



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO**

**ESCUELA DE POSGRADO**

**MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS**

**TESIS**

**CUADRATURA DE CLENSHAW-CURTIS PARA LA  
SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES DE  
FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN  
MATEMÁTICAS**

**AUTOR:**

Br. NESTOR RODRIGO LOAYZA ROJAS

**ASESOR:**

Dr. ALEJANDRO TTITO TTICA

**CODIGO ORCID:**

0000-0002-6898-5307

**CUSCO - PERÚ**

**2023**

# INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, asesor del trabajo de investigación titulado: **“CUADRATURA DE CLENSHAW-CURTIS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE”** presentado por: **NÉSTOR RODRIGO LOAYZA ROJAS** con Nro. de DNI: 42773976, para optar el grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS. Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por DOS veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 6%

**Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico, tesis**

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera hoja del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 12 de julio de 2024



Firma

Post firma: Alejandro Ttito Ttica

Nro. de DNI: 24676328

ORCID del Asesor: 0000-0002-6898-5307

**Se adjunta:**

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio:

<https://unsaac.turnitin.com/viewer/submissions/oid:27259:365908751?locale=es>

NOMBRE DEL TRABAJO

**CUADRATURA DE CLENSHAW-CURTIS**

AUTOR

**NESTOR LOAYZA**

RECUENTO DE PALABRAS

**25833 Words**

RECUENTO DE CARACTERES

**106633 Characters**

RECUENTO DE PÁGINAS

**123 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**1.5MB**

FECHA DE ENTREGA

**Jul 12, 2024 7:41 AM GMT-5**

FECHA DEL INFORME

**Jul 12, 2024 7:43 AM GMT-5**

### ● 6% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 6% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 2% Base de datos de trabajos entregados
- 0% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

### ● Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Coincidencia baja (menos de 20 palabras)
- Material citado

## ***DEDICATORIA***

*A mis padres*

*por su apoyo incondicional en cada uno de mis pasos, su ejemplo de perseverancia y por enseñarme el valor del trabajo .*

*A mi esposa e hijas*

*por ser mi constante fuente de amor, apoyo y comprensión durante este camino de desafíos y aprendizajes.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Al doctor Alejandro Ttito Ttica, mi más sincero agradecimiento por su constante orientación, por sus comentarios y sugerencias que siempre fueron constructivos y enriquecedores durante mi proceso de investigación y redacción de la tesis.

ÍNDICE GENERAL

<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>VII</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>VIII</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>X</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>XI</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>XII</b>
<b>CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema . . . . .	1
1.1.1 Situación problemática . . . . .	1
1.1.2 Formulación del problema . . . . .	1
1.1.3 Objetivos de la investigación . . . . .	2
1.2 Hipótesis . . . . .	2
1.2.1 Hipótesis general . . . . .	2
1.2.2 Hipótesis específicas . . . . .	3
1.2.3 Justificación de la investigación . . . . .	3
1.2.4 Antecedentes de la investigación . . . . .	3
1.3 Metodología . . . . .	5
1.3.1 Tipo de investigación . . . . .	5
1.3.2 Nivel de investigación . . . . .	5
1.3.3 Diseño de investigación . . . . .	5
<b>CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL</b>	<b>6</b>

2.1	Definiciones básicas . . . . .	6
2.2	Ecuaciones Integrales . . . . .	12
2.3	Interpolación polinomial . . . . .	23
2.4	Integración numérica . . . . .	33
2.4.1	Newton-Cotes . . . . .	34
2.4.2	Regla del trapecio . . . . .	35
2.4.3	Regla de Simpson . . . . .	36
2.4.4	Estimación del error . . . . .	37
<b>CAPÍTULO III: POLINOMIOS DE CHEBYSHEV</b>		<b>39</b>
3.0.1	Propiedades básicas . . . . .	39
3.0.2	Nodos y extremos de los polinomios de Chebyshev $T_{n+1}$ . . . . .	45
3.0.3	Raíces de los polinomios de Chebyshev $T_{n+1}$ . . . . .	47
3.0.4	Extremos de los polinomios de Chebyshev $T_{n+1}$ . . . . .	48
<b>CAPÍTULO IV: CUADRATURA DE CLENSHAW-CURTIS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM</b>		<b>56</b>
4.1	Cuadratura de Clenshaw-Curtis . . . . .	56
4.2	Aplicación de la cuadratura de Clenshaw-Curtis . . . . .	65
4.2.1	Convergencia de las Cuadratura de Clenshaw-Curtis . . . . .	73
4.3	Solución de Ecuaciones Integrales de Fredholm de Segunda Especie . . . . .	74
<b>CONCLUSIONES</b>		<b>92</b>
<b>RECOMENDACIONES</b>		<b>93</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>94</b>
<b>ANEXOS</b>		<b>95</b>

Anexo A: Software <i>Mathematica</i> . . . . .	95
Anexo B: Resultados Numéricos . . . . .	101
Anexo A: Función Cuadrado Integrable . . . . .	109



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla N° 2.1	Datos a interpolar (n=4) . . . . .	28
Tabla N° 2.2	Puntos a interpolar (n=5) . . . . .	30
Tabla N° 4.1	Reglas de la Cuadratura de Clenshaw Curtis . . . . .	66
Tabla N° 4.2	Ecuación integral: $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt$ . . . . .	82
Tabla N° 4.3	Ecuación integral: $\varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2)\varphi(t)dt$ . . . . .	84
Tabla N° 4.4	Ecuación integral: $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t)dt$ . . . . .	86
Tabla N° 4.5	Ecuación integral: $\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t)dt$ . . . . .	88
Tabla N° 4.6	Ecuación integral: $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(x-t)^2}\right) \varphi(t)dt$ . . . . .	90
Tabla N° 4.7	Solución Aproximada de : $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt$ . . . . .	106
Tabla N° 4.8	Solución Aproximada de : $\varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2)\varphi(t)dt$ . . . . .	106
Tabla N° 4.9	Solución Aproximada de : $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t)dt$ . . . . .	107
Tabla N° 4.10	Solución Aproximada de : $\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t)dt$ . . . . .	107
Tabla N° 4.11	Solución Aproximada de : $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(x-t)^2}\right) \varphi(t)dt$ . . . . .	108

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura N° 2.1	Interpolación polinomial de Lagrange de los datos de la tabla (2.1)	29
Figura N° 2.2	Interpolación polinomial de Lagrange de los puntos de la tabla (2.2)	31
Figura N° 3.1	Polinomios de Chebyshev: $T_n(x), n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	41
Figura N° 3.2	Nodos y Extremos de Chebyshev $T_8$	46
Figura N° 3.3	Nodos y Extremos de Chebyshev $T_9$	46
Figura N° 3.4	Raíces del polinomio de Chebyshev $T_8$	47
Figura N° 3.5	Raíces del polinomio de Chebyshev $T_9$	47
Figura N° 3.6	Extremos del polinomio de Chebyshev $T_8$	48
Figura N° 3.7	Extremos del polinomio de Chebyshev $T_9$	48
Figura N° 3.8	Polinomios de Chebyshev: $U_n(x), n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	51
Figura N° 3.9	Polinomios de Chebyshev: $V_n(x), n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	52
Figura N° 3.10	Polinomios de Chebyshev: $W_n(x), n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$	54
Figura N° 4.1	Solución aproximada de la Ecuación integral: $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x)\varphi(t)dt$ , para $n = 45$	82
Figura N° 4.2	Solución exacta $\varphi(x)$ y Solución aproximada $\varphi_{45}(x)$	82
Figura N° 4.3	Solución exacta - Solución aproximada, $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$	83
Figura N° 4.4	Solución aproximada de la Ecuación integral: $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x)\varphi(t)dt$ , para $n = 45$	84
Figura N° 4.5	Solución exacta $\varphi(x)$ y Solución aproximada $\varphi_{45}(x)$	85
Figura N° 4.6	Solución exacta - Solución aproximada, $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$	85
Figura N° 4.7	Solución aproximada de la Ecuación integral: $\varphi(x) = 1 + \frac{4 \cos(x) \operatorname{sen}(1)}{-2 + 2\pi - \operatorname{sen}(2)}$ , para $n = 45$	86
Figura N° 4.8	Solución exacta $\varphi(x)$ y Solución aproximada $\varphi_{45}(x)$	87
Figura N° 4.9	Solución exacta - Solución aproximada, $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$	87
Figura N° 4.10	Solución aproximada de la Ecuación integral: $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x)\varphi(t)dt$ , para $n = 45$	88
Figura N° 4.11	Solución aproximada $\varphi_{45}(x)$	89

Figura N° 4.12 Solución aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x)\varphi(t)dt$ , para  $n = 45$  . . . . . 90

Figura N° 4.13 Solución aproximada  $\varphi_{45}(x)$  . . . . . 91

## Resumen

El presente trabajo de investigación presenta una alternativa para determinar las soluciones aproximadas de las Ecuaciones Integrales de Fredholm de Segunda Especie usando la cuadratura de Clenshaw-Curtis. El uso de esta cuadratura garantiza la aproximación numérica de integrales definidas, y en particular para este trabajo de investigación permite transformar la Ecuación Integral de Fredholm de segunda especie en un sistema de ecuaciones algebraicas con coeficientes desconocidos, esto es debido a que la integral definida presente en la Ecuación Integral de Fredholm se discretiza, con ayuda del uso de los polinomios de Chebyshev y sus propiedades, lo que facilita su implementación computacional. Y para determinar la solución aproximada de la Ecuación Integral de Fredholm de Segunda Especie, realizar la comprobación numérica, determinación del error y representaciones gráficas se recurre al uso del sistema de álgebra computacional *Mathematica*, el cual tiene la capacidad para manejar tanto cálculos simbólicos como numéricos que son fundamentales para explorar diferentes configuraciones de las Ecuaciones Integrales de Fredholm de segunda especie y evaluar el uso de la cuadratura de Clenshaw-Curtis para la solución de las Ecuaciones Integrales de Fredholm.

**PALABRAS CLAVE:** Ecuación integral, Ecuación integral de Fredholm, Cuadratura, Cuadratura de Clenshaw-Curtis, polinomios de Chebyshev, Mathematica.

## Abstract

The present research presents an alternative to determine the approximate solutions of the second species Fredholm Integral Equations using the Clenshaw-Curtis quadrature. The use of this quadrature guarantees the numerical approximation of definite integrals, and in particular for this research it allows transforming the second species Fredholm Integral Equation into a system of algebraic equations with unknown coefficients, this is because the definite integral present in the Fredholm Integral Equation is discretized, with the help of the use of Chebyshev polynomials and their properties, which facilitates its computational implementation. And to determine the approximate solution of the Second Species Fredholm Integral Equation, perform numerical verification, error determination and graphical representations we resort to the use of the *Mathematica* computer algebra system, which has the capability to handle both symbolic and numerical calculations that are fundamental to explore different configurations of the Second Species Fredholm Integral Equations and evaluate the use of Clenshaw-Curtis quadrature for the solution of the Fredholm Integral Equations.

KEYWORDS: Integral Equation, Fredholm Integral Equation, Quadrature, Clenshaw-Curtis Quadrature, Chebyshev polynomials, Mathematica.

## **Introducción**

En el desarrollo de la matemática, de manera particular el análisis funcional, la solución de ecuaciones integrales ha sido un tema de investigación, dada sus aplicaciones en diferentes áreas como la física, la biología, las finanzas y la ingeniería. La complejidad de las ecuaciones integrales, específicamente las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, han motivado la búsqueda continua de diferentes métodos analíticos y numéricos que permitan enfrentar este desafío matemático.

La presente investigación se basa en la aplicación de una cuadratura, en particular la cuadratura de Charles Clenshaw y Arthur Curtis, también denominada cuadratura de Clenshaw-Curtis, como un método numérico para la solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie. Esta posibilidad se destaca por su capacidad para abordar funciones oscilatorias, presentando una alternativa en comparación con otras cuadraturas.

La aplicación de la cuadratura de Clenshaw-Curtis ha demostrado su eficacia en diversos contextos numéricos; sin embargo, su aplicación específica en la resolución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie requiere una investigación detallada. Esta elección se basa en la necesidad de abordar de manera eficiente la complejidad presente en las ecuaciones integrales de Fredholm. Para la implementación y evaluación de la cuadratura de Clenshaw-Curtis, se empleará el sistema de álgebra computacional, Mathematica. La elección de este software es debido a la versatilidad y capacidad para realizar cálculos simbólicos y numéricos. La combinación de la cuadratura de Clenshaw-Curtis y Mathematica facilita la implementación del método, y también permite una exploración más detallada de las propiedades matemáticas en la resolución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie.

El trabajo de investigación consta de cuatro capítulos.

En el Capítulo I, se presenta el planteamiento del problema, también de la formulación del problema, los objetivos de la investigación y la justificación.

El Capítulo II, contiene el marco teórico conceptual, en el que se establecen todos los preliminares teóricos a usarse, como las ecuaciones integrales.

El Capítulo III, detalla el uso de los polinomios de Chebyshev y su aplicación en la cuadratura de Clenshaw-Curtis.

El Capítulo IV, se compone del desarrollo teórico de la cuadratura de Clenshaw-Curtis y sus propiedades, también la aplicación de la cuadratura de Clenshaw-Curtis a la solución de Ecuaciones Integrales de Fredholm de segunda especie y la verificación numérica de la aplicación usando el software Mathematica.

## CAPÍTULO I:

### PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

#### 1.1 Planteamiento del problema

##### 1.1.1 Situación problemática

El Análisis funcional, rama fundamental de las matemáticas, se desarrolló en la primera mitad del siglo *XX* gracias a las investigaciones de Maurice Frechet, Stefan Banach y David Hilbert. El análisis funcional abarca las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, análisis numérico, cálculo de variaciones, teoría de aproximación y ecuaciones integrales. Los ejemplos representativos e influyentes en el desarrollo del Análisis Funcional, son las ecuaciones Integrales. A lo largo del siglo *XIX* se plantearon algunas ecuaciones Integrales particulares, vinculadas con la física. Las primeras investigaciones sobre el estudio de estas ecuaciones, fueron obtenidos Vito Volterra e Ivar Fredholm. En la matemática aplicada, las soluciones analíticas son buscadas, tales expresiones proporcionan una representación completa de un determinado conjunto de información y permiten un entendimiento cualitativo de cómo la solución varía con la información, pero este tipo de solución analítica es raramente posible, debido a la complejidad de las expresiones, consecuentemente se debe de buscar métodos alternativos para obtener soluciones aproximadas.

##### 1.1.2 Formulación del problema

Los matemáticos más importantes en el desarrollo de las ecuaciones integrales son Vito Volterra, Erick Ivar Fredholm, junto con David Hilbert. En la actualidad las Ecuaciones Integrales, en forma particular las Ecuaciones Integrales de Fredholm de segunda especie se encuentran en muchas áreas de la matemática aplicada y de la física, estas ecuaciones ofrecen una técnica para resolver una gran variedad de problemas prácticos y entre estos existen problemas que no pueden resolverse explícitamente mediante métodos analíticos, motivo por el cual nace el interés de usar la cuadratura de Clenshaw-Curtis para resolver ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie de forma aproximada.



### 1.1.2.1 Problema general

¿Será posible aplicar la cuadratura de Clenshaw-Curtis para resolver Ecuaciones Integrales de Fredholm de Segunda Especie?

### 1.1.2.2 Problemas específicos

1. ¿Existen restricciones del uso de la cuadratura de Clenshaw—Curtis?
2. ¿Es posible establecer un procedimiento del uso de la cuadratura de Clenshaw—Curtis en las ecuaciones integrales de Fredholm?
3. ¿Es posible realizar la comprobación numérica del uso de la cuadratura de Clenshaw—Curtis, usando un sistema de álgebra computacional?

### 1.1.3 Objetivos de la investigación

#### 1.1.3.1 Objetivo general

Aplicar la cuadratura de Clenshaw-Curtis para resolver Ecuaciones Integrales de Fredholm de Segunda Especie.

#### 1.1.3.2 Objetivos específicos

1. Determinar las condiciones del uso de la cuadratura de Clenshaw-Curtis.
2. Proponer un procedimiento del uso de la cuadratura de Clenshaw-Curtis en las ecuaciones integrales de Fredholm.
3. Implementar la cuadratura de Clenshaw-Curtis para la comprobación numérica, usando el sistema de álgebra computacional.

## 1.2 Hipótesis

### 1.2.1 Hipótesis general

El desarrollo y estudio la cuadratura de Clenshaw-Curtis, permiten resolver ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie.

### 1.2.2 Hipótesis específicas

1. Se establecen las condiciones del uso de la cuadratura de Clenshaw-Curtis.
2. Es posible desarrollar el procedimiento del uso de la cuadratura de Clenshaw-Curtis en las ecuaciones integrales de Fredholm.
3. Es posible implementar la cuadratura de Clenshaw-Curtis para la comprobación numérica, usando el sistema de álgebra computacional.

### 1.2.3 Justificación de la investigación

#### 1.2.3.1 Justificación

El presente trabajo de investigación se desarrolla con el propósito de contribuir con el estudio y desarrollo de la Teoría de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, además en la actualidad se sabe que los sistemas algebraicos computacionales han contribuido en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas permitiendo investigar computacionalmente problemas complicados, en este sentido también el trabajo pretende implementar la solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, usando el sistema algebraico computacional *Mathematica* 13.

### 1.2.4 Antecedentes de la investigación

- a) Abbot, P. (2002), Tricks of trade. The *Mathematica*® Journal (2002), Páginas 4-7.

Este artículo describe cómo un sistema algebraico computacional tal como Mathematica puede ser usado para construir la solución numérica de la ecuación integral de Fredholm unidimensional (ecuación de Love), para la construcción de la solución numérica se hace uso de los nodos de Chebyshev y de la integración numérica implementada en Mathematica.

- b) Barazón, E. (2015). Cuadratura de Clenshaw-Curtis. Aplicaciones en Finanzas, España [Tesis Grado en Matemáticas, Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias]. Repositorio documental de la Universidad de Valladolid. <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/13416>

El trabajo revisa los resultados más importantes sobre la cuadratura numérica de Clenshaw-

Curtis y explica cómo puede ser utilizada para resolver problemas en finanza computacional. En dicho trabajo se introducen algunas nociones básicas sobre la cuadratura interpolatoria y, en particular, sobre la cuadratura Gaussiana. Posteriormente, se construye la cuadratura de Clenshaw-Curtis y finalmente se describe un algoritmo.

- c) Barden, J. (2013). Algoritmo modificado de la cuadratura de Clenshaw-Curtis, Estados Unidos [Tesis Grado en Matemáticas, Worcester Polytechnic Institute]. Repositorio Electronic Theses and Dissertations. <https://digitalcommons.wpi.edu/etd-theses/265>.

El trabajo presenta un método modificado de integración numérica para una función sobre el intervalo finito  $[-1, 1]$ , similar a la regla de cuadratura de Clenshaw-Curtis, este nuevo algoritmo se basa en expresar el integrando como una expansión de los polinomios de Chebyshev del segundo tipo. El método modificado luego se contrasta con su predecesor Clenshaw-Curtis.

- d) Loayza , N. (2012), Solución analítica y numérica de Ecuaciones Integrales lineales de Fredholm no homogéneas de segunda especie. [Tesis, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco]. Repositorio documental de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco. <http://hdl.handle.net/20.500.12918/876>

Este trabajo presenta la comparación de diferentes métodos de solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, tales como: Método de las Aproximaciones Sucesivas, el Método del Núcleo Separable y el Método de la Cuadratura de Gauus, la implementación de los métodos de solución fue realizada en el programa Mathematica 6.0 .

- e) Aguilar, B., Rojas, E. (2014). Solución de las ecuaciones diferenciales parciales utilizando las ecuaciones integrales [Tesis, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco]. Repositorio documental de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco. <http://hdl.handle.net/20.500.12918/1461>

Este trabajo presenta el nexo existente entre las ecuaciones integrales de Fredholm y las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y se hace una exposición detallada de cómo estas últimas ecuaciones son resueltas a través del uso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, las funciones de Green y las ecuaciones integrales.

### 1.3 Metodología

En el presente trabajo se usó el Método Analítico-Applicativo, porque se analizaron las ecuaciones Integrales de Fredholm de Segunda especie, los tipos de núcleo de la ecuación para luego aplicar el Cuadratura de Clenshaw Curtis.

#### 1.3.1 Tipo de investigación

Este trabajo pertenece al tipo de investigación Descriptiva puesto que en el presente se describen definiciones básicas, importantes y necesarias para un buen desarrollo de los temas considerados y explicativo porque se trabaja con la cuadratura de Clenshaw-Curtis, en la que se busca explicar las ventajas y desventajas que ofrece este método en la solución de ecuaciones integrales de Fredholm.

#### 1.3.2 Nivel de investigación

De acuerdo a la naturaleza de estudio de la investigación es la usual en investigaciones matemáticas es de nivel básico, descriptiva porque permite describir ciertos aspectos de la realidad, que permite describir sucesos.

#### 1.3.3 Diseño de investigación

La investigación corresponde a un diseño no experimental, de carácter descriptivo, en la que se estudia la teoría necesaria y básica concerniente a las ecuaciones integrales; además de la teoría relacionada cuadratura de Clenshaw Curtis, que servirá para ampliar el estudio de las soluciones de las ecuaciones integrales de Fredholm de Segunda especie. Además, se describirá el proceso de solución de las ecuaciones integrales de Fredholm de Segunda especie usando la cuadratura de Clenshaw Curtis con el apoyo del software científico *Mathematica*.

**CAPÍTULO II:****MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL**

En este capítulo, se presentan definiciones básicas y resultados fundamentales, tales como espacios vectoriales, espacios normados y espacios de Hilbert, Ecuaciones Integrales de Fredholm y Volterra, Interpolación Polinomial e integración numérica. Para este capítulo se consideran textos de referencia, como Ttito y Salazar (2004), Debnath y Mikusinski (2005), Suli y Mayers (2003) y Heister y Rebholz (2019).

**2.1 Definiciones básicas**

**Definición 2.1.0.1** *Un espacio vectorial definido sobre el campo  $\mathbb{F}$  es un conjunto no vacío  $V$  provisto de dos operaciones, una definida de  $V \times V$  en  $V$  y la otra de  $\mathbb{F} \times V$  en  $V$ , tal que se cumplen las siguientes propiedades:*

1.  $x + y = y + x$ , para todo  $x, y \in V$ ;
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ , para todo  $x, y, z \in V$ ;
3. Existe un elemento  $0 \in V$  tal que  $x + 0 = x$  para cada  $x \in V$ ;
4. Para cada  $x \in V$  existe  $-x \in V$  tal que  $x + (-x) = 0$ ;
5.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ , para todo  $x, y \in V$  y todo  $\alpha \in \mathbb{F}$ ;
6.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ , para todo  $x \in V$  y todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ;
7.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ , para todo  $x \in V$  y todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ;
8.  $1x = x$ , para todo  $x \in V$ .

El conjunto  $\mathbb{F}$  es un campo algebraico. Si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ) entonces  $V$  es un espacio vectorial real (o espacio vectorial complejo). Los elementos de  $\mathbb{F}$  se llaman escalares, mientras que los elementos de  $V$  se llaman vectores.

**Definición 2.1.0.2** *Un subespacio  $W$  de un espacio vectorial  $V$  es un subconjunto de  $V$  el cual es cerrado bajo las operaciones de adición y multiplicación escalar; esto es, para cualquier  $u, v \in W$  y cualquier  $\alpha \in \mathbb{F}$ , se tiene que  $u + v \in W$  y  $\alpha u \in W$ .*

**Definición 2.1.0.3** *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{F}$ . Se dice que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son linealmente dependientes si existen escalares  $\alpha_i \in \mathbb{F}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , con al menos un  $\alpha_i$  distinto de cero de modo que*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \quad (2.1)$$

**Definición 2.1.0.4** *Sea  $X$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{F}$ . Se dice que  $v_1, v_2, \dots, v_n \in X$  son linealmente independientes si ellos no son linealmente dependientes, en otras palabras, si  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$  implica que  $\alpha_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  donde  $\alpha_i \in \mathbb{F}$ .*

**Definición 2.1.0.5** *Si  $v_1, v_2, \dots, v_n \in X$ , entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  se llama el generador de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y se denota  $gen(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , esto es*

$$gen\{v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i / \alpha_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq n \right\} \quad (2.2)$$

**Definición 2.1.0.6** *Sea  $X$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{F}$ . Una norma sobre  $X$  es una función  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $x, y \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{F}$ , que cumple las siguientes condiciones:*

1.  $\|x\| \geq 0$  y  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Un espacio vectorial o simplemente espacio normado es un par  $(X, \|\cdot\|)$  donde  $X$  es un espacio vectorial y  $\|\cdot\|$  es una norma en  $X$ .

