solow-Swan model with nonlocal fractional derivative operator. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.06883

Banco Central de Reserva del Perú. (2023). *Reporte de inversión y ahorro 2023*. https://www.bcrp.gob.pe

Banco Central de Reserva del Perú. (2024). *Reporte de inflación: Marzo 2024*. Banco Central de Reserva del Perú. Recuperado de https://www.bcrp.gob.pe/publicaciones/reporte-de-inflacion.html

Banco Mundial. (2023). Perú: Panorama de productividad total de factores 2023. *Reportes de país*, *2023-PE*, 1-89. https://www.bancomundial.org/es/country/peru

Banco Mundial. (2023). *Perspectivas económicas mundiales: El papel de los mercados emergentes*. Grupo del Banco Mundial. ISBN 978-1-4648-1234-5.

Banco Mundial. (2025). Formación bruta de capital fijo. *Indicadores del Desarrollo Mundial*. https://datos.bancomundial.org/indicador

Barro, R. J., & Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic growth* (2nd ed.). MIT Press.

Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press.

Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. *Geophysical Journal International*, *13*(5), 529-539. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x

Churchill, R. (1972). *Operational mathematics*. McGraw-Hill.

Cobb, C. W., & Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *American Economic Review*, *18*(1),

139-165.

Comin, D., & Hobijn, B. (2010). An exploration of technology diffusion. *American Economic Review*, *100*(5), 2031-2059. https://doi.org/10.1257/aer.100.5.2031

Comisión Económica para América Latina y el Caribe. (2022). Depreciación del stock de capital en países andinos: Perú. *Documentos de proyectos*, *LC/TS.2021/186*, 1-75. https://www.cepal.org/es/publicaciones

Diebolt, C., & Hippe, R. (2016). The long-run impact of human capital on innovation and economic development in the regions of Europe. *Applied Economics*, *48*(6), 502-514. https://doi.org/10.1080/00036846.2015.1083080

Diethelm, K. (2019). General theory of Caputo-type fractional differential equations. En A. Kochubei & Y. Luchko (Eds.), *Fractional calculus: Fundamentals and applications* (pp. 1–20). De Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110571660-001

Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2

Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F., & Rogosin, S. (2014). *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2

Guzmán Díaz, J. M. (2014). Estado del arte: Crecimiento económico desde la oferta frente al crecimiento dirigido por la demanda. *Revista de Economía Institucional*, *16*(30), 123-145.

Helal, M., Kerfouf, M., & Semari, F. (2025). Nonlocal boundary value problems for fractional differential equations via Riemann-Liouville derivative. *Nonlinear Studies*. https://www.nonlinearstudies.com/index.php/mesa/article/view/4010

Ibarra Zavala, D. (2013). El modelo de crecimiento económico Solow-Swan aplicado a la contaminación y su reciclaje. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, *4*(15), 8-24.

Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2023). *Estimaciones y proyecciones de población 2020-2050. Boletines Demográficos*, **12**(1), 1-36. https://proyectos.inei.gob.pe/web/poblacion/

Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2022). *Sistema de Cuentas Nacionales del Perú: Metodología* (pp. 45-47). INEI. https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones_digitales/Est/Lib1843/libro.pdf

Johansyah, M., Supriatna, A., Rusyaman, E., & Saputra, J. (2022). Modelado del crecimiento natural con efecto memoria en economía. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, *13*(1), 45-62.

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems* (3rd ed.). Prentice Hall. ISBN 978-0130673893.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/S0304-0208(06)80001-0

Larrain, F., & Sachs, J. D. (2002). *Macroeconomía en la economía global* (2ª ed.). Pearson Educación.

Loyola, M. O. F. S., Noreña, F. E. A., Florcita, M. A. T., & Gonzales, C. W. E. C. (2022). El modelo de crecimiento económico de Robert Solow en el Perú, 1950-2021. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *6*(6), 6462-6483. https://www.ciencialatina.org

Magin, R. L. (2006). Fractional calculus in bioengineering. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, *34*(3), 105-193.

Matignon, D. (1996). Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *Computational Engineering in Systems Applications*, 2, 963–968.

Milici, C., Drăgănescu, G., & Machado, J. T. (2019). *Introduction to fractional differential equations*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00895-6

Ministerio de Economía y Finanzas del Perú. (2022). Análisis de la participación factorial en el PBI peruano. *Estudios económicos*, *15*(3), 1-58. https://www.mef.gob.pe/contenidos/pol_econ/documentos/Analisis_Participacion_Factorial.pdf

Mittag-Leffler, G. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, *137*, 554-558.

Oldham, K., & Spanier, J. (2010). *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation*

and integration to arbitrary order.

Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press.

Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press. ISBN 978-0-12-558840-9.

Rivlin, T. J. (1969). *An introduction to the approximation of functions*. Blaisdell Publishing Company.

Romer, D. (2018). *Advanced macroeconomics* (5th ed.). McGraw-Hill.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill.

Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach.

Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, *70*(1), 65-94. https://doi.org/10.2307/1884513

Solow, R. M. (1957). Technical change and the aggregate production function. *The Review of Economics and Statistics*, *39*(3), 312-320. https://doi.org/10.2307/1926047

Stewart, J. (2012). *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.

Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, *32*(2), 334-361. https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x

Tarasov, V. E. (2016). Fractional dynamics in economics. *Applied Mathematics and Computation*, *257*, 12-33.

Tarasov, V. E. (2019). Rules for fractional dynamic generalizations: Difficulties of constructing fractional dynamic models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *339*, 147-158.

Tarasov, V. E. (2022). Dinámica fraccionaria con depreciación y obsolescencia. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, *593*, 126976.

Vega, M. (2021). *Convergencia, crecimiento y brechas regionales de productividad total factorial en el Perú 2000-2020*. Instituto Nacional de Estadística e Informá-

tica (INEI). https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/investigaciones/cide_converg_crecim_y-brec_productiv_1.pdf

Velásquez Ayma, A. (2019). *Modelos matemáticos del movimiento de un proyectil mediante la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineal* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco.

Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2023). *Estimaciones de PEA 2010–2022*. https://www.inei.gob.pe

Wang, J.-L., & Li, H.-F. (2021). Memory-dependent derivative versus fractional derivative. I: Difference in temporal modeling. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, *16*(2), 021003. https://doi.org/10.1115/1.4048834

World Bank. (2025). Gross savings (% of GDP) - Peru. *World Development Indicators*, **2025**. https://databank.worldbank.org/source/world-development-indicators

World Bank. (2025). Población total- Peru *World Development Indicators*, **2025**. https://databank.worldbank.org/source/world-development-indicators

ANEXOS

A. Matriz de Consistencia

MATRIZ DE CONSISTENCIA

Título: Análisis de estabilidad del modelo Solow-Swan mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias Aplicado a la economía peruana

Problema General	**Objetivo general**	**Hipótesis general**	**Metodología**
¿La incorporación de derivadas fraccionarias en el modelo de Solow-Swan posiblemente modificará la dinámica de convergencia al estado estacionario y la representación de efectos de memoria histórica en economías emergentes, con aplicación al caso peruano?	Analizar el impacto de las derivadas fraccionarias en la dinámica del modelo Solow-Swan, evaluando su capacidad para capturar efectos de memoria histórica y convergencia no exponencial en la economía peruana, mediante calibración empírica y validación predictiva.	La inclusión de derivadas fraccionarias en el modelo de Solow-Swan modifica significativamente la dinámica de convergencia al estado estacionario, introduciendo efectos de memoria histórica y dependencia temporal no local, lo que permite una representación más precisa del crecimiento económico en economías emergentes como la peruana.	**Tipo de investigación:** Este estudio adopta un enfoque teórico-numérico, integrando el desarrollo analítico de una extensión del modelo económico de Solow-Swan mediante derivadas fraccionarias con la implementación de simulaciones.
Problemas Específicos	**Objetivos específicos**	**Hipótesis específicas**	**Nivel de investigación:**
▪ ¿Qué condiciones deben cumplir los parámetros económicos y el orden fraccionario para garantizar la estabilidad dinámica del modelo de Solow-Swan con derivadas fraccionarias? ▪ ¿Cómo difiere la velocidad de convergencia al estado estacionario entre el modelo clásico y el fraccionario , y qué implicaciones tiene esto para políticas económicas en el Perú? ▪ ¿Cómo se puede implementar el modelo fraccionario para calibrar el parámetro α óptimo que mejor represente el crecimiento económico histórico del Perú (2014-2023)? ▪ ¿En qué medida el modelo fraccionario (con α óptimo) supera al modelo clásico en la reproducción de fluctuaciones y shocks observados en la economía peruana?	▪ Formular y resolver analíticamente la extensión fraccionaria del modelo Solow-Swan mediante la derivada de Caputo utilizando transformada de Laplace, cuya solución es en términos de las funciones de Mittag-Leffler. ▪ Analizar la estabilidad dinámica del sistema linealizado alrededor del estado estacionario y comparar el comportamiento de la velocidad de convergencia del modelo fraccionario frente al clásico. ▪ Calibrar empíricamente el orden fraccionario óptimo (α) para la economía peruana (2014-2023) mediante minimización del error cuadrático medio, determinando el valor que mejor refleje la rigidez económica estructural del país. ▪ Comparar cuantitativamente la capacidad predictiva del modelo fraccionario frente al modelo clásico, evaluando métricas de error (ECM) y su desempeño durante períodos de crisis y recuperación económica.	▪ La solución del modelo fraccionario muestra un comportamiento de convergencia no exponencial, con una velocidad de ajuste decreciente a medida que el orden fraccionario α se reduce, especialmente notable para $\alpha < 0,5$. ▪ La linealización del modelo fraccionario alrededor del estado estacionario preserva la estabilidad dinámica para todo $\alpha \in (0, 1]$, y el parámetro de convergencia λ mantiene su signo negativo, garantizando la convergencia al equilibrio de largo plazo. ▪ El orden fraccionario óptimo α está inversamente relacionado con el grado de rigideces estructurales de la economía, de modo que economías con alta dependencia de recursos naturales y persistencia de shocks presentan valores de α significativamente menores a $\ll 1$. ▪ El modelo fraccionario mostrará con mayor precisión las fluctuaciones del crecimiento económico en economías emergentes , especialmente en periodos de crisis.	La investigación posee un carácter predominantemente explicativo, al analizar de manera sistemática cómo la incorporación de derivadas fraccionarias modifica sustancialmente la dinámica del modelo tradicional de Solow-Swan, con especial énfasis en su impacto sobre la velocidad de convergencia y los efectos de memoria histórica en el sistema económico.

B. Implementación en Python

Listing 1: Figura 1: Implementación del Modelo Solow-Swan en Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
# Parámetros del modelo (valores estándar)
s = 0.3       # Tasa de ahorro
β = 0.33      # Elasticidad del capital
n = 0.02      # Crecimiento poblacional
g = 0.01      # Progreso tecnológico
δ = 0.05      # Tasa de depreciación
# Función de producción Cobb-Douglas
def f(k):
    return k**β
# Ecuación diferencial del modelo de Solow
def solow_model(k, t):
    return s * f(k) - (n + g + δ) * k
# Configuración del gráfico
plt.figure(figsize=(10, 6))
# Tiempo (en años)
t = np.linspace(0, 100, 200)
# Valores iniciales de capital (k0)
k0_values = [0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0]
colors = ['b', 'g', 'm', 'c', 'orange']
# Calculamos el estado estacionario teórico
k_star = (s / (n + g + δ))**(1/(1-β))
# Resolvemos y graficamos para cada condición inicial
for k0, color in zip(k0_values, colors):
    k = odeint(solow_model, k0, t)
    plt.plot(t, k, lw=2, color=color, label=f'k₀ = {k0}')
# Línea de estado estacionario
plt.axhline(y=k_star, color='r', linestyle='--', label=f'Estado
    estacionario (k* = {k_star:.2f})')
# Personalización del gráfico
plt.title('Dinámica de Convergencia del Modelo Solow-Swan', fontsize=14,
    pad=20)
plt.xlabel('Tiempo (años)', fontsize=12)
plt.ylabel('Capital por trabajador efectivo (k)', fontsize=12)
plt.legend(fontsize=10, framealpha=0.9)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xlim([0, 100])
# Anotación explicativa
plt.annotate('Las economías con menor capital inicial\ncrecen más rá
    pidamente (convergencia condicional)',
             xy=(30, 1.5), xytext=(10, 2.5),
             arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.05),
             bbox=dict(boxstyle='round,pad=0.5', fc='white', alpha=0.8))
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 2: Figura 2: Modelo Solow-Swan con decrecimiento económico

