UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CARRERA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR EN ESPACIOS DE BANACH"

Tesis presentada por:
Br. MONICA VIVIANA CHILLITUPA CARRASCO
Br. VICTOR RAUL MATENCIO CARRASCO

Para optar al Título Profesional de:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Asesor:
Mgt. Alejandro Ttito Ttica

CUSCO - PERÚ
2013

TESIS AUSPICIADA POR EL CONSEJO DE INVESTIGACIÓN DE LA UNSAAC

PRESENTACIÓN

SEÑOR : Decano de la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas

SEÑOR : Coordinador de la Carrera Profesional de Matemática

SEÑORES : Miembros del Jurado

El presente trabajo de tesis intitulado: **"DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR EN ESPACIOS DE BANACH"** que presentamos a vuestra consideración para optar al Título profesional de **LICENCIADO EN MATEMÁTICA**, que tiene por objetivo el desarrollo de la teoría de las derivadas de orden superior de una aplicación $f: U \subset E \to F$ en espacios de Banach, así mostrar a los matemáticos y profesionales de otras ramas afines a la ciencia; que puedan ingresar en este campo de investigación para seguir trabajando en este tipo de espacios y así complementar sus conocimientos.

El contenido de este trabajo se subdivide en tres capítulos que describimos a continuación:

En este primer capítulo, presentamos los conceptos básicos del Análisis Funcional a usarse en el desarrollo del presente trabajo, como son los espacios vectoriales, aplicaciones lineales y multilineales, espacios normados, espacios de Banach, isomorfismos, isometría y equivalencia de normas entre espacios vectoriales normados

El segundo capítulo, hace referencia a las aplicaciones diferenciables, derivada de funciones compuestas y derivada de funciones particulares, derivada de una aplicación compuesta, derivada de una aplicación bilineal continua, aplicaciones con valores en un producto de espacios de Banach, caso en que U es un subconjunto abierto de un producto de espacios de Banach, comparación entre $\mathbb{C}$-diferenciabilidad y $\mathbb{R}$-diferenciabilidad, El teorema de los incrementos finitos.

El tercer capítulo se encarga de desarrollar las derivadas de orden superior en espacios de Banach como son: La segunda derivada, caso en que E es un producto de espacios y las derivadas sucesivas.

Aprovechando la oportunidad para expresar nuestro agradecimiento a los señores miembros del jurado y a los docentes de la Carrera Profesional de Matemática por habernos impartido sus enseñanzas en las aulas universitarias que contribuyeron en nuestra formación profesional.

Finalmente, de manera especial expresamos nuestro agradecimiento al Mgt. Alejandro Ttito Ttica, por su asesoramiento y orientación brindada en el desarrollo de este trabajo.

Cusco, enero de 2013.

Br. Monica Viviana Chillitupa Carrasco

Br. Victor Raul Matencio Carrasco

DEDICATORIA

Padre Jehová te doy gracias
por haberme guiado en los momentos
que más te necesite, y es gracias a ti
que pude concluir este trabajo y doy gracias a tu
hijo nuestro señor Jesucristo por siempre
estar a mi lado.

Por eso es que este trabajo te lo dedico a ti, a
La Virgen María y a tu divino hijo
Nuestro Señor Jesucristo que vive y reina
por los siglos de los siglos Amen.

De igual forma se lo dedico,
a mi papi Emiliano Virgilio Chillitupa Salazar
y a mi mami Josefina Carrasco Meza,
quienes siempre están a mi lado apoyándome.

Monica Viviana Chillitupa Carrasco

AGRADECIMIENTO

Agradezco nuevamente a mis padres,
a mi hermano Miguel Ángel,
a mi hermana Gloria Elena,
a mi sobrina Angui Leonela, por siempre
guiarme, apoyarme y soportarme
en todo momento.

Agradezco de igual manera
Al Mgt. Alejandro Ttito Ttica quien
nos asesoró, con sus valiosas aportaciones,
que nos ayudaron a concluir este trabajo.

También a todos los profesores del
departamento académico de Matemáticas
quienes nos brindaron sus
conocimientos en nuestra formación
académica.

Monica Viviana Chillitupa Carrasco

DEDICATORIA

Con mucho amor y cariño
a Dios, por ser la luz que ilumina mi pasos.

A mis padres, Víctor Raúl Matencio Ríos
y Gladis Dolores Carrasco García,
a mi hermana Gladys Elba Matencio Carrasco,
pues son mi ejemplo y mi fortaleza
quienes me impulsan a seguir siempre adelante,

A Carmen, persona muy especial en mi vida
y a mis amigos Alex, Orlando y Percy.

Victor Raul Matencio Carrasco.

AGRADECIMIENTO

Deseo agradecer profundamente a la vida
por haberme puesto en un hogar maravilloso al nacer.

Gracias a mis padres y hermana
por compartir y dedicar gran parte de sus vidas conmigo.

Gracias a mi asesor, Mgt. Alejandro Ttito Ttica por haber aceptado
ser nuestro asesor de tesis, por su paciencia y opiniones que
sirvieron para la conclusión del presente trabajo.

Gracias a los profesores del Departamento Académico de Matemática
y Estadística quienes con sus palabras y experiencias me impulsaron
a terminar el presente trabajo.

Finalmente, gracias a todas aquellas personas con las que compartí
mi vida en estos años de estudio.

Victor Raul Matencio Carrasco.

INTRODUCCIÓN

1. ANTECEDENTES

Los espacios normados son un ejemplo de espacios vectoriales topológicos, de mucha importancia en el análisis funcional, teoría de la medida y en general para las Matemáticas.

Como caso particular de los espacios normados tenemos a los espacios de Banach, generalizan el concepto de $\mathbb{R}^n$, contemplando también la posibilidad de tener a $\mathbb{C}$ (los números complejos) como cuerpo de escalares y no solo a $\mathbb{R}$ (los números reales) como estamos acostumbrados. Mantienen muchas de las propiedades conocidas para el caso de dimensión finita, comúnmente estudiadas en los primeros cursos de cálculo en varias variables. En este trabajo hemos definido y se dedicó con mayor profundidad a la familia de funciones diferenciables, definida sobre subconjuntos abiertos contenidos en espacios normados, tratando algunas ideas básicas referidas al tema, y unas generalizaciones de los teoremas más conocidos en el caso de dimensión finita.

Un breve panorama sobre algunos problemas recientes y otros clásicos en la teoría de diferenciabilidad y renormamiento en espacios de Banach han sido estudiados por Henri Cartan en su libro titulado Cálculo Diferencial (1972).

Más recientemente la derivación en espacios normados fue por Martin Mereb en su libro titulado Derivación en Espacios Normados (2003) y últimamente por Hans Cristian Muller Santa Cruz en su libro titulado Cálculo Diferencial en Espacios de Banach (2008).

Así como también se tomó en cuenta la publicación emitida por RACSAM (Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Serie A, Matemáticas.) en el año 2006, el título del artículo es Diferenciabilidad en espacios de Banach. Problemas escogidos de Marian Fabián, Vicente Montesinos y Václav Zizler.

También se tomó en cuenta la publicación A.N. KOLMOGOROV S.V. FOMIN Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional traducido al español por Carlos Vega en la que hace referencia a las derivadas de orden superior en los espacios lineales.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El análisis funcional es la rama de las matemáticas, y específicamente del análisis, que trata del estudio de espacios de funciones. Tienen sus raíces históricas en el estudio de transformaciones tales como transformación de Fourier y en el estudio de las ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales. La palabra funcional se remonta al cálculo de variaciones, implicando una función cuyo argumento es una función.

En la visión moderna inicial, se consideró el análisis funcional como el estudio de los espacios de Banach. En estos espacios una gran parte del estudio involucra al espacio dual (el espacio de todas funcionales lineales continuas). Como en álgebra lineal, el dual del dual no es siempre isomorfo al espacio original, pero hay un monomorfismo natural de un espacio en su doble dual siempre.

La noción de derivada se amplía a las funciones arbitrarias entre los espacios de Banach; resulta que la derivada de una función en cierto punto es realmente una función lineal continua.

En el estudio de los cursos básicos de cálculo, tenemos muchas propiedades que pueden ser extendidas a espacios de dimensión infinita, en este caso a espacios normados y como caso particular a los espacios de Banach.

Los espacios de Banach generalizan el concepto de $\mathbb{R}^n$, con la posibilidad de tratarse de un espacio vectorial de dimensión infinita, contemplando también la posibilidad de tener a $\mathbb{C}$ (los números complejos) como cuerpo escalar. Desde este punto de vista el hecho de estudiar la diferenciabilidad en estos espacios se hace necesario.

2.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Es posible obtener la derivada de orden superior para aplicaciones $f: U \to F$ dónde E y F son espacios de Banach, siendo U un subconjunto abierto de E?

3. OBJETIVOS

3.1. OBJETIVO GENERAL

Desarrollar las derivadas de orden superior de una aplicación $f: U \to F$, en espacios de Banach.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Probar que las aplicaciones diferenciables son bilineales y continuas.
2. Probar el teorema de incrementos finitos.

4. HIPÓTESIS

Mediante la generalización de las aplicaciones diferenciales obtenemos aplicaciones infinito diferenciable que corresponden a las derivadas de orden superior, las cuales son aplicaciones bilineales o inclusive multilineal.

5. JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo:

a) Contribuye con el desarrollo de esta área de investigación en los espacios de Banach.
b) Permite el desarrollo de mejor manera de los temas a tratarse.

c) Ayuda a los alumnos y docentes de matemática pura que estén interesados en el tema.

6. IMPORTANCIA DEL PROBLEMA

El presente trabajo es de importancia en el desarrollo de la matemática, puesto que generaliza nociones adquiridas en cursos básicos. Además será de suma utilidad para estudiantes de ciencias, que podrán utilizar este estudio como una herramienta en posteriores trabajos.

7. LIMITACIONES

En el presente trabajo se tuvo algunas limitaciones, las cuales son:

a) El trabajo se limita a desarrollarlo en espacios de Banach, que corresponde al análisis funcional.
b) En lo concerniente a la bibliografía, existe poca información con respecto a las derivadas de orden superior en espacios de Banach.

8. METODOLOGÍA

Para el desarrollo de este trabajo se utilizó el método deductivo, inductivo y explicativo.

CONTENIDO

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1.1 ESPACIOS VECTORIALES.