**Definición 2.1.0.7** *Sea  $X$  un espacio normado. Se dice que una sucesión  $\{x_n\}$  de elementos de  $X$  converge a un elemento  $x \in X$  y se denota por  $x_n \rightarrow x$  (o por  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ), sí y sólo*

si, la sucesión de números reales  $\|x_n - x\|$  converge a cero, o sea,  $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$  Equivalentemente,

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ tal que } \|x_n - x\| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

**Definición 2.1.0.8** Sea  $E$  un conjunto no vacío y  $(F, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Se dice que una aplicación  $f : E \rightarrow F$  es acotada si y sólo si, existe una constante real  $k > 0$  tal que

$$\|f(x)\| \leq k, \forall x \in E$$

**Definición 2.1.0.9** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $\{x_n\}$  una sucesión de elementos de  $X$ . Se dice que  $\{x_n\}$  es convergente a un elemento  $x \in X$  y se denota por  $x_n \rightarrow x$  si y sólo si, la sucesión de números reales  $(\|x_n - x\|)$  converge a cero.

**Definición 2.1.0.10** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Se dice que una sucesión  $\{x_n\}$  de  $X$  es fundamental o de Cauchy, si y sólo si, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}^+$  tal que si  $m, n > n_0$  entonces  $\|x_m - x_n\| < \epsilon$ .

**Teorema 2.1.0.1** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Si  $\{x_n\}$  es convergente a  $x$  entonces  $\{x_n\}$  es de Cauchy.

*Demostración.*

Si  $x_n \rightarrow x$  entonces para  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}^+$  tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2} \wedge m > n_0 \Rightarrow \|x_m - x\| < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego, Si  $m, n > n_0$  entonces

$$\|x_m - x_n\| = \|(x_m - x) - (x_n - x)\| \leq \|x_m - x\| + \|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Lo cual prueba que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy.



El recíproco del teorema (2.1.0.1) no es cierto.

**Definición 2.1.0.11** Sean  $(X, \|\cdot\|)$  y  $(Y, \|\cdot\|)$  espacios normados. Se dice que la aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es lineal, si y sólo si, verifica las siguientes propiedades:

a)  $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in X,$

b)  $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in X \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

**Teorema 2.1.0.2** Sean  $(X, \|\cdot\|)$  y  $(Y, \|\cdot\|)$  espacios normados, si  $f : X \rightarrow Y$  es lineal, entonces

a)  $f(0) = 0$

b)  $f(-x) = -f(x), \quad x \in X$

c)  $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, x_i \in X, 1 \leq i \leq n.$

*Demostración.*

a) Sea  $0 \in X$

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0), \text{ luego}$$

$$f(0) - f(0) = f(0)$$

$$f(0) = f(0) - f(0)$$

$$f(0) = 0 \in Y.$$

b) Sea  $-x \in X$

$$f(-x) = f(-1 \cdot x) = (-1)f(x)$$

$$f(-x) = -f(x).$$

c) Usando el método de inducción, se tiene:

$$\text{Para } n = 1, f(\alpha_1 x_1) = \alpha_1 f(x_1)$$



Para  $n = k$ ,  $f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i)$ .  
 Para  $n = k + 1$ ,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \alpha_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right) + f(\alpha_{k+1} x_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}) \\ f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i\right) &= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i f(x_i). \end{aligned}$$

■

**Definición 2.1.0.12 (Espacio de Banach)** Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Se dice que  $X$  es completo si y sólo si, toda sucesión de Cauchy en  $X$  converge a un elemento de  $X$ .

Un espacio normado y completo se llama espacio de Banach.

**Definición 2.1.0.13** Sea  $X$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Un producto interno en  $X$  es una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$  que asocia a cada par de vectores  $x$  y  $y$  un escalar denotado por  $\langle x, y \rangle$  que satisface las siguientes condiciones, para  $x, y, z \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{F}$

1.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ,
2.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,
3.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ,
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,  
 $\langle x, x \rangle = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .

Un espacio producto interno (o espacio pre-Hilbert) es un par  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en  $X$ .

Un producto interno en  $X$  define una norma en  $X$  dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

y una métrica en  $X$  dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Por tanto, un espacio producto interno es un espacio normado.

**Definición 2.1.0.14 (Ortogonalidad)** Sea  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio producto interno. Se dice que  $x, y \in X$  son ortogonales, denotado por  $x \perp y$ , si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Definición 2.1.0.15 (Espacio de Hilbert)** Sea  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio producto interno. Si  $X$  con la norma  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  es completo entonces  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se llama espacio de Hilbert. Es decir, un espacio de Hilbert es un espacio producto interno completo.

**Definición 2.1.0.16** Sea  $X$  un espacio producto interno y  $A \subset X$  un conjunto no vacío. Se dice que  $A$  es un sistema ortogonal, si  $x \perp y \forall x, y \in A, x \neq y$ . Si además  $\|x\| = 1 \forall x \in A$ , entonces el conjunto  $A$  se llama sistema ortonormal de vectores.

Equivalentemente, un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert  $X$ , es un subconjunto no vacío  $\{e_i\}, i \in \{1, 2, \dots\}$  con las siguientes propiedades:

1.  $i \neq j \longrightarrow e_i \perp e_j$ ,
2.  $\|e_i\| = 1 \forall i \in \{1, 2, \dots\}$ .

**Definición 2.1.0.17 (Sucesión Ortonormal)** Una sucesión de vectores que constituyen un sistema ortonormal se llama sucesión ortonormal.

Sea  $(x_n)$  una sucesión ortonormal en un espacio producto interno  $X$ . Se cumple:

$$\langle x_m, x_n \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ 1, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

**Teorema 2.1.0.3** *Sea  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un sistema ortonormal de vectores en un espacio producto interno  $X$ , entonces  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es linealmente independiente.*

Demostración.

Ver Ttito y Salazar (2004).

## 2.2 Ecuaciones Integrales

El concepto de ecuación integral fue introducido por primera vez por el matemático alemán Paul David Gustav du Bois-Reymond en 1888. Sin embargo, los inicios de ecuaciones integrales se remontan mucho antes a Laplace, quien en 1782, utiliza la transformación integral

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xs} \phi(s) ds \quad (2.3)$$

para resolver ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias.

También se puede mencionar que Jean-Baptiste Joseph Fourier en 1822 halló las formulas recíprocas:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xs) \phi(s) ds \quad (2.4)$$

$$\phi(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xs) f(x) dx \quad (2.5)$$

y

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xs) \phi(s) ds \quad (2.6)$$

$$\phi(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xs) f(x) dx. \quad (2.7)$$

donde la transformada seno de Fourier (2.5) y la transformada coseno (2.7) proporcionan las soluciones  $\phi(s)$  de las ecuaciones integrales (2.4) y (2.6), respectivamente en términos de la función conocida  $f$ .

En 1826, Niels Henrik Abel resolvió la ecuación integral:

$$\int_a^x \frac{\phi(s)}{(x-s)^\alpha} ds = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.8)$$

donde  $f$  es una función continua que satisface  $f(a) = 0$ , y  $0 < \alpha < 1$ .

El mismo año Siméon Denis Poisson determinó la ecuación integral:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k'(x-s)\phi(s) ds \quad (2.9)$$

en una memoria sobre la teoría del magnetismo.

Una clase más general de ecuaciones integrales lineales de la forma:

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s)\phi(s) ds \quad (2.10)$$

que incluye la clase de ecuaciones integrales de Volterra, en honor a Vito Volterra, como el caso especial dado por  $K(x,s) = 0$  para  $s > x$ , fue discutido por primera vez por Erik Ivar Fredholm en 1900.

Una ecuación integral es una ecuación en la que aparece una función desconocida bajo el signo de la integral. Cualquier expresión del cálculo integral, como  $y = \int_a^b \phi(x) dx$  puede ser considerada como una ecuación integral.

Un tipo general de ecuación integral,  $\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{\square} K(x,t)\phi(t) dt$  se llama ecuación integral lineal ya que solo se realizan operaciones lineales en la ecuación.

En el tipo general de la ecuación lineal  $\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{\square} K(x,t)\phi(t) dt$  se ha usado un cuadrado  $\square$  para indicar el límite superior de integración. Las ecuaciones integrales pueden ser de dos tipos de acuerdo si  $\square$  (el límite superior) es una constante  $b$  o una variable  $x$ .

La clasificación de las ecuaciones integrales se centra en tres características básicas las cuales juntas describen toda su estructura:

- i) La clase de una ecuación integral se refiere a la ubicación de la función desconocida, las ecuaciones integrales de primera clase tienen la función desconocida o incógnita bajo el signo de la integral solamente, las ecuaciones integrales de segunda y tercera clase también tienen la función desconocida fuera de la integral.
- ii) Las descripciones históricas de Fredholm y Volterra están relacionadas con el intervalo de integración. En una ecuación integral de Fredholm la integral está definida sobre un intervalo finito con puntos extremos fijos mientras que en la ecuación integral de VOLTERRA la integral está indefinida.
- iii) El adjetivo singular se usa cuando la integración es impropia, es decir cuando por lo menos uno de los límites de integración o el intervalo en el cual la ecuación está definida es infinito o el núcleo es no acotado en el intervalo dado.

Las ecuaciones integrales de Fredholm son distinguidas por tener límites de integración fijos y finitos, denotamos estos límites por  $a$  y  $b$ ,  $\phi$  es la función que debemos encontrar.

**Definición 2.2.0.1** Se llama ecuación integral lineal de Fredholm de primera especie, a una relación de la forma

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.11)$$

donde,  $f \in L^2([a,b])$ ,  $f$  es una función dada y se llama término libre,  $K : [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y se llama núcleo,  $\phi \in L^2([a,b])$ ,  $\phi$  es la función que debemos encontrar,  $\lambda$  es un parámetro numérico, y las variables  $x, t \in [a,b]$ .

**Definición 2.2.0.2** Se llama ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie, a una

relación de la forma

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.12)$$

donde,  $f \in L^2([a,b])$ ,  $f$  es una función dada y se llama término libre,  $K : [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y se llama núcleo,  $\phi \in L^2([a,b])$ ,  $\phi$  es la función que debemos encontrar,  $\lambda$  es un parámetro numérico, y las variables  $x, t \in [a,b]$ .

**Definición 2.2.0.3** Se llama ecuación integral lineal de Fredholm de tercera especie, a una relación de la forma

$$\varphi(x)\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.13)$$

donde,  $f$  y  $\varphi$  son funciones,  $f, \varphi \in L^2([a,b])$ ,  $K : [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y se llama núcleo,  $\phi$  es la función que debemos encontrar,  $\phi \in L^2([a,b])$ ,  $\lambda$  es un parámetro numérico, y las variables  $x, t \in [a,b]$ .

**Definición 2.2.0.4** Se llama ecuación integral lineal de Volterra de primera especie, a una relación de la forma

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.14)$$

donde,  $f \in L^2([a,b])$ ,  $f$  es una función dada y se llama término libre,  $K : [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función y se llama núcleo y  $K(x,t) = 0$  para  $t > x$ ,  $\phi \in L^2([a,b])$ ,  $\phi$  es la función que debemos encontrar,  $\lambda$  es un parámetro numérico, y las variables  $x, t \in [a,b]$ .

**Definición 2.2.0.5** Se llama ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie, a una relación de la forma

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.15)$$

donde,  $f \in L^2([a,b])$ ,  $f$  es una función dada y se llama término libre,  $K : [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

es una función y se llama núcleo,  $K(x, t) = 0$  para  $t > x$ ,  $\phi \in L^2([a, b])$ ,  $\phi$  es la función que debemos encontrar,  $\lambda$  es un parámetro numérico, y las variables  $x, t \in [a, b]$ .

**Definición 2.2.0.6** Se llama ecuación integral lineal de Volterra de tercera especie, a una relación de la forma

$$\varphi(x)\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\phi(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.16)$$

donde,  $f$  y  $\varphi$  son funciones,  $f, \varphi \in L^2([a, b])$ ,  $K[a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y se llama núcleo,  $K(x, t) = 0$  para  $t > x$ ,  $\phi$  es la función que debemos encontrar,  $\phi \in L^2([a, b])$ ,  $\lambda$  es un parámetro numérico, y las variables  $x, t \in [a, b]$ .

Las ecuaciones integrales de Volterra y de Fredholm son *Homogéneas* si  $f(x) = 0$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Caso contrario si  $f(x) \neq 0$ , entonces son no homogéneas. Las ecuaciones integrales *Singulares* son distinguidas cuando por lo menos uno de los límites de integración es infinito, por ejemplo:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^\infty K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (2.17)$$

## TIPOS DE NÚCLEOS

**Definición 2.2.0.7** El núcleo  $K$  se llama separable si este es de la forma

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n M_k(x)N_k(t) \quad (2.18)$$

donde las funciones  $M_1, M_2, \dots, M_k$  y  $N_1, N_2, \dots, N_k$  son dos conjuntos linealmente independientes y elementos de  $L^2([a, b])$ , por tanto el núcleo es cuadrado integrable.

**Definición 2.2.0.8** Un núcleo  $K$ , donde  $K$  es una función de valor complejo, se llama simétrico (o Hermitiano) si

$$K(x, t) = \overline{K(t, x)} \quad (2.19)$$

donde  $\overline{K(t, x)}$  es el conjugado complejo de  $K(x, t)$ . Para un núcleo real, este coincide con  $K(x, t) = K(t, x)$ .

**TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE NO HOMOGÉNEA.** Para la demostración de este teorema se considera el Espacio de Hilbert  $L^2([a, b])$ , donde

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

y como referencias para esta sección se consultaron Debnath y Mikusinski (2005) y Loayza (2012)

Las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie en el espacio de Hilbert  $L^2([a, b])$ , se definen por:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.20)$$

donde

$k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se llama núcleo tal que  $\int_a^b \int_a^b |k(x, t)| dx dt < \infty$  y  $\varphi, f \in L^2([a, b])$ .

Sea el operador  $K$ , en  $L^2([a, b])$ , definido por:

$$\begin{aligned} K : L^2([a, b]) &\rightarrow L^2([a, b]) \\ \varphi &\mapsto K\varphi \\ (K\varphi)(x) &= \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $f \in L^2([a, b])$ , entonces la ecuación (2.20) toma la forma:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(K\varphi)(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.21)$$

$$\varphi(x) - \lambda(K\varphi)(x) = f(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

$$(\varphi - \lambda K\varphi)(x) = f(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \quad (2.22)$$

Luego la ecuación (2.22) es una ecuación integral de Fredholm de segunda especie en el espacio



de Hilbert  $L^2([a, b])$ .

Se verifica que el operador  $K \in L^2([a, b])$  es un operador lineal y acotado. Se probará que  $K\varphi \in L^2([a, b])$ .

En efecto, Por la desigualdad de Schwartz, se tiene:

$$\begin{aligned} |(K\varphi)(x)| &= \left| \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \right| \\ |(K\varphi)(x)| &\leq \int_a^b |k(x, t)\varphi(t)| dt \\ \int_a^b |k(x, t)\varphi(t)| dt &\leq \left[ \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ |(K\varphi)(x)| &\leq \left[ \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ |(K\varphi)(x)|^2 &\leq \left[ \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right] \left[ \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right] \end{aligned}$$

Integrando ambos miembros con respecto a  $x$ , donde  $x \in [a, b]$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx &\leq \int_a^b \left( \left[ \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right] \left[ \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right] \right) dx \\ \int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |k(x, t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) dx \\ \int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx &\leq \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Como

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx < \infty, \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt < \infty$$

entonces

$$\int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx < \infty$$

es decir,

$$K\varphi \in L^2([a, b]).$$

Se probará que  $K$  es un operador lineal

En efecto, Sean  $\psi, \varphi \in L^2([a, b])$

$$(K(\psi + \varphi))(x) = \int_a^b k(x, t)[\psi(t) + \varphi(t)]dt$$

$$(K(\psi + \varphi))(x) = \int_a^b k(x, t)\psi(t)dt + \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

$$(K(\psi + \varphi))(x) = (K\psi)(x) + (K\varphi)(x)$$

$$(K(\psi + \varphi))(x) = (K\psi)(x) + (K\varphi)(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

$$K(\psi + \varphi) = (K\psi) + (K\varphi)$$

$$(K(\alpha\varphi))(x) = \int_a^b k(x, t)(\alpha\varphi)(t)dt$$

$$(K(\alpha\varphi))(x) = \int_a^b k(x, t)(\alpha\varphi(t))dt$$

$$(K(\alpha\varphi))(x) = \alpha \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

$$(K(\alpha\varphi))(x) = \alpha(K\varphi)(x), \quad \forall x \in [a, b], \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$(K(\alpha\varphi)) = \alpha(K\varphi), \quad \forall x \in [a, b], \forall \alpha \in \mathbb{Z}$$

Por tanto  $K$  es un operador lineal.

Se probará que  $K$  es un operador acotado

En efecto,

$$\|(K\varphi)\| = \sqrt{\int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx}$$

$$\|(K\varphi)\|^2 = \int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx$$

$$\|(K\varphi)\|^2 = \int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx \leq \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx \int_a^b |\varphi(t)|^2$$

$$\|(K\varphi)\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt}$$

], página 222.

$$\|(K\varphi)\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx} \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

$$\|(K\varphi)\| \leq \delta \|\varphi\|, \forall \varphi \in L^2([a, b])$$

donde

$$\delta = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx}$$

Por tanto  $K$  es un operador acotado.

**TEOREMA DE LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM** En esta sección se considera el teorema de la Alternativa de Fredholm, que es fundamental en la búsqueda soluciones de ecuaciones integrales.

**Teorema 2.2.0.1** (*Alternativa de Fredholm*) Sea  $A$  un operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces la ecuación de operador no homogénea

$$\varphi = A\varphi + f$$

tiene una única solución para cada  $\varphi \in H$  y sólo si la ecuación homogénea

$$g = Ag$$

tiene solamente la solución trivial  $g=0$ .

Demostración.

Ver Debnath y Mikusinski (2005), página 222.

El siguiente teorema establece las condiciones de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie.

**Teorema 2.2.0.2** (*Teorema de existencia y unicidad de las soluciones de la Ecuación Integral*)

de Fredholm de segunda especie no homogénea.) La ecuación

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

tiene una única solución  $\varphi \in L^2([a, b])$ , dado que el núcleo  $k$  es continuo en  $[a, b] \times [a, b]$ ,  $f \in L^2([a, b])$  y  $|\lambda|\delta < 1$  donde

$$\delta = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx}$$

Demostración.

Sea el operador

$$K : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$$

definido por:

$$(K\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

Como  $f \in L^2([a, b])$  entonces

$$K\varphi \in L^2([a, b]) \text{ si } \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \in L^2([a, b])$$

Por la desigualdad de Schwartz, se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \right| &\leq \int_a^b |k(x,t)\varphi(t)|dt \\ &\leq \left[ \int_a^b |k(x,t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left| \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \right|^2 \leq \left[ \int_a^b |k(x,t)|^2 dt \right] \left[ \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]$$

Se integran ambos miembros con respecto a  $x$

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \right|^2 dx &\leq \int_a^b \left( \left[ \int_a^b |k(x,t)|^2 dt \right] \left[ \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right] \right) dx \\ &\leq \int_a^b \left( \int_a^b |k(x,t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx \left( \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) \end{aligned}$$

Desde que:

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx < \infty \quad y \quad \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt < \infty$$

se tiene:

$$K\varphi \in L^2([a,b])$$

el operador definido por:

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \in L^2([a,b])$$

es acotado, esto es:

$$\begin{aligned} \|A\varphi\| &= \sqrt{\int_a^b |(A\varphi)(x)|^2 dx} \\ \|A\varphi\|^2 &= \int_a^b |(A\varphi)(x)|^2 dx \leq \left( \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx \right) \left( \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) \\ \|A\varphi\| &\leq \sqrt{\left( \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx \right) \left( \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right)} \\ \|A\varphi\| &\leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx} \sqrt{\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt} \\ \|A\varphi\| &\leq \delta \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in L^2([a,b]) \end{aligned}$$

Donde

$$\delta = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx}$$

Por lo tanto, la ecuación

$$T\varphi = \varphi$$

tiene una única solución siempre que  $|\alpha|\delta < 1$ . ■

### 2.3 Interpolación polinomial

En esta sección se introduce el concepto de la interpolación de polinomios, que sirve para reconstruir una función  $f$  desconocida buscando un polinomio  $P_n$  cuya gráfica en el plano  $xy$  pase por los puntos con coordenadas  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, \dots, n$ . En general, el polinomio que resulte  $P_n$  será diferente de la función  $f$  (a menos que  $f$  sea un polinomio del mismo grado que  $P_n$ ), por lo que se incurrirá en un error.

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se simbolizará por  $\mathcal{P}_n$  al espacio vectorial de polinomios

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

para la variable real(o compleja)  $x$  y coeficientes reales(o complejos)  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

**Definición 2.3.0.1** *Un polinomio  $P(x)$  de grado  $\leq n$  es una función de la forma*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

con coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Teorema 2.3.0.1** *Dados  $n+1$  puntos distintos (reales o complejos)  $x_0, x_1, \dots, x_n$  y  $n+1$  valores (reales o complejos)  $w_0, w_1, \dots, w_n$ . Entonces existe un único polinomio  $P_n(x) \in \mathcal{P}_n$  para el cual*

$$P_n(x_i) = w_i \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

*Demostración.*

*i) Existencia de  $P_n(x)$*

Considere un polinomio  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  con  $n+1$  coeficientes indeterminados

$a_i$ . Las condiciones (2.23) conducen al sistema de  $n + 1$  ecuaciones lineales en  $a_i$ :

$$a_0 + a_1x_i + \cdots + a_nx_i^n = w_i \quad i = 0, \dots, n, \quad (2.24)$$

esto es,

$$a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = w_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = w_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_nx_2^n = w_2$$

$$a_0 + a_1x_3 + \cdots + a_nx_3^n = w_3$$

...

$$a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = w_n.$$

En forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales de orden  $(n + 1) \times (n + 1)$  es expresado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

La primera matriz a la izquierda de la ecuación matricial se conoce como la matriz de *Vandermonde* de orden  $(n + 1)$ , llamada así en honor al matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde(1735-1796).

El determinante del sistema es el determinante de Vandermonde conformado por  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} \quad (2.26)$$

Para evaluar  $V$ , considere la siguiente función:

$$V(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

donde  $V(x) \in \mathcal{P}_n$ . Además desaparece en  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , por insertar estos valores en lugar de  $x$  produce dos filas idénticas en el determinante.

Como  $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$  es el determinante de Vandermonde, se tiene:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})$$

y la fórmula recurrente es:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) (x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) \quad (2.28)$$

Esto es:

$$V(x_0, x_1) = (x_1 - x_0)$$

$$V(x_0, x_1, x_2) = V(x_0, x_1) (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$



$$\begin{aligned} V(x_0, x_1, x_2, x_3) &= V(x_0, x_1, x_2)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

Y por aplicación múltiple de la ecuación (2.28), se tiene:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{i>j}^n (x_i - x_j). \quad (2.29)$$

Por la consideración de que los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son distintos, entonces  $V \neq 0$ . Por tanto existe una única solución al sistema de ecuaciones (2.24).

i) Unicidad de  $P_n(x)$

Para establecer la unicidad del polinomio  $P_n(x)$ , suponga que existe otro polinomio  $Q_n(x)$  de grado  $n$  o menor, que satisface las condiciones  $Q_n(x_i) = w_n \quad i = 0, 1, \dots, n$ .

Considere que  $H_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$  que también es un polinomio de grado  $n$  o menor, luego

$$H_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i),$$

$$H_n(x_i) = w_i - w_i = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Esto significa que el polinomio  $H_n(x)$  de grado  $n$  o menor, tiene  $n + 1$  raíces diferentes. Esto es posible solo si  $H_n(x)$  es nulo, lo que implica que  $P_n(x) = Q_n(x)$ . ■

**Teorema 2.3.0.2** Sea  $n \geq 1$ , existen polinomios  $L_k \in \mathcal{P}_n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , tal que

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (2.30)$$

para todo  $i, k = 0, 1, \dots, n$ , y  $x_i$ , son números reales distintos ( $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ ).

Demostración.