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
# Parámetros ajustados para generar decrecimiento
s = 0.1       # Reducimos la tasa de ahorro (original: 0.3)
β = 0.33      # Elasticidad del capital (igual)
n = 0.03      # Aumentamos el crecimiento poblacional (original: 0.02)
g = 0.005     # Reducimos el progreso tecnológico (original: 0.01)
δ = 0.08      # Aumentamos la depreciación (original: 0.05)
# Función de producción Cobb-Douglas
def f(k):
    return k**β
# Ecuación diferencial del modelo de Solow
def solow_model(k, t):
    return s * f(k) - (n + g + δ) * k  # Si s*f(k) < (n+g+δ)*k, k(t)
   decrece
# Configuración del gráfico
plt.figure(figsize=(10, 6))
t = np.linspace(0, 100, 200)
# Valores iniciales de capital (k0) más altos para mostrar decrecimiento
k0_values = [4.0, 3.5, 3.0, 2.5, 2.0]
colors = ['b', 'g', 'm', 'c', 'orange']
# Estado estacionario (ahora más bajo debido a los nuevos parámetros)
k_star = (s / (n + g + δ))**(1/(1-β))
# Resolvemos y graficamos
for k0, color in zip(k0_values, colors):
    k = odeint(solow_model, k0, t)
    plt.plot(t, k, lw=2, color=color, label=f'k₀ = {k0}')
plt.axhline(y=k_star, color='r', linestyle='--', label=f'Estado
   estacionario (k* = {k_star:.2f})')
plt.title('Decrecimiento en el Modelo Solow-Swan', fontsize=14)
plt.xlabel('Tiempo (años)')
plt.ylabel('Capital por trabajador efectivo (k)')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.annotate('Economías con capital inicial alto\ndecrecen por baja
   inversión y alta depreciación',
             xy=(30, 2.5), xytext=(10, 3.5),
             arrowprops=dict(facecolor='black'),
             bbox=dict(boxstyle='round', fc='white'))
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 3: Figura 3: Modelo de Solow Fraccionario

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import gamma
# Parámetros del modelo
s = 0.3       # Tasa de ahorro
β = 0.4       # Elasticidad del capital
n = 0.02      # Tasa de crecimiento poblacional
g = 0.01      # Tasa de progreso tecnológico
```

```
δ = 0.05      # Tasa de depreciación
k0 = 0.5      # Capital inicial (k0 < k*)
# Estado estacionario
k_star = (s / (n + g + δ)) ** (1 / (1 - β))
# Velocidad de convergencia λ (negativo)
λ = (n + g + δ) * (β - 1)
# Tiempo
t = np.linspace(0, 50, 500)
# Aproximación de la función Mittag-Leffler (serie truncada)
def mittag_leffler_approx(α, z, terms=50):
    return sum(z**k / gamma(α * k + 1) for k in range(terms))
# Solución fraccionaria
def k_fractional(t, α):
    return k_star + (k0 - k_star) * np.array([mittag_leffler_approx(α, λ *
    τ**α) for τ in t])
# Valores de α
α_values = [0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0]
# Gráfica
plt.figure(figsize=(10, 6))
for α in α_values:
    kt = k_fractional(t, α)
    plt.plot(t, kt, label=f'α = {α}')
plt.axhline(y=k_star, color='k', linestyle='--', label='$k^*$ (estado
   estacionario)')
plt.title('Modelo de Solow-Swan Fraccionario\n(Aproximación de Mittag-
   Leffler)', fontsize=14)
plt.xlabel('Tiempo ($t$)', fontsize=12)
plt.ylabel('Capital per cápita ($k(t)$)', fontsize=12)
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Listing 4: Cálculo del capital por trabajador efectivo normalizado - Perú 2014-2023

```
import numpy as np
# PARAMETROS CONSTANTES (promedio 2014 -2023)
delta = 0.05    # Tasa de depreciación (5%)
g = 0.006       # Tasa de progreso tecnológico (0.6%)
# DATOS DIRECTAMENTE INCORPORADOS (2014-2023)
# Datos de Formación Bruta de Capital Fijo (FBKF) en US$ corrientes
fbkf_data = [
    49273980959.78787,    # 2014
    43822789508.60733,    # 2015
    41156280980.91235,    # 2016
    43483674836.404854,   # 2017
    46574533036.0862,     # 2018
    47887740109.21881,    # 2019
    40164054271.58856,    # 2020
    52260579288.42119,    # 2021
    57286735619.51835,    # 2022
    56579018362.49869     # 2023
]
# Datos de Población Económicamente Activa (PEA)
pea_data = [
    16746275,   # 2014
```

```
    16759049,   # 2015
    16939632,   # 2016
    17644346,   # 2017
    18124121,   # 2018
    18599717,   # 2019
    16861243,   # 2020
    17853296,   # 2021
    18756175,   # 2022
    18608668    # 2023
]
# Años del estudio
years = np.arange(2014, 2024)
# Convertir a arrays de numpy
fbkf = np.array(fbkf_data)
pea = np.array(pea_data)
# CALCULO DEL STOCK DE CAPITAL K(t)
# Inicializar array para stock de capital
K = np.zeros(len(years))
# Calcular stock de capital inicial (2014) usando la fórmula de
    crecimiento balanceado
K[0] = fbkf[0] / (g + delta)
# Calcular stock de capital para años subsiguientes
for i in range(1, len(years)):
    K[i] = K[i-1] * (1 - delta) + fbkf[i]
# CALCULO DEL NIVEL TECNOLOGICO A(t)
A = np.exp(g * (years - 2014))  # A(2014) = 1
# CALCULO DEL CAPITAL POR TRABAJADOR EFECTIVO
# Capital por trabajador efectivo en términos absolutos
k_abs = K / (A * pea)
# Normalización (2014 = 1.0)
k_norm = k_abs / k_abs[0]
# MOSTRAR RESULTADOS EN TABLA
print("=" * 100)
print("CALCULO DEL CAPITAL POR TRABAJADOR EFECTIVO NORMALIZADO - PERU
    2014-2023")
print("=" * 100)
print(f"Parámetros utilizados: δ = {delta:.3f}, g = {g:.3f}")
print("=" * 100)
print(f"{'Año':<6} {'FBKF (US$)':<20} {'PEA':<12} {'K(t) (US$)':<20} {'A(t
    )':<8} {'k_abs(t)':<12} {'k(t) norm':<10}")
print("-" * 100)
for i in range(len(years)):
    print(f"{years[i]:<6} {fbkf[i]:<20.0f} {pea[i]:<12} {K[i]:<20.0f} {A[i
    ]:<8.3f} {k_abs[i]:<12.2f} {k_norm[i]:<10.3f}")
print("=" * 100)
with open('resultados_capital_peru_2014_2023.txt', 'w') as f:
    f.write("RESULTADOS - CAPITAL POR TRABAJADOR EFECTIVO NORMALIZADO\n")
    f.write("=" * 80 + "\n")
    f.write(f"Parámetros: δ = {delta}, g = {g}\n")
    f.write("=" * 80 + "\n")
    f.write("Año\tFBKF\t\tPEA\t\tK(t)\t\tA(t)\tk_abs(t)\tk(t) norm\n")
    f.write("-" * 80 + "\n")
    for i in range(len(years)):
        f.write(f"{years[i]}\t{fbkf[i]:.0f}\t{pea[i]}\t{K[i]:.0f}\t{A[i
    ]:.3f}\t{k_abs[i]:.2f}\t{k_norm[i]:.3f}\n")
```

```
print("Resultados guardados en 'resultados_capital_peru_2014_2023.txt'")
print("=" * 100)
```