DEFINICIÓN 1.1.- Sea E un conjunto no vacío cualquiera y $\mathbb{K}$ un campo, consideremos dos operaciones definidas sobre él.

1. Ley de Composición Interna

$$\begin{aligned} +: & E \times E \to E \\ & (x,y) \mapsto x+y;\ \forall x,y \in E. \end{aligned}$$

2. Ley de Composición Externa

$$\begin{aligned} \cdot: & \mathbb{K} \times E \to E \\ & (\lambda,x) \mapsto \lambda \cdot x = \lambda x;\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E. \end{aligned}$$

El conjunto E tiene estructura de **espacio vectorial** sobre el campo $\mathbb{K}$, si se verifican las siguientes propiedades:

a) $(x+y)+z = x+(y+z);\ \forall\, x,y,z \in E.$

b) $x+y = y+x;\ \forall\, x,y \in E.$

c) Existe $\bar{0} \in E$ (llamado elemento neutro) talque

$$\bar{0} + x = x + \bar{0};\ \forall\, x \in E.$$

d) Existe $-x \in E$ (llamado elemento opuesto) tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = \bar{0};\ \ \forall\, x \in E.$$

e) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E.$

f) $1x = x;\ \forall\, x \in E$, donde 1 es la unidad para el producto en $\mathbb{K}$.

g) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall\, x \in E.$

$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, x, y \in E.$

Los elementos del conjunto E se denominan vectores y los elementos del campo $\mathbb{K}$ se denominan escalares.

Las primeras cuatro propiedades hacen referencia a la suma de vectores y se resumen diciendo que $(E, +)$ es un grupo abeliano.

NOTA. Un cuerpo o campo es una estructura algebraica en la cual las operaciones de adición y multiplicación se pueden realizar y cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva, además de la existencia de un inverso aditivo y de un inverso multiplicativo, los cuales permiten efectuar las operaciones de sustracción y división (excepto la división por cero); estas propiedades ya son familiares de la aritmética de números ordinarios.

DEFINICIÓN 1.2.- Sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Un subconjunto no vacío U de E se llama **subespacio vectorial** de E, si U constituye un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con respecto a las operaciones heredadas de E.

TEOREMA 1.1.- Un subconjunto U del espacio vectorial E es un subespacio vectorial de E sí y sólo si cumple:

i) $U \neq \emptyset$

ii) $x + y \in U;\ \forall x, y \in U$

iii) $\lambda x \in U;\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in U.$

PRUEBA.

$\Rightarrow$) Debido a que U es un subespacio vectorial, por tanto se cumple directamente las tres condiciones anteriores.

$\Leftarrow$) Como $U \subset V$, cumpliéndose en U las tres condiciones anteriores verifiquemos que U es un espacio vectorial respecto a las dos operaciones definidas en V.

Sean $x, y \in U$ de tal manera que $x + y \in U$, como $U \subset V$ ya se cumple inmediatamente que:

$$x + y = y + x \in U; \ \forall x, y \in U$$

En forma similar se cumplirán las demás propiedades de un espacio vectorial utilizando las dos condiciones restantes. Por consiguiente U es un subespacio vectorial de V.■

1.1.1 OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES.

La familia de subespacios de un espacio vectorial admite una serie de operaciones, a continuación pasaremos a detallar la intersección y la suma de subespacios vectoriales.

TEOREMA 1.2.- La intersección de dos subespacios de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.

PRUEBA.

En efecto demostraremos que:

i) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$

Sean U_1 y U_2 subconjuntos de E, además:

U_1 es un subespacio vectorial de E, y

U_2 es un subespacio vectorial de E.

Como U_1, U_2 no son vacios, por lo menos tienen como elemento en común al elemento neutro.

Por lo tanto

$$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset.$$

ii) $x + y \in U_1 \cap U_2;\ \forall x, y \in U_1 \cap U_2$

Sean $x, y \in U_1 \cap U_2$ tal que:

$$x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow x \in U_1 \ \wedge \ x \in U_2,$$

$$y \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow y \in U_1 \ \wedge \ y \in U_2.$$

Luego se tiene:

$$x \in U_1 \ \wedge \ y \in U_1 \Rightarrow x + y \in U_1,$$

$$x \in U_2 \ \wedge \ y \in U_2 \Rightarrow x + y \in U_2.$$

Por lo tanto

$$x + y \in U_1 \cap U_2;\ \forall x, y \in U_1 \cap U_2.$$

iii) $\lambda x \in U_1 \cap U_2;\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in U_1 \cap U_2$

Sean $x \in U_1 \cap U_2$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\mathrm{x} \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{U}_1 \ \wedge \ \mathrm{x} \in \mathrm{U}_2.$$

Luego se tiene:

$$x \in U_1 \ \wedge \ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in U_1,$$

$$x \in U_2 \ \wedge \ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in U_2,$$

por lo tanto

$$\lambda x \in U_1 \cap U_2;\ \forall \lambda \in K, \forall x \in U_1 \cap U_2.$$

Por consiguiente de **i)**, **ii)** y **iii)** se tiene que la intersección de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.■

DEFINICIÓN 1.3.- Sean U_1 y U_2 dos subespacios del espacio vectorial E, la suma de U_1 y U_2 está definida de la siguiente forma:

$$U_1 + U_2 = \{x_1 + x_2 / \, x_1 \in U_1, \;\; x_2 \in U_2\}.$$

DEFINICIÓN 1.4.- La suma de dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial es directa, si cada elemento de la suma admite una única descomposición como suma de un elemento del primer subespacio más un elemento del segundo. Se escribe entonces $U_1 \oplus U_2$, donde U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de E (espacio vectorial).

1.1.2 APLICACIONES LINEALES.

Las aplicaciones más notables entre espacios vectoriales son aquellas que preservan sus estructuras, tales aplicaciones se denominan lineales y sirven para una gran variedad de propósitos.

DEFINICIÓN 1.5.- Sean E y F espacios vectoriales definidos sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ y sea $f: E \to F$ una aplicación. f es una **aplicación lineal** o un homomorfismo si:

i) $f(x + y) = f(x) + f(y); \forall x, y \in E$ (Aditividad)

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x); \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ (Homogeneidad).

Equivalentemente

$f: E \to F$ es una aplicación lineal $\Leftrightarrow f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y);\ \forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

PROPIEDADES DE LAS APLICACIONES LINEALES.

Si $f: E \to F$ es una aplicación lineal, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) $f(0_E) = 0_F$.
b) $f(-x) = -f(x);\ \forall\, x \in E$.
c) $f(x - y) = f(x) - f(y);\ \forall\, x, y \in E$.
d) $f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n);\ \forall\, x_1, \dots, x_n \in E, \forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

CLASIFICACIÓN DE LAS APLICACIONES LINEALES.

Si $f: E \to F$ es una aplicación lineal, donde f no está sujeta a ninguna condición, entonces la aplicación lineal f se clasifica de la siguiente manera:

a) f es un **MONOMORFISMO** si y sólo si f es inyectiva.

b) f es un **EPIMORFISMO** si y sólo si f es suryectiva.

c) f es un **ISOMORFISMO** si y sólo si f es biyectiva.

d) Si $f: E \to E$, entonces f es un **ENDOMORFISMO.**

e) Si $f: E \to E$ y f es biyectiva, entonces f es un **AUTOMORFISMO.**

1.1.3 NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACION LINEAL.

DEFINICIÓN 1.6.- Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal, se llama **núcleo** de f y se denota por $N(f)$ o $ker(f)$, al subconjunto definido por:

$$ker(f) = \{x \in E \;/\; f(x) = 0_F\}.$$

Es decir el núcleo de f es el subconjunto formado por todos los elementos de E tales que sus imágenes mediante f es igual al vector nulo de F.

DEFINICIÓN 1.7.- Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal, se llama **imagen** de f y se denota por $im(f)$ ó $f(E)$ al subconjunto definido por:

$$im(f) = \{f(x) \in F \,/\, \exists x \in E\}.$$

TEOREMA 1.3.- Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal, f es suryectiva si y sólo si la imagen de la aplicación lineal f es todo el conjunto de llegada F, es decir:

$$im(f) = F.$$

PRUEBA.

($\Rightarrow$) Se demostrará que $im(f) = F \Leftrightarrow im(f) \subset F \;\wedge\; F \subset im(f)$.

En efecto:

Demostremos que $F \subset im(f)$, para ello sea $y \in F$, pero como f es suryectiva $\exists\, x \in E/f(x) = y$, entonces $y \in im(f)$, por lo tanto:

$$F \subset im(f). \tag{1.1}$$

Ahora demostremos que $im(f) \subset F$, pero por la misma definición de imagen de una aplicación lineal se cumple que

$$im(f) \subset F. \tag{1.2}$$

Por consiguiente de (1.1) y (1.2) se tiene que $im(f) = F$.

($\Leftarrow$) Ahora demostraremos que f es suryectiva, en efecto:

Sea $y \in F \Rightarrow y \in im(f) \Leftrightarrow \exists x \in E / f(x) = y$, pero como y es arbitrario entonces se tendrá:

$$\forall y \in F, \exists x \in E \text{ tal que } f(x) = y.$$

Por consiguiente f es suryectiva.

Finalmente se cumple el teorema. ■

TEOREMA 1.4.- Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal, f es inyectiva sí y sólo si la ecuación $f(x) = 0_F$ tiene solamente la solución trivial $x = 0_E$.

PRUEBA.

Supongamos que f no es inyectiva, es decir sean $x, y \in E$ cuyas imágenes mediante la aplicación lineal f es algún $b \in F$, tales que:

$$f(x) = b \text{ y } f(y) = b,$$

entonces:

$$f(x) - f(y) = b - b$$

$$f(x - y) = 0_F \tag{1.3}$$

luego $x - y \neq 0$, es decir $x \neq y$.