Para cada  $k$  fijo, con  $0 \leq k \leq n$

Se requiere que  $L_k$  tenga  $n$  ceros, esto es:

$$x_i, i = 0, 1, \dots, n, i \neq k;$$

por tanto,  $L_k$  es de la forma

$$L_k(x) = C_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i) \quad (2.31)$$

donde  $C_k \in \mathbb{R}$  es una constante a ser determinada. Para determinar el valor de  $C_k$ , considérese que  $L_k(x_k) = 1$ , esto es:

$$\begin{aligned} L_k(x) &= C_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i) \\ 1 &= C_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Resultando  $C_k$ :

$$C_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_i} \quad (2.33)$$

Reemplazando  $C_k$  en  $L_k$ , se obtiene:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (2.34)$$

■

**Definición 2.3.0.2** Sea  $n \geq 0$  y sean  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$  números reales distintos y  $y_i, i = 0, 1, \dots, n$  números reales. El polinomio  $P_n$  definido por:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)y_k \quad (2.35)$$

con  $L_k(x), k = 0, 1, \dots, n$  definido en (2.34), se llama polinomio de interpolación de Lagrange de grado  $n$  para el conjunto de puntos  $\{(x_i, y_i) : i = 0, \dots, n\}$  y los números  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$  se llaman puntos(nodos) de interpolación.

La definición anterior (2.3.0.2) se puede considerar cuando los números reales  $y_i$  son valores de una función real  $f$  de variable real, definida sobre  $[a, b]$  en distintos puntos(nodos) de interpolación  $x_i \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n$ .

**Definición 2.3.0.3** Sean  $n \geq 0$  y  $f$  una función real de variable definida y continua sobre  $[a, b]$  y los distintos puntos(nodos) de interpolación  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . El polinomio  $P_n$  esta definido por:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k) \tag{2.36}$$

es el polinomio de interpolación de Lagrange de grado  $n$  con los puntos de interpolación  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$  para la función  $f$ .

**Definición 2.3.0.4** Sean  $n \geq 0$  y  $f$  una función real de variable definida y continua sobre  $[a, b]$  y los distintos puntos(nodos) de interpolación  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . El polinomio  $P_n$  esta definido por:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k)$$

es el polinomio de interpolación de Lagrange de grado  $n$  con los puntos de interpolación  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$  para la función  $f$ .

**Ejemplo 2.3.0.1** Determinar el polinomio de interpolación para los siguientes datos:

$x_i$	2	3	-1	4
$f(x_i)$	1	2	3	4

TABLA N° 2.1: Datos a interpolar (n=4)

En este caso,

$$L_0(x) = \frac{(x-3)(x-(-1))(x-4)}{(2-3) \cdot (2-(-1)) \cdot (2-4)} = \frac{(x-3)(x-(-1))(x-4)}{(-1) \cdot 3 \cdot (-2)} = \frac{(x-3)(x+1)(x-4)}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-(-1))(x-4)}{(3-2) \cdot (3-(-1)) \cdot (3-4)} = \frac{(x-2)(x-(-1))(x-4)}{1 \cdot 4 \cdot (-1)} = \frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{-4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1-2) \cdot (-1-3) \cdot (-1-4)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-3) \cdot (-4) \cdot (-5)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-60}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-(-1))}{(4-2) \cdot (4-3) \cdot (4-(-1))} = \frac{(x-2)(x-3)(x-(-1))}{2 \cdot 1 \cdot 5} = \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{10}$$

De esta forma, el polinomio de interpolación buscado es:

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= \sum_{i=0}^3 f(x_i) L_i(x) \\
 &= (1) \frac{(x-3)(x+1)(x-4)}{6} + (2) \frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{-4} \\
 &\quad + (3) \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-60} + (4) \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{10} \\
 &= \frac{1}{6}(x-3)(x+1)(x-4) - \frac{1}{2}(x-2)(x+1)(x-4) \\
 &\quad - \frac{1}{20}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{2}{5}(x-2)(x-3)(x+1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{60}(x^3 + 21x^2 - 64x + 96)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$P_3(x) = \frac{1}{60}(x^3 + 21x^2 - 64x + 96).$$

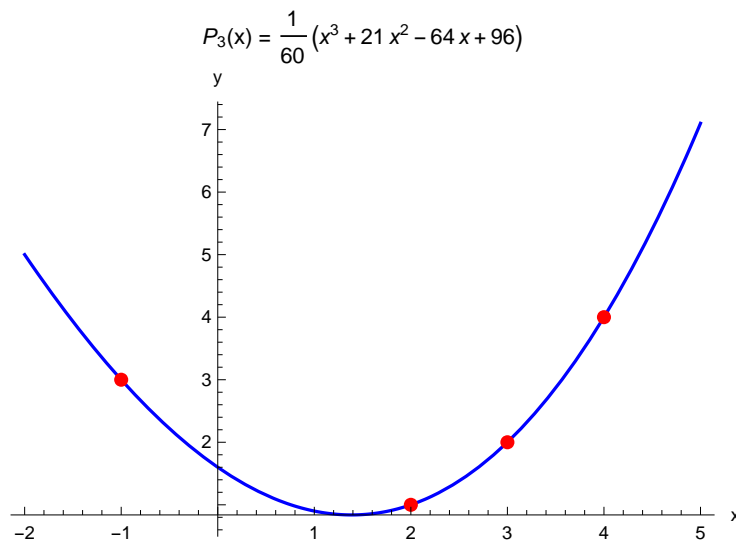


FIGURA N° 2.1: Interpolación polinomial de Lagrange de los datos de la tabla (2.1)

```

1      In[1]:=Lagrange[XY_]:=
2      Module[{j,k,n,prod,sum,term,X,Y},
3      n = Length[XY]-1;
4      X = Subscript[Transpose[XY], [[1]]];
5      Y = Subscript[Transpose[XY], [[2]]];
6      sum=0;
7      For[ k=0, k<=n, k++,prod = 1; For[ j=0, j<=n, j++,
8      term = Which[ j==k, 1, j!=k,(x - Subscript[X, [[j+1]])]/
9      (Subscript[X, [[k+1]]]-Subscript[X, [[j+1]]) ]]; prod = prod  term; ];

```

```

10      sum = sum + Subscript[Y, [[k+1]]] prod; ];Return[sum]; ];
11
12      In[2]:=XY={{2,1},{3,2},{-1,3},{4,4}};
13      In[3]:=P[x_]=Lagrange[XY];
14      In[4]:=Print["\n", "Nodos = ", XY];
15      In[5]:=Print["P(x) = ", P[x] ];
16      In[6]:=Print["Subscript[p, 3](x) = ", Simplify[P[x]] ];
17
18      In[7]:=datos=ListPlot[XY, PlotStyle->{Red, PointSize[0.02]}, ];
19      In[8]:=graf=Plot[{P[x]}, {x, -2, 5.0}, PlotStyle->{Red, Blue}, AxesLabel->{"x", "
20      y"}];
21
22      In[9]:=g2=Show[graf, datos, DisplayFunction->DisplayFunction]
23
24      In[10]:=Print["Nodes = ", XY, "\n"];
25      In[11]:=Print["P(x) = ", P[x]//Simplify ];

```

**Código *Mathematica* II.1:** Interpolación polinomial de Lagrange

**Ejemplo 2.3.0.2** Determinar el polinomio de interpolación para los siguientes puntos:

$x_i$	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	2	2	6	9

TABLA N° 2.2: Puntos a interpolar (n=5)

En este caso,

$$\begin{aligned}
 L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)(-3)(-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24} \\
 L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{(1)(-1)(-2)(-3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{-6} \\
 L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{(2)(1)(-1)(-2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{4} \\
 L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{(3)(2)(1)(-1)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{-6} \\
 L_4(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(4)(3)(2)(1)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{24}
 \end{aligned}$$

De esta forma, el polinomio de interpolación buscado es:

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= \sum_{i=0}^4 f(x_i)L_i(x) \\
 &= (1)\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24} + (2)\frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{-6} \\
 &\quad + (2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{4} + (6)\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{-6} \\
 &\quad + (9)\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{24} \\
 &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24} - \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{3} \\
 &\quad + \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{2} - (x-0)(x-1)(x-2)(x-4) + (3) \\
 &\quad + 3\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{8}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$P_4(x) = \frac{1}{3}(3 + 26x - 37x^2 + 16x^3 - 2x^4).$$

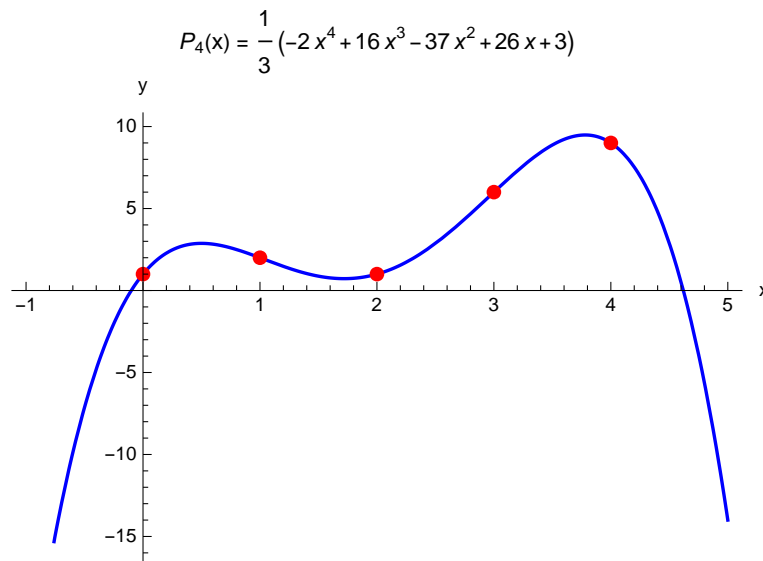


FIGURA N° 2.2: Interpolación polinomial de Lagrange de los puntos de la tabla (2.2)

```

1      In[1]:=Lagrange[XY_]:=
2      Module[{j,k,n,prod,sum,term,X,Y},
3          n = Length[XY]-1;
4          X = Subscript[Transpose[XY], [[1]]];
5          Y = Subscript[Transpose[XY], [[2]]];
6          sum=0;
7          For[ k=0, k<=n, k++,prod = 1; For[ j=0, j<=n, j++,

```

```

8      term = Which[ j==k, 1, j!=k, (x - Subscript[X, [[j+1]]) /
9      (Subscript[X, [[k+1]] - Subscript[X, [[j+1]]) ]]; prod = prod term; ];
10     sum = sum + Subscript[Y, [[k+1]] prod; ]; Return[sum]; ];
11
12     In[2]:=XY={{0, 1}, {1, 2}, {2, 1}, {3, 6}, {4, 9}};
13     In[3]:=P[x_]=Lagrange[XY];
14     In[4]:=Print["\n", "Nodos = ", XY];
15     In[5]:=Print["P(x) = ", P[x] ];
16     In[6]:=Print["Subscript[p, 4](x) = ", Simplify[P[x]] ];
17
18     In[7]:=datos=ListPlot[XY, PlotStyle->{Red, PointSize[0.02]}, ];
19     In[8]:=graf=Plot[{P[x]}, {x, -1, 5.0}, PlotStyle->{Red, Blue}, AxesLabel->{"x", "
20     y"}];
21     In[9]:=g2=Show[graf, datos, DisplayFunction->DisplayFunction]
22     In[10]:=Print["Nodes = ", XY, "\n"];
23     In[11]:=Print["P(x) = ", P[x]//Simplify ];

```

**Código *Mathematica* II.2: Interpolación polinomial de Lagrange**

**Teorema 2.3.0.3** Sean  $n \geq 0$  y  $f$  una función real de variable real, definida y continua sobre  $[a, b]$ , tal que la derivada de  $f$  de orden  $n + 1$  existe y es continua sobre  $[a, b]$ . Entonces dado que existe  $\xi = \xi(x)$  en  $(a, b)$  tal que:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x), \quad (2.37)$$

donde

$$\pi_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n). \quad (2.38)$$

Además

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\pi_{n+1}(x)|, \quad (2.39)$$

donde

$$M_{n+1} = \max_{\zeta \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\zeta)|. \quad (2.40)$$

Demostración.

Ver Suli y Mayers (2003).

## 2.4 Integración numérica

La integración numérica, que también se llama cuadratura, tiene una historia que se extiende desde la invención del cálculo. El hecho de que las integrales de funciones elementales no pueden, en general, calcularse analíticamente, mientras que las derivadas sí, sirvió para dar al campo un cierto estilo y para colocarlo por encima de la monotonía aritmética del análisis numérico durante todo el siglo XVIII y siglos XIX. Con la invención de la computación automática, la cuadratura se convirtió en una tarea numérica.

La integración numérica es una herramienta muy usada para obtener respuestas aproximadas de integrales definidas que no pueden ser resueltas analíticamente, esto es aproximar la integral definida de  $f(x)$  sobre el intervalo  $[a, b]$  evaluando  $f(x)$  en un número finito de puntos.

**Definición 2.4.0.1** Sea  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ . La fórmula de la forma:

$$Q[f] = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_m f(x_m) \quad (2.41)$$

con la propiedad

$$\int_a^b f(x) dx = Q[f] + E[f] \quad (2.42)$$

se llama *fórmula de integración numérica*. El término  $E[f]$  se llama *error de truncamiento de la integración*. Los valores  $\{x_k\}_{k=0}^m \in [a, b]$  son llamados *nodos de la integración* y los elementos  $\{w_k\}_{k=0}^m \in \mathbb{R}$  son llamados *pesos*.

La derivación de las fórmulas de integración numérica por lo general se basan en la interpolación polinomial. Recuerde que existe un único polinomio  $P_m(x)$  de grado  $\leq m$  que pasa por los  $m + 1$  puntos igualmente espaciados  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^m$ , ver el teorema (2.3.0.1). Cuando este polinomio es usado para aproximar  $f(x)$  sobre  $[a, b]$  y la integral de  $f(x)$  es aproximada por la integral de  $P_m(x)$ , la fórmula resultante se conoce como la fórmula de integración de Newton-Cotes.



## 2.4.1 Newton-Cotes

Sea  $f$  una función real de variable real, definida y continua sobre un intervalo cerrado  $[a, b]$ , donde se debe evaluar la siguiente integral:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Puesto que la integración de polinomios es más sencilla, la idea, es aproximar la función  $f$  por su polinomio de interpolación de Lagrange  $P_n(x)$  de grado  $n$  e integrar el polinomio  $P_n(x)$ , esto es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx, \quad (2.43)$$

para un entero positivo  $n$ .

Sean  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$  los puntos de interpolación equiespaciados, determinados por:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

donde

$$h = \frac{(b-a)}{n}.$$

El polinomio de interpolación de Lagrange de grado  $n$  para la función  $f$ , con los puntos de interpolación  $x_i$ , es de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)f(x_k), \quad \text{donde} \quad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Reemplazando  $P_n(x)$  en (2.43), se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k) dx \\
&\approx \sum_{k=0}^n \int_a^b L_k(x) dx f(x_k) \\
&\approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k),
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Lo que implica:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k) \tag{2.45}$$

donde

$$w_k = \int_a^b L_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{2.46}$$

Los valores  $w_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  son los pesos de la cuadratura y los  $x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  son los puntos de la cuadratura.

La regla de la cuadratura (2.45) con sus pesos  $w_k$ , y puntos  $x_k$ , con  $k = 0, 1, \dots, n$  igualmente espaciados, se denomina fórmula de Newton - Cotes de orden  $n$ .

### Casos particulares

#### 2.4.2 Regla del trapecio

En el caso que  $n = 1$  y  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ ; el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 1 para la función  $f$  es:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= L_0(x)f(a) + L_1(x)f(b) \\
&= \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\
&= \frac{1}{b-a}[(b-x)f(a) + (x-a)f(b)].
\end{aligned}$$

Integrando  $P_1(x)$  desde  $a$  hasta  $b$ :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b P_1(x)dx \\
&\approx \int_a^b \left( \frac{1}{b-a} [(b-x)f(a) + (x-a)f(b)] \right) dx \\
&\approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \quad (2.47)$$

Esta fórmula de integración numérica se llama regla del trapecio.

### 2.4.3 Regla de Simpson

En el caso que  $n = 2$  y  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  y  $x_2 = b$ ; la función  $f$  es aproximada por un polinomio de interpolación de Lagrange cuadrático. Los pesos de la cuadratura se calculan usando (2.46):

$$\begin{aligned}
w_0 &= \int_a^b L_0(x)dx \\
&= \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{t(t-1)}{2} \frac{b-a}{2} dt \\
&= \frac{b-a}{6},
\end{aligned}$$

En forma similar,

$$w_1 = \frac{4}{6}(b-a) \text{ y } w_2 = w_0$$

Por lo que se tiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Esta fórmula de integración numérica se llama regla de Simpson.

#### 2.4.4 Estimación del error

El error es generado porque se integra el polinomio de interpolación de Lagrange de  $f$  en lugar de la función  $f$ , esto es,

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

El siguiente teorema proporciona una cota útil en la determinación del error  $E_n(f)$  bajo la hipótesis adicional de que la función  $f$  es suficientemente suave.

**Teorema 2.4.4.1** Sean  $n \geq 1$ ,  $f$  una función real de variable real, definida y continua en el intervalo  $[a, b]$ , y  $f^{(n+1)}$  definida y continua en  $[a, b]$ . Entonces

$$|E_n(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_{n+1}(x)| dx, \quad (2.48)$$

donde  $M_{n+1} = \max_{\zeta \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\zeta)|$  y  $\pi_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ .

Demostración.

Usando al definición de los pesos  $w_k$  de (2.46), esto es:

$$w_k = \int_a^b L_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.49)$$

se puede escribir  $E_n(f)$  como:

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k) \right) dx \\ &= \int_a^b [f(x) - p_n(x)] dx, \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k). \end{aligned}$$

por tanto:

$$|E_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - p_n(x)| dx.$$

■

**Teorema 2.4.4.2** Sea  $f$  una función real de variable real definida y continua sobre el intervalo  $[a, b]$  y que  $f^{(4)}$ , la cuarta derivada de  $f$ , es continua en  $[a, b]$ . Entonces

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)] = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi), \quad (2.50)$$

para algún  $\xi$  in  $(a, b)$ .

Demostración.

Ver Suli y Mayers (2003).

El grado de precisión  $m$  de la regla de cuadratura se define como el grado más alto de todos los integrandos polinómicos para los cuales la regla da el valor exacto de de la integral definida.

**Teorema 2.4.4.3** El grado de precisión  $m$  para las reglas de cuadratura basadas en la interpolación de Lagrange en  $n + 1$  nodos distintos satisface que  $m \geq n$  y  $m \geq n + 1$  si  $x_{\frac{n}{2}} = \frac{a+b}{2}$  y  $x_{\frac{n}{2}-k}$  y  $x_{\frac{n}{2}+k}$  ( $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ ) son simétricos con respecto a  $x_{\frac{n}{2}}$ .

Demostración.

Ver Heister y Rebholz (2019).

**Teorema 2.4.4.4** El grado de precisión de una regla de cuadratura es  $m$ , y todos los  $w_k > 0$ , entonces para  $f \in C^{m+1}([a, b])$ , el error de la cuadratura satisface

$$\left| \int_a^b f(x)dx - Q(f) \right| \leq \frac{m+3}{(m+2)!} \max_{c \in [a, b]} |f^{(m+1)}(c)| (b-a)^{m+2}$$

Demostración.

Ver Heister y Rebholz (2019).

## CAPÍTULO III: POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

En este capítulo, se presentan definiciones básicas y resultados fundamentales de los polinomios de Chebyshev, nodos y extremos de un polinomio de Chebyshev, elementos clave para el siguiente capítulo. Para este capítulo se consideran textos de referencia, como Mason y Handscomb (2002), Barazón Peña (2015) y Zaqueu (2018).

### 3.0.1 Propiedades básicas

**Definición 3.0.1.1** <sup>1</sup> *El polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$  de primera clase es un polinomio en  $x$  de grado  $n$ , definido por la relación:*

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad \text{cuando } x = \cos(\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Si la variable  $x$  esta en el intervalo  $[-1, 1]$ , entonces los valores correspondientes para la variable  $\theta$  están en el intervalo  $[0, \theta]$ .

Se sabe (como una consecuencia de teorema de Moivre) que  $\cos(n\theta)$  es un polinomio de grado  $n$  en  $\cos(\theta)$ , esto es:

$$\begin{aligned} \cos(0\theta) &= 1 \\ \cos(1\theta) &= \cos(1\theta) \\ \cos(2\theta) &= 2\cos^2(\theta) - 1 \\ \cos(3\theta) &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \\ \cos(4\theta) &= 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1 \\ \cos(5\theta) &= 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta) \\ &\vdots \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Ver Mason y Handscomb (2002)

**Teorema 3.0.1.1** *Los polinomios de Chebyshev  $T_n(x)$  están generados por*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

con los valores iniciales  $T_0(x) = 1$  y  $T_1(x) = x$ .

**Demostración.**

Los valores iniciales  $T_0(x) = \cos(0\theta) = 1$  y  $T_1(x) = \cos(1\theta) = \cos(\theta) = x$  se obtienen de la

Definición (3.0.1.1).

Como  $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta)$  y  $T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta)$ , entonces

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) \\ &= 2\cos\left(\frac{(n+1)\theta + (n-1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\theta - (n-1)\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{2n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\theta}{2}\right) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) = 2xT_n(x) \end{aligned}$$

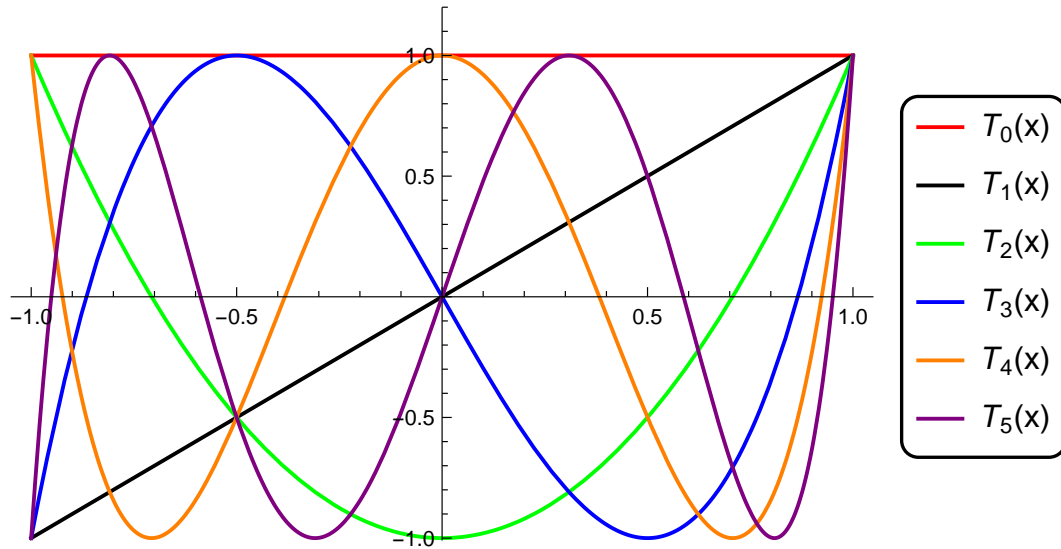
Luego,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x) \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

■

Las expresiones explícitas para los seis primeros polinomios de chebyshev  $T_n(x)$  son:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

FIGURA N° 3.1: Polinomios de Chebyshev:  $T_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 

```

1 In[1]:= T[0, x_] = 1 + 0*x; T[1, x_] = x; T[n_, x_] := 2 x T[n - 1, x] - T[n - 2, x]
2 SetAttributes[T, Listable];
3 In[2]:= Table[T[n, x], {n, 0, 5}]
4 In[3]:= Plot[{1, x, -1 + 2 x^2, -x + 2 x (-1 + 2 x^2),
5           1 - 2 x^2 + 2 x (-x + 2 x (-1 + 2 x^2)),
6           x - 2 x (-1 + 2 x^2) + 2 x (1 - 2 x^2 + 2 x (-x + 2 x (-1 + 2 x^2)))},
7 {x, -1, 1}, PlotStyle -> {Red, Black, Green, Blue, Orange, Purple},
8 PlotLegends -> LineLegend[{"T0(x)", "T1(x)", "T2(x)", "T3(x)", "T4(x)", "T5(x)"},
9 LegendFunction -> Frame], PlotRange -> {{-1.05, 1.05}, {-1.01, 1.2}}]

```

**Código *Mathematica* III.1:** Polinomios de Chebyshev:  $T_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Para representar  $T_n(x)$  como  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k$  en base canónica con coeficientes denotados por  $a_{n,k}$ , se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 3.0.1.2** *Los coeficientes  $a_{n,k}$  de los polinomios de Chebyshev de primera especie pueden ser calculados usando la siguiente relación de recurrencia:*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n,0} = -a_{n-2,0} \\ a_{n,k} = 2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}, \quad k = 1 \dots n-2 \\ a_{n,n-1} = 2a_{n-1,n-2} \\ a_{n,n} = 2a_{n-1,n-1} \end{array} \right. \quad (3.3)$$



cuyas condiciones iniciales son:

$$\begin{cases} a_{0,0} = 1 \\ a_{1,0} = 0, a_{1,1} = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Demostración.