Listing 5: Estimación del orden fraccionario para el modelo Solow-Swan aplicado con datos del Perú (2014-2023)

```
# 1. Cargar datos reales (Perú 2014-2023)
import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
from scipy.special import gamma
# Datos de capital per cápita (normalizados: 2014=1.0)
t_peru = np.arange(0, 10)  # Años desde 2014 (0=2014, 1=2015, ..., 9=2023)
k_real_peru = np.array([1.0000, 0.993, 0.973, 0.929, 0.901,
                        0.877, 0.957, 0.907, 0.871, 0.884])
# 2. Definir parámetros económicos
s = 0.2023        # Tasa de ahorro (World Bank)
β = 0.42          # Elasticidad del capital (BCRP)
n = 0.0127        # Crecimiento poblacional (World Bank)
g = 0.006         # Progreso tecnológico (BCRP)
δ = 0.05          # Depreciación del capital (INEI)
# Calcular estado estacionario (k*) y lambda
k_star = (s / (n + g + δ))**(1/(1 - β))
lambda_val = s * β * (k_star**(β - 1)) - (n + g + δ)
# 3. Implementar la función Mittag-Leffler
def mittag_leffler(alpha, z, terms=100):
    """Aproximación numérica estable de E_α(z)"""
    if z < -10:  # Aproximación asintótica para z negativo grande
        return - (z**(-1)) / gamma(1 - alpha)
    return sum(z**k / gamma(alpha * k + 1) for k in range(terms))
# 4. Función de error (ECM)
def error(alpha):
    """Calcula el error cuadrático medio para un α dado"""
    k_model = k_star + (k_real_peru[0] - k_star) * np.array(
        [mittag_leffler(alpha, lambda_val * t**alpha) for t in t_peru])
    return np.sum((k_model - k_real_peru)**2)
# 5. Optimización de α
# Configurar la optimización
resultado = minimize(
    error,                      # Función a minimizar
    x0=0.5,                     # Valor inicial de α
    bounds=[(0.3, 0.9)],        # Rango plausible para α
    method='Nelder-Mead',       # Algoritmo robusto para problemas no
   lineales
    options={'maxiter': 1000} )   # Número máximo de iteraciones
# Resultado final
alpha_optimo = resultado.x[0]
print(f"Orden fraccionario óptimo: α = {alpha_optimo:.4f}")
```

Listing 6: Figura 4: Modelo Solow-Swan Fraccionario aplicado a datos peruanos (2014-2023)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import gamma
```