Lo cual contradice al hecho de que $x = y$, que se obtiene al reemplazar la ecuación (1.3) en la ecuación $f(0_E) = 0_F$ (por la linealidad de f), por consiguiente nuestra suposición es falsa, y el teorema ya queda demostrado. ■

1.1.4 OPERACIONES CON APLICACIONES LINEALES.

DEFINICIÓN 1.8.- Sean $f: E \to F$ y $g: E \to F$ aplicaciones lineales cualesquiera definidas sobre un mismo campo $\mathbb{K}$. Se define la aplicación suma $f + g: E \to F$ como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); \ \forall x \in E.$$

La aplicación suma $f + g$ es una aplicación lineal

En efecto:

$$x, y \in E; \ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in E,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}(f + g)(\lambda x + \mu y) &= f(\lambda x + \mu y) + g(\lambda x + \mu y)\\ &= f(\lambda x) + f(\mu y) + g(\lambda x) + g(\mu y)\\ &= \lambda f(x) + \lambda g(x) + \mu f(y) + \mu g(y)\\ &= \lambda[f(x) + g(x)] + \mu[f(y) + g(y)]\\ &= \lambda(f + g)(x) + \mu(f + g)(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(f + g)(\lambda x + \mu y) = \lambda(f + g)(x) + \mu(f + g)(y); \forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Asi $f + g$ es una aplicación lineal. ■

DEFINICIÓN 1.9.- Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal cualquiera definida sobre un campo $\mathbb{K}$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se define la aplicación $\alpha f: E \to F$ como:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x); \ \forall x \in E.$$

La aplicación αf es una aplicación lineal

En efecto:

$$x, y \in E;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in E,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}(\alpha f)(\lambda x + \mu y) &= f[\alpha(\lambda x + \mu y)]\\ &= f[\alpha(\lambda x) + \alpha(\mu y)]\\ &= f[(\alpha\lambda)x] + f[(\alpha\mu)y]\\ &= (\alpha\lambda f)(x) + (\alpha\mu f)(y)\\ &= \lambda(\alpha f)(x) + \mu(\alpha f)(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\alpha f)(\lambda x + \mu y) = \lambda(\alpha f)(x) + \mu(\alpha f)(y);\ \forall x, y \in E;\ \forall \alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Asi αf es una aplicación lineal. ∎

DEFINICIÓN 1.10.- Sean $f: E \to F$ y $g: F \to G$ aplicaciones lineales cualesquiera definidas sobre un mismo campo $\mathbb{K}$. Se define la aplicación compuesta "g compuesta con f" denotada por $g \circ f: E \to F$ como:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)];\ \forall x \in E.$$

La aplicación $g \circ f$ es una aplicación lineal

En efecto:

$$x, y \in E;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in E,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda x + \mu y) &= g[f(\lambda x + \mu y)]\\ &= g[\lambda f(x) + \mu f(y)]\end{aligned}$$

$$= g[\lambda f(x)] + g[\mu f(y)]$$

$$= \lambda[g[f(x)]] + \mu[g[f(y)]]$$

$$= \lambda[(g \circ f)(x)] + \mu[(g \circ f)(y)]$$

$$= \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y).$$

Por lo tanto,

$$(g \circ f)(\lambda x + \mu y) = \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y);\ \forall x, y \in E;\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Asi $g \circ f$ es una aplicación lineal. ■

1.2 ESPACIOS NORMADOS Y ESPACIOS DE BANACH.

1.2.1 ESPACIOS NORMADOS.

DEFINICIÓN 1.11.- Sea E un espacio vectorial definido sobre un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en E es una aplicación $\|\ \|: E \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

1) $\|x\| \geq 0;\ \forall x \in E$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|;\ \forall x \in E$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;\ \forall x, y \in E$.

Una consecuencia inmediatamente y útil es que, si $x, y \in E$, se tiene:

4) $\|-x\| = \|x\|;\ \forall x \in E$, en particular: $\|x - y\| = \|y - x\|$
5) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

En efecto, $x = (x - y) + y \Rightarrow \|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \tag{1.4}$$

Ahora intercambiando x por y, tenemos

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$$

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \tag{1.5}$$

Por consiguiente de (1.4) y (1.5) se tiene que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$.

Un espacio vectorial normado o simplemente espacio normado es un par $(E, \| \ \|)$ donde E es un espacio vectorial y $\| \ \|$ es una norma en E.

Frecuentemente se designa el espacio normado con E, dejando la norma sobre entendida.

TEOREMA 1.5.- Todo espacio normado E es un espacio métrico con la métrica natural d definida por:

$$d(x,y) = \|y-x\|; \ \forall x, y \in E.$$

Además, $\forall x, y, z \in E$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene $\|x\| = d(0,x)$.

También se cumple:

a) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ (invarianza por traslación)
b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ (homogeneidad)

PRUEBA.

Probemos que d es una métrica.

1) $d(x,y) = \|y-x\| \geq 0$ y $d(x,y) = \|y-x\| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $d(x,y) = \|y-x\| = \|x-y\| = d(x,y)$.
3) Desigualdad triangular:

$$z - x = (y-x) + (z-y)$$

$$\|z-x\| \leq \|y-x\| + \|z-y\| \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Prueba de a).

$$d(x+z, y+z) = \|(y+z)-(x+z)\| = \|y-x\| = d(x,y).$$

Prueba de b).

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda y - \lambda x\| = |\lambda|\|y-x\| = |\lambda| d(x,y). \blacksquare$$

El teorema 1.5 nos permite afirmar que un espacio normado puede considerarse como un espacio métrico, por lo que ya puede hablarse de su topología.

DEFINICIÓN 1.12.- Sea E un conjunto no vacío cualquiera y $(F, \| \quad \|)$ un espacio normado. La aplicación $f: E \to F$ es acotada si y sólo si, existe un número real $k > 0$, tal que:

$$\|f(x)\| \leq k;\ \forall x \in E.$$

Denotemos con

$$B(E;F) = \{f: E \to F / f \text{ es acotada en } E\}$$

y definimos puntualmente

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);\ \forall x \in E \text{ y}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x);\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E.$$

Resulta que $B(E;F)$ provisto de las operaciones

$$\begin{aligned} +: B(E;F) \times B(E;F) &\to B(E;F) \\ (f,g) &\mapsto f+g;\ \forall f,g \in B(E;F). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot: K \times B(E;F) &\to B(E;F) \\ (\alpha, f) &\mapsto \alpha f;\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f \in B(E;F). \end{aligned}$$

Es un espacio vectorial.

Se prueba que la aplicación $\| \quad \|_u : B(E;F) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\|f\|_u = sup\{|f(x)|; x \in E\}$$

es una norma y en consecuencia $(B(E;F), \| \quad \|_u)$ es un espacio normado.

DEFINICIÓN 1.13.- Sea E un espacio normado y sean $\| \quad \|_1 : E \to \mathbb{R}$ y $\| \quad \|_2 : E \to \mathbb{R}$ dos normas cualesquiera en E. Dichas normas son equivalentes y se escribe,

$\| \quad \|_1 \approx \| \quad \|_2$ si y sólo si existen números reales $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1; \ \forall x \in E.$$

La definición anterior indica que las normas definidas en E dan lugar a la misma topología.

1.2.2 CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS.

Los conjuntos abiertos son fundamentales en la teoría de los espacios normados. La abstracción de las propiedades básicas de tales conjuntos conduce a la construcción de una nueva área de estudio denominada "los espacios topológicos". Para este estudio mencionaremos las definiciones de bolas y esferas.

DEFINICIÓN 1.14.- Sea $(E, \| \quad \|)$ un espacio normado, en $(E, \| \quad \|)$ queda definida la topología dada por la métrica d y en consecuencia, si $a \in E$, $r > 0$ y $r \in \mathbb{R}$ definimos:

1) La **bola abierta** de centro a y radio r, es el conjunto $B(a,r)$ formado por los puntos de E cuya distancia al punto a es menor que r, es decir:

$$B(a,r) = \{x \in E / \, d(x,a) < r\} = \{x \in E / \, \|x-a\| < r\}.$$

2) La **bola cerrada** de centro a y radio r, es el conjunto $B[a,r]$ formado por los puntos de E que están a una distancia menor o igual a r del punto a, es decir:

$$B[a,r] = \{x \in E / \, d(x,a) \leq r\} = \{x \in E / \, \|x-a\| \leq r\}.$$

3) La **esfera** de centro a y radio r, es el conjunto $S(a,r)$ formado por los puntos $x \in E$ tal que $\|x-a\| = r$, es decir:

$$S(a,r) = \{x \in E / \, d(x,a) = r\} = \{x \in E / \, \|x-a\| = r\}.$$

De las definiciones anteriores se sigue inmediatamente que:

1° $a \in B(a,r)$, $a \in B[a,r]$, $a \in S(a,r)$.

2° $B(a,r) \subset B[a,r]$ y $S(a,r) \subset B[a,r]$.

3° Evidentemente se tiene que $B[a,r] = B(a,r) \cup S(a,r)$, donde $B(a,r)$ y $S(a,r)$ son disjuntos.

DEFINICIÓN 1.15.- Sean $(E, \| \quad \|)$ un espacio normado y $U \subset E$ subconjunto de E, A es un **conjunto abierto** de E si para todo $x \in U$, existe una bola abierta $B(a,r) \subset U$.

$F \subset E$ es un **conjunto cerrado** de E si y sólo si, su complemento $F' = E - F$ es un conjunto abierto.

NOTA. De aquí en adelante $U \subset E$ subconjunto abierto de E simplemente se denotara por U un abierto de E.

1.2.3 SUCESIONES CONVERGENTES.

DEFINICIÓN 1.16.- Sean $(E, \| \quad \|)$ un espacio normado y (x_n) una sucesión de elementos de E. La sucesión (x_n) es convergente a un elemento $x \in E$ y se denota $(x_n) \to x$ si y sólo si, la sucesión de números reales $(\|x_n - x\|)$ converge a cero, es decir:

$$(x_n) \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0.$$

Dicho de otra manera:

$$(x_n) \to x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 1.17.- Sea $(E, \| \quad \|)$ un espacio normado. La sucesión (x_n) de elementos de E, es fundamental o de Cauchy, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que si $m, n \geq n_0$ entonces

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 1.18.- Un espacio vectorial normado E es completo si toda sucesión de Cauchy en E es convergente.

1.2.4 ESPACIOS DE BANACH.

DEFINICIÓN 1.19 (Espacio de Banach).- Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo. Esto quiere decir que un espacio de Banach es un espacio vectorial E sobre el cuerpo de los números reales o el de los complejos con una norma $\| \quad \|$ tal que toda sucesión de Cauchy con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ en E tiene un límite en E.

1.3 APLICACIONES LINEALES Y CONTINUAS.

Sean E y F espacios vectoriales normados (ambas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, o bien sobre el cuerpo $\mathbb{C}$). Ahora nuestro propósito es buscar un criterio que nos permita reconocer si una aplicación lineal $f: E \to F$ es continua cuando E y F están dotados con las topologías definidas por sus normas.