Considere a relación recursiva de los polinomios de Chebyshev de primera especie, dada en (3.2), esto es: escribir  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$  usando  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k$ , entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k &= 2x \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^k - \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k}x^k \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k}x^k \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-2,k}x^k + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^{k+1} \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-2,k+1}x^{k+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}x^{k+1} \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-2,k+1}x^{k+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-1,k}x^{k+1} + 2a_{n-1,n-2}x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1}x^n \\ \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-2,k+1}x^{k+1} + 2 \sum_{k=0}^{n-3} a_{n-1,k}x^{k+1} + 2a_{n-1,n-2}x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1}x^n \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=0}^{n-3} (2a_{n-1,k} - a_{n-2,k+1})x^{k+1} + 2a_{n-1,n-2}x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1}x^n \\ &= -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} (2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k})x^k + 2a_{n-1,n-2}x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1}x^n, \end{aligned}$$

es decir:

$$\sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k = -a_{n-2,0} - \sum_{k=1}^{n-2} (2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k})x^k + 2a_{n-1,n-2}x^{n-1} + 2a_{n-1,n-1}x^n. \quad (3.5)$$

Se observa que en la igualdad (3.5) los coeficientes de las potencias de  $x$  de igual grado, se tiene

la siguiente relación de recurrencia entre los coeficientes de  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k$ .

$$\begin{cases} a_{n,0} = -a_{n-2,0}, \\ a_{n,k} = 2a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}, & k = 1 \dots n-2. \\ a_{n,n-1} = 2a_{n-1,n-2}, \\ a_{n,n} = 2a_{n-1,n-1}. \end{cases} \quad (3.6)$$

cuyas condiciones iniciales son:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x. \end{cases} \implies \begin{cases} a_{0,0} = 1, \\ a_{1,0} = 0, a_{1,1} = 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

■

**Definición 3.0.1.2** Una sucesión de polinomios  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , tal que el grado de  $P_n(x)$  es igual a  $n$ , es simétrica si y solo si

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esto es:

Si  $n$  es par  $P_n(-x) = P_n(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , entonces  $P_n(x)$  es una función par, y si  $n$  es impar  $P_n(-x) = -P_n(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , entonces  $P_n(x)$  es una función impar.

**Teorema 3.0.1.3** Una sucesión de polinomios  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  es simétrica.

Demostración.

Ver Zaqueu (2018).

**Teorema 3.0.1.4** Los  $n+1$  ceros(raíces) de los polinomios de Chebyshev  $T_{n+1} \in P_{n+1}$  están dados por los nodos de Chebyshev

$$x_k^* = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \in [-1, 1] \quad \text{para } 0 \leq k \leq n \quad (3.8)$$

Además, todos los extremos de  $T_{n+1}(x)$  sobre  $[-1, 1]$  se alcanzan en  $n + 2$  puntos

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right) \in [-1, 1] \quad \text{para } 0 \leq k \leq n+1 \quad (3.9)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Demostración.**

De la Definición (3.0.1.1), tenemos que:  $T_n(x) = \cos(n\theta)$  cuando  $x = \cos(\theta)$ . Si  $x = x_k^*$  entonces  $\theta = \arccos(x_k^*)$ , por lo que

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x_k^*) &= \cos((n+1) \arccos(x_k^*)) \\ &= \cos\left((n+1) \arccos\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)\right)\right) \\ &= \cos\left((n+1) \left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)\right) \\ &= \cos\left((2k+1) \frac{\pi}{2}\right) \\ T_{n+1}(x_k^*) &= 0. \end{aligned}$$

Los  $x_k^*$  son distintos y  $T_{n+1}(x)$  es un polinomio de grado  $n + 1$ , por tanto las raíces son de esta forma.

En cuanto a los extremos de los polinomios de Chebyshev  $T_{n+1}(x)$ , sea  $\bar{x}_k = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right)$  para  $0 \leq k \leq n+1$  y de la definición (3.0.1.1) se tiene que:

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(x) &= \frac{d}{dx}(\cos((n+1) \arccos(x))) \\ T'_{n+1}(x) &= \frac{\text{sen}((n+1) \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\bar{x}_k$  en  $T'_{n+1}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(\bar{x}_k) &= \frac{\text{sen}((n+1) \arccos(\cos(\frac{k}{n+1}\pi)))}{\sqrt{1 - (\cos(\frac{k}{n+1}\pi))^2}} \\ &= \frac{\text{sen}((n+1) (\frac{k}{n+1}\pi))}{\sqrt{\text{sen}(\frac{k}{n+1}\pi)^2}} \\ &= \frac{\text{sen}(k\pi)}{\text{sen}(\frac{k}{n+1}\pi)}. \end{aligned}$$

Luego,

$$T'_{n+1}(\bar{x}_k) = 0.$$

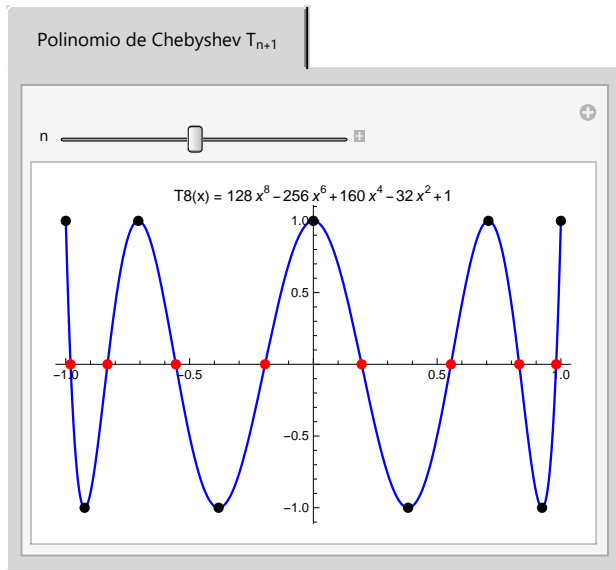
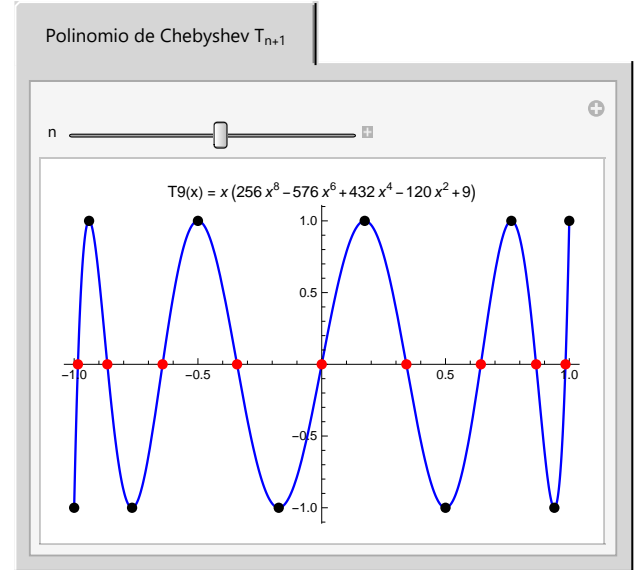
Para  $0 \leq k \leq n+1$  se tiene

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\bar{x}_k) &= \cos((n+1) \arccos(\bar{x}_k)) \\ &= \cos\left((n+1) \arccos\left(\cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right)\right)\right) \\ &= \cos(k\pi) \\ T_{n+1}(\bar{x}_k) &= (-1)^k. \end{aligned}$$

Por tanto se tiene un máximo en los valores pares de  $k$  y un mínimo en los valores impares de  $k$ . ■

### 3.0.2 Nodos y extremos de los polinomios de Chebyshev $T_{n+1}$

La figura muestra los nodos y extremos de un polinomio de Chebyshev  $T_8(x)$ , donde los puntos de color rojo representan los nodos, mientras que los puntos de color negro representa los extremos del polinomio.

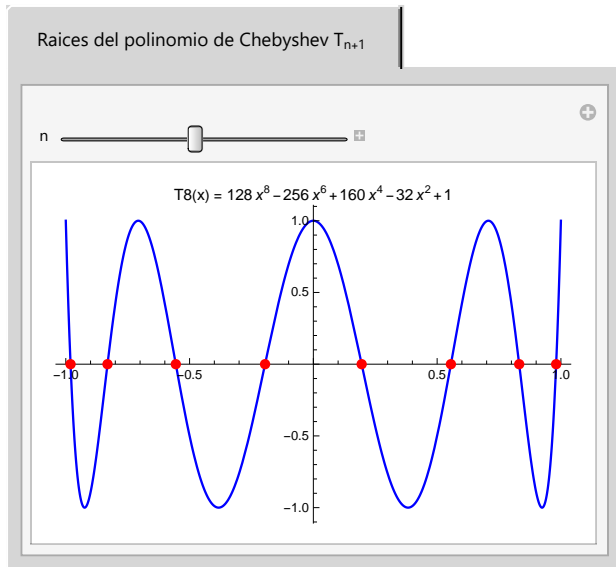
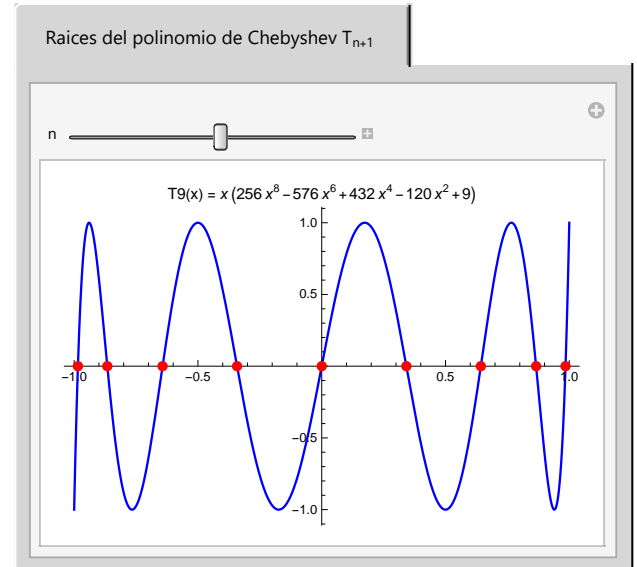
FIGURA N° 3.2: Nodos y Extremos de Chebyshev  $T_8$ .FIGURA N° 3.3: Nodos y Extremos de Chebyshev  $T_9$ .

```

1  In[1]:=RaExt[n0_] := Module[{n = n0},
2  T1[0, x_] = 1 + 0*x;
3  T1[1, x_] = x;
4  T1[nn_, x_] := 2 x T1[nn - 1, x] - T1[nn - 2, x];
5  SetAttributes[T1, Listable];
6  T1[n + 1, x];
7  nodos = Table[Cos[(2 k + 1)/(2 n + 2) \[Pi]], {k, 0, n}];
8  nodos1 = Table[{nodos[[i]], 0}, {i, 1, n + 1}];
9  extremos = Table[Cos[k/(n + 1) \[Pi]], {k, 0, n + 1}];
10 extremos1 =
11 Table[{Cos[k/(n + 1) \[Pi]], T1[n + 1, Cos[k/(n + 1) \[Pi]]]}, {k,
12 0, n + 1}];
13 Plot[T1[n + 1, x], {x, -1, 1},
14 PlotLabel ->
15 Row[{"T", n + 1, "(x) = ", T1[n + 1, x] // Expand // Simplify}],
16 PlotStyle -> {Blue},
17 Epilog -> {PointSize[0.02], {Red, Point[nodos1]}, {Black,
18 Point[extremos1]}}]
19 ]
20 In[2]:=TabView[
21 "Polinomio de Chebyshev \!(\(*SubscriptBox[(T), (n + 1)])\" ->
22 Manipulate[RaExt[n], {{n, 7}, 0, 15, 1}]]

```

Código *Mathematica* III.2: Polinomio de Chebyshev  $T_{n+1}$

3.0.3 Raíces de los polinomios de Chebyshev  $T_{n+1}$ FIGURA N° 3.4: Raíces del polinomio de Chebyshev  $T_8$ .FIGURA N° 3.5: Raíces del polinomio de Chebyshev  $T_9$ .

```

1  In[1]:=Raices[n0_] := Module[{n = n0},
2  T1[0, x_] = 1 + 0*x;
3  T1[1, x_] = x;
4  T1[nn_, x_] := 2 x T1[nn - 1, x] - T1[nn - 2, x];
5  SetAttributes[T1, Listable];
6  T1[n + 1, x];
7  nodos = Table[Cos[(2 k + 1)/(2 n + 2) \[Pi]], {k, 0, n}];
8  nodos1 = Table[{nodos[[i]], 0}, {i, 1, n + 1}];
9  Plot[T1[n + 1, x], {x, -1, 1},
10 PlotLabel ->
11 Row[{"T", n + 1, "(x) = ", T1[n + 1, x] // Expand // Simplify}],
12 PlotStyle -> {Blue},
13 Epilog -> {PointSize[0.02], {Red, Point[nodos1]}}]
14 ]
15 ]
16 In[2]:=TabView[{"Raices del polinomio de Chebyshev \[" (*SubscriptBox[\(T\), \
17 \ (n + 1)\] " -> Manipulate[Raices[n], {{n, 7}, 0, 15, 1}]]]

```

**Código *Mathematica* III.3:** Raíces del polinomio de Chebyshev  $T_{n+1}$

### 3.0.4 Extremos de los polinomios de Chebyshev $T_{n+1}$

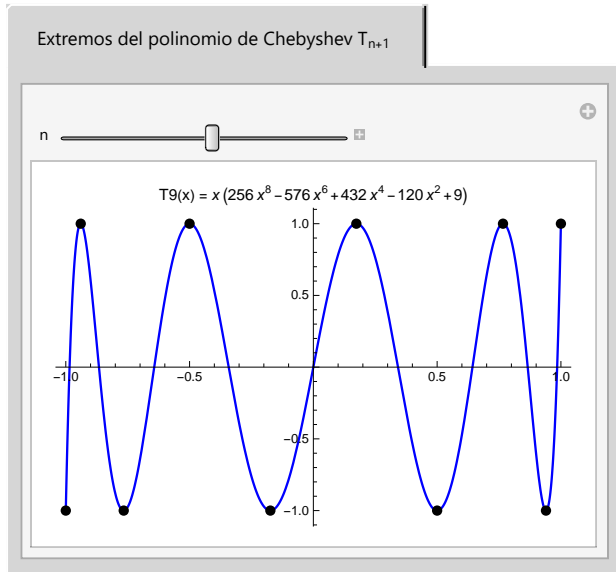


FIGURA N° 3.6: Extremos del polinomio de Chebyshev  $T_8$ .

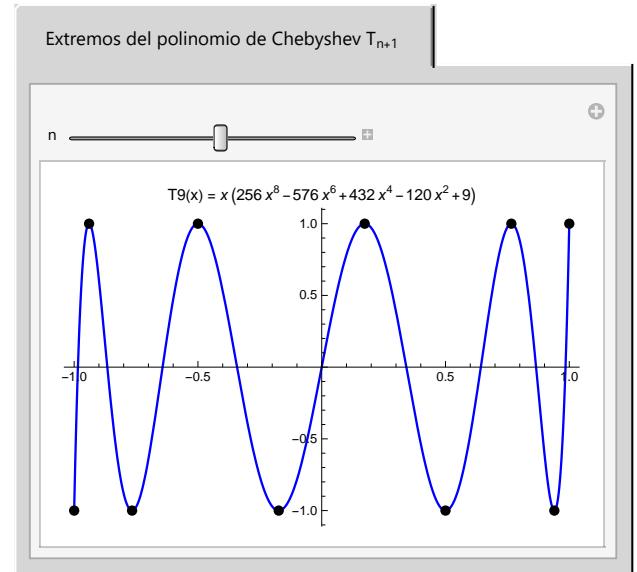


FIGURA N° 3.7: Extremos del polinomio de Chebyshev  $T_9$ .

```

1  In[1]:=Extremos[n0_] := Module[{n = n0},
2  T1[0, x_] = 1 + 0*x;
3  T1[1, x_] = x;
4  T1[nn_, x_] := 2 x T1[nn - 1, x] - T1[nn - 2, x];
5  SetAttributes[T1, Listable];
6  T1[n + 1, x];
7
8  extremos = Table[Cos[k/(n + 1) \[Pi]], {k, 0, n + 1}];
9  extremos1 =
10 Table[{Cos[k/(n + 1) \[Pi]], T1[n + 1, Cos[k/(n + 1) \[Pi]]]}, {k,
11     0, n + 1}];
12 Plot[T1[n + 1, x], {x, -1, 1},
13 PlotLabel ->
14 Row[{"T", n + 1, "(x) = ", T1[n + 1, x] // Expand // Simplify}],
15 PlotStyle -> {Blue},
16 Epilog -> {PointSize[0.02], {Black, Point[extremos1]}}]
17 ]
18 In[2]:=TabView[{"Extremos del polinomio de Chebyshev \
19     \[LeftBracketingBar] (*SubscriptBox[(T), (n + 1)] \[RightBracketingBar] " ->
20     Manipulate[Extremos[n], {{n, 7}, 0, 15, 1}]]]

```

Código *Mathematica* III.4: Extremos del polinomio de Chebyshev  $T_{n+1}$

**Teorema 3.0.4.1** Si  $T_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  es la sucesión de polinomios de Chebyshev, se verifica que:

$$a) 2T_n = \frac{1}{n+1}T'_{n+1} - \frac{1}{n-1}T'_{n-1},$$

$$b) |T'_n(x)| \leq n^2, \quad \forall x \in [-1, 1],$$

c) Ortogonalidad de los polinomio de Chebyshev:

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases} .$$

Demostración.

Ver Barazón Peña (2015).

**Teorema 3.0.4.2** Los polinomios de Chebyshev verifican la ecuación diferencial

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

Demostración.

Ver Barazón Peña (2015).

**Definición 3.0.4.1**<sup>2</sup> El polinomio de Chebyshev  $U_n(x)$  de segunda clase es un polinomio en  $x$  de grado  $n$ , definido por la relación:

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}(n+1)\theta}{\text{sen}(\theta)}, \quad \text{cuando } x = \cos(\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Las variaciones de  $x$  y  $\theta$  son iguales a  $T_n(x)$ .

<sup>2</sup>Ver Mason y Handscomb (2002)



De acuerdo a fórmulas elementales se tiene:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(1\theta) &= \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) &= 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(3\theta) &= \operatorname{sen}(\theta)(4\cos^2(\theta) - 1) \\ \operatorname{sen}(4\theta) &= \operatorname{sen}(\theta)(8\cos^3(\theta) - 4\cos(\theta)) \\ &\vdots\end{aligned}$$

**Teorema 3.0.4.3** *Los polinomios de Chebyshev  $U_n(x)$  están generados por*

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

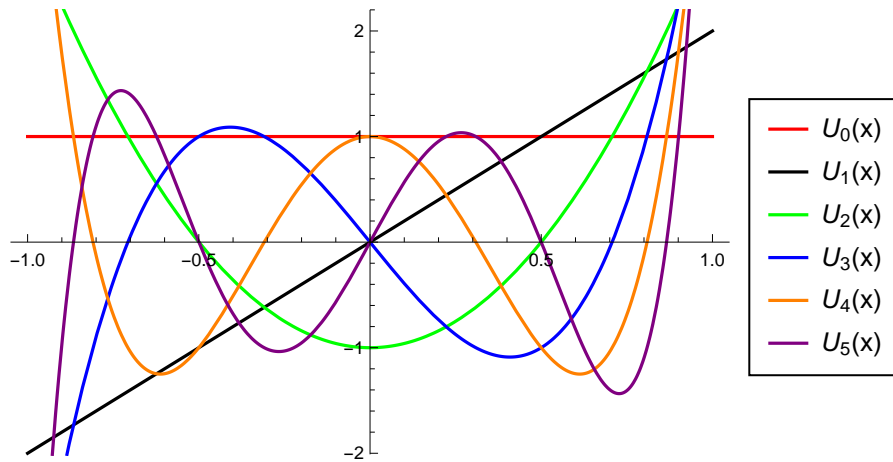
con los valores iniciales  $U_0(x) = 1$  y  $U_1(x) = 2x$ .

Demostración.

Ver Mason y Handscomb (2002).

Las expresiones explícitas para los seis primeros polinomios de chebyshev  $U_n(x)$  son:

$$\begin{aligned}U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x\end{aligned}$$

FIGURA N° 3.8: Polinomios de Chebyshev:  $U_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 

```

1 In[1]:= U[0, x_] = 1 + 0*x; U[1, x_] = 2 x; U[n_, x_] := 2 x U[n - 1, x] - U[n - 2, x]
2 SetAttributes[U, Listable];
3 In[2]:= Table[U[n, x], {n, 0, 5}]
4 In[3]:= Plot[{1, 2 x, -1 + 4 x^2, -2 x + 2 x (-1 + 4 x^2),
5     1 - 4 x^2 + 2 x (-2 x + 2 x (-1 + 4 x^2)),
6     2 x - 2 x (-1 + 4 x^2) +
7     2 x (1 - 4 x^2 + 2 x (-2 x + 2 x (-1 + 4 x^2)))},
8 {x, -1, 1}, PlotStyle -> {Red, Black, Green, Blue, Orange, Purple},
9 PlotLegends -> LineLegend[{"U0(x)", "U1(x)", "U2(x)", "U3(x)", "U4(x)", "U5(x)"},
10 LegendFunction -> Frame], PlotRange -> {{-1.05, 1.05}, {-2.01, 2.2}}]

```

**Código *Mathematica* III.5:** Polinomios de Chebyshev:  $U_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

**Definición 3.0.4.2**<sup>3</sup> El polinomio de Chebyshev  $V_n(x)$  de tercera clase es un polinomio en  $x$  de grado  $n$ , definido por la relación:

$$V_n(x) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos(\frac{1}{2}\theta)}, \quad \text{cuando } x = \cos(\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

**Teorema 3.0.4.4** Los polinomios de Chebyshev  $V_n(x)$  están generados por

$$V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x) \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

con los valores iniciales  $V_0(x) = 1$  y  $V_1(x) = 2x - 1$

<sup>3</sup>Ver Mason y Handscomb (2002)

Demostración.

Ver Mason y Handscomb (2002).

Las expresiones explícitas para los seis primeros polinomios de chebyshev  $V_n(x)$  son:

$$V_0(x) = 1$$

$$V_1(x) = 2x - 1$$

$$V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1$$

$$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

$$V_4(x) = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$$

$$V_5(x) = 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1$$

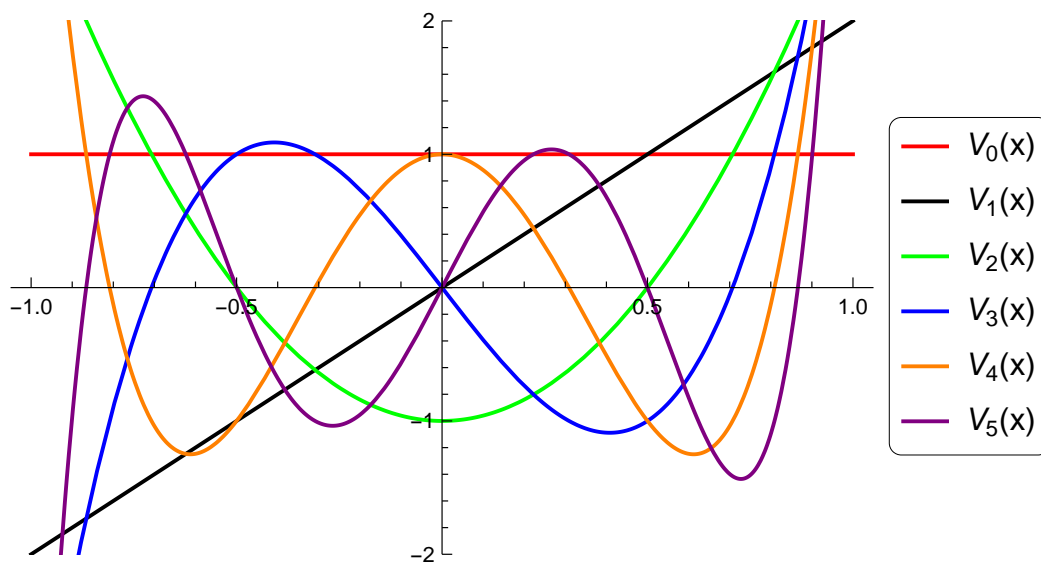


FIGURA N° 3.9: Polinomios de Chebyshev:  $V_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

```

1 In[1]:= V[0, x_] = 1 + 0*x; V[1, x_] = 2 x - 1; V[n_, x_] := 2 x V[n - 1, x] - V[n - 2, x]
2 SetAttributes[V, Listable];
3 In[2]:= Table[V[n, x], {n, 0, 5}]
4 In[3]:= Plot[{1, 2 x, -1 + 4 x^2, -4 x + 8 x^3, 1 - 12 x^2 + 16 x^4,
5         6 x - 32 x^3 + 32 x^5},
6 {x, -1, 1}, PlotStyle -> {Red, Black, Green, Blue, Orange, Purple},
7 PlotLegends -> LineLegend[{"V0(x)", "V1(x)", "V2(x)", "V3(x)", "V4(x)", "V5(x)"},
8 LegendFunction -> Frame], PlotRange -> {{-1.05, 1.05}, {-1.01, 1.2}}]

```

**Código *Mathematica* III.6:** Polinomios de Chebyshev:  $V_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

**Definición 3.0.4.3** <sup>4</sup> El polinomio de Chebyshev  $W_n(x)$  de cuarta clase es un polinomio en  $x$  de grado  $n$ , definido por la relación:

$$W_n(x) = \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{\text{sen}(\frac{1}{2}\theta)}, \quad \text{cuando } x = \cos(\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

**Teorema 3.0.4.5** Los polinomios de Chebyshev  $W_n(x)$  están generados por

$$W_{n+1}(x) = 2xW_n(x) - W_{n-1}(x) \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

con los valores iniciales  $W_0(x) = 1$  y  $W_1(x) = 2x + 1$

Demostración.