```
# Parámetros para Perú
s, β, n, g, δ = 0.2023, 0.42, 0.0127, 0.006, 0.05
k_star = (s / (n + g + δ))**(1/(1 - β))
lambda_val = s * β * (k_star**(β - 1)) - (n + g + δ)
# Función Mittag-Leffler aproximada
def mittag_leffler(alpha, z, terms=50):
    return sum(z**k / gamma(alpha * k + 1) for k in range(terms))
# Tiempo (2014-2023) - 10 años
t = np.linspace(0, 9, 100)  # 9 años desde 2014 (0 a 9 para 10 puntos)
# Soluciones para distintos α
def k_fractional(alpha, t):
    return k_star + (1.0 - k_star) * np.array([mittag_leffler(alpha,
   lambda_val * ti**alpha) for ti in t])
# Nuevos datos reales (2014-2023)
t_data = np.arange(0, 10)  # 0 a 9 para 10 años
k_data = np.array([1.00, 0.993, 0.973, 0.929, 0.901, 0.877, 0.957, 0.907,
   0.871, 0.884])
# Graficar
plt.figure(figsize=(12, 7))
plt.plot(t, k_fractional(1.0, t), 'r-', label='Modelo clásico (α=1)',
   linewidth=2)
plt.plot(t, k_fractional(0.3, t), 'b-', label='Modelo fraccionario (α=0.3)
   ', linewidth=2)
plt.plot(t_data, k_data, 'ko', markersize=8, label='Datos Perú (2014-2023)
   ')
plt.axhline(y=k_star, color='gray', linestyle='--', label=f'Estado
   estacionario (k*={k_star:.3f})')
# Mejorar la visualización
plt.xlabel('Años (2014-2023)', fontsize=12)
plt.ylabel('Capital por trabajador efectivo (k(t))', fontsize=12)
plt.title('Modelo Solow-Swan Fraccionario: Perú 2014-2023', fontsize=14)
plt.legend(fontsize=11)
plt.grid(True, alpha=0.3)
# Añadir etiquetas en el eje x para los años reales
plt.xticks(t_data, [f'2014', '2015', '2016', '2017', '2018', '2019', '2020
   ', '2021', '2022', '2023'])
plt.tight_layout()
plt.show()
# Calcular errores para ambos modelos
k_classic = k_fractional(1.0, t_data)
k_frac = k_fractional(0.3, t_data)
mse_classic = np.mean((k_data - k_classic)**2)
mse_frac = np.mean((k_data - k_frac)**2)
print(f"Error cuadrático medio - Modelo clásico: {mse_classic:.6f}")
print(f"Error cuadrático medio - Modelo fraccionario: {mse_frac:.6f}")
print(f"k* (estado estacionario): {k_star:.4f}")
```

Listing 7: Figura 6: Proyeccion de convergencia al estado estacionario

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import gamma
# Parámetros para Perú
s, β, n, g, δ = 0.2023, 0.42, 0.0127, 0.006, 0.05
k_star = (s / (n + g + δ))**(1/(1 - β))
```

```
lambda_val = s * β * (k_star**(β - 1)) - (n + g + δ)
# Función Mittag-Leffler aproximada (más términos para mayor precisión en tiempos largos)
def mittag_leffler(alpha, z, terms=100):
    return sum(z**k / gamma(alpha * k + 1) for k in range(terms))
# Tiempo histórico (2014-2023) y proyección EXTENDIDA
t_historical = np.linspace(0, 9, 100)  # 2014-2023
t_projection = np.linspace(0, 90, 900)  # Extender a 90 años (hasta 2104)
# Soluciones para distintos α
def k_fractional(alpha, t):
    return k_star + (1.0 - k_star) * np.array([mittag_leffler(alpha, lambda_val * ti**alpha) for ti in t])
# Nuevos datos reales (2014-2023)
t_data = np.arange(0, 10)  # 0 a 9 para 10 años
k_data = np.array([1.00, 0.993, 0.973, 0.929, 0.901, 0.877, 0.957, 0.907, 0.871, 0.884])
# Calcular proyecciones
k_classic_proj = k_fractional(1.0, t_projection)
k_frac_proj = k_fractional(0.3, t_projection)
# DEFINIR EL OBJETIVO: 95% del valor de k* (NUEVO)
target_95_value = 0.95 * k_star
print(f"Objetivo: alcanzar k(t)>={target_95_value:.4f} (95% de k* = {k_star:.4f})")
# Función para encontrar cuando se alcanza el 95% del VALOR de k* (NUEVO)
def find_time_to_95percent_value(t, k_values, target):
    """Encuentra cuando k alcanza o supera el 95% del valor de k*"""
    above_target_idx = np.where(k_values >= target)[0]
    if len(above_target_idx) > 0:
        return t[above_target_idx[0]]
    return None
# Calcular tiempos para alcanzar 95% del VALOR (NUEVO)
time_classic_95val = find_time_to_95percent_value(t_projection, k_classic_proj, target_95_value)
time_frac_95val = find_time_to_95percent_value(t_projection, k_frac_proj, target_95_value)
# (Mantener también el cálculo original de convergencia dentro del 5% si quieres comparar)
def find_convergence_time(t, k_values, target, threshold):
    """Encuentra cuando k se acerca al estado estacionario dentro del umbral"""
    differences = np.abs(k_values - target)
    close_idx = np.where(differences <= threshold * target)[0]
    if len(close_idx) > 0:
        return t[close_idx[0]]
    return None
threshold_5percent = 0.05
conv_time_classic = find_convergence_time(t_projection, k_classic_proj, k_star, threshold_5percent)
conv_time_frac = find_convergence_time(t_projection, k_frac_proj, k_star, threshold_5percent)
# Graficar histórico y proyección EXTENDIDA
plt.figure(figsize=(16, 10))
# Panel superior: histórico
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t_historical, k_fractional(1.0, t_historical), 'r-', label='
```

```
    Modelo clásico (α=1)', linewidth=2)
plt.plot(t_historical, k_fractional(0.3, t_historical), 'b-', label='
    Modelo fraccionario (α=0.3)', linewidth=2)
plt.plot(t_data, k_data, 'ko', markersize=8, label='Datos Perú (2014-2023)
    ')
plt.axhline(y=k_star, color='gray', linestyle='--', label=f'Estado
    estacionario (k*={k_star:.3f})')
plt.axhline(y=target_95_value, color='green', linestyle=':', label=f'95%
    de k* ({target_95_value:.3f})')  # NUEVA LINEA
plt.xlabel('Años (2014-2023)', fontsize=12)
plt.ylabel('Capital por trabajador efectivo (k(t))', fontsize=12)
plt.title('Modelo Solow-Swan Fraccionario: Perú 2014-2023 (Histórico)',
    fontsize=14)
plt.legend(fontsize=11)
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.xticks(t_data, [f'2014', '2015', '2016', '2017', '2018', '2019', '2020
    ', '2021', '2022', '2023'])
# Panel inferior: proyección EXTENDIDA
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t_projection, k_classic_proj, 'r-', label='Modelo clásico (α=1)',
     linewidth=2)
plt.plot(t_projection, k_frac_proj, 'b-', label='Modelo fraccionario (α
    =0.3)', linewidth=2)
plt.axhline(y=k_star, color='gray', linestyle='--', label=f'Estado
    estacionario (k*={k_star:.3f})')
plt.axhline(y=target_95_value, color='green', linestyle=':', label=f'95%
    de k* ({target_95_value:.3f})')  # NUEVA LINEA
# Marcar puntos de convergencia al 95% del VALOR (NUEVO)
if time_classic_95val:
    plt.axvline(x=time_classic_95val, color='red', linestyle='--',
                label=f'95% valor clásico: {time_classic_95val:.1f} años')
if time_frac_95val:
    plt.axvline(x=time_frac_95val, color='blue', linestyle='--',
                label=f'95% valor fraccionario: {time_frac_95val:.1f} años
    ')
plt.xlabel('Años desde 2014', fontsize=12)
plt.ylabel('Capital por trabajador efectivo (k(t))', fontsize=12)
plt.title('Proyección de Convergencia al Estado Estacionario (2014-2104) -
     95% del valor', fontsize=14)
plt.legend(fontsize=11)
plt.grid(True, alpha=0.3)
# Añadir etiquetas para algunos años clave en la proyección EXTENDIDA
key_years = [0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90]
plt.xticks(key_years, [f'{2014+year}' for year in key_years])
plt.tight_layout()
plt.show()
# Calcular errores para ambos modelos
k_classic = k_fractional(1.0, t_data)
k_frac = k_fractional(0.3, t_data)
mse_classic = np.mean((k_data - k_classic)**2)
mse_frac = np.mean((k_data - k_frac)**2)
print(f"Error cuadrático medio - Modelo clásico: {mse_classic:.6f}")
print(f"Error cuadrático medio - Modelo fraccionario: {mse_frac:.6f}")
print(f"k* (estado estacionario): {k_star:.4f}")
print(f"lambda_val: {lambda_val:.6f}")
```

```
# RESULTADOS PRINCIPALES: ALCANZAR 95% DEL VALOR (NUEVO)
print(f"\nOBJETIVO: Alcanzar el 95% del valor de k* ({target_95_value:.4f})")
print("Tiempo estimado para alcanzar el 95% del valor de k*:")
if time_classic_95val:
    print(f"Modelo clásico: {time_classic_95val:.1f} años (alrededor del año {2014+time_classic_95val:.0f})")
else:
    print("El modelo clásico no alcanza el 95% dentro de 90 años")
if time_frac_95val:
    print(f"Modelo fraccionario: {time_frac_95val:.1f} años (alrededor del año {2014+time_frac_95val:.0f})")
else:
    print("El modelo fraccionario no alcanza el 95% dentro de 90 años")
# (Opcional: mantener también los resultados de convergencia dentro del 5% para comparar)
print(f"\nCOMPARACION: Convergencia dentro del 5% de diferencia:")
if conv_time_classic:
    print(f"Modelo clásico: {conv_time_classic:.1f} años")
else:
    print("El modelo clásico no converge dentro del 5% en 90 años")
if conv_time_frac:
    print(f"Modelo fraccionario: {conv_time_frac:.1f} años")
else:
    print("El modelo fraccionario no converge dentro del 5% en 90 años")
```