DEFINICIÓN 1.20.- Sean $(E, \| \ \|_1)$, $(F, \| \ \|_2)$ espacios normados y $f: E \to F$ una aplicación. La aplicación f satisface una condición de Lipschipz (o que f es Lipschitziana), si existe una constante $k > 0$ tal que:

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq k\|x - y\|_1; \ \forall \ x, y \in E.$$

donde k se llama constante de Lipschitz.

En el espacio producto $E \times F$ usamos la norma,

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2; \ \forall\, x_1 \in E \ y \ \forall \ x_2 \in F$$

o también se escribe de la siguiente forma:

$$\|(x_1, x_2)\|_{E\times F} = \|x_1\|_E + \|x_2\|_F.$$

DEFINICIÓN 1.21.- Sean E y F espacios normados. La aplicación $f: E \to F$ es continua en $x_0 \in E$ si y sólo si, dado un $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_n - x_0\| < \delta$ implica $\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

O equivalentemente:

Sean E y F espacios normados. La aplicación $f: E \to F$ es continua en $x_0 \in E$ si y sólo si, para toda sucesión $(x_n) \to x_0$ en E, se tiene que la sucesión $\big(f(x_n)\big) \to f(x_0)$.

Esto es:

$$f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \|x_n - x_0\| \to 0 \text{ implica } \|f(x_n) - f(x_0)\| \to 0.$$

DEFINICIÓN 1.22.- Sean E y F espacios normados. La aplicación $f: E \to F$ es continua en E si y sólo, f es continua en todo punto $x_0 \in E$.

TEOREMA 1.6.- Sean E y F espacios normados. Una aplicación lineal $f: E \to F$ es continua en E si y sólo si f es continua en un punto de E.

PRUEBA.

($\Rightarrow$) Es evidente

($\Leftarrow$) Supongamos que f es continua en $x_0 \in E$.

Sea x un elemento arbitrario de E y sea (x_n) una sucesión convergente a x. Luego la sucesión $(x_n - x + x_0)$ converge a x_0 y se tiene

$$\|f(x_n) - f(x)\| = \|f(x_n - x + x_0) - f(x_0)\| \to 0,$$

lo cual completa la prueba. ∎

DEFINICIÓN 1.23.- Sea E y F espacios normados. La aplicación lineal $f: E \to F$ es acotada, si existe un número real $k > 0$, tal que

$$\|f(x)\| \leq k\|x\|, \ \forall x \in E.$$

TEOREMA 1.7.- Sean E y F espacios normados y $f: E \to F$ una aplicación lineal, f es continua si y sólo si f es acotado.

PRUEBA.

($\Leftarrow$) Supongamos que f es acotado

$$\|f(x)\| \leq k\|x\| \qquad \forall\, x \in E$$

Sea (x_n) una sucesión en E talque

$$x_n \to 0 \qquad (\|x_n\| \to 0)$$

$$\|f(x_n)\| \leq k\|x_n\| \to 0 \quad i.e. \quad \|f(x_n)\| \to 0$$

es decir

$$f(x_n) \to 0 = f(0).$$

Lo cual implica que es continua en 0 y por el teorema anterior f es continua en E.

($\Rightarrow$) (Por reducción al absurdo)

Supongamos que f no es acotado, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}^+$, existe talque

$$\|f(x_n)\| > n\|x_n\|$$

$$\left\|\frac{f(x_n)}{n\|x_n\|}\right\| > 1, \quad \left\|f\left(\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right)\right\| > 1$$

definimos.

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}, \quad n = 1,2,\ldots$$

$y_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

$$\|f(y_n)\| > 1,$$

esto prueba que f no es continua.

Lo cual completa la prueba. ∎

DEFINICIÓN 1.24.- Sea E un espacio vectorial, E es de dimensión finita n, si y sólo si posee una base finita B, es decir, existe un conjunto de n elementos $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset E$ que goza de las siguientes propiedades:

1) B es linealmente independiente. Es decir:

Si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$$

entonces $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

2) B genera E, es decir, para cualquiera $x \in V$, existen $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que

$$x = \sum_{i=n}^{n} \alpha_i b_i.$$

PROPOSICIÓN 1.1.- Sean E y F espacios normados, E de dimensión finita, entonces toda aplicación lineal $f: E \to F$ es continua.

PRUEBA.

Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base de E, por lo tanto

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\right)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i f(e_i)\right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} |x_i| \|A(e_i)\|.$$

Denotando $M = \max_{1\leq i\leq m} \|f(e_i)\|$, la desigualdad de Cauchy y la equivalencia de normas en espacios finito dimensionales, se obtiene

$$\|f(x)\| \leq M\sum_{i=1}^{m}|x_i| \leq M\|x\| \leq \left(M\sqrt{m}\right)\|x\|. \blacksquare$$

DEFINICIÓN 1.25.- Sean E y F espacios normados, denotamos con $\mathcal{L}(E;F)$ al conjunto de todas las aplicaciones f lineales y continuas de E en F, es decir:

$$\mathcal{L}(E;F) = \{f: E \to F \,/\, f \text{ lineal y continua}\}.$$

TEOREMA 1.8.- Si E es un espacio normado y F es un espacio de Banach entonces *de* $\mathcal{L}(E;F)$ es un espacio de Banach.

PRUEBA.

Probemos que $\mathcal{L}(E;F)$ es completo.

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en el espacio $\mathcal{L}(E;F)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces

$$\|f_n - f_m\| = sup\left\{\frac{\|f_n(x)-f_m(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} < \varepsilon,$$

es decir,

$$\frac{\|f_n(x) - f_m(x)\|}{\|x\|} \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon\|x\|, \forall x \in E.$$

Si $n, m \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon\|x\|, \forall x \in E$

lo cual prueba que $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en F y por la completitud de F, existe un único elemento $y \in F$ tal que $f_n(x) \to y$.

Como x es un elemento arbitrario de E esto define una aplicación $f: E \to F$ tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Probemos que $f \in \mathcal{L}(E;F)$ y $\|f_n - f\| \to 0$.

En efecto, sean $x, y \in E$

$$f(x+y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} [f_n(x) + f_n(y)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \alpha f_n(x) = \alpha f(x),$$

en consecuencia f es lineal.

Probemos que f es continua.

Sabemos que toda sucesión de Cauchy es acotada, como (f_n) es de Cauchy en $\mathcal{L}(E;F)$ entonces existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ consecuentemente,

$$\|f(x)\| = \left\|\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\| \leq M\|x\|, \forall x \in E.$$

Así, f es acotada, por tanto $f \in \mathcal{L}(E;F)$.

Como (f_n) es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que si

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \|(f_n - f_m)(x)\| \leq \|f_n - f_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$$

para $n \geq n_0$ y $\forall\, x \in E$, luego

$$\|f_n - f\| = sup\left\{\frac{\|(f_n - f)(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$$

$$= sup\left\{\frac{\|(f_n)(x) - f(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} < \varepsilon$$

para $n \geq n_0$, lo que implica que $(f_n) \to f$ en $\mathcal{L}(E;F)$. ∎

TEOREMA 1.9.- Sean E, F y G espacios normados.

a) Si $f \in \mathcal{L}(E;F)$ y $g \in \mathcal{L}(F;G)$, entonces $g \circ f \in \mathcal{L}(E;G)$.

b) $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$

PRUEBA.

a) i) $g \circ f$ es lineal

Sean $x, y \in E$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+y) &= g\big(f(x+y)\big) \\ &= g\big(f(x)+f(y)\big) \\ &= g\big(f(x)\big)+g\big(f(y)\big) \\ &= (g \circ f)(x)+(g \circ f)(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(kx) &= g\big(f(kx)\big) \\ &= g\big(kf(x)\big) \\ &= kg\big(f(x)\big) \\ &= k(g \circ f)(x), \quad \forall\, k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$\therefore$ $(g \circ f)$ es lineal.

ii) $g \circ f$ es acotada

$$\|g \circ f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(g \circ f)(x)\|}{\|x\|}$$

$$\|(gf)(x)\| = \big\|g\big(f(x)\big)\big\| \leq \|g\|\|f(x)\| \leq \|g\|\|f\|\|x\| \leq k\|x\|$$

$\therefore$ $(g \circ f)$ es acotada

Por lo tanto de **i)** y **ii)** se tiene $(g \circ f) \in \mathcal{L}(E;F)$.

b) Sea $x \in E$

$$\|(g \circ f)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(g \circ f)(x)\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|g\|\|f\|\|x\|}{\|x\|}$$

$$\leq \|g\|\|f\|$$

$$\therefore \|(g \circ f)\| \leq \|g\|\|f\|. \blacksquare$$

DEFINICIÓN 1.26.- Sean E y F espacios normados. Si en el espacio $\mathcal{L}(E;F)$ suponemos que $F = \mathbb{R}$ entonces el espacio $\mathcal{L}(E;\mathbb{R}) = \{f: E \to \mathbb{R} \;/\; f \text{ es funcional}\}$, se denota por E^* y recibe el nombre de espacio dual de E.

$$E^* = \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$$

E^* provisto de la norma usual de $\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ es un espacio normado y más aún es un espacio de Banach por serlo $\mathbb{R}$.

1.4 ISOMORFISMOS, ISOMETRÍA Y EQUIVALENCIA DE NORMAS ENTRE ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS.

DEFINICIÓN 1.27.- Una aplicación $f: E \to F$, donde E y F son espacios vectoriales normados, es un isomorfismo si:

1) f es lineal y continua.
2) Existe una aplicación $g: F \to E$ lineal y continua tal que $g \circ f = Id_E$ (aplicación identidad de E) y $f \circ g = Id_F$.

Estas condiciones implican que f es una biyección de E sobre F, y que g es la biyección recíproca. Por otro lado, está claro que si f es una biyección lineal, la biyección recíproca es lineal. No obstante, si f es una biyección lineal continua, no es cierto que la biyección recíproca sea continua. De estas puntualizaciones se sigue otra caracterización de isomorfismos:

Para que $f: E \to F$ sea un isomorfismo, es necesario y suficiente que f sea un homeomorfismo (de espacios topológicos) y sea lineal.

Es necesario no confundir isomorfismo e isometría.