Ver Mason y Handscomb (2002).

Las expresiones explícitas para los seis primeros polinomios de chebyshev  $W_n(x)$  son:

$$W_0(x) = 1$$

$$W_1(x) = 2x + 1$$

$$W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1$$

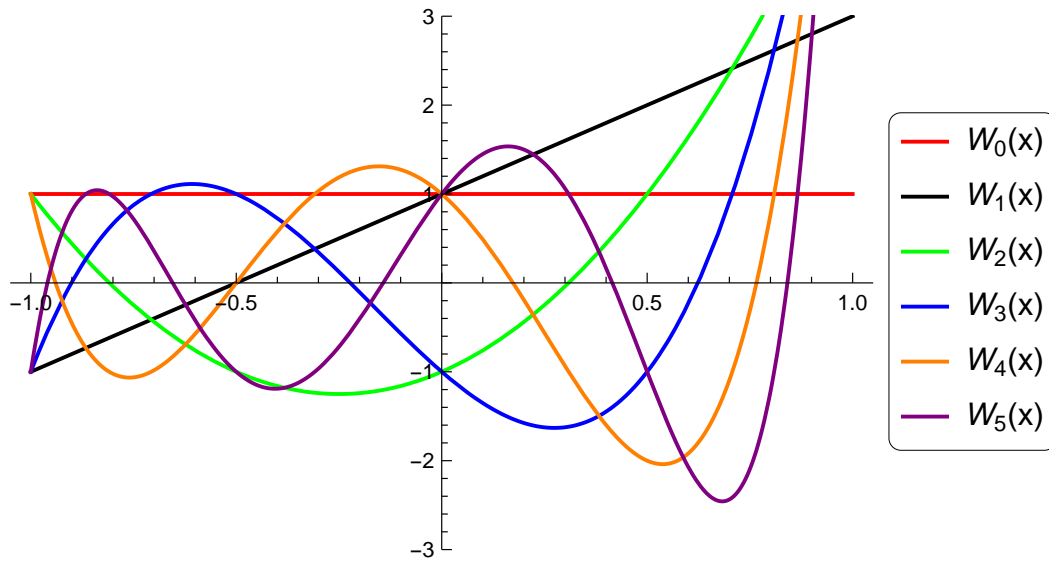
$$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$

$$W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1$$

$$W_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1$$

---

<sup>4</sup>Ver Mason y Handscomb (2002)

FIGURA N° 3.10: Polinomios de Chebyshev:  $W_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

```

1 In[1]:= W[0, x_] = 1 + 0*x; W[1, x_] = 2 x+1; W[n_, x_] := 2 x W[n - 1, x] - W[n - 2, x]
2 SetAttributes[W, Listable];
3 In[2]:= Table[W[n, x], {n, 0, 5}]
4 In[3]:= Plot[{1, 1 + 2 x, -1 + 2 x + 4 x^2, -1 - 4 x + 4 x^2 + 8 x^3,
5         1 - 4 x - 12 x^2 + 8 x^3 + 16 x^4,
6         1 + 6 x - 12 x^2 - 32 x^3 + 16 x^4 + 32 x^5},
7         {x, -1, 1}, PlotStyle -> {Red, Black, Green, Blue, Orange, Purple},
8         PlotLegends -> LineLegend[{"W0(x)", "W1(x)", "W2(x)", "W3(x)", "W4(x)", "W5(x)"},
9         LegendFunction -> Frame], PlotRange -> {{-1.05, 1.05}, {-3.01, 3.2}}]

```

**Código *Mathematica* III.7:** Polinomios de Chebyshev:  $V_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

**Teorema 3.0.4.6** Para cualquier función  $f \in C^1[-1, 1]$ , existe una única serie de expansión expresada en términos de los polinomios de Chebyshev de primera clase que converge uniformemente sobre  $[-1, 1]$  a  $f$ . Esta expansión se escribe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 'c_k T_k(x) = \frac{c_0}{2} T_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

donde la notación prima implica que el primer término de la suma debe dividirse a la mitad. Teniendo en cuenta la ortogonalidad de  $T_k(x)$ , los coeficientes se determinan únicamente por medio del producto interno

$$c_k = \frac{\int_{-1}^1 \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 \frac{T_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

Haciendo un cambio de variable,  $x = \cos(\theta)$  y usando la identidad de que  $T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$ , la fórmula anterior reduce a

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(k\theta) d\theta.$$

Demostración.

Ver Barazón Peña (2015).

## CAPÍTULO IV:

### CUADRATURA DE CLENSHAW-CURTIS PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM

En este capítulo, se presenta la Cuadratura de Clenshaw-Curtis, como una alternativa para determinar la integral definida de una función real de variable real. También la aplicación de la Cuadratura de Clenshaw-Curtis para determinar las soluciones de Ecuaciones Integrales de Fredholm de Segunda Especie. Para este capítulo se consideran las referencias, como Zaqueu (2018), Clenshaw y Curtis (1960), Heister y Rebholz (2019) y Barazón Peña (2015).

#### 4.1 Cuadratura de Clenshaw-Curtis

Una de las más importantes cuadraturas consideradas en el presente trabajo es la cuadratura de Clenshaw y Curtis. Como en su artículo original de 1960, ver Clenshaw y Curtis (1960). Clenshaw y Curtis idearon un método fundamental que se basa en calcular aproximadamente la integral

$$\int_a^b f(x)dx,$$

utilizando como nodos de cuadratura los puntos de Chebyshev.

#### Polinomio Interpolador de Chebyshev

Sean la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $P_N(f)(x)$  el polinomio de grado menor o igual que  $N$  que interpola a  $f$  en los extremos de Chebyshev:

$$a = \eta_N < \eta_{N-1} < \dots < \eta_0 = b$$

es decir,

$$\eta_k = a \frac{1 - x_k}{2} + b \frac{1 + x_k}{2}, \text{ con } x_k = \cos \frac{k\pi}{N}, k = 0, \dots, N$$

Se representa el polinomio  $P_N(f)(x)$  en términos de la base del espacio generada por los polinomios de Chebyshev de grado menor o igual que  $N : T_0; \dots; T_N$ .

Ahora se determinan los coeficientes  $c_n$  tal que:

$$P_N(f)(x) = \sum_{n=0}^N c_n T_n(x) \quad (4.1)$$

Sean  $x_j = \cos \frac{j\pi}{N}$ ,  $j = 0, \dots, N$

$$\begin{aligned} P_N(f)(x_j) &= f(x_j) \\ &= y_j \\ &= \sum_{n=0}^N c_n T_n(x_j) \\ P_N(f)(x_j) &= \sum_{n=0}^N c_n \cos \frac{n\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N \end{aligned}$$

**Lema 4.1.0.1 (Ortogonalidad discreta)** *Se tiene que:*

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi n j}{N} \cos \frac{\pi m j}{N} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m = 0, N \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = m \neq 0, N \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

donde

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2N} & \text{si } j = 0, N \\ \frac{1}{N} & \text{si } j \in 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

**Demostración.**

Si  $n = m \neq 0, N$ , se tiene:



$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^N w_j \cos^2 \frac{\pi j n}{N} &= w_0 + w_N + \sum_{j=1}^{N-1} w_j \cos^2 \frac{\pi j n}{N} \\
 &= \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{N} \cos^2 \frac{\pi j n}{N} \\
 &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 + \cos \frac{2\pi j n}{N}}{2} \\
 &= \frac{1}{N} + \frac{1}{2N}(N-1) + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{2\pi j n}{N}.
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{2\pi j n}{N} &= \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{2\pi j n i}{N}} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{2\pi n i}{N}} - e^{\frac{2\pi(N-1)n i}{N}} e^{\frac{2\pi n i}{N}}}{1 - e^{\frac{2\pi n i}{N}}} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{2\pi n i}{N}} - 1}{1 - e^{\frac{2\pi n i}{N}}} \right) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos^2 \frac{\pi j n}{N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{2N}(N-1) - \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$$

Si  $n = m = 0, N$ , la fórmula es:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi n j}{N} \cos \frac{\pi m j}{N} &= w_0 + w_N + \sum_{j=1}^{N-1} w_j \cos \frac{\pi(0)j}{N} \cos \frac{\pi(0)j}{N} \\ &= \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{N} \cos \frac{\pi(0)j}{N} \cos \frac{\pi(0)j}{N} \\ &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(0)j}{N} \cos \frac{\pi(0)j}{N} \\ &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N}(N-1) \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi n j}{N} \cos \frac{\pi m j}{N} = 1.$$

Si  $n \neq m$ , se tiene:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N w_j \left( \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} + \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} \right).$$

Donde

Si  $n + m$  es par:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} w_j \left( \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} + \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} \right)$$

Por otra parte, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} &= \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{\pi(n+m)j i}{N}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - e^{\frac{\pi(n+m)(N-1)i}{N}} e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - e^{\pi(n+m)i}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - (\cos(\pi(n+m)) + i \sin(\pi(n+m)))}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - 1}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} = \operatorname{Re}(-1) = -1.$$

De forma análoga, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} = -1$$

por lo que:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \frac{1}{N} ((-1) + (-1))$$

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = 0$$

Para el caso en el que,  $n+m$  es impar, se tiene:

$$\sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j n}{N} \cos \frac{\pi j m}{N} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} w_j \left( \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} + \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} \right).$$

donde:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} &= \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^{N-1} e^{\frac{\pi(n+m)ji}{N}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - e^{\frac{\pi(n+m)(N-1)i}{N}} e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - e^{\pi(n+m)i}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} - (\cos(\pi(n+m)) + i \sin(\pi(n+m)))}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}} + 1}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1 + e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n+m)j}{N} = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}}{1 - e^{\frac{\pi(n+m)i}{N}}} \right) = 0,$$

por ser la parte real de un número imaginario puro.

De forma análoga, se tiene que,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{\pi(n-m)j}{N} = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + e^{\frac{\pi(n-m)i}{N}}}{1 - e^{\frac{\pi(n-m)i}{N}}} \right) = 0$$

■

**Teorema 4.1.0.1** *Los coeficientes  $c_n$  de  $P_N(f)(x)$  en la formula (4.1) vienen dados por:*

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{j=0}^N w_j y_j \cos \frac{\pi j n}{N}, & \text{si } n = 0, N, \\ c_n &= 2 \sum_{j=0}^N w_j y_j \cos \frac{\pi j n}{N}, & \text{si } n = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Demostración

Se sabe que

$$y_j = \sum_{m=0}^N c_m \cos \frac{\pi j m}{N}, \quad j = 0, \dots, N$$

Multiplicando por a ambos lados de la ecuación,  $w_j \cos \frac{\pi j n}{N}$  y sumando en  $j$  :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N w_j y_j \cos \frac{\pi j n}{N} &= \sum_{j=0}^N w_j \left( \sum_{m=0}^N c_m \cos \frac{\pi j m}{N} \right) \cos \frac{\pi j n}{N} \\ &= \sum_{m=0}^N c_m \sum_{j=0}^N w_j \cos \frac{\pi j m}{N} \cos \frac{\pi j n}{N}. \end{aligned}$$

Entonces, esta última expresión es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N c_m \delta_{n,m} &= c_n & \text{si } n = 0, N \\ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^N c_m \delta_{n,m} &= \frac{1}{2} c_n & \text{si } n = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

■

### Cuadratura de Clenshaw-Curtis Expansión

La cuadratura que se considera es la de Clenshaw-Curtis, que se basa en la integración directa de la expansión de Chebyshev de orden  $n$  del primer tipo para  $P(x)$

Sea  $P_n(f)$  el polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en los nodos de Chebyshev  $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ ,  $j = 0, \dots, n$ :

$$P_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) \quad (4.3)$$

donde por el Teorema 4.1.0.1 los coeficientes  $c_k$  son:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^n f(x_j) \cos \frac{\pi j k}{n} & \text{si } k = 0, n \\ \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n f(x_j) \cos \frac{\pi j k}{n} & \text{si } k = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^1 T_k(x) dx$$

Utilizando el Teorema 3.0.4.1,

$$2T_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1} - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}$$

se tiene que:

$$\int_{-1}^1 2T_k(x) dx = \left[ \frac{1}{k+1} \int_{-1}^1 T'_{k+1}(x) dx - \frac{1}{k-1} \int_{-1}^1 T'_{k-1}(x) dx \right]$$

que es equivalente a:

$$\int_{-1}^1 T_k(x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k+1} \int_{-1}^1 T'_{k+1}(x) dx - \frac{1}{k-1} \int_{-1}^1 T'_{k-1}(x) dx \right]$$

Como  $T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k$ , se tiene que, si  $k$  es par

$$\int_{-1}^1 T_k(x) dx = \frac{1}{2(k+1)} (1 - (-1)^{k+1}) - \frac{1}{2(k-1)} (1 - (-1)^{k-1}) = \frac{2}{1-k^2}$$

Y si  $k$  es impar

$$\int_{-1}^1 T_k(x) dx = 0.$$

En conclusión, la cuadratura de Clenshaw-Curtis es:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_k^{cc} c_k, \quad (4.4)$$

donde

$$w_k^{cc} = \begin{cases} \frac{2}{1-k^2} & \text{si } k \text{ par} \\ 0 & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$$

En forma equivalente se considera la cuadratura de Clenshaw-Curtis:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{c_0 T_0(x)}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k T_k(x) \right) dx = c_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k \int_{-1}^1 T_k(x) dx \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para simplificar la expresión en (4.5) se puede usar las siguientes propiedades

$$\int T_k(x) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{T_{k+1}(x)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(x)}{k-1} \right) + \text{constante} = \frac{k T_{k+1}(x)}{k^2 - 1} - \frac{x T_k(x)}{k-1} + \text{constante}. \quad (4.6)$$

$$T_k(1) = 1 \text{ y } T_k(-1) = (-1)^k. \quad (4.7)$$

Esto lleva a

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{-1}^1 T_k(x)dx$$

$$* \text{ Por (4.6)} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{kT_{k+1}(1)}{k^2-1} - \frac{T_k(1)}{k-1} - \frac{kT_{k+1}(-1)}{k^2-1} - \frac{T_k(-1)}{k-1} \right)$$

$$* \text{ Por (4.7)} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{k}{k^2-1} - \frac{1}{k-1} - \frac{k(-1)^{k+1}}{k^2-1} - \frac{(-1)^k}{k-1} \right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{k(k-1) - k(k-1)(-1)^{k+1} - (k^2-1) - (k^2-1)(-1)^k}{(k^2-1)(k-1)} \right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{k(k-1)(1+(-1)^k) - (k^2-1)(1+(-1)^k)}{(k^2-1)(k-1)} \right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{(1+(-1)^k)(k(k-1) - (k^2-1))}{(k^2-1)(k-1)} \right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{(1+(-1)^k)(1-k)}{(k^2-1)(k-1)} \right)$$

$$* \text{ Desaparece para impares } k = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{1+(-1)^k}{1-k^2} \right)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2c_{2k}}{1-4k^2}.$$

Por lo tanto, la regla de Clenshaw-Curtis de  $(n+1)$  puntos es

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n c_k T_k(x)dx = c_0 + \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{2c_{2k}}{1-4k^2} + \frac{c_n}{1-n^2}$$

donde  $n$  debe ser un entero par mayor o igual que 4. Si se insertan los coeficientes  $c_{2k}$  como se definen en (3.0.4.6) la fórmula se convierte en

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) d\theta + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left( \frac{\int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(2k\theta) d\theta}{1-4k^2} \right) + \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(n\theta) d\theta}{1-n^2}.$$

Basado en la observación de los coeficientes en (3.0.4.6), puede ser engorroso calcular tales integrales, por lo que se usa la regla trapezoidal para aproximar su valor. Se usan los puntos extremos para  $n$ . Polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$ , dado en (3.0.1.4), como los puntos de muestreo

para esta aproximación.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(k\theta) d\theta &\approx \frac{\pi}{2n} \left[ f(x'_{n,0}) \cos(kx'_{n,0}) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x'_{n,j}) \cos(kx'_{n,j}) + f(x'_{n,n}) \cos(kx'_{n,n}) \right] \\ &= \frac{\pi}{2n} \left[ f(1) + (-1)^k f(-1) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f\left(\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi k j}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

lo que implica

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(k\theta) d\theta \approx \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n {}'' f\left(\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi k j}{n}\right)$$

donde la notación prima doble significa que el primer y último término de la suma se dividirán por la mitad.

#### 4.2 Aplicación de la cuadratura de Clenshaw-Curtis

Las reglas de cuadraturas basadas en nodos equiespaciados parecen naturales, como uno se preguntaría lo que se puede lograr si se utilizan nodos no espaciados. De hecho, utilizando cuidadosamente elegidos los nodos no espaciados pueden desarrollar reglas de cuadratura altamente eficientes y precisas.

La Cuadratura de Clenshaw-Curtis para  $\int_a^b f(x) dx$  es:

$$Q_{2C}^n(f) = \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

donde  $p_n(x)$  es la interpolación de Chebyshev para  $f(x)$ , y los nodos de la cuadratura  $x_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$  son los puntos de Chebyshev.

Para  $n$  impar, los pesos  $w_k = \int_a^b L_k(x) dx$  satisfacen:

$$w_k = \begin{cases} \frac{b-a}{2n^2} & k = 0, n, \\ \frac{b-a}{n} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{4j^2-1} \cos\left(\frac{2kj\pi}{n}\right) \right\} & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases} \quad (4.8)$$



Y para  $n$  par,

$$w_k = \begin{cases} \frac{b-a}{2(n^2-1)} & k = 0, n, \\ \frac{b-a}{n} \left\{ 1 - \frac{(-1)^k}{n^2-1} - \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2}{4j^2-1} \cos\left(\frac{2kj\pi}{n}\right) \right\} & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Las primeras reglas de cuadratura de Clenshaw Curtis se resumen en la Tabla

$n$	Cuadratura de Clenshaw Curtis
1	$\frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$
2	$\frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$
3	$\frac{b-a}{18} [f(a) + 9f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 9f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)]$
4	$\frac{b-a}{30} [f(a) + 8f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}a + \frac{2-\sqrt{2}}{4}b\right) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 8f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}a + \frac{2+\sqrt{2}}{4}b\right) + f(b)]$

TABLA N° 4.1: Reglas de la Cuadratura de Clenshaw Curtis

**Ejemplo 4.2.0.1** Aproximar  $\int_1^3 \ln x dx$  usando la cuadratura de Clenshaw-Curtis usando  $n = 4$  nodos  $x_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$ , donde  $a = 1, b = 3$  y  $n = 4$ .

Solución,

La evaluación directa resulta:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\cos\left(\frac{0\pi}{4}\right) \left(\frac{3-1}{2}\right) + \frac{3+1}{2} = 1, \\ x_1 &= -\cos\left(\frac{1\pi}{4}\right) \left(\frac{3-1}{2}\right) + \frac{3+1}{2} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x_2 &= -\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \left(\frac{3-1}{2}\right) + \frac{3+1}{2} = 2, \\ x_3 &= -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \left(\frac{3-1}{2}\right) + \frac{3+1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x_4 &= -\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) \left(\frac{3-1}{2}\right) + \frac{3+1}{2} = 3 \end{aligned}$$

las raíces son:  $x_0 = 1, x_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = 2, x_3 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ , y  $x_4 = 3$

De  $w_c$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \frac{3-1}{2(4^2-1)} = \frac{1}{15}, \\
 w_1 &= \frac{3-1}{4} \left\{ 1 - \frac{(-1)^1}{4^2-1} - \sum_{j=1}^{\frac{4}{2}-1} \frac{2}{4j^2-1} \cos\left(\frac{2(1)j\pi}{4}\right) \right\} = \frac{8}{15}, \\
 w_2 &= \frac{3-1}{4} \left\{ 1 - \frac{(-1)^2}{4^2-1} - \sum_{j=1}^{\frac{4}{2}-1} \frac{2}{4j^2-1} \cos\left(\frac{2(2)j\pi}{4}\right) \right\} = \frac{12}{15}, \\
 w_3 &= \frac{3-1}{4} \left\{ 1 - \frac{(-1)^3}{4^2-1} - \sum_{j=1}^{\frac{4}{2}-1} \frac{2}{4j^2-1} \cos\left(\frac{2(3)j\pi}{4}\right) \right\} = \frac{8}{15}, \\
 w_4 &= \frac{3-1}{2(4^2-1)} = \frac{1}{15}
 \end{aligned}$$

los pesos son:  $w_0 = w_4 = \frac{1}{15}$ ,  $w_1 = w_3 = \frac{8}{15}$  y  $w_2 = \frac{12}{15}$ .

Por tanto la cuadratura de Clenshaw-Curtis es:

$$Q_{2C}^4(f) = \sum_{k=0}^4 w_k f(x_k) = \frac{1}{15} \cdot \ln(1) + \frac{8}{15} \cdot \ln\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{12}{15} \cdot \ln(2) + \frac{8}{15} \cdot \ln\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{15} \cdot \ln(3)$$

$$Q_{2C}^4(f) = \sum_{k=0}^4 w_k f(x_k) = 1.2958988$$

Usando la función  $QCC[f[x], a, b, n]$  implementada en *Mathematica* 13, se tiene:

```
In[2]:= f[x_] := Log[e, x];
          |logaritmo
```

```
a = 1;
b = 3;
n = 4;
```

```
In[6]:= QCC[f[x], a, b, n] // Timing
          |cronometra
```

Raíces	$x_0 = 1$
	$x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$
	$x_2 = 2$
	$x_3 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
	$x_4 = 3$

Pesos	$w_0 = \frac{1}{15}$
	$w_1 = \frac{8}{15}$
	$w_2 = \frac{4}{5}$
	$w_3 = \frac{8}{15}$
	$w_4 = \frac{1}{15}$

Imágenes	$f(x_0) = 0$
	$f(x_1) = \text{Log}\left[2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
	$f(x_2) = \text{Log}[2]$
	$f(x_3) = \text{Log}\left[2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
	$f(x_4) = \text{Log}[3]$

El resultado es:

$$\int_1^3 \text{Log}[x] dx = \frac{4 \text{Log}[2]}{5} + \frac{\text{Log}[3]}{15} + \frac{8}{15} \text{Log}\left[2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \frac{8}{15} \text{Log}\left[2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

\*\*\*\*\*

$$\int_1^3 \text{Log}[x] dx = 1.2959$$

```
Out[6]= {0.015625, Null}
```

El código de la implementación de la función  $QCC[f[x], a, b, n]$ , es:

```
In[1]:= QCC[f_, a_, b_, n_] :=
```

```

2 Module[{i, F, integral, raices, ecuaciones, Vr, solusistema,
3     imaganes, Puntos, soluaprox, roots, weights, images},
4 (*Attributes[f]={Listable};*)
5 (*Raices*)
6 x[kk_, nn_, aa_, bb_] := -Cos[kk \[Pi]/nn] ((bb - aa)/2) + (
7 aa + bb)/2;
8 (*PESOS_n_IMPAR*)
9 wi[kk_, nn_, aa_, bb_] :=
10 If[kk == 0 || kk == nn, (bb - aa)/(2 nn^2),
11 If[1 <= kk <= nn - 1, (bb - aa)/nn (1 - \!\(
12 \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \ (j = 1)\),
13 FractionBox[\(nn - 1\), \ (2\)]\)\(
14 \*FractionBox[\(2\), \ (4
15 \*SuperscriptBox[\(j\), \ (2\)] - 1\)\] Cos[2 kk\ j\
16 \*FractionBox[\(\[Pi]\), \ (nn\)]\)\)\)\)];
17 (*PESOS_n_PAR*)
18 wp[kk_, nn_, aa_, bb_] :=
19 If[kk == 0 || kk == n, (bb - aa)/(2 (nn^2 - 1)),
20 If[1 <= kk <= nn - 1, (bb - aa)/nn (1 - (-1)^kk/(nn^2 - 1) - \!\(
21 \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \ (j = 1)\), \ (
22 \*FractionBox[\(nn\), \ (2\)] - 1\)\)\(
23 \*FractionBox[\(2\), \ (4
24 \*SuperscriptBox[\(j\), \ (2\)] - 1\)\] Cos[2 kk\ j\
25 \*FractionBox[\(\[Pi]\), \ (nn\)]\)\)\)\)];
26 r = Table[x[k, n, a, b], {k, 0, n, 1}];
27 roots =
28 Grid[Table[{SequenceForm[Subscript[x, k], " = ",
29     x[k, n, a, b]]}, {k, 0, n, 1}], Frame -> All];
30 w = Table[
31 If[EvenQ[n], wp[i, n, a, b], wi[1, n, a, b]], {i, 0, n, 1}];
32 weights =
33 Grid[Table[{SequenceForm[Subscript["w", i], " = ",
34     If[EvenQ[n], wp[i, n, a, b], wi[1, n, a, b]]}], {i, 0, n, 1}],
35 Frame -> All];
36 ri = Table[f /. x -> x[k, n, a, b], {k, 0, n, 1}];
37 images =
38 Grid[Table[{SequenceForm["f(", Subscript[x, k], ") = ",
39     f /. x -> x[k, n, a, b]]}, {k, 0, n, 1}], Frame -> All];
40 Q = ri . w;
41 Print["Raices ", roots];
42 Print["Pesos ", weights];
43 Print["Imagenes ", images];
44 (*Print["Subsuperscript[\[Integral], a, b]
45 f(x)\[DifferentialD]x = ", Q];*)

```

```

46 Print["El resultado es:                "];
47 Print[SequenceForm[!\(\
48 \*SubsuperscriptBox[("\<[Integral]>"\), \<a\), \<b\)],
49 f, \(\[DifferentialD]x\), \("\< = \>"\)], Q];
50 (*Print["Subsuperscript[\[Integral], a, b]
51 f(x)\[DifferentialD]x = ",Q//N];*)
52 Print["*****"];
53 Print[SequenceForm[!\(\
54 \*SubsuperscriptBox[("\<[Integral]>"\), \<a\), \<b\)],
55 f, \(\[DifferentialD]x\), \("\< = \>"\)], Q // N];];

```

**Código Mathematica IV.1:** Cuadratura de Clenshaw Curtis:  $\int_a^b f(x)dx$

**Ejemplo 4.2.0.2** Aproximar  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  usando la cuadratura de Clenshaw-Curtis usando los nodos  $x_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$ , donde  $a = 0, b = 1$  y  $n = 4$ .