Listing 8: Figura 7: Simulacion del Capital per Capita para la Economia Peruana

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import gamma
# Parámetros actuales (problemáticos)
s_actual, β_actual, n_actual, g_actual, δ_actual = 0.2023, 0.42, 0.0127, 0.006, 0.05
# Función para calcular k* y lambda
def calculate_parameters(s, β, n, g, δ):
    k_star = (s / (n + g + δ))**(1/(1 - β))
    lambda_val = s * β * (k_star**(β - 1)) - (n + g + δ)
    return k_star, lambda_val
# Función Mittag-Leffler aproximada
def mittag_leffler(alpha, z, terms=50):
    return sum(z**k / gamma(alpha * k + 1) for k in range(terms))
# Soluciones para distintos α
def k_fractional(alpha, t, k_star, lambda_val, k0=1.0):
    return k_star + (k0 - k_star) * np.array([mittag_leffler(alpha, lambda_val * ti**alpha) for ti in t])
# Tiempo de proyección
t_projection = np.linspace(0, 30, 300)  # 30 años
# Datos reales
t_data = np.arange(0, 10)
k_data = np.array([1.00, 0.993, 0.973, 0.929, 0.901, 0.877, 0.957, 0.907, 0.871, 0.884])
# PARÁMETROS OPTIMIZADOS REALISTAS (CONVERGEN!)
s_optimized = 0.28    # Aumento moderado pero alcanzable
n_optimized = 0.010   # Reducción poblacional realista con políticas
```

```
    sociales
g_optimized = 0.015   # Progreso tecnológico alcanzable
β_optimized = 0.48    # Mejora de productividad del capital
δ_optimized = 0.042   # Mejor mantenimiento de infraestructura
# Calcular parámetros para el escenario "TODAS las Mejoras Juntas"
k_star_optimized, lambda_optimized = calculate_parameters(s_optimized, β
    _optimized, n_optimized, g_optimized, δ_optimized)
# También calcular parámetros actuales para referencia
k_star_actual, lambda_actual = calculate_parameters(s_actual, β_actual,
    n_actual, g_actual, δ_actual)
# GRÁFICO ÚNICO - TODAS LAS MEJORAS JUNTAS
plt.figure(figsize=(12, 8))
# Calcular trayectorias para el escenario optimizado
k_classic_optimized = k_fractional(1.0, t_projection, k_star_optimized,
    lambda_optimized, k0=1.0)
k_frac_alpha04_optimized = k_fractional(0.4, t_projection,
    k_star_optimized, lambda_optimized, k0=1.0)
# Calcular la referencia de Perú actual con alpha=0.3
k_frac_actual_alpha03 = k_fractional(0.3, t_projection, k_star_actual,
    lambda_actual, k0=1.0)
# Graficar
plt.plot(t_projection, k_classic_optimized, 'r-', label='Modelo clásico (α
    =1)', linewidth=3)
plt.plot(t_projection, k_frac_alpha04_optimized, 'b-', label='Modelo
    fraccionario (α=0.4)', linewidth=3)
plt.plot(t_projection, k_frac_actual_alpha03, 'g--', label='Referencia:
    Perú actual (α=0.3)', linewidth=2, alpha=0.8)
# Líneas de estado estacionario
plt.axhline(y=k_star_optimized, color='red', linestyle='--', alpha=0.7,
    label=f'k* optimizado = {k_star_optimized:.3f}')
plt.axhline(y=k_star_actual, color='green', linestyle='--', alpha=0.7,
    label=f'k* actual = {k_star_actual:.3f}')
# Datos históricos
plt.plot(t_data, k_data, 'ko', markersize=8, label='Datos Perú 2014-2023',
     zorder=5)
# Configurar el gráfico
plt.title('Escenario: TODAS las Mejoras Juntas - Economía Peruana
    (2014-2044)', fontsize=14, fontweight='bold')
plt.xlabel('Años desde 2014')
plt.ylabel('k(t) - Capital por unidad de trabajo efectivo')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend(fontsize=11, loc='lower right')
# Añadir información de convergencia
convergence_threshold = 0.05
classic_close = np.where(np.abs(k_classic_optimized - k_star_optimized) <=
     convergence_threshold * k_star_optimized)[0]
frac_close = np.where(np.abs(k_frac_alpha04_optimized - k_star_optimized)
    <= convergence_threshold * k_star_optimized)[0]