DEFINICIÓN 1.28.- Sean E y F espacios normados, la aplicación $f: E \to F$ es una isometría de E en F si y sólo si $\|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in E.$

Esta condición implica que $\|f(x)\|$ esta acotada en la bola unidad; luego f es una aplicación lineal continua; y el mismo razonamiento prueba que la aplicación reciproca g es lineal y continua. Así toda isometría es un isomorfismo; pero la reciproca no es cierta; por ejemplo una homotecia $f(x) = \lambda x$ (donde $\lambda \neq 0$) es un isomorfismo de E en E, pero no es una isometría si $|\lambda| \neq 1$.

DEFINICIÓN 1.29.- Sean E y F espacios normados, $f: E \to F$ es un isomorfismo isométrico de E en F si y sólo si f es lineal y una isometría de E en F.

TEOREMA 1.10.- Sea E un espacio normado, si E es de dimensión finita entonces todas las normas definidas en E son equivalentes.

PRUEBA.

Sean $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ dos normas cualesquiera en E y denotemos con E_1 y E_2 al espacio vectorial E provisto de las normas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$, respectivamente, y con $I_{12}: E_1 \to E_2$ y $I_{21}: E_2 \to E_1$ la aplicación identidad de E entonces I_{12} e I_{21} son obviamente lineales y por el teorema, I_{12} e I_{21} son acotadas, luego existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\|I_{12}(x)\|_2 \leq \alpha\|x\|_1 \quad y \quad \|I_{21}(x)\|_1 \leq \beta\|x\|_2 \ \forall x \in E,$$

$$\|x\|_2 \leq \alpha\|x\|_1 \quad y \quad \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2 \quad \forall\, x \in E.$$

Luego $\frac{1}{\alpha}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2$, lo cual implica que $\| \quad \|_1$ es equivalente $\| \quad \|_2$.

En consecuencia, en todo espacio vectorial E de dimensión finita existe una única topología. ■

COROLARIO 1.1.- Si E es un espacio vectorial normado, toda aplicación lineal biyectiva $f: \mathbb{R}^n \to E$ es un isomorfismo.

PRUEBA.

En efecto, si representamos por ρ la norma de E, $\rho \circ f$ es una norma sobre $\mathbb{R}^n$; esta norma define entonces la misma topología que la norma euclidiana, de donde se sigue el resultado. ■

TEOREMA 1.11.- Sea E un espacio normado cualquiera, toda aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \to E$ es continua.

PRUEBA.

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base canónica de $\mathbb{R}^n$, si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,;\; x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \{1,2,\ldots,n\}$$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \;\; y \;\; \|x\| = \underset{i\,=\,1}{max}\{|x_i|\}$$

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\| \|f(e_i)\|$$

$$\leq k\|x\|;\ k = \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|$$

por consiguiente f es continua. ■

DEFINICIÓN 1.30.- Sean E y F espacios normados y $f: E \to F$ una aplicación, f es un isomorfismo topológico y lineal de E en F si y sólo si f es un homeomorfismo lineal.

TEOREMA 1.12.- Si E es un espacio normado de dimensión finita n, entonces existe un isomorfismo topológico y lineal entre $\mathbb{R}^n$ y E, es decir existe un homeomorfismo lineal $\varphi: \mathbb{R}^n \to E$.

PRUEBA.

Sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ una base de E, si $x \in E$ entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\,; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, i \in \{1,2,\dots,n\}$$

definimos $\varphi: \mathbb{R}^n \to E$ tal que

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\,;\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

Probemos que φ es un homeomorfismo lineal:

i) Linealidad de φ

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\varphi(\alpha+\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)b_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i b_i+\beta_i b_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i b_i$$

$$=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta);\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$$

Sea $\alpha\in\mathbb{R}^n, k\in\mathbb{R}$:

$$\varphi(k\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(k\alpha_i)b_i$$

$$=k\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i$$

$$=k\varphi(\alpha);\ \forall\alpha\in\mathbb{R}^n;\forall k\in\mathbb{R}.$$

$\therefore\ \varphi$ es lineal.

ii) Probemos que φ es biyectiva

φ es inyectiva $\Leftrightarrow N(\varphi)=\{0\}$

Si $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in N(\varphi)$ entonces $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=0$

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i=0$$

Como

$B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ es una base de E entonces B es L.I.

Es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0,0,\dots,0) \in N(\varphi)$$

$$N(\varphi) = \{0\}.$$

Probemos que φ es suryectiva

En efecto si $x \in E \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, luego existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = x.$$

En consecuencia, $\varphi: \mathbb{R}^n \to E$ es lineal y biyectiva, lo que implica que existe $\varphi^{-1}: E \to \mathbb{R}^n$ que también es lineal y biyectiva.

iii) Probemos que $\varphi^{-1}: E \to \mathbb{R}^n$ es continua

φ es continua por el teorema anterior.

Probemos que $\varphi^{-1}: E \to \mathbb{R}^n$ es continua:

Si $u \in S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ entonces $u \neq 0$, $\varphi(u) \neq 0$.

Luego la aplicación compuesta $\| \ \| \circ \varphi: S(0,1) \to \mathbb{R}$ es continua en $S(0,1)$

$$(\| \ \| \circ \varphi)(u) = \|\varphi(u)\| > 0; \quad \forall u \in S(0,1)$$

existe $\alpha > 0$ talque $\|\varphi(u)\| > \alpha$.

Si $x \neq 0$, ponemos $u = \frac{x}{\|x\|}$ entonces $u \in S(0,1)$

$$\varphi(x) = \varphi(\|x\|u) = \|x\|\varphi(u)$$

$$\Rightarrow \|\varphi(x)\| = \|x\|\|\varphi(u)\| > \alpha\|x\|$$

$$\|\varphi(x)\| > \alpha\|x\|; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

si $x = 0$ entonces se cumple $\|\varphi(x)\| \geq \alpha\|x\|$ por lo tanto $\|\varphi(x)\| \geq \alpha\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Como $y = \varphi(x)$ entonces $x = \varphi^{-1}(y)$

$$\alpha\|\varphi^{-1}(y)\| \leq \|y\|; \quad \forall y \in E$$

$$\|\varphi^{-1}(y)\| \leq \beta\|y\|; \ \beta = \frac{1}{\alpha}, \forall y \in E$$

φ^{-1} es continua.

Por consiguiente de **i), ii)** y **iii)** φ es un homeomorfismo lineal. ∎

OBSERVACIÓN.- Sean E y F espacios normados si $f: E \to F$ es un homeomorfismo lineal y (x_n) es una sucesión de Cauchy en E entonces $\big(f(x_n)\big)$ es una sucesión de Cauchy en F.

TEOREMA 1.13.- Si E es un espacio normado de dimensión finita entonces E es un espacio de Banach.

PRUEBA.

Sea (y_n) una suceson de Cauchy en E.

Consideremos el homeomorfismo lineal $\varphi: \mathbb{R}^n \to E$ del teorema anterior $\varphi^{-1}: E \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo lineal

$\big(\varphi^{-1}(y_n)\big) = x_n$ sucesión en $\mathbb{R}^n$.

Como $\mathbb{R}^n$ es completo entonces $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\big(\varphi^{-1}(y_n)\big) = x_n \to x$$

$$\Rightarrow y_n = \varphi(x_n) \to \varphi(x) = y \in E$$

$$\Rightarrow y_n \to y.$$

Por consiguiente E es un espacio de Banach. ∎

TEOREMA 1.14.- Si E es un espacio normado de dimensión finita, F un espacio normado cualquiera y $f: E \to F$ lineal entonces f es continua.

PRUEBA.

Si $\varphi: \mathbb{R}^n \to E$ es el homeomorfismo lineal del teorema 1.12

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{f} F$$

Resulta que $f \circ \varphi: \mathbb{R}^n \to F$ es lineal y luego $f \circ \varphi$ es continua

$$E \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{(f\circ\varphi)} F$$

Por otro lado $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ es continua. ∎

NOTAS:

1) Se obtiene resultados análogos a los teoremas 1.12 y 1.13 para los espacios vectoriales complejos; $\mathbb{C}^n$ juega entonces el papel de $\mathbb{R}^n$.

2) Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita, $dim\, E = m$, $dim\, F = n$. La elección de una base de E y una base de F identifica al espacio vectorial $\mathcal{L}(E; F)$ con el espacio vectorial de las matrices de n filas y m columnas (matrices cuyos elementos pertenecen al cuerpo base). La dimensión de $\mathcal{L}(E; F)$ es igual al producto mn.

3) Cuando E y F tienen la misma dimensión finita n, y se identifica $\mathcal{L}(E; F)$ al espacio de las matrices de n filas y n columnas, se sabe expresar que una matriz f es invertible: La condición es que $det\, f \neq 0$. Por ser continuo la $f \mapsto det\, f$ de $\mathcal{L}(E; F)$ en $\mathbb{R}$ (o bien $\mathbb{C}$) es abierta la imagen reciproca del complemento de 0.

1.5 APLICACIONES MULTILINEALES Y CONTINUAS.

1.5.1 APLICACIONES BILINEALES Y CONTINUAS.

DEFINICIÓN 1.31.- Sean E_1, E_2 y F espacios normados y sea $E_1 \times E_2$ el espacio normado producto provisto de la norma uniforme. La aplicación $f: E_1 \times E_2 \to F$ es bilineal o $2 - lineal$, si para cualquier $x_1, y_1 \in E_1$; $x_2, y_2 \in E_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene:

1) $f(x_1 + y_1, x_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, x_2)$
$f(\alpha x_1, x_2) = \alpha f(x_1, x_2)$.

Es decir, la aplicación parcial $f_{x_2}: E_1 \to F$
$$x_1 \mapsto f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$$

es lineal para todo $x_2 \in E_2$ (fijo) y se llama linealidad en la primera variable.

2) $f(x_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(x_1, y_2)$
$f(x_1, \alpha x_2) = \alpha f(x_1, x_2)$.

Es decir, la aplicación parcial $f_{x_1}: E_2 \to F$
$$x_2 \mapsto f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2)$$

es lineal para todo $x_1 \in E_1$ (fijo) y se llama linealidad en la segunda variable.

Se cumple que $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0,\ x_1 \in E_1$ y $x_2 \in E_2$.

En el caso en que $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, tenemos el caso de una forma bilineal o funcional bilineal.