Solución

La evaluación directa resulta:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -\cos\left(\frac{0\pi}{4}\right) \left(\frac{1-0}{2}\right) + \frac{1+0}{2} = 0, \\
 x_1 &= -\cos\left(\frac{1\pi}{4}\right) \left(\frac{1-0}{2}\right) + \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\
 x_2 &= -\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \left(\frac{1-0}{2}\right) + \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \\
 x_3 &= -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \left(\frac{1-0}{2}\right) + \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\
 x_4 &= -\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) \left(\frac{1-0}{2}\right) + \frac{1+0}{2} = 1
 \end{aligned}$$

las raíces son:  $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}},$  y  $x_4 = 0$

De  $w_c$  se tiene:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \frac{1-0}{2(4^2-1)} = \frac{1}{30}, \\
 w_1 &= \frac{1-0}{4} \left\{ 1 - \frac{(-1)^1}{4^2-1} - \sum_{j=1}^{\frac{4}{2}-1} \frac{2}{4j^2-1} \cos\left(\frac{2(1)j\pi}{4}\right) \right\} = \frac{4}{15}, \\
 w_2 &= \frac{1-0}{4} \left\{ 1 - \frac{(-1)^2}{4^2-1} - \sum_{j=1}^{\frac{4}{2}-1} \frac{2}{4j^2-1} \cos\left(\frac{2(2)j\pi}{4}\right) \right\} = \frac{2}{5}, \\
 w_3 &= \frac{1-0}{4} \left\{ 1 - \frac{(-1)^3}{4^2-1} - \sum_{j=1}^{\frac{4}{2}-1} \frac{2}{4j^2-1} \cos\left(\frac{2(3)j\pi}{4}\right) \right\} = \frac{4}{15}, \\
 w_4 &= \frac{1-0}{2(4^2-1)} = \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

los pesos son:  $w_0 = w_4 = \frac{1}{30}$ ,  $w_1 = w_3 = \frac{4}{15}$  y  $w_2 = \frac{2}{5}$

Por tanto la cuadratura de Clenshaw-Curtis es:

$$Q_{2C}^4(f) = \sum_{k=0}^4 w_k f(x_k) = \frac{1}{30} \cdot e^{-(0)^2} + \frac{4}{15} \cdot e^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{2}{5} \cdot e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{4}{15} \cdot e^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{30} \cdot e^{-(1)^2}$$

$$Q_{2C}^4(f) = \sum_{k=0}^4 w_k f(x_k) = 0.74681985792.$$

Usando la función  $QCC[f[x], a, b, n]$  implementada en *Mathematica* 13, se tiene:

```
In[2]:= f[x_] := e-x2;
a = 0;
b = 1;
n = 4;
```

```
In[6]:= QCC[f[x], a, b, n] // Timing
```

	$x_0 = 0$
	$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$
Raíces	$x_2 = \frac{1}{2}$
	$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$
	$x_4 = 1$

	$w_0 = \frac{1}{30}$
	$w_1 = \frac{4}{15}$
Pesos	$w_2 = \frac{2}{5}$
	$w_3 = \frac{4}{15}$
	$w_4 = \frac{1}{30}$

	$f(x_0) = 1$
	$f(x_1) = e^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}$
Imágenes	$f(x_2) = \frac{1}{e^{1/4}}$
	$f(x_3) = e^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}$
	$f(x_4) = \frac{1}{e}$

El resultado es:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \frac{1}{30} + \frac{1}{30e} + \frac{2}{5e^{1/4}} + \frac{4}{15} e^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{4}{15} e^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

\*\*\*\*\*

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.74682$$

```
Out[6]= {0.015625, Null}
```

### 4.2.1 Convergencia de las Cuadratura de Clenshaw-Curtis

Sea  $Q_{2C}^n(f)$  la Cuadratura de Clenshaw-Curtis. Sea  $P_n^*$  la mejor aproximación a una función  $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$  por polinomios de grado menor o igual que  $n$  con respecto a la norma del supremo.

Sea

$$E_n^* = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n^*(x)| = \|f - P_n^*\|_\infty.$$

**Teorema 4.2.1.1** *Sea  $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$ ,  $c$  es una constante positiva y  $n \geq 0$ . Entonces,*

$$|I(f) - Q_{2C}^n(f)| \leq cE_n^*.$$

*Demostración.*

Como  $P_n^*$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n$ , se tiene que,

$$|I(f) - Q_{2C}^n(f)| = |I(f - P_n^*) - Q_{2C}^n(f - P_n^*)| \leq |I(f - P_n^*)| + |Q_{2C}^n(f - P_n^*)|.$$

Por una parte,

$$|I(f - P_n^*)| = \left| \int_{-1}^1 (f(x) - P_n^*(x)) dx \right| \leq 2 \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n^*(x)| = 2E_n^*. \quad (4.10)$$

Por otra parte, se sabe que:

$$Q_{2C}^n(f) = \sum_{k=0}^n c_k w_k^{cc}$$

donde los  $w_k^{cc}$  están dados por (4.4) y los  $c_k$  son los del Teorema 4.1.0.1. Entonces,

$$|Q_{2C}^n(f - P_n^*)| \leq \max_{0 \leq k \leq n} |(f - P_n^*)^{\wedge}_k| \sum_{k=0}^n |w_k^{cc}|.$$

donde los  $(f - P_n^*)^{\wedge}_k$  son los coeficientes de (4.1) asociados a la función  $f - P_n^*$ . Ahora,

$$\sum_{k=0}^n |w_k^{cc}| = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^n \frac{2}{k^2 - 1} \leq \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{\infty} \frac{2}{k^2 - 1} = K < +\infty.$$



Teniendo en cuenta el Teorema 4.1.0.1 ,

$$|(f - P_n^*)_k^\wedge| \leq \begin{cases} \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^k |(f - P_n^*)(x_j)| \left| \cos\left(\frac{k\pi j}{n}\right) \right| & \text{si } k = 0, n \\ \frac{2}{k} \sum_{j=0}^k |(f - P_n^*)(x_j)| \left| \cos\left(\frac{k\pi j}{n}\right) \right| & \text{si } 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Por tanto,

$$|(f - P_n^*)_k^\wedge| \leq \begin{cases} \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^k |(f - P_n^*)(x_j)| = \frac{k+1}{2k} E_n^* & \text{si } k = 0, n \\ \frac{2}{k} \sum_{j=0}^k |(f - P_n^*)(x_j)| = \frac{2(k+1)}{k} E_n^* & \text{si } 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Luego,  $|(f - P_n^*)_k^\wedge| \leq K' E_n^*$ , y se tiene que,  $|C_n^{cc}(f - P_n^*)| \leq K K' E_n^*$ . Sumando los 2 valores absolutos, se tiene,

$$|I(f) - Q_{2C}^n(f)| \leq c E_n^*$$

para una cierta constante positiva  $c$  independiente de  $n$ . ■

### 4.3 Solución de Ecuaciones Integrales de Fredholm de Segunda Especie

Dada la ecuación integral de Fredholm de segunda especie:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (4.11)$$

donde,  $f$  es una función continua dada y se llama término libre,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K$  es una función continua dada y se llama núcleo,  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi$  es la función continua que se debe encontrar,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Las variables  $x, t$  recorren el intervalo  $[a, b]$ .

Y la Cuadratura de Clenshaw Curtis:

$$Q_{2C}^n(f) = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

que garantiza expresar:

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (4.12)$$

como una suma finita de términos dependientes del núcleo y de la función incógnita, esto es: considerando el siguiente cambio de variable:

$$t = \frac{(b-a)s + (a+b)}{2}, s \in [-1, 1] \quad (4.13)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt &= \int_{-1}^1 K\left(x, \frac{(b-a)s + (a+b)}{2}\right) \varphi\left(\frac{(b-a)s + (a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} ds \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} w_j K\left(x, \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2}\right) \varphi\left(\frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde los  $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n, x_{n+1}$  son las raíces del polinomio de Chebyshev de grado  $n$  y  $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$  las ponderaciones correspondientes (pesos). Se debe tener en cuenta que las raíces  $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n, x_{n+1}$  son elementos del intervalo  $[-1, 1]$ .

La ecuación integral de Fredholm (4.11), se transforma en:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n+1} w_j K\left(x, \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2}\right) \varphi\left(\frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} \quad (4.15)$$

donde,  $x \in [a, b]$ , y  $\frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \in [a, b]$ .

Se considera el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{(b-a)s + (a+b)}{2} \quad (4.16)$$

donde,  $s \in [-1, 1]$  por tanto la ecuación integral (4.11) queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi \left( \frac{(b-a)s + (a+b)}{2} \right) &= f \left( \frac{(b-a)s + (a+b)}{2} \right) \\ + \lambda \sum_{j=1}^{n+1} w_j K \left( \frac{(b-a)s + (a+b)}{2}, \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \right) &\varphi \left( \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \right) \frac{(b-a)}{2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

para  $s \in [-1, 1]$ .

Ahora se elijen  $x_i \in [-1, 1]$  (cada  $x_i, i = 1, 2, \dots, n, n+1$  es una raíz del polinomio de Chebyshev)

y se consideran las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \varphi \left( \frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2} \right) &= \varphi_i, \\ f \left( \frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2} \right) &= f_i, \\ K \left( \frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2}, \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \right) &= K_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, n+1). \end{aligned} \quad (4.18)$$

La integral lineal de Fredholm (4.11) se expresa de manera equivalente, por:

$$\varphi_i = f_i + \lambda \frac{(b-a)}{2} \sum_{j=1}^{n+1} w_j K_{ij} \varphi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1). \quad (4.19)$$

De esta última ecuación se obtienen, valores  $\varphi_i$  de la solución  $\varphi$  en los puntos de interpolación

$s_i = \frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2}, i = 1, 2, \dots, n, n+1$ , el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\varphi_i = f_i + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{i1} \varphi_1 + \dots + w_{n+1} K_{i, n+1} \varphi_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1) \quad (4.20)$$

es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = f_1 + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{11} \varphi_1 + w_2 K_{12} \varphi_2 + \dots + w_n K_{1n} \varphi_n + w_{n+1} K_{1n+1} \varphi_{n+1}) \\ \varphi_2 = f_2 + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{21} \varphi_1 + w_2 K_{22} \varphi_2 + \dots + w_n K_{2n} \varphi_n + w_{n+1} K_{2n+1} \varphi_{n+1}) \\ \vdots \\ \varphi_n = f_n + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{n1} \varphi_1 + w_2 K_{n2} \varphi_2 + \dots + w_n K_{nn} \varphi_n + w_{n+1} K_{nn+1} \varphi_{n+1}) \\ \varphi_{n+1} = f_{n+1} + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{n+11} \varphi_1 + w_2 K_{n+12} \varphi_2 + \dots + w_n K_{n+1n} \varphi_n + w_{n+1} K_{n+1n+1} \varphi_{n+1}) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Este sistema de ecuaciones se puede representar de otra manera más simple, considerando:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (4.22)$$

y que:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n+1} \delta_{ij} \varphi_j \quad (4.23)$$

Por tanto el sistema de ecuaciones (4.19) se escribe como:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left( \delta_{ij} - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_j K_{ij} \right) \varphi_j = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1), \quad (4.24)$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_1 K_{11}\right) \varphi_1 - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_2 K_{12} \varphi_2 - \dots - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_{n+1} K_{1n+1} \varphi_{n+1} = f_1 \\ -\lambda \frac{(b-a)}{2} w_1 K_{21} \varphi_1 - \left(1 - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_2 K_{22}\right) \varphi_2 - \dots - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_{n+1} K_{2n+1} \varphi_{n+1} = f_2 \\ \vdots \\ -\lambda \frac{(b-a)}{2} w_1 K_{n+11} \varphi_1 - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_2 K_{n+12} \varphi_2 - \dots - \left(1 - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_{n+1} K_{n+1n+1}\right) \varphi_{n+1} = f_{n+1}. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Si se cumple que

$$\det \left( \delta_{ij} - \lambda \frac{(b-a)}{2} w_j K_{ij} \right) \neq 0 \quad (4.26)$$

el sistema de ecuaciones (4.19) tiene una única solución  $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, n + 1)$  para cada punto de interpolación  $s_i (i = 1, 2, \dots, n + 1)$ .

Por tanto lo que se ha obtenido, es conjunto de puntos  $\{(s_i, \varphi_i)\}$ , donde cada  $\varphi_i$  es aproximación de la solución  $\varphi$  en el punto de interpolación  $s_i$ .

Finalmente para hallar la solución  $\varphi$  de la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie no homogénea, se utiliza la interpolación polinómica de Lagrange, pero se debe tener en cuenta que este método de interpolación no es el único método con el que se puede encontrar la solución  $\varphi$ .

El código de la implementación de la función  $QCC2EIF[f[x], Kernel, \lambda, a, b, n]$ , es:

```

1
2 QCC2EIF[ff_, kernel_, \[Lambda]_, a_, b_, n_] :=
3 Module[{i, F, integral, raices, ecuaciones, Vr, solusistema,
4     imaganes, Puntos, soluaprox},
5 (*IMPAR*)
6 wi[kk_, nn_, aa_, bb_] :=
7 If[kk == 0 || kk == nn, (bb - aa)/(2 nn^2),
8 If[1 <= kk <= nn - 1, (bb - aa)/nn (1 - \!\(
9 \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \{j = 1\},
10 FractionBox[\(nn - 1\), \{2\}]\)\(
11 \*FractionBox[\{2\}, \{4
12 \*SuperscriptBox[\{j\}, \{2\} - 1\] Cos[2 kk j\
13 \*FractionBox[\(\[Pi]\), \{nn\}]\)\)\)\)];
14 (*PAR*)
15 wp[kk_, nn_, aa_, bb_] :=
16 If[kk == 0 || kk == n, (bb - aa)/(2 (nn^2 - 1)),
17 If[1 <= kk <= nn - 1, (bb - aa)/
18 nn (1 - (-1)^kk/(nn^2 - 1) - \!\(
19 \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \{j = 1\}, \{
20 \*FractionBox[\(nn\), \{2\} - 1\]]\)\(
21 \*FractionBox[\{2\}, \{4
22 \*SuperscriptBox[\{j\}, \{2\} - 1\] Cos[2 kk j\
23 \*FractionBox[\(\[Pi]\), \{nn\}]\)\)\)\)];
24 x[kk_, nn_, aa_, bb_] := -Cos[kk \[Pi]/nn] ((bb - aa)/2) + (
25 aa + bb)/2;
26 w = Table[
27 If[EvenQ[n], wp[i, n, a, b], wi[i, n, a, b]], {i, 0, n, 1}] //
28 N;
29 z = Table[x[k, n, a, b], {k, 0, n, 1}] // N;
30 (*---- Reemplazo de Raíces y Coeficientes en kernel[x,
```

```

31 t][CurlyPhi][t]:
32 \!\(\*
33 SubsuperscriptBox[
34 StyleBox["\[Integral]",
35 SpanMinSize->1.,
36 SpanMaxSize->1.], "b",
37 "b"]\(\kernel[x, t][CurlyPhi][
38 t][DifferentialD]t)\)\[TildeTilde]\!\(\
39 \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\i = 1\), \(\n\)]\(\
40 \*SubscriptBox[\(\c\), \(\n, i\)]kernel[x, \*
41 TagBox[
42 SubscriptBox["r",
43 RowBox[{"n", ",", "i"}]],
44 "MathMLPresentationTag",
45 AutoDelete->True]]\[CurlyPhi][\*
46 TagBox[
47 SubscriptBox["r",
48 RowBox[{"n", ",", "i"}]],
49 "MathMLPresentationTag",
50 AutoDelete->True]]\)\)----*)
51 integral = \!\(\
52 \*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \(\j = 1\), \(\n + 1\)]\(\w[[
53 j]] Evaluate[kernel /. t -> z[[j]] \[CurlyPhi][z[[j]]]\)\)\ //
54 N;
55 (*---- Raíces Subscript[r, n,i] ----*)
56 raices = Table[x[k, n, a, b], {k, 0, n, 1}] // N;
57 (*----Sistema de ecuaciones ----*)
58 ecuaciones =
59 Table[\[CurlyPhi][x] == ff + \[Lambda] integral /.
60 x -> raices[[i]], {i, 1, n + 1, 1}];
61 (*----\[CurlyPhi][Subscript[r, n,i]----*)
62 Vr = Map[\[CurlyPhi], raices];
63 (*----Soluicion del sistema de ecuaciones ----*)
64 solusistema = Solve[ecuaciones, Vr];
65 (*Imaganes:\[CurlyPhi][Subscript[r, n,i]]=Subscript[t, i] coord*)
66 imaganes = Table[solusistema[[1, i, 2]], {i, 1, n + 1, 1}];
67 (*Soluciones: (x,t) coord*)
68 Puntos = Table[{raices[[i]], imaganes[[i]]}, {i, n}];
69 (*Solucion aproximada*)
70 soluaprox =
71 Fit[Puntos, {1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9, x^10},
72 x];
73 Lagrange[XY_] :=
74 Module[{j, k, nnn, prod, sum, term, X, Y},

```

```

75 nnn = Length[XY] - 1;
76 X =
77 \!\(\*SubscriptBox[(Transpose[
78 XY)\], \(\(\[LeftDoubleBracket]\)\(1)\)\(\[RightDoubleBracket]\
79 \)\)\);
80 Y =
81 \!\(\*SubscriptBox[(Transpose[
82 XY)\], \(\(\[LeftDoubleBracket]\)\(2)\)\(\[RightDoubleBracket]\
83 \)\)\);
84 sum = 0;
85 For[ k = 0, k <= nnn, k++,
86 prod = 1;
87 For[ j = 0, j <= nnn, j++,
88 term = Which[ j == k, 1,
89 j != k, (x -
90 \!\(\*SubscriptBox[(X)\], \(\(\[LeftDoubleBracket]\)\(j +
91 1)\)\(\[RightDoubleBracket]\)\)\)]/(
92 \!\(\*SubscriptBox[(X)\], \(\(\[LeftDoubleBracket]\)\(k +
93 1)\)\(\[RightDoubleBracket]\)\)\)] -
94 \!\(\*SubscriptBox[(X)\], \(\(\[LeftDoubleBracket]\)\(j +
95 1)\)\(\[RightDoubleBracket]\)\)\)]);
96 prod = prod term; ];
97 sum = sum +
98 \!\(\*SubscriptBox[(Y)\], \(\(\[LeftDoubleBracket]\)\(k +
99 1)\)\(\[RightDoubleBracket]\)\)\)] prod; ];
100 Return[sum]; ];
101 P[x_] = Lagrange[Puntos];
102 Q[x_] = InterpolatingPolynomial[Puntos, x];
103 Print[" "];
104 Print[
105 "La Ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie no \
106 homogéneas es:"];
107 Print["\[CurlyPhi](x) = ", ff, " + ", \[Lambda],
108 "\!\(\*SubsuperscriptBox[(\[Integral]\), \(\(a)\), \(\(b)\)]\)(",
109 kernel, ")\[CurlyPhi](t)\[DifferentialD]t"];
110 Print["Para ", n,
111 " puntos de interpolacion, se tiene la aproximación"];
112 (*Print["\[CurlyPhi](x) \[TildeTilde] ", soluaprox];*)
113 (*Print["\[CurlyPhi](x) \[TildeTilde] ", P[x]//Expand];*)
114 Print["\[CurlyPhi](x) \[TildeTilde] ", Q[x] // Expand];

```

**Código Mathematica IV.2:** Cuadratura de Clenshaw Curtis para ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie

A continuación se determinará solución aproximada de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, para tal fin se hace uso del sistema de álgebra computacional *Mathematica* 13, en el que se ha implementado el método de solución presentado. Para aplicar el método de solución, la cuadratura de Clenshaw Curtis para ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, se consideran las siguientes ecuaciones integrales :

$$1. \varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt$$

$$2. \varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2) \varphi(t)dt$$

$$3. \varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t)dt$$

$$4. \varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t)dt$$

$$5. \varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+(x-t)^2} \right) \varphi(t)dt$$

1. La ecuación integral:

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt,$$

tiene por solución a:  $\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x$  y donde:  $f(x) = x, \lambda = \frac{1}{2}, K(x, t) = t-x, a = -1$  y  $b = 1$

Utilizando el método de la cuadratura de Clenshaw Curtis para ecuaciones integrales de Fredholm:  $QCC2EIF[f[x], Kernel, \lambda, a, b, n]$ , implementado en *Mathematica* 13, se obtuvieron los siguientes resultados:

En particular, se considera la aproximación de  $\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x$ , tomando  $n = 45$ , que es un polinomio de grado 44:

$$QCC2EIF[x, t-x, \frac{1}{2}, -1, 1, 45]$$



n	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$2.22045 \times 10^{-16}$
15	$9.18743 \times 10^{-16}$
25	$1.44329 \times 10^{-15}$
35	$7.77156 \times 10^{-16}$
45	$8.88178 \times 10^{-16}$

TABLA N° 4.2: Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt$ .

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_a^b (t-x)\varphi(t)dt$$

Para 45 puntos de interpolación, se tiene la aproximación:  $\varphi_{45}[x] = 0.25 + 0.75x + 4.67182 \times 10^{-14}x^2 - 1.84305 \times 10^{-12}x^3 - 1.16577 \times 10^{-11}x^4 + 1.53532 \times 10^{-10}x^5 + 8.2328 \times 10^{-10}x^6 - 6.21991 \times 10^{-9}x^7 - 2.80419 \times 10^{-8}x^8 + 1.4723 \times 10^{-7}x^9 + 5.67693 \times 10^{-7}x^{10} - 2.25912 \times 10^{-6}x^{11} - 7.62035 \times 10^{-6}x^{12} + 0.0000240303x^{13} + 0.0000724088x^{14} - 0.000185509x^{15} - 0.000508044x^{16} + 0.0010734x^{17} + 0.00270851x^{18} - 0.0047631x^{19} - 0.0111917x^{20} + 0.0164704x^{21} + 0.0363366x^{22} - 0.0448571x^{23} - 0.0935305x^{24} + 0.0968117x^{25} + 0.1918x^{26} - 0.165901x^{27} - 0.313697x^{28} + 0.225226x^{29} + 0.408028x^{30} - 0.240537x^{31} - 0.418931x^{32} + 0.199469x^{33} + 0.335009x^{34} - 0.125703x^{35} - 0.204158x^{36} + 0.0581316x^{37} + 0.0915388x^{38} - 0.0185914x^{39} - 0.0284535x^{40} + 0.00367221x^{41} + 0.00547485x^{42} - 0.000337404x^{43} - 0.000491079x^{44}$

FIGURA N° 4.1: Solución aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt$ , para  $n = 45$ .