if len(classic_close) > 0:
    classic_conv_time = t_projection[classic_close[0]]
    plt.axvline(x=classic_conv_time, color='red', linestyle=':', alpha
    =0.7)
    plt.text(classic_conv_time, plt.ylim()[0], f' {classic_conv_time:.1f}a
    ', color='red', fontsize=9)
```

```
63
64 if len(frac_close) > 0:
65     frac_conv_time = t_projection[frac_close[0]]
66     plt.axvline(x=frac_conv_time, color='blue', linestyle=':', alpha=0.7)
67     plt.text(frac_conv_time, plt.ylim()[0] + 0.05, f' {frac_conv_time:.1f}
       a', color='blue', fontsize=9)
68 # Añadir caja informativa
69 info_text = f"""Parámetros optimizados:
70  s (ahorro) = {s_optimized}
71  β (productividad) = {β_optimized}
72  n (crec. pobl.) = {n_optimized}
73  g (tecnología) = {g_optimized}
74  δ (depreciación) = {δ_optimized}
75
76 k* actual = {k_star_actual:.3f}
77 k* optimizado = {k_star_optimized:.3f}
78 Mejora = +{(k_star_optimized/k_star_actual - 1)*100:.0f}%"""
79
80 plt.annotate(info_text, xy=(0.02, 0.65), xycoords='axes fraction',
81              bbox=dict(boxstyle="round,pad=0.3", facecolor="lightyellow",
       alpha=0.8),
82              fontsize=10, ha='left')
83
84 plt.tight_layout()
85 plt.show()
86 # RESUMEN EJECUTIVO
87 print("="*60)
88 print("RESUMEN EJECUTIVO - ESCENARIO TODAS LAS MEJORAS JUNTAS")
89 print("="*60)
90 print(f"Estado estacionario actual: k* = {k_star_actual:.3f}")
91 print(f"Estado estacionario optimizado: k* = {k_star_optimized:.3f}")
92 print(f"Mejora potencial: +{(k_star_optimized/k_star_actual - 1)*100:.0f}%
       ")
93
94 if len(frac_close) > 0:
95     print(f"Tiempo de convergencia (α=0.4): {frac_conv_time:.1f} años (año
       {2014 + frac_conv_time:.0f})")
96 if len(classic_close) > 0:
97     print(f"Tiempo de convergencia (α=1.0): {classic_conv_time:.1f} años (
       año {2014 + classic_conv_time:.0f})")
```

Datos Utilizados

Anexo C

Cuadro 1: Gasto en investigación y desarrollo (% del PIB) - Perú (2014-2023)

Año	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
% del PIB	0.108	0.117	0.120	0.121	0.127	0.157	0.172	0.138	0.162	-

Cuadro 2: Metadatos del indicador

Elemento	**Descripción**
Código del indicador	GB.XPD.RSDV.GD.ZS
Nombre	Gasto en investigación y desarrollo (% del PIB)
Definición	Gastos domésticos brutos en I+D como porcentaje del PIB
Fuente	UNESCO Institute for Statistics
Periodicidad	Anual
Unidad de medida	Porcentaje del PIB
Método de agregación	Promedio ponderado
Licencia	CC BY-4.0

Fuente y metodología

Los datos fueron obtenidos del **World Development Indicators** (WDI) del Banco Mundial, actualizado el 07/01/2025. El indicador específico (GB.XPD.RSDV.GD.ZS) corresponde al gasto en investigación y desarrollo como porcentaje del PIB, compilado por el Instituto de Estadística de

la UNESCO.

Referencias:

World Bank. (2025). *World Development Indicators* [Data set]. Washington, DC: World Bank Group.

UNESCO Institute for Statistics. (2024). *Research and development expenditure*. Montreal: UNESCO.

Nota metodológica: La medición sigue el Manual de Frascati de la OCDE (2015). El dato para 2023 no estaba disponible al momento de la consulta.

Enlace de verificación: https://datos.bancomundial.org/indicador/GB.XPD.RSDV.GD.ZS

Anexo D

Cuadro 3: Tasa de ahorro bruto (% del PIB) - Perú (2014-2023)

Año	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
% del PIB	21,24	20,65	20,41	20,62	20,41	20,72	19,88	20,19	18,29	19,88

Cuadro 4: Metadatos del indicador de tasa de ahorro

Elemento	**Descripción**
Código del indicador	NY.GNS.ICTR.ZS
Nombre	Tasa de ahorro bruto (% del PIB)
Definición	Porcentaje del PIB que representa el ahorro bruto nacional (ingreso nacional menos consumo total más transferencias netas)
Fuente principal	Estadísticas oficiales de países, Bancos Centrales y OCDE
Periodicidad	Anual
Unidad de medida	Porcentaje del PIB
Método de agregación	Promedio ponderado
Licencia	CC BY-4.0

Fuente y Metodología

Los datos fueron obtenidos del **World Development Indicators (WDI)** del Banco Mundial, actualizado el 07/01/2025. El indicador específico (**NY.GNS.ICTR.ZS**) corresponde a la **tasa de ahorro bruto como porcentaje del PIB**, compilado a partir de estadísticas oficiales de países, Bancos Centrales y estimaciones del Banco Mundial.

Referencias Específicas

- **World Bank.** (2025). *World Development Indicators* [Data set]. Washington, DC: World Bank Group.
- **Organisation for Economic Co-operation and Development.** (2024). *National Accounts data files*. Paris: OECD.
- **Banco Central de Reserva del Perú.** (2024). *Cuentas Nacionales Anuales*. Lima: BCRP.

Verificación

- **Verificación en línea:** https://datos.bancomundial.org/indicator/NY.GNS.ICTR.ZS

Anexo E

Cuadro 5: Crecimiento poblacional anual (%) - Perú (2014-2023)

Año	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
% Crecimiento	0,99	1,13	1,33	1,47	1,81	1,71	1,19	0,96	0,96	1,10

Cuadro 6: Metadatos del indicador de crecimiento poblacional

Elemento	**Descripción**
Código del indicador	SP.POP.GROW
Nombre	Crecimiento poblacional anual (%)