En lo que sigue, salvo mención expresa de lo contrario, $E_1 \times E_2$ denotará el espacio normado producto provisto de la norma uniforme.

$$\|(x_1, x_2)\|_u = max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}.$$

DEFINICIÓN 1.32.- Sean E_1, E_2, $E_1 \times E_2$ y F espacios normados. La aplicación $f: E_1 \times E_2 \to F$ es continua en $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x_1, x_2) - (a_1, a_2)\|_u < \delta \text{ implica } \|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)\|_u < \varepsilon,$$

o equivalentemente:

$$\|x_1 - a_1\| < \delta \text{ y } \|x_2 - a_2\| < \delta \text{ implica } \|f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)\| < \varepsilon,$$

puesto que

$$\|(x_1, x_2) - (a_1, a_2)\|_u = \|(x_1 - a_1, x_2 - a_2)\|_u = max\{\|x_1 - a_1\|, \|x_2 - a_2\|\}.$$

O equivalentemente:

La aplicación $f: E_1 \times E_2 \to F$ es continua en $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$, si y sólo si, para toda sucesión $(x_n, y_n) \to (a_1, a_2)$ en $E_1 \times E_2$ se tiene que la sucesión $\left(f(x_n, y_n)\right) \to f(a_1, a_2)$.

DEFINICIÓN 1.33.- Sean E_1, E_2, $E_1 \times E_2$ y F espacios normados y $f: E_1 \times E_2 \to F$ es continua en $E_1 \times E_2$ si y sólo si, f es continua para todo $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$.

COROLARIO 1.2.- Sea F un espacio normado. Toda aplicación bilineal $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to F$, definida en un par de espacios euclidianos, es continua.

PRUEBA.

Sean $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ y $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ las bases canonícas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Dados $x = \sum x_i e_i$ y $y = \sum y_j e_j'$, se tiene

$$f(x, y) = \textstyle\sum_{i,j} x_i y_i f\left(e_i, e_j'\right).$$

Sea k el mayor de los números $\left\|f\left(e_i, e_j'\right)\right\|$. Tomemos las normas en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$.

$$\|x\| = \textstyle\sum_i |x_i| \text{ y } \|y\| = \sum_j |y_j|,$$

$$\|x\|\|y\| = \sum_{i,j}|x_i||y_j|.$$

Podemos escribir:

$$\|f(x,y)\| \leq \sum_{i,j}|x_i|\,|y_j|\|f(e_i,e_j')\| \leq k\sum_{i,j}|x_i|\,|y_j| = k\|x\|\|y\|$$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}^m$ y cualquier $y \in \mathbb{R}^n$. Luego f es continua.■

DEFINICIÓN 1.34.- Sean E_1, E_2, $E_1 \times E_2$ y F espacios normados y $f: E_1 \times E_2 \to F$ una aplicación bilineal, f es acotada, si existe $M > 0$, tal que

$$\|f(x_1,x_2)\| \leq M\|x_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2};\ \forall(x_1,x_2) \in E_1 \times E_2.$$

De acuerdo a las definiciones anteriores de aplicaciones lineales y continuas, diremos que si una aplicación bilineal es continua equivale a decir que es acotada.

OBSERVACIONES:

1) Sean E_1, E_2, $E_1 \times E_2$ y F espacios normados y $f: E_1 \times E_2 \to F$ una aplicación bilineal y continua. Denotemos con $\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ al conjunto de todas las aplicaciones f bilineales y continuas de $E_1 \times E_2$ en F, o sea

$$\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F) = \{f: E_1 \times E_2 \to F;\ f\ \ bilineal\ y\ continua\}$$

2) $\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ es un espacio vectorial.

3) En $\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ definimos la norma:

$$\|f\| = sup\{\|f(x_1,x_2)\|;\ \|x_1\| = 1,\ \ \|x_2\| = 1\}.$$

4) Sean E_1, E_2, $E_1 \times E_2$ y $F \neq \{0\}$ espacios normados y $f: E_1 \times E_2 \to F$ una aplicación bilineal y continua, se cumple:

$$\|f\| = inf\{k > 0;\ \|f(x_1,x_2)\| \leq k\|x_1\|\|x_2\|, (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2\}$$

$$\|f\| = sup\{\|f(x_1,x_2)\|: \|x_1\| \leq 1,\ \ \|x_2\| \leq 1\}$$

$$\|f\| = sup\{\|f(x_1,x_2)\|: \|x_1\| < 1,\ \ \|x_2\| < 1\}$$

$$\|f\| = sup\left\{\frac{\|f(x_1,x_2)\|}{\|x_1\|\|x_2\|}: x_1 \neq 0,\ \ x_2 \neq 0\right\}.$$

5) $\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ es de Banach, si lo es F.

1.5.2 APLICACIONES MULTILINEALES Y CONTINUAS.

Las derivadas de orden superior son aplicaciones bilineales para la segunda derivada, trilineales para la tercera derivada y multilineales de orden n para la $n - esima\ derivada.$ Esta es la razón por la cual trataremos este tipo de aplicaciones con un poco más de detalle, por lo tanto nos abocaremos a desarrollar la noción de continuidad en este tipo de aplicaciones.

De la misma manera que en el caso de aplicaciones lineales, podemos generalizar estas a productos de espacios. El espacio $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ dotado de la norma

$$\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\| = max\{\|x_1\|_{E_1},\dots,\|x_n\|_{E_n}\}$$

es un espacio normado. El cual es un espacio de Banach, si y solamente si cada uno de los espacios E_k, $k = 1,\dots,n$ es también un espacio de Banach.

Equivalentemente:

Sean $E_1,\dots,E_n$ y F espacios vectoriales, una aplicación

$$f: E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$$

se denomina multilineal, si $\forall k \in [1,n]$ y $\forall a_i \in E_i (i \neq k)$, la aplicación parcial f_{x_k} de E_k en F:

$$f_{x_k}: E_1 \times \cdots \times E_{x_{k-1}} \times E_{x_{k+1}} \times \cdots \times E_n \to F,$$

definida por $f_{x_k}(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ es lineal, cuando se fijan todas las variables excepto una, f debe depender linealmente de la variable restante. Si así sucede, se verifica que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ si al menos uno de los x_i es nulo; en particular f se anula en el origen $(0, \dots, 0)$. Si f es multilineal, se tiene

$$f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = (\lambda_1 \cdots \lambda_n) f(x_1, \dots, x_n). \qquad (1.6)$$

TEOREMA 1.15.- Sean $E_1, \dots, E_n$, F espacios vectoriales normados, y sea una aplicación multilineal $f: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es continua en todo punto de $E_1 \times \cdots \times E_n$;

(b) f es continua en el origen $(0, \dots, 0) \in E_1 \times \cdots \times E_n$;

(c) $\|f(x_1, \dots, x_n)\|$ está acotada en el producto de bolas unidad

$$\|x_1\| \le 1, \dots, \|x_n\| \le 1.$$

PRUEBA.

(a)⇒(b) Es evidente.

(b)⇒(c) Obsérvese que si f es continua en el origen, la imagen reciproca de la bola unidad de f es un entorno de $(0, \dots, 0)$ en $E_1 \times \cdots \times E_n$, luego existe $r > 0$ tal que

$$\|x_i\| \le r \text{ para todo entero } i \in [1, n] \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\| \le 1.$$

teniendo en cuenta (1.6), se deduce que

$$\|x_i\| \le 1 \text{ para todo entero } i \in [1, n] \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\| \le {}^1/_{r^n},$$

lo que prueba (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que f satisface (c); sea $M > 0$ tal que

$$\|x_i\| \leq 1 \text{ para todo entero } i \in [1, n] \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq M$$

se tiene entonces, cualesquiera que sean las x_i:

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_n\| \tag{1.7}$$

demostremos que en estas condiciones f es continua en un punto arbitrario $(a_1, \dots, a_n)$, lo que probaría que (c) $\Rightarrow$ (a).

Formemos la diferencia

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ &= f(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n) + f(a_1, x_2 - a_2, x_3, \dots, x_n) \\ &+ \cdots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n). \end{aligned}$$

[La verificación es inmediata, puesto que f es función aditiva de cada variable considerada separadamente]. La norma del primer miembro esta mayorada por la suma de las normas de los términos del segundo miembro:

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)\| &\leq \|f(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n)\| + \|f(a_1, x_2 - a_2, x_3, \dots, x_n)\| \\ &+ \cdots + \|f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n)\| \end{aligned}$$

luego, teniendo en cuenta (1.7):

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)\| \leq M\|x_1 - a_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| + \\ M\|x_2 - a_2\| \cdot \|a_1\| \cdot \|x_3\| \dots \|x_n\| + \cdots + M\|x_n - a_n\| \cdot \|a_1\| \dots \|a_{n-1}\| \end{aligned} \tag{1.8}$$

supongamos $\|x_i - a_i\| \leq \varepsilon$ para todo i; entonces $\|x_i\| \leq \|a_i\| + \varepsilon$, por lo que existe un número $A > 0$ tal que

$\|x_i - a_i\| \leq \varepsilon$ para todo entero $i \in [1, n]$ entonces $\|x_i\| \leq A$ para todo i.

La desigualdad (1.8) implica:

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)\| \leq MA^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i - a_i\|\right) \leq nMA^{n-1}\varepsilon \tag{1.9}$$

puesto que $\|x_i - a_i\| \leq \varepsilon$ para todo i. Entonces (1.9) muestra que $f(x_1, \dots, x_n)$ tiende hacia $f(a_1, \dots, a_n)$ cuando de manera simultanea x_1 tiende hacia a_1y asi sucesivamente hasta x_n tiende hacia a_n, luego f es continua en el punto $(a_1, \dots, a_n)$, y la demostración queda terminada.■

NOTACIÓN.- Se representará por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales continuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ en F. Para $f \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ se escribirá

$$\|f\| = sup\|f(x_1, \dots, x_n)\|$$

cuando los $x_1, \dots, x_n$ recorren las bolas unidad

$$\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_n\| \leq 1.$$

Se tiene entonces, según (1.7):

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|f\|\|x_1\| \cdots \|x_n\| \tag{1.10}$$

y $\|f\|$ es el menor de los $M > 0$ tales que se verifica (1.7). ■

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, se escribe también $\mathcal{L}^n(E; F)$ en vez de $\mathcal{L}(E, \dots, E; F)$, El espacio $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ provisto de (1.10) es un espacio vectorial normado.