También, se considera la representación gráfica de  $\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x$  y  $\varphi_{45}(x)$

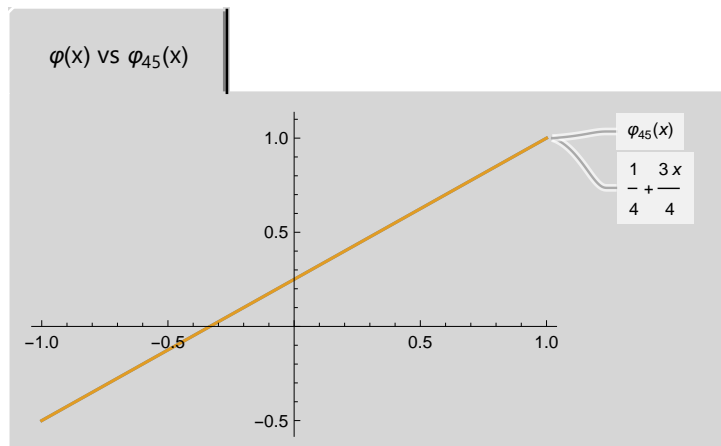


FIGURA N° 4.2: Solución exacta  $\varphi(x)$  y Solución aproximada  $\varphi_{45}(x)$ .

Y la representación gráfica de de  $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$

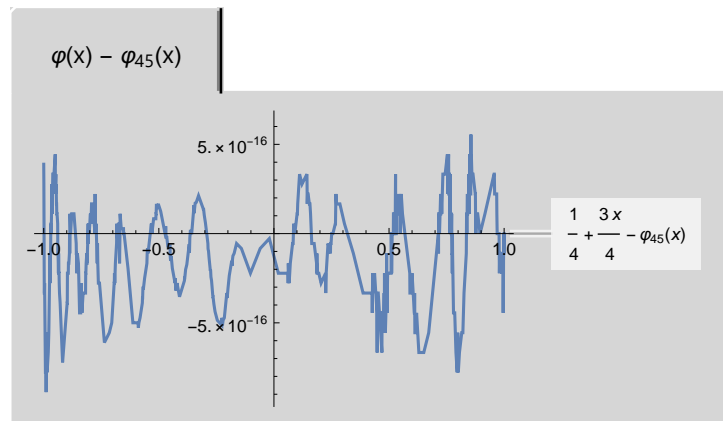


FIGURA N° 4.3: Solución exacta - Solución aproximada,  $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$ .

De los resultados se concluye que, a medida que se incrementa el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución  $\varphi_n(x)$ , cada vez es menor.

2. La ecuación integral

$$\varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2) \varphi(t) dt,$$

tiene por solución exacta:  $\varphi(x) = \frac{9}{11} + \frac{30x^2}{11}$ , donde:  $f(x) = x^2, \lambda = 1, K(x, t) = x^2 + t^2, a = 0$  y  $b = 1$

Utilizando el método de la cuadratura de Clenshaw Curtis, implementado en *Mathematica* 13, se obtuvieron los siguientes resultados:

n	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$8.88178 \times 10^{-16}$
15	$1.33227 \times 10^{-15}$
25	$2.77556 \times 10^{-15}$
35	$5.97719 \times 10^{-9}$
45	0.00142358

TABLA N° 4.3: Ecuación integral:  $\varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2) \varphi(t) dt$ .

En particular, se considera la aproximación de  $\varphi(x) = \frac{9}{11} + \frac{30x^2}{11}$ , tomando  $n = 45$ , que es un polinomio de grado 44:

$$QCC2EIF[x^2, x^2 + t^2, 1, 0, 1, 45]$$

$$\varphi(x) = x^2 + 1 \int_a^b (t^2 + x^2) \varphi(t) dt$$

Para 45 puntos de interpolación, se tiene la aproximación:  $\varphi_{45}[x] = 0.818182 + 2.70406 \times 10^{-12} x + 2.72727 x^2 + 3.23684 \times 10^{-7} x^3 - 0.0000405066 x^4 + 0.00319243 x^5 - 0.172595 x^6 + 6.7941 x^7 - 203.292 x^8 + 4773.92 x^9 - 90153. x^{10} + 1.39543 \times 10^6 x^{11} - 1.79749 \times 10^7 x^{12} + 1.95088 \times 10^8 x^{13} - 1.80239 \times 10^9 x^{14} + 1.42966 \times 10^{10} x^{15} - 9.80672 \times 10^{10} x^{16} + 5.8529 \times 10^{11} x^{17} - 3.05512 \times 10^{12} x^{18} + 1.40088 \times 10^{13} x^{19} - 5.66355 \times 10^{13} x^{20} + 2.02498 \times 10^{14} x^{21} - 6.41913 \times 10^{14} x^{22} + 1.80761 \times 10^{15} x^{23} - 4.52826 \times 10^{15} x^{24} + 1.01012 \times 10^{16} x^{25} - 2.00736 \times 10^{16} x^{26} + 3.55367 \times 10^{16} x^{27} - 5.6012 \times 10^{16} x^{28} + 7.85154 \times 10^{16} x^{29} - 9.77115 \times 10^{16} x^{30} + 1.07697 \times 10^{17} x^{31} - 1.04794 \times 10^{17} x^{32} + 8.9647 \times 10^{16} x^{33} - 6.70661 \times 10^{16} x^{34} + 4.35829 \times 10^{16} x^{35} - 2.43922 \times 10^{16} x^{36} + 1.16284 \times 10^{16} x^{37} - 4.65425 \times 10^{15} x^{38} + 1.53401 \times 10^{15} x^{39} - 4.05259 \times 10^{14} x^{40} + 8.24741 \times 10^{13} x^{41} - 1.21343 \times 10^{13} x^{42} + 1.14844 \times 10^{12} x^{43} - 5.24899 \times 10^{10} x^{44}$

FIGURA N° 4.4: Solución aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x) \varphi(t) dt$ , para  $n = 45$ .

También, se considera la representación gráfica de  $\varphi(x) = \frac{9}{11} + \frac{30x^2}{11}$  y  $\varphi_{45}(x)$

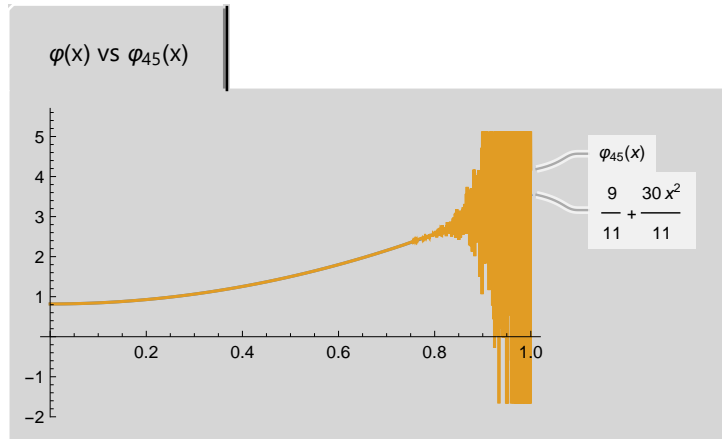


FIGURA N° 4.5: Solución exacta  $\varphi(x)$  y Solución aproximada  $\varphi_{45}(x)$

Y la representación gráfica de de  $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$

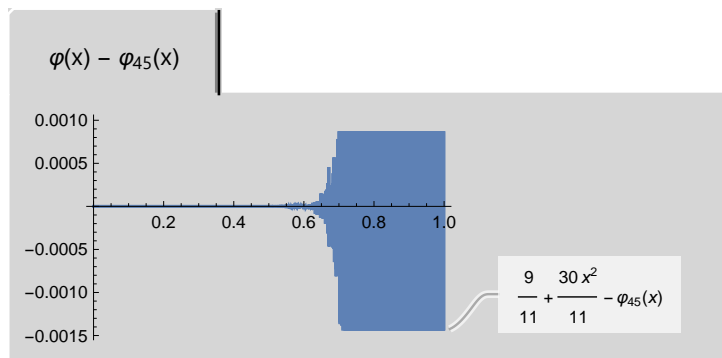


FIGURA N° 4.6: Solución exacta - Solución aproximada,  $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$

De los resultados se concluye que, a medida que se incrementa el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución  $\varphi_n(x)$ , cada vez es mayor.

### 3. La ecuación integral

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t)dt,$$

tiene por solución exacta:  $\varphi(x) = 1 + \frac{4\cos(x)\text{sen}(1)}{-2+2\pi-\text{sen}(2)}$ , donde:  $f(x) = 1, \lambda = \frac{1}{\pi}, K(x, t) = \cos(t-x), a = -1$  y  $b = 1$

Utilizando el método de la cuadratura de Clenshaw Curtis, implementado en *Mathematica* 13, se obtuvieron los siguientes resultados:

n	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$0.000108315 \times 10^0$
15	$8.88178 \times 10^{-16}$
25	$2.44249 \times 10^{-15}$
35	$2.33147 \times 10^{-15}$
45	$2.44249 \times 10^{-15}$

TABLA N° 4.4: Ecuación integral:  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t)dt$ .

En particular, se considera la aproximación de  $\varphi(x) = 1 + \frac{4\cos(x)\text{sen}(1)}{-2+2\pi-\text{sen}(2)}$ , tomando  $n = 45$ , que es un polinomio de grado 44:

$$QCC2EIF[1, \cos(t-x), \frac{1}{\pi}, -1, 1, 45]$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_a^b \text{Cos}[t-x]\varphi(t)dt$$

Para 45 puntos de interpolacion, se tiene la aproximación:  $\varphi_{45}[x] = 1.99763 - 2.83662 \times 10^{-14} x - 0.498814 x^2 + 8.03003 \times 10^{-12} x^3 + 0.0415678 x^4 - 6.41664 \times 10^{-10} x^5 - 0.00138559 x^6 + 2.44803 \times 10^{-8} x^7 + 0.0000247636 x^8 - 5.4629 \times 10^{-7} x^9 - 5.50331 \times 10^{-7} x^{10} + 7.95064 \times 10^{-6} x^{11} + 2.41445 \times 10^{-6} x^{12} - 0.0000807449 x^{13} - 0.0000143081 x^{14} + 0.000598629 x^{15} + 0.000055458 x^{16} - 0.00334286 x^{17} - 0.000111623 x^{18} + 0.0143734 x^{19} - 0.000134917 x^{20} - 0.0483218 x^{21} + 0.00197203 x^{22} + 0.128314 x^{23} - 0.00821395 x^{24} - 0.27068 x^{25} + 0.0219276 x^{26} + 0.454393 x^{27} - 0.0423202 x^{28} - 0.60554 x^{29} + 0.061352 x^{30} + 0.636028 x^{31} - 0.0675547 x^{32} - 0.519653 x^{33} + 0.0562806 x^{34} + 0.32319 x^{35} - 0.0348894 x^{36} - 0.147736 x^{37} + 0.0155778 x^{38} + 0.0467734 x^{39} - 0.0047241 x^{40} - 0.00915875 x^{41} + 0.000868327 x^{42} + 0.000835323 x^{43} - 0.0000726953 x^{44}$

FIGURA N° 4.7: Solución aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = 1 + \frac{4\cos(x)\text{sen}(1)}{-2+2\pi-\text{sen}(2)}$ , para  $n = 45$

También, se considera la representación gráfica de  $\varphi(x) = 1 + \frac{4\cos(x)\text{sen}(1)}{-2+2\pi-\text{sen}(2)}$  y  $\varphi_{45}(x)$

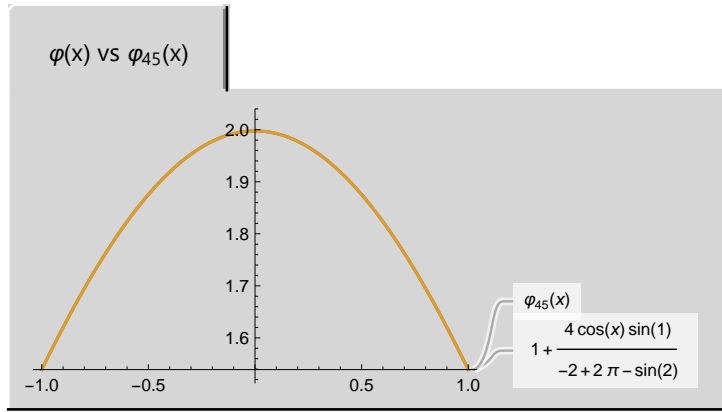


FIGURA N° 4.8: Solución exacta  $\varphi(x)$  y Solución aproximada  $\varphi_{45}(x)$

Y la representación gráfica de de  $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$

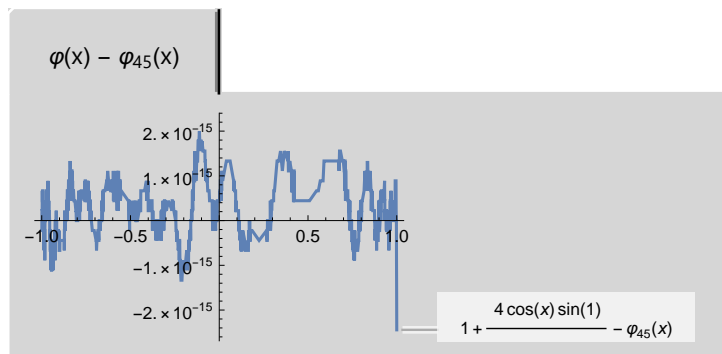


FIGURA N° 4.9: Solución exacta - Solución aproximada,  $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$

De los resultados se concluye que, a medida que se incrementa el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución  $\varphi_n(x)$ , cada vez es menor.

4. La ecuación integral

$$\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t)dt,$$

donde:  $f(x) = x, \lambda = \frac{\pi}{2}, K(x, t) = \text{sen}(xt), a = 0$  y  $b = 1$

Utilizando el método de la cuadratura de Clenshaw Curtis, implementado en *Mathematica* 13, se obtuvieron los siguientes resultados:

n	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$0.0000235583 \times 10^0$
15	$1.33227 \times 10^{-15}$
25	$0.462549 \times 10^0$
35	$4.40208 \times 10^{-9}$

TABLA N° 4.5: Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t)dt.$

En particular, se considera la aproximación de  $\varphi(x)$ , tomando  $n = 35$ , que es un polinomio de grado 44:

$$QCC2EIF[x, \text{sen}(xt), \frac{\pi}{2}, 0, 1, 45]$$

$$\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_a^b \text{Sin}[t x] \varphi(t) dt$$

Para 35 puntos de interpolación, se tiene la aproximación:  $\varphi_{15}[x] = 0. + 2.03304 x + 7.0645 \times 10^{-12} x^2 - 0.102713 x^3 + 1.69738 \times 10^{-7} x^4 + 0.00364716 x^5 + 0.000366779 x^6 - 0.0103449 x^7 + 0.215554 x^8 - 3.46925 x^9 + 43.7747 x^{10} - 441.086 x^{11} + 3605.27 x^{12} - 24219.9 x^{13} + 135194. x^{14} - 632678. x^{15} + 2.50031 \times 10^6 x^{16} - 8.39241 \times 10^6 x^{17} + 2.40308 \times 10^7 x^{18} - 5.88852 \times 10^7 x^{19} + 1.23724 \times 10^8 x^{20} - 2.23079 \times 10^8 x^{21} + 3.45022 \times 10^8 x^{22} - 4.56971 \times 10^8 x^{23} + 5.16695 \times 10^8 x^{24} - 4.96367 \times 10^8 x^{25} + 4.02366 \times 10^8 x^{26} - 2.72628 \times 10^8 x^{27} + 1.52399 \times 10^8 x^{28} - 6.90217 \times 10^7 x^{29} + 2.468 \times 10^7 x^{30} - 6.70281 \times 10^6 x^{31} + 1.29884 \times 10^6 x^{32} - 159916. x^{33} + 9398.88 x^{34}$

FIGURA N° 4.10: Solución aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt,$  para  $n = 45$

Y la representación gráfica de de  $\varphi(x) - \varphi_{35}(x)$

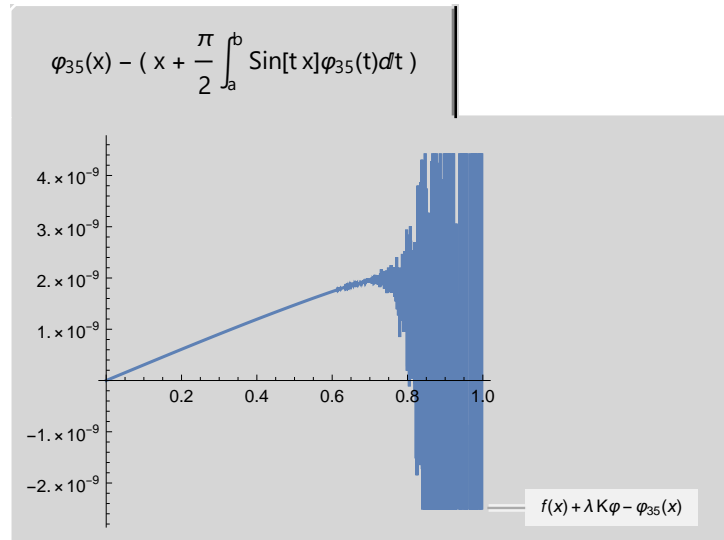


FIGURA N° 4.11: Solución aproximada  $\varphi_{45}(x)$

De los resultados se concluye que, a medida que se incrementa el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución  $\varphi_n(x)$ , presenta un comportamiento atípico con respecto al error obtenido.

5. La ecuación integral

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{1 + (x-t)^2} \right) \varphi(t) dt,$$

donde:  $f(x) = 1, \lambda = \frac{1}{\pi}, K(x, t) = \frac{1}{1+(x-t)^2}, a = 0$  y  $b = 1$

Utilizando el método de la cuadratura de Clenshaw Curtis, implementado en *Mathematica* 13, se obtuvieron los siguientes resultados:



n	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$0.00134908 \times 10^0$
15	$9.91201 \times 10^{-9}$
25	$2.01172 \times 10^{-13}$
35	$2.66454 \times 10^{-15}$
45	$2.66454 \times 10^{-15}$

TABLA N° 4.6: Ecuación integral:  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+(x-t)^2} \right) \varphi(t) dt$

En particular, se considera la aproximación de  $\varphi(x)$ , tomando  $n = 45$ , que es un polinomio de grado 44:

$$QCC2EIF\left[1, \frac{1}{1+(x-t)^2}, \frac{1}{\pi}, 0, 1, 45\right]$$

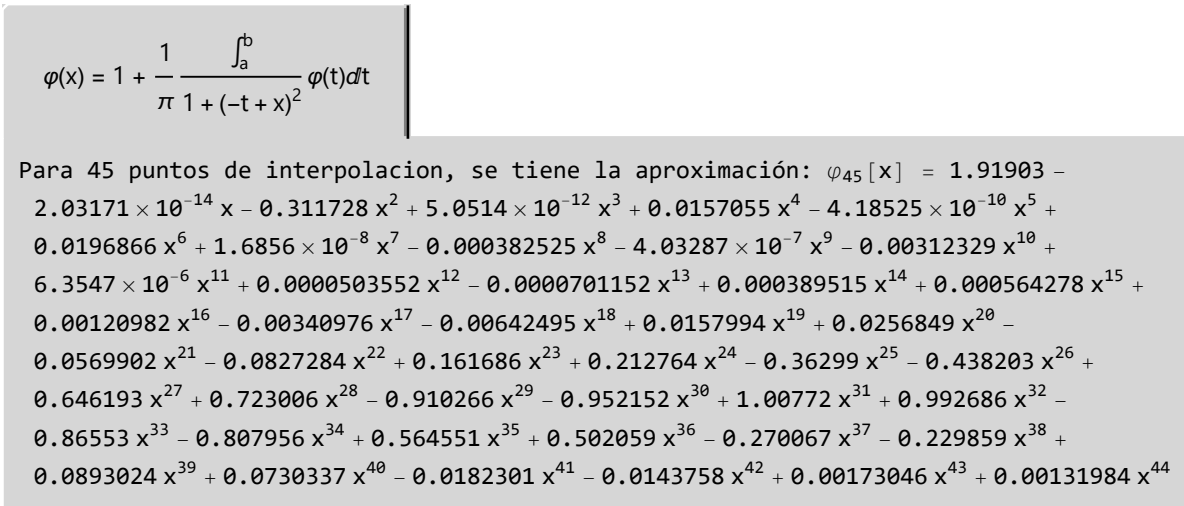


FIGURA N° 4.12: Solución aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t) dt$ , para  $n = 45$

Y la representación gráfica de de  $\varphi(x) - \varphi_{45}(x)$

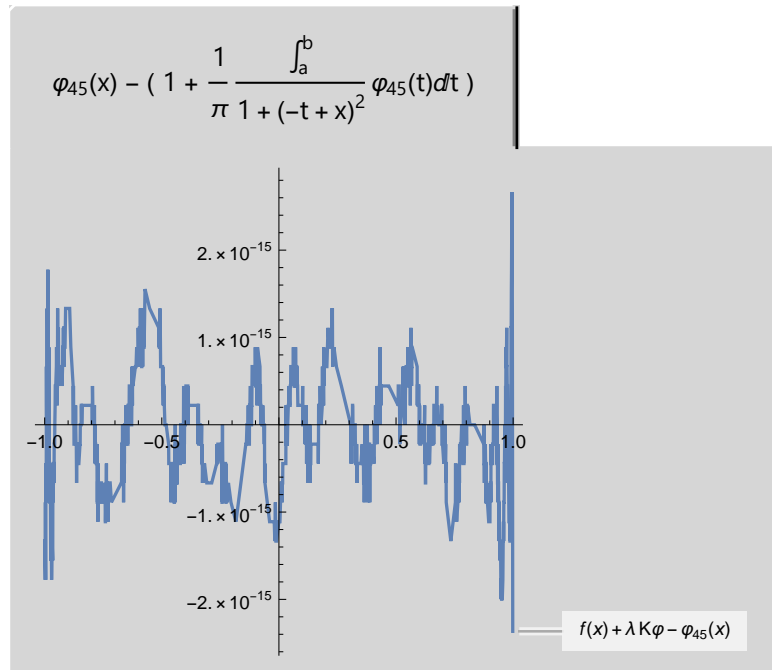


FIGURA N° 4.13: Solución aproximada  $\varphi_{45}(x)$

De los resultados se concluye que, a medida que se incrementa el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución  $\varphi_n(x)$ , cada vez es menor.

## CONCLUSIONES

1. La cuadratura de Clenshaw-Curtis se aplica en la determinación de soluciones aproximadas de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie considerando que el núcleo de la ecuación integral sea continuo.
2. La cuadratura de Clenshaw-Curtis se usa teniendo en cuenta la condición del núcleo de la integral de Fredholm y discretizando el operador integral
3. Las soluciones aproximadas de las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie se obtienen mediante la determinación de polinomios que usan los nodos de Chebyshev como nodos de interpolación.
4. Con ayuda del sistema de álgebra computacional software *Mathematica 13*, se logra implementar la cuadratura de Clenshaw-Curtis para la determinación de las soluciones numéricas aproximadas de las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie.

## RECOMENDACIONES

1. Aplicar la cuadratura de Clenshaw-Curtis, para la determinación de soluciones aproximadas de ecuaciones integrales Fredholm de segunda especie que están definidas en regiones bidimensionales.
2. Aplicar la cuadratura de Clenshaw-Curtis, para la determinación de soluciones aproximadas de sistemas de ecuaciones integrales Fredholm de segunda especie.
3. Incluir en el plan de estudios de la Maestría en Matemática cursos sobre el manejo de herramientas de simulación y sistemas de álgebra computacional.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Abbott, P. (2002). Tricks of the trade. *The Mathematica® Journal*.
- Aguilar, B., y Rojas, E. (2014). Solución de las ecuaciones diferenciales parciales utilizando las ecuaciones integrales. *Repositorio documental de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco*.
- Barazón Peña, E. M. (2015). Cuadratura de clenshaw-curtis. aplicaciones en finanzas. *Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias*.
- Clenshaw, C., y Curtis, A. (1960). A method for numerical integration on an automatic computer. *Numerische Mathematik*.
- Debnath, L., y Mikusinski, P. (2005). *Introduction to hilbert spaces with applications*. Elsevier Science.
- Heister, E., y Rebholz, L. G. (2019). *Numerical analysis, an introduction*. De Gruyter.
- Loayza, N. (2012). Solución analítica y numérica de ecuaciones integrales lineales de fredholm no homogéneas de segunda especie. *Repositorio documental de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco*.
- Mason, J., y Handscomb, D. (2002). *Chebyshev polynomials*. CRC Press.
- Mathews, J., y Fink, K. (2004). *Numerical methods using matlab*. Pearson.
- Suli, E., y Mayers, D. F. (2003). *An introduction to numerical analysis*. Cambridge University Press.
- Trefethen, L. (2008). Is gauss quadrature better than clenshaw–curtis?. *Society for Industrial and Applied Mathematics - Review*.
- Ttito, A., y Salazar, N. (2004). *Introducción al analisis funcional*. Editorial Impresiones Valle.
- Zaqueu, V. (2018). *As quatro famílias de polinómios de chebyshev: Propriedades e algumas aplicações na análise numérica*. Universidade do Porto, Faculdade de Ciências.