Definición	Tasa exponencial de crecimiento de la población de mitad de año desde el año t-1 a t, expresada como porcentaje
Fuente principal	World Population Prospects, Naciones Unidas
Periodicidad	Anual
Unidad de medida	Porcentaje
Método de agregación	Promedio ponderado
Licencia	CC BY-4.0

Fuente y Metodología

Los datos fueron obtenidos del **World Development Indicators (WDI)** del Banco Mundial, actualizado el 07/01/2025. El indicador específico (**SP.POP.GROW**) corresponde al **crecimiento poblacional anual porcentual**, compilado a partir de las Perspectivas de Población Mundial de las Naciones Unidas.

Referencias Específicas del Anexo

- **United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division.** (2023). *World Population Prospects: 2022 Revision*. New York: UN.
- **World Bank.** (2025). *World Development Indicators* [Data set]. Washington, DC: World Bank Group.
- **Instituto Nacional de Estadística e Informática.** (2023). *Estimaciones y Proyecciones de Población 2020-2050*. Lima: INEI.

Verificación

- **Estándares internacionales:** Metodología alineada con Naciones Unidas
- **Consistencia nacional:** Datos coherentes con proyecciones del INEI
- **Verificación en línea:** https://datos.bancomundial.org/indicator/SP.POP.GROW

Anexo F

Cuadro 7: Series de Datos de Fuerza Laboral (PEA) - Perú (2014-2023)

Año	Fuerza Laboral (personas)
2014	16.746.275
2015	16.759.049
2016	16.939.632
2017	17.644.346
2018	18.124.121
2019	18.599.717
2020	16.861.243
2021	17.853.296
2022	18.756.175
2023	18.608.668

Cuadro 8: Metadatos del indicador de fuerza laboral

Elemento	Descripción
Código del indicador	SL.TLF.TOTL.IN
Nombre	Fuerza laboral total
Definición	Personas de 15 años y más que suministran mano de obra para la producción de bienes y servicios durante un período especificado
Fuente principal	Organización Internacional del Trabajo (OIT) y Naciones Unidas
Periodicidad	Anual
Unidad de medida	Personas
Método de agregación	Suma
Licencia	CC BY-4.0

Fuente y Metodología

Los datos fueron obtenidos del **World Development Indicators (WDI)** del Banco Mundial, actualizado el 07/01/2025. El indicador específico (**SL.TLF.TOTL.IN**) corresponde a la **fuerza**

laboral total, compilado a partir de estimaciones de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) y Naciones Unidas.

Referencias Específicas

- **International Labour Organization.** (2024). *ILO Modelled Estimates database*. Geneva: ILO.
- **World Bank.** (2025). *World Development Indicators* [Data set]. Washington, DC: World Bank Group.
- **Instituto Nacional de Estadística e Informática.** (2023). *Encuesta Nacional de Hogares (ENAHO)*. Lima: INEI.

Alineación con Fuentes Nacionales

Los datos del Banco Mundial muestran coherencia con las estadísticas del INEI, aunque existen diferencias metodológicas menores en la definición de fuerza laboral.

Verificación y Acceso

- **Enlace de verificación:** https://datos.bancomundial.org/indicator/SL.TLF.TOTL.IN
- **Fuente técnica:** https://ilostat.ilo.org/resources/concepts-and-definitions/ilo-modelled-estimates/
- **Actualización:** Datos disponibles hasta 2023 con proyecciones

Anexo G

Cuadro 9: Formación bruta de capital fijo (US$ a precios actuales) - Perú (2014-2023)

Año	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
US$ (millones)	49.274	43.823	41.156	43.484	46.575	47.888	40.164	52.261	57.287	56.579

Cuadro 10: Metadatos del indicador de formación bruta de capital fijo

Elemento	**Descripción**
Código del indicador	NE.GDI.FTOT.CD
Nombre	Formación bruta de capital fijo (US$ a precios actuales)
Definición	Adquisiciones menos disposiciones de activos fijos durante el período contable, incluyendo gastos específicos en servicios que añaden valor a activos no producidos
Fuente principal	Estadísticas oficiales de países, Bancos Centrales y OCDE
Periodicidad	Anual
Unidad de medida	Dólares americanos corrientes
Método de agregación	Total con llenado de vacíos
Licencia	CC BY-4.0

Fuente y Metodología

Los datos fueron obtenidos de los **Indicadores del Desarrollo Mundial** del Banco Mundial, actualizado el 07/01/2025. El indicador específico (**NE.GDI.FTOT.CD**) corresponde a la **formación bruta de capital fijo en dólares americanos corrientes**, compilado a partir de estadísticas oficiales de países, Bancos Centrales y estimaciones del Banco Mundial.

Referencias Específicas del Anexo

- **World Bank.** (2025). *World Development Indicators* [Data set]. Washington, DC: World Bank Group.
- **Organisation for Economic Co-operation and Development.** (2024). *National Accounts data files*. Paris: OECD.
- **Banco Central de Reserva del Perú.** (2024). *Cuentas Nacionales Anuales*. Lima: BCRP.

Alineación con Fuentes Nacionales

Los datos muestran coherencia con las estadísticas del Banco Central de Reserva del Perú, aunque existen diferencias menores en la clasificación de activos.

Verificación y Acceso

- **Enlace de verificación:** https://datos.bancomundial.org/indicator/NE.GDI.FTOT.CD
- **Metodología IMF:** https://dsbb.imf.org/
- **Actualización:** Datos disponibles hasta 2023 con revisión anual