Si F es completo, entonces $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ es un espacio completo. Esta afirmación se demuestra exactamente como para el caso lineal, lo que sigue a continuación es la base para la interpretación de la segunda derivada de una función como aplicación bilineal.

1.5.3 LA ISOMETRÍA NATURAL $\mathcal{L}(E,F;G) \approx \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G))$.

Primero definimos una aplicación

$$\varphi: \mathcal{L}(E,F;G) \to \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G))$$

del siguiente modo: Sea $f \in \mathcal{L}(E,F;G)$; una función de dos variables $f(x,y)$ donde $x \in E$ e $y \in F$; fijada x, la aplicación parcial $f_x: F \to G$ definida por: $f_x(y) = f(x,y)$ es una aplicación lineal de F en G donde:

$$\|f_x(y)\| = \|f(x,y)\| \leq \|f\|\|x\|\|y\|,$$

y por tanto

$$\|f_x\| \leq \|f\|\|x\| \tag{1.11}$$

lo que prueba que f_x es una aplicación lineal continua (puesto que su norma es finita). Entonces $g: E \to \mathcal{L}(F;G)$ definida por $g(x) = f_x$ es una aplicación, donde g es lineal. Además (1.11) puede escribirse como:

$$\|g(x)\| \leq \|f\|\|x\|,$$

luego g es continua, y $\|g\| \leq \|f\|$. Hemos asociado así a toda $f \in \mathcal{L}(E,F;G)$ un $g \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G))$, que por definición será $\varphi(f)$. Ello define la aplicación φ. Por tanto φ es lineal. Además, puesto que φ transforma f en g y que $\|g\| \leq \|f\|$, la aplicación lineal φ es de norma menor igual que 1.

$$\|\varphi\| \leq 1$$

Vamos ahora a definir una aplicación en el sentido inverso

$$\psi: \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G)) \to \mathcal{L}(E,F;G).$$

Dada la aplicación lineal continua

$$g: E \to \mathcal{L}(F;G).$$

Para $x \in E$, $g(x)$ es una aplicación lineal continua de F en G; luego, para $x \in E$, $y \in F$, f es una aplicación bilineal

$$\begin{aligned} f: E \times F &\to G \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = (g(x))(y) \end{aligned}$$

Además

$$\|g(x)\| \leq \|g\|\|x\|,$$

luego

$$\|f(x, y)\| = \|(g(x))(y)\| \leq \|g\|\|x\|\|y\|,$$

lo que prueba que f es bilineal continua y que

$$\|f\| \leq \|g\|.$$

Así cada $g \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$ define una aplicación $f \in \mathcal{L}(E, F; G)$, por definición f serà $\psi(g)$. De la definición de ψ se sigue que ψ es lineal. Además ψ transforma g en f, $\|f\| \leq \|g\|$ y la aplicación lineal ψ es de norma menor igual que 1. También las aplicaciones φ y ψ son reciprocas una de la otra, por tanto $\psi \circ \varphi$ es la aplicación identidad de $\mathcal{L}(E \times F; G)$, talque

$$1 = \|\psi \circ \varphi\| \leq \|\psi\|\|\varphi\|,$$

y como

$$\|\varphi\| \leq 1, \qquad \|\psi\| \leq 1,$$

se deduce que

$$\|\varphi\| = 1, \qquad \|\psi\| = 1.$$

Como consecuencia φ conserva la norma y asi es una isometría.

TEOREMA 1.16.- Si E_1, E_2 y F son espacios normados entonces existe un isomorfismo isométrico entre los espacios normados $\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ y $\mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big)$, es decir:

$$\mathcal{L}(E_1 \times E_2; F) \approx \mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big).$$

PRUEBA.

Si $f \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ entonces $f: E_1 \times E_2 \to F$ es bilineal y continúa.

Sea $x_1 \in E_1$ y $x_2 \in E_2$. Fijemos $x_1 \in E_1$.

Como f es bilineal y continua, la aplicación parcial $f_{x_1}: E_2 \to F$ tal que

$$f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2);\ \forall\, x_2 \in E_2 \text{ es lineal y continua.}$$

En efecto, probemos que f_{x_1} es lineal.

$$f_{x_1}(x_2 + y_2) = f(x_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(x_1, y_2) = f_{x_1}(x_2) + f_{x_1}(y_2)\ \ \forall\, x_2 \in E_2$$

$$f_{x_1}(\alpha x_2) = f(x_1, \alpha x_2) = \alpha f(x_1, x_2) = \alpha f_{x_1}(x_2).$$

Probemos que f_{x_1} es continua.

$$\|f_{x_1}(x_2)\| = \|f(x_1, x_2)\| \leq \|f\|\|x_1\|\|x_2\| = k\|x_2\|;\ \ \forall\, x_2 \in E_2.$$

Así f_{x_1} es acotada y por lo tanto continua en E_2, es decir

$$f_{x_1} \in \mathcal{L}(E_2, F).$$

Además $\|f_{x_1}\| \leq \|f\|\|x_1\|$.

Consideremos ahora la aplicación $\bar{f}: E_1 \to \mathcal{L}(E_2, F)$ tal que $\bar{f}(x_1) = f_{x_1};\ \forall\, x_1 \in E_1$.

Probemos que $\bar{f}$ es lineal y continua.

En efecto, veamos la linealidad de $\bar{f}$

$$[\bar{f}(x_1)](x_2) = f_{x_1}(x_2)$$

$$[\bar{f}(x_1 + y_1)](x_2) = f_{x_1+y_1}(x_2) = f(x_1 + y_1, x_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, x_2)$$

$$= f_{x_1}(x_2) + f_{y_1}(x_2) = [\bar{f}(x_1)](x_2) + [\bar{f}(y_1)](x_2), \forall\, x_2 \in E_2$$

de donde $\bar{f}(x_1 + y_1) = \bar{f}(x_1) + \bar{f}(y_1)$.

Similarmente, se prueba que $\bar{f}(\alpha x_1) = \alpha \bar{f}(x_1)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$[\bar{f}(\alpha x_1)](x_2) = \alpha f_{x_1}(x_2)$$

$$[\bar{f}(\alpha x_1)](x_2) = f_{\alpha x_1}(x_2) = f(\alpha x_1, x_2)$$

$$= \alpha f(x_1, x_2) = \alpha f_{x_1}(x_2) = \alpha[\bar{f}(x_1)](x_2), \forall\, x_2 \in E_2, \alpha \in \mathbb{R}$$

de donde $\bar{f}(\alpha x_1) = \alpha \bar{f}(x_1)$.

Por consiguiente $\bar{f}$ es lineal

Veamos que $\bar{f}$ es continua

$\|\bar{f}(x_1)\| = \|f_{x_1}\| \leq \|f\|\|x_1\|$, $\forall\, x_1 \in E_1$, lo cual implica que $\bar{f}$ es continua en E_1. En consecuencia $\bar{f} \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$. Además $\|\bar{f}\| \leq \|f\|$.

Así queda definida una aplicación:

$\varphi: \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F) \to \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$ tal que $\varphi(f) = \bar{f}$, $\forall\, f \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$. Además $\|\varphi(f)\| = \|\bar{f}\| \leq \|f\|$, es decir,

$$[[\varphi(f)](x_1)](x_2) = [\bar{f}(x_1)](x_2) = f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2).$$

Probemos que φ es un isomorfismo isométrico, es decir, es biyectiva, lineal e isometría.

- φ es lineal

  Si $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F) \Rightarrow f_1 + f_2 \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$

$$\varphi(f_1 + f_2) \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, F)), \qquad \varphi(f_1 + f_2)(x_1) \in \mathcal{L}(E_2, F)$$

$$[\varphi(f_1 + f_2)(x_1)](x_2) = (f_1 + f_2)_{x_1}(x_2) = (f_1 + f_2)(x_1, x_2)$$

$$= f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2)$$

$$= [\varphi(f_1)(x_1)](x_2) + [\varphi(f_2)(x_1)](x_2), \forall\, x_2 \in E_2$$

Lo que implica $\varphi(f_1 + f_2)(x_1) = \varphi(f_1)(x_1) + \varphi(f_2)(x_1), \forall\, x_1 \in E_1$

así $\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$.

- φ es una isometría

  Se sabe que $\|\varphi(f)\| \le \|f\|, \forall\, f \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, F)$.

  Por otra parte,

$$[\varphi(f)(x_1)](x_2) = \left(\bar{f}(x_1)\right)(x_2) = f(x_1, x_2), \forall\, x_1 \in E_1 \; y \; \forall\, x_2 \in E_2$$

$$\|f(x_1, x_2)\| = \|[\varphi(f)(x_1)](x_2)\| \le \|\varphi(f)\|\|x_1\|\|x_2\| \Rightarrow \|f\| \le \|\varphi(f)\|.$$

En consecuencia $\|\varphi(f)\| = \|f\|$.

Como φ es una isometría y lineal, entonces φ es inyectiva.

- φ es suryectiva

$$\varphi: \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F) \to \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$$

Para todo $g \in \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$, debe existir $f \in \varphi: \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ tal que $\varphi(f) = g$.

Definamos $f(x_1, x_2) = \big(g(x_1)\big)(x_2)$, $\forall\, x_1 \in E_1$ y $\forall\, x_2 \in E_2$, resulta que f es bilineal. Además es continua, puesto que:

$$\|f(x_1, x_2)\| = \|[g(x_1)](x_2)\| \leq \|g(x_1)\|\|x_1\|\|x_2\| \leq \|g\|\|x_1\|\|x_2\|,$$

$\forall\, x_1 \in E_1$ y $\forall\, x_2 \in E_2$, es decir, $f \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$.

Finalmente,

$\big[\big(\varphi(f)\big)(x_1)\big](x_2) = f(x_1, x_2) = [g(x_1)](x_2), \forall\, x_1 \in E_1$ y $\forall\, x_2 \in E_2 \Rightarrow \varphi(f) = g$, lo cual implica φ es suryectiva.