## ANEXOS

### Anexo A: Software *Mathematica*

Mathematica es considerado un SAC (Sistema de Álgebra Computacional) muy grande y complejo. Posee cientos de funciones para realizar diversas tareas en matemáticas, ingeniería y otras áreas. Las tareas incluyen computación simbólica y numérica, programación, análisis de datos y representación. Es compatible con diferentes sistemas operativos, como: Windows, Macintosh, Sistemas Unix. Fue desarrollado por Stephen Wolfram.

#### **El kernel**

El kernel es el motor computacional de Mathematica. Ingresas instrucciones y el kernel responde con respuestas en forma de números, gráficos, matrices y otras presentaciones apropiadas. El kernel funciona en silencio en el fondo y, en su mayor parte, es invisible. El kernel está escrito principalmente con el lenguaje de programación C.

#### **El Front end**

La interfaz entre el usuario y el núcleo se llama Front end y el medio del Front end es el notebook (cuaderno de trabajo de Mathematica). El notebook no sólo le permite comunicarse con el kernel, sino que es una herramienta conveniente para documentar el trabajo

#### **Las celdas**

El Front end tiene una característica importante a su derecha: las barras limitadoras denominadas celdas. Estas barras limitan las acciones al interactuar con el kernel. El núcleo evalúa un notebook (cuaderno) celda por celda, por lo que la forma en que el Front end interactúa con el kernel, es mediante las teclas  $\langle Shift \rangle + \langle Enter \rangle$ . En Mathematica se tienen las siguientes convenciones con respecto a los comandos que el usuario escribe: Mathematica es Case-Sensitive, es decir distingue entre minúsculas y mayúsculas. Toda función predefinida en Mathematica inicia con mayúsculas. Mathematica considera los espacios. Un espacio entre variables algebraicas representa el producto de las variables.

Los corchetes [ ] se reservan para limitar el argumento de funciones. Las llaves para limitar listas y los paréntesis ( ), para indicar prioridad en las operaciones. Todo aquello limitado por (\* y \*), será omitido por el kernel.

## Los Notebooks

El Notebook es el conjunto de todas las celdas que contienen los cálculos de una sesión. Los Notebooks son guardados como archivos con extensión "nb". Pueden tenerse abiertos al mismo tiempo varios Notebooks, y se les puede cambiar el tipo de letra, así como copiar y pegar con otros programas como Word.

## Lista de funciones

En el desarrollo del presente trabajo se consideran las siguientes funciones que están implementadas en Mathematica (para acceder a estas funciones consulte el Menu Help, Wolfram Documentation):

Abs[z]

Retorna el valor absoluto de un número real o complejo z.

Apply[f,expr]

(f@@expr) Reemplaza el encabezamiento de la expresión expr por f.

Cancel[expr]

Cancela los factores comunes en el numerador y denominador de la expresión expr.

DifferentialD[x] retorna como dx.

Do[expr,i<sub>max</sub>]

Evalúa expr *i<sub>max</sub>* veces.

Do[expr,i,i<sub>max</sub>]

Evalúa expr con la variable i sucesivamente tomando los valores desde 1 hasta *i<sub>max</sub>* (en incremento de 1).

Do[*expr*,*i*,*i<sub>min</sub>*,*i<sub>max</sub>*]

Evalúa *expr* con la variable *i* sucesivamente tomando los valores desde *i<sub>min</sub>* hasta *i<sub>max</sub>* (en incremento de 1).

Do[*expr*,*i*,*i<sub>min</sub>*,*i<sub>max</sub>*,*d<sub>i</sub>*]

Evalúa *expr* con la variable *i* sucesivamente tomando los valores desde *i<sub>min</sub>* hasta *i<sub>max</sub>* (en incremento de *d<sub>i</sub>*).

Dot[*a*,*b*,*c*]

(*a.b.c*) Retorna el producto punto de vectores, matrices y tensores.

Expand[*expr*]

Desarrolla productos y potencias de enteros positivos en *expr*.

Evaluate[*expr*]

Evalúa *expr* incluso si aparece como el argumento de una función cuyos atributos especifican que debe mantenerse sin evaluar.

EvenQ[*expr*]

Retorna como resultado Verdadero si *expr* es un entero par, y falso en caso contrario.

Fit[*data*,*f<sub>1</sub>*,*f<sub>2</sub>*,...,*f<sub>n</sub>*,*x*,*y*,...]

Encuentra una justa  $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n$ , para una lista de datos de funciones de variables *x*, *y*, ...

For[*start*,*test*,*incr*,*body*]

Ejecuta *start* luego, repetidamente evalúa *body* y también *incr* hasta que *test* falle en retornar verdadero.

If[condición,*t*,*f*]

Retorna *t* si la condición es verdadera, y *f* si la condición es falsa.

If[condición,*t*,*f*,*u*]

Retorna *u* si la condición no es verdadera ni falsa.



---

`Integrate[f,x]`

Retorna la integral indefinida  $\int f(x)dx$ .

`Integrate[f, x, xmin, xmax]`

Retorna la integral definida  $\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)dx$ .

`InterpolatingPolynomial[f1,f2,...,x]`

Construye un polinomio de interpolación en  $x$  que reproduce los valores de función  $f_i$  en valores enteros sucesivos  $1, 2, \dots$  de  $x$ .

`Length[expr]`

Retorna el número de elementos de  $expr$ .

`Map[f,expr]`

Aplica  $f$  a cada elemento del primer nivel de  $expr$ .

`Module[x,y,...,expr]`

Especifica que las ocurrencias de los símbolos  $x,y, \dots$  en  $expr$  deben ser tratados como locales.

`Module[x=x0,...,expr]`

Define valores iniciales para  $x, \dots$ .

`N[expr]`

Retorna el valor numérico de la expresión  $expr$ .

`N[expr,n]`

Retorna un resultado con  $n$  dígitos de precisión

`Position[expr, pattern]`

Retorna una lista de las posiciones de los objetos que coinciden con el patrón  $pattern$  que aparece en la  $expr$ .

`Print[expr]`

Imprime la expresión  $expr$  como resultado.

**Set(=)** (*lhs = rhs*)

Evalúa el rhs y asigna el resultado como valor de lhs. A partir de entonces, lhs se sustituye por rhs, siempre que aparezca.

**Solve**[*expr, var*]

Intenta resolver el sistema *expr* de ecuaciones o inecuaciones para las variables *vars*

**Sqrt**[*z*]

Retorna la raíz cuadrada de *z*.

**Subscript**[*x,y*]

Es un objeto que da formato de subíndice, por ejemplo *xy*.

**Subscript**[*x,y,z,...*]

Es un objeto que da formato de subíndice, por ejemplo *xy,z,....*

**SubsuperscriptBox**[*x,y,z*]

Es la representación de cuadro para  $x_y^z$  en las expresiones de un notebook.

**Sum**[*f(i), i, i<sub>min</sub>, i<sub>max</sub>*]

Evalúa la suma  $\sum_{i_{min}}^{i_{max}} f(i)$ .

**Sum**[*f(i), i, i<sub>min</sub>, i<sub>max</sub>, d<sub>i</sub>*]

Evalúa la suma  $\sum_{i_{min}}^{i_{max}} f(i)$ , usando incrementos  $d_i$ .

**Table**[*expr, i<sub>max</sub>*]

Genera una lista de  $i_{max}$  copias de *expr*.

**Table**[*expr, i, i<sub>max</sub>*]

Genera una lista de los valores de *expr* cuando *i* recorre desde 1 hasta  $i_{max}$ .

**Table**[*expr, i, i<sub>min</sub>, i<sub>max</sub>*]

Genera una lista de los valores de *expr* cuando *i* recorre desde  $i_{min}$  hasta  $i_{max}$ .

**Transpose**[*list*]

Transpone los dos primeros niveles de *list*.

TrigExpand[expr]

Desarrolla las funciones trigonométricas en expr.

Which[test1,value1,test2,value2,...]

Evalúa cada una de las pruebas  $i$  ( $test_i$ ) a su vez, devolviendo el valor  $i$  ( $value_i$ ) correspondiente a la primera que retorna verdadero.

While[test,body]

Evalúa la prueba test, después el cuerpo *body*, repetidamente, hasta que la prueba no sea verdadera.

## Anexo B: Resultados Numéricos

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Los resultados obtenidos se calcularon con los programas realizados en Mathematica:

## 1. Cuadratura de ClenShaw Curtis

La función  $QCC[f_, a_, b_, n_]$  permite determinar el valor aproximado de  $\int_a^b f(x) dx$

```

QCC[f_, a_, b_, n_] := Module[
  {i, F, integral, raices, ecuaciones,
   [módulo]
  Vr, solusistema, imaganes, Puntos, soluaprox, roots, weights, images},
  (*Attributes[f] = {Listable};*)
  [atributos] [listable]
  (*Raices*)
  x[kk_, nn_, aa_, bb_] := -Cos[[coseno] kk  $\frac{\pi}{nn}$ ]  $\left( \frac{bb - aa}{2} \right) + \frac{aa + bb}{2}$ ;

  (*PESOS_n_IMPAR*)
  [número i]
  wi[kk_, nn_, aa_, bb_] :=
  [si] If[kk == 0 || kk == nn,  $\frac{bb - aa}{2 nn^2}$ , [si] If[1 ≤ kk ≤ nn - 1,  $\frac{bb - aa}{nn} \left( 1 - \sum_{j=1}^{\frac{nn-1}{2}} \frac{2}{4 j^2 - 1} \text{Cos} \left[ 2 kk j \frac{\pi}{nn} \right] \right)$ ]];

  (*PESOS_n_PAR*)
  wp[kk_, nn_, aa_, bb_] := [si] If[kk == 0 || kk == n,  $\frac{bb - aa}{2 (nn^2 - 1)}$ ,
  [si] If[1 ≤ kk ≤ nn - 1,  $\frac{bb - aa}{nn} \left( 1 - \frac{(-1)^{kk}}{nn^2 - 1} - \sum_{j=1}^{\frac{nn}{2}-1} \frac{2}{4 j^2 - 1} \text{Cos} \left[ 2 kk j \frac{\pi}{nn} \right] \right)$ ]];

```

```

r = Table[x[k, n, a, b], {k, 0, n, 1}];
  |tabla
roots = Grid[Table[{SequenceForm[xk, " = ", x[k, n, a, b]]}, {k, 0, n, 1}], Frame -> All];
  |rejilla |tabla |forma de secuencia |marco |todo
w = Table[If[EvenQ[n], wp[i, n, a, b], wi[1, n, a, b]], {i, 0, n, 1}];
  |tabla |si |¿par?
weights =
  Grid[Table[{SequenceForm["w"i, " = ", If[EvenQ[n], wp[i, n, a, b], wi[1, n, a, b]]}],
  |rejilla |tabla |forma de secuencia |si |¿par?
    {i, 0, n, 1}], Frame -> All];
  |marco |todo
ri = Table[f /. x -> x[k, n, a, b], {k, 0, n, 1}];
  |tabla
images = Grid[Table[
  |rejilla |tabla
    {SequenceForm["f(", xk, ") = ", f /. x -> x[k, n, a, b]]}, {k, 0, n, 1}], Frame -> All];
  |forma de secuencia |marco |todo
Q = ri.w;
Print["Raices ", roots]; Print["Pesos ", weights]; Print["Imágenes ", images];
|escribe |escribe |escribe
(*Print["∫abf(x) dx = ", Q];*)
|escribe

Print["El resultado es: "; Print[SequenceForm["∫abf, dx, " = ", Q];
|escribe |escribe |forma de secuencia

(*Print["∫abf(x) dx = ", Q/N];*) Print["*****"];
|escribe |valor... |escribe

Print[SequenceForm["∫abf, dx, " = ", Q // N];];
|escribe |forma de secuencia |valor numérico

```

donde los parámetros necesarios de la función  $QCC[f_, a_, b_, n_]$ , son:

- $f$  : Integrand
- $a$  : Extremo inferior del intervalo de integración
- $b$  : Extremo superior del intervalo de integración
- $n$  : Cantidad de puntos

## 2. Cuadratura de Clenshaw - Curtis para ecuaciones integrales

La función  $QCC2EIF[f_, K_, \lambda_, a_, b_, n_]$  permite determinar la solución aproximada de

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(t, x) \varphi(t) dt$$

```

QCC2EIF[ff_, kernel_, λ_, a_, b_, n_] := Module[
  [módulo]
  {i, F, integral, raices, ecuaciones, Vr, solusistema, imaganes, Puntos, soluaprox},
  (*IMPAR*)
  wi[kk_, nn_, aa_, bb_] := If[kk == 0 || kk == nn,
  [si]
  
$$\frac{bb - aa}{2 nn^2}, \text{ If}[1 \leq kk \leq nn - 1, \frac{bb - aa}{nn} \left( 1 - \sum_{j=1}^{\frac{nn-1}{2}} \frac{2}{4 j^2 - 1} \text{Cos}\left[2 kk j \frac{\pi}{nn}\right] \right)];$$

  (*PAR*)
  wp[kk_, nn_, aa_, bb_] := If[kk == 0 || kk == n,  $\frac{bb - aa}{2 (nn^2 - 1)}$ ,
  [si]
  
$$\text{ If}[1 \leq kk \leq nn - 1, \frac{bb - aa}{nn} \left( 1 - \frac{(-1)^{kk}}{nn^2 - 1} - \sum_{j=1}^{\frac{nn-1}{2}} \frac{2}{4 j^2 - 1} \text{Cos}\left[2 kk j \frac{\pi}{nn}\right] \right)];$$

  x[kk_, nn_, aa_, bb_] := -Cos[kk  $\frac{\pi}{nn}$ ]  $\left( \frac{bb - aa}{2} \right) + \frac{aa + bb}{2}$ ;
  w = Table[If[EvenQ[n], wp[i, n, a, b], wi[i, n, a, b]], {i, 0, n, 1}] // N;
  [tabla] [si] [¿par?] [valor numérico]
  z = Table[x[k, n, a, b], {k, 0, n, 1}] // N;
  [tabla] [valor numérico]
  (*---- Reemplazo de Raíces y Coeficientes en kernel[x,t]φ[t]:
  
$$\int_b^a \text{kernel}[x, t] \varphi[t] dt \approx \sum_{i=1}^n c_{n,i} \text{kernel}[x, r_{n,i}] \varphi[r_{n,i}] \text{----} *)$$

  integral =  $\sum_{j=1}^{n+1} w[j] \text{Evaluate}[\text{kernel} /. t \rightarrow z[j]] \times \varphi[z[j]] // N;$ 
  [evalúa] [valor numérico]
  (*---- Raíces rn,i ----*)
  raices = Table[x[k, n, a, b], {k, 0, n, 1}] // N;
  [tabla] [valor numérico]

```

```

(*-----Sistema de ecuaciones -----*)
ecuaciones = Table[ $\varphi[x] = ff + \lambda \text{integral} /. x \rightarrow \text{raices}[[i]]$ , {i, 1, n + 1, 1}];
      |tabla

(*----- $\varphi[r_{n,i}]$  -----*)
Vr = Map[ $\varphi$ , raices];
      |aplica a todos

(*-----Soliucion del sistema de ecuaciones -----*)
solusistema = Solve[ecuaciones, Vr];
      |resuelve

(*Imaganes: $\varphi[r_{n,i}] = t_i \text{ coord}$ *)
imagenes = Table[solusistema[[1, i, 2]], {i, 1, n + 1, 1}];
      |tabla

(*Soluciones: (x,t) coord*)
Puntos = Table[{raices[[i]], imaganes[[i]]}, {i, n}];
      |tabla

(*Solucion aproximada*)
soluaprox = Fit[Puntos, {1, x, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10}, x];
      |ajusta

Lagrange[XY_] :=
  Module[{j, k, nnn, prod, sum, term, X, Y},
    |módulo
    nnn = Length[XY] - 1;
      |longitud
    X = Transpose[XY][[1]];
    Y = Transpose[XY][[2]];
    sum = 0;
    For[k = 0, k ≤ nnn, k++,
      |para cada
      prod = 1;
      For[j = 0, j ≤ nnn, j++,
        |para cada
        term = Which[j == k, 1,
          |cuál
          j ≠ k,  $\frac{x - X[[j+1]]}{X[[k+1]] - X[[j+1]]}$ ];
        prod = prod term; ];
      sum = sum + Y[[k+1]] prod; ];
    Return[sum]; ];
    |retorna

```

---

```

P[x_] = Lagrange[Puntos];
Q[x_] = InterpolatingPolynomial[Puntos, x];
      |polinomio interpolante
Print[" "];
|escribe
Print[
|escribe
  "La Ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie no homogéneas es:"];
Print["φ(x) = ", ff, " + ", λ, " ∫ab (" , kernel, ") φ(t) dt"];
|escribe

Print["Para ", n, " puntos de interpolacion, se tiene la aproximación"];
|escribe
(*Print["φ(x) ≈ ", soluaprox];*)
|escribe
(*Print["φ(x) ≈ ", P[x] // Expand];*)
|escribe |expande factores
Print["φ(x) ≈ ", Q[x] // Expand];
|escribe |expande factores

```

donde los parámetros necesarios de la función  $QCC2EIF[f_, K_, \lambda, a_, b_, n_]$ , son:

- $f$  : Integrand
- $K$  : Núcleo
- $\lambda$  : Parámetro
- $a$  : Extremo inferior del intervalo de integración
- $b$  : Extremo superior del intervalo de integración
- $n$  : Cantidad de puntos



Resultados Numéricos de usar la cuadratura de Clenshaw-Curtis en ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie

1. Solución Aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt$

$n$	Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$\varphi_5(x) = 0.25 + 0.75x - 2.43776 \times 10^{-16}x^2 + 1.37231 \times 10^{-16}x^3 + 4.73065 \times 10^{-16}x^4$	$2.22045 \times 10^{-16}$
15	$\varphi_{15}(x) = 0.25 + 0.75x - 4.52103 \times 10^{-15}x^2 + \dots + 2.46439 \times 10^{-13}x^{14}$	$9.18743 \times 10^{-16}$
25	$\varphi_{25}(x) = 0.25 + 0.75x + 1.5449 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 9.00272 \times 10^{-10}x^{24}$	$1.44329 \times 10^{-15}$
35	$\varphi_{35}(x) = 0.25 + 0.75x + 7.89857 \times 10^{-14}x^2 + \dots + 1.6082 \times 10^{-6}x^{34}$	$7.77156 \times 10^{-16}$
45	$\varphi_{45}(x) = 0.25 + 0.75x + 4.67182 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 0.000491 \times x^{44}$	$8.88178 \times 10^{-16}$

TABLA N° 4.7: Solución Aproximada de :  $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t)dt$

2. Solución Aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2) \varphi(t)dt$

$n$	Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$\varphi_5(x) = 0.25 + 0.75x - 2.43776 \times 10^{-16}x^2 + 1.37231 \times 10^{-16}x^3 + 4.73065 \times 10^{-16}x^4$	$8.88178 \times 10^{-16}$
15	$\varphi_{15}(x) = 0.25 + 0.75x - 4.52103 \times 10^{-15}x^2 + \dots + 2.46439 \times 10^{-13}x^{14}$	$1.33227 \times 10^{-15}$
25	$\varphi_{25}(x) = 0.25 + 0.75x + 1.5449 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 9.00272 \times 10^{-10}x^{24}$	$2.77556 \times 10^{-15}$
35	$\varphi_{35}(x) = 0.25 + 0.75x + 7.89857 \times 10^{-14}x^2 + \dots + 1.6082 \times 10^{-6}x^{34}$	$5.97719 \times 10^{-9}$
45	$\varphi_{45}(x) = 0.25 + 0.75x + 4.67182 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 0.000491 \times x^{44}$	$0.00142358 \times 10^0$

TABLA N° 4.8: Solución Aproximada de :  $\varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2) \varphi(t)dt$

3. Solución Aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t)dt$

$n$	Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$\varphi_5(x) = 0.25 + 0.75x - 2.43776 \times 10^{-16}x^2 + 1.37231 \times 10^{-16}x^3 + 4.73065 \times 10^{-16}x^4$	$0.000108315 \times 10^0$
15	$\varphi_{15}(x) = 0.25 + 0.75x - 4.52103 \times 10^{-15}x^2 + \dots + 2.46439 \times 10^{-13}x^{14}$	$8.88178 \times 10^{-16}$
25	$\varphi_{25}(x) = 0.25 + 0.75x + 1.5449 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 9.00272 \times 10^{-10}x^{24}$	$2.44249 \times 10^{-15}$
35	$\varphi_{35}(x) = 0.25 + 0.75x + 7.89857 \times 10^{-14}x^2 + \dots + 1.6082 \times 10^{-6}x^{34}$	$2.33147 \times 10^{-15}$
45	$\varphi_{45}(x) = 0.25 + 0.75x + 4.67182 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 0.000491 \times x^{44}$	$2.44249 \times 10^{-15}$

TABLA N° 4.9: Solución Aproximada de :  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t)dt$

4. Solución Aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t)dt$

$n$	Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$\varphi_5(x) = 0.25 + 0.75x - 2.43776 \times 10^{-16}x^2 + 1.37231 \times 10^{-16}x^3 + 4.73065 \times 10^{-16}x^4$	$0.0000235583 \times 10^0$
15	$\varphi_{15}(x) = 0.25 + 0.75x - 4.52103 \times 10^{-15}x^2 + \dots + 2.46439 \times 10^{-13}x^{14}$	$1.33227 \times 10^{-15}$
25	$\varphi_{25}(x) = 0.25 + 0.75x + 1.5449 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 9.00272 \times 10^{-10}x^{24}$	$0.462549 \times 10^0$
35	$\varphi_{35}(x) = 0.25 + 0.75x + 7.89857 \times 10^{-14}x^2 + \dots + 1.6082 \times 10^{-6}x^{34}$	$4.40208 \times 10^{-9}$

TABLA N° 4.10: Solución Aproximada de :  $\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t)dt$

5. Solución Aproximada de la Ecuación integral:  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+(x-t)^2} \right) \varphi(t) dt$

$n$	Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
5	$\varphi_5(x) = 0.25 + 0.75x - 2.43776 \times 10^{-16}x^2 + 1.37231 \times 10^{-16}x^3 + 4.73065 \times 10^{-16}x^4$	$0.00134908 \times 10^0$
15	$\varphi_{15}(x) = 0.25 + 0.75x - 4.52103 \times 10^{-15}x^2 + \dots + 2.46439 \times 10^{-13}x^{14}$	$9.91201 \times 10^{-9}$
25	$\varphi_{25}(x) = 0.25 + 0.75x + 1.5449 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 9.00272 \times 10^{-10}x^{24}$	$2.01172 \times 10^{-13}$
35	$\varphi_{35}(x) = 0.25 + 0.75x + 7.89857 \times 10^{-14}x^2 + \dots + 1.6082 \times 10^{-6}x^{34}$	$2.66454 \times 10^{-15}$
45	$\varphi_{45}(x) = 0.25 + 0.75x + 4.67182 \times 10^{-14}x^2 + \dots - 0.000491 \times x^{44}$	$2.66454 \times 10^{-15}$

TABLA N° 4.11: Solución Aproximada de :  $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+(x-t)^2} \right) \varphi(t) dt$

---

## Anexo C: Función Cuadrado Integrable

Una función Cuadrado Integrable, también llamada función cuadráticamente integrable o  $L^2$ , es una función medible de valor complejo o real para la que la integral del cuadrado del valor absoluto es finita. Por lo tanto, la integrabilidad cuadrada en la recta real  $(-\infty, +\infty)$  se define como sigue:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ cuadrado integrable} \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

También se puede hablar de integrabilidad cuadrática sobre intervalos acotados como  $[a, b]$  para  $a \leq b$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ square integrable on } [a, b] \iff \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$