En consecuencia, existe $\varphi : \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F) \to \mathcal{L}\big(E_1; \mathcal{L}(E_2; F)\big)$ tal que φ es un isomorfismo isométrico, lo cual nos permite escribir:

$$\mathcal{L}(E_1 \times E_2, F) \approx \mathcal{L}\big(E_1, \mathcal{L}(E_2, F)\big). \blacksquare$$

CAPÍTULO II

APLICACIONES DIFERENCIABLES Y EL TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS

2.1 APLICACIONES DIFERENCIABLES.

DEFINICIÓN 2.1.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E. Las aplicaciones $f_1: U \to F$ y $f_2 : U \to F$ son tangentes en un punto $a \in U$, si para $r > 0$ suficientemente pequeño (puesto que U es abierto):

$$m(r) = \sup_{\|x-a\| \leq r} \|f_1(x) - f_2(x)\|,$$

satisface

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ r > 0}} \frac{m(r)}{r} = 0, \tag{2.1}$$

condición que se escribe también

$$m(r) = o(r). \tag{2.2}$$

donde $o: \mathbb{R} \to \{0\}$ es la aplicación nula.

Se tiene en particular la noción de f tangente a 0 en el punto a, además la condición (2.2) implica que la función $f_1 - f_2$ es continua en el punto donde toma el valor 0. Se tiene entonces: dos funciones tangentes en a toman el mismo valor en dicho punto y si una de ellas es continua en a, también la es la otra.

DEFINICIÓN 2.2.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E. La aplicación $f: U \to F$ es diferenciable en el punto $a \in U$ si se verifican las siguientes condiciones:

(I) f es continua en el punto a.

(II) Existe una aplicación lineal $g: E \to F$ tal que las aplicaciones $f: U \to F$ y $g: E \to F$ son tangentes en el punto a.

Esta condición se expresa del siguiente modo:

$$\|f(x) - f(a) - g(x-a)\| = o(\|x-a\|) \tag{2.3}$$

Si f es diferenciable en el punto a, la única aplicación lineal g que se define es continua según la relación anterior. Un elemento de $\mathcal{L}(E;F)$ será representado por $f'(a)$ y se llama la derivada de la aplicación f en el punto a.

La definición que sigue es equivalente a la anterior:

f es diferenciable en el punto $a \in U$, si existe $g \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que se verifica (2.3). En efecto, la continuidad de g implica entonces la continuidad de f en el punto a.

La relación (2.3) con la notación $f'(a)$ se escribe:

$$\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\| = o(\|x-a\|). \tag{2.4}$$

DEFINICIÓN 2.3.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E. La aplicación $f: U \to F$ es diferenciable en U, si f es diferenciable en todo punto de U.

DEFINICIÓN 2.4.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E. La aplicación $f: U \to F$ es diferenciable con continuidad, o también de clase C^1, si:

i) f es diferenciable en U, es decir diferenciable en todo punto de U.

ii) La aplicación derivada $f': U \to \mathcal{L}(E;F)$ es continua.

NOTA. $\mathcal{L}(E;F)$ es un espacio de Banach, luego U y $\mathcal{L}(E;F)$ son espacios topológicos.

A continuación veamos las derivadas en los siguientes casos:

Caso 1: Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de la recta y $f: I \to \mathbb{R}$ una aplicación.

Si $a \in I$ entonces $f'(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$

$$f(a+t) = \underbrace{f(a) + f'(a)t}_{\substack{\text{aproximación lineal} \\ \text{de } f \text{ en } a}} + \underbrace{r(t)}_{\substack{\text{resto} \\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{r(t)}{t}=0}}$$

Caso 2: Si I es un intervalo de la recta y $\alpha: I \to \mathbb{R}^m$ una aplicación tal que $\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x))$ donde $\alpha_i: I \to \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, m$.

Si $a \in I$ entonces $\alpha'(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\alpha(a+t)-\alpha(a)}{t} \in \mathbb{R}^m$

$$\alpha'(a) = (\alpha_1'(a), \dots, \alpha_m'(a))$$

$$\alpha(a+t) = \underbrace{\alpha(a) + \alpha'(a)t}_{\substack{\text{aproximación lineal} \\ \text{de } \alpha \text{ en } a}} + \underbrace{r(t)}_{\substack{\text{resto} \\ \lim\limits_{t\to 0}\frac{r(t)}{t}=0}}$$

Caso 3: Si U es un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $f: U \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Si $a \in U, a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_m)}{t}$$

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right) \quad \textit{vector gradiente de } f \textit{ en } a$$

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle}_{\substack{\text{aproximación lineal} \\ \text{de } f \text{ en } a}} + \underbrace{r(h)}_{\substack{\text{resto} \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|}=0}}$$

Caso 4: Si U es un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $f: U \to \mathbb{R}^p$ una aplicación tal que

$$f(x) = f\left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\right)$$
$$= \left(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_p(x_1, \dots, x_m)\right)$$

Si $a \in U, a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_m)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)\right)$$

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}_{p \times m}$$

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + f'(a)h}_{\substack{\text{aproximación lineal} \\ \text{de } f \text{ en } a}} + \underbrace{r(h)}_{\substack{\text{resto} \\ \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0}}$$

NOTA. Para cada caso anterior, denotaremos con $T(x)$ la aproximación lineal.

Caso 1: $T(x) = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}$.

Caso 2: $T(x) = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}^m$.

Caso 3: $T(x) = T(x_1, x_2, \dots, x_m) = a(x_1, x_2, \dots, x_m) + b;\ a, b \in \mathbb{R}$.

Caso 4: $T(x) = Ax + b; A \in M_{p \times m}, b \in \mathbb{R}^p$.

2.2 DERIVADA DE UNA APLICACIÓN COMPUESTA Y DERIVADAS DE APLICACIONES PARTICULARES.

2.2.1 DERIVADA DE UNA APLICACIÓN COMPUESTA.

DEFINICIÓN 2.5.- Sean E, F y G espacios de Banach y sean $U \subset E$ y $V \subset F$ abiertos. Sean $f: U \to F$ y $g: V \to G$ aplicaciones continuas en $a \in U$ y $b = f(a) \in V$ y $f^{-1}(V) \subset U$ abierto de E que contiene a a. La aplicación compuesta $g \circ f: U \to G$ se define como:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

TEOREMA 2.1.- Sean E, F y G espacios de Banach y sean $U \subset E$ y $V \subset F$ abiertos de E y F respectivamente. Si $f: U \to F$ es diferenciable en el punto a y $g: V \to G$ es diferenciable en el punto $b = f(a)$, entonces $h = g \circ f$ es diferenciable en el punto a, y se verifica:

$$h'(a) = g'(b) \circ f'(a). \quad (2.5)$$

Dicho de otro modo, la aplicación lineal $h'(a): E \to G$ es la aplicación compuesta de las aplicaciones lineales $f'(a): E \to F$ y $g'(f(a)): F \to G$.

PRUEBA.

Por hipótesis:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varphi(x - a), \quad (2.6)$$

donde φ es una aplicación tangente a 0 en el origen tal que:

$$\|\varphi(x - a)\| = o(\|x - a\|)$$

igualmente, se tiene por hipótesis

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y - b) + \psi(y - b), \quad (2.7)$$

donde ψ es una aplicación tangente a 0 en el origen tal que:

$$\|\psi(y-b)\| = o(\|y-b\|).$$

Calculemos $h(x) - h(a) = g(f(x)) - g(f(a))$

En (2.7) reemplazando, y por $f(x)$ y b por $f(a)$, se tiene:

$$h(x) - h(a) = g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \psi(f(x) - f(a))$$

En esta relación, reemplazamos $f(x) - f(a)$ por su valor obtenido de (2.6), teniendo en cuenta el hecho de que $g'(f(a)): F \to G$ es una función lineal:

$$h(x) - h(a) = (g'(f(a)) \circ f'(a))(x-a) + g'(f(a)) \cdot \varphi(x-a) + \psi(f(x) - f(a)).$$

Para demostrar que h es diferenciable en el punto a, y que tiene por derivada $g'(f(a)) \circ f'(a)$ es suficiente probar que el segundo y el tercer término del miembro de la derecha son tangentes a cero, es decir:

$$\|g'(f(a)) \cdot \varphi(x-a)\| = o(\|x-a\|), \tag{2.8}$$

$$\|\psi(f(x) - f(a))\| = o(\|x-a\|). \tag{2.9}$$

Como g es una aplicación lineal, (2.8) resulta de la acotación de g

$$\|g'(f(a)) \cdot \varphi(x-a)\| \leq \|g'(f(a))\| \cdot \|\varphi(x-a)\| = o(\|x-a\|);$$

Como f es una aplicación lineal, (2.9) resulta de la acotación de f y de reemplazar y por $f(x)$ y b por $f(a)$, es decir:

$$\begin{aligned}\|\psi(f(x) - f(a))\| &= \|\psi(y-b)\| = o(\|y-b)\|) \\ &= o(\|f(x) - f(a))\|) = o(\|f(x-a)\|) \\ &\leq o\|f\| \cdot \|x-a\| = o(\|x-a\|)\end{aligned}$$

Por consiguiente el teorema 2.1 queda demostrado. ∎

2.2.2 DERIVADA DE UNA APLICACIÓN BILINEAL CONTINUA.

Vamos a presentar ahora la derivada de una aplicación bilineal continua.

$$f: E_1 \times E_2 \to F.$$

Consideremos E_1, E_2 y F espacios de Banach. Primero, debemos definir en $E_1 \times E_2$ una estructura de espacio de Banach. Para ello, se considera previamente en $E_1 \times E_2$ la estructura de espacio vectorial, producto de los espacios vectoriales E_1 y E_2; las operaciones de espacio vectorial están definidas por las fórmulas:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

en particular, $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$. Falta solamente precisar la norma elegida sobre el espacio vectorial $E_1 \times E_2$; escribiremos

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|. \tag{2.10}$$

Se prueba que efectivamente es una norma en $E_1 \times E_2$ y que $E_1 \times E_2$ es completo puesto que E_1 y E_2 son completos.

TEOREMA 2.2.- Sean E_1, E_2 y F espacios de Banach. Si $f: E_1 \times E_2 \to F$ es bilineal continua entonces f es diferenciable, y su derivada en el punto (a_1, a_2) donde $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, está definida por:

$$f'(a_1, a_2) \cdot (h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2); \tag{2.11}$$

donde $h_1 \in E_1$ y $h_2 \in E_2$; el primer miembro designa el valor de

$f'(a_1, a_2) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2; F)$ sobre el vector $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$.

PRUEBA.

Como $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, h_2)$, entonces es suficiente probar que

$$\|f(h_1, h_2)\| = o(\|(h_1, h_2)\|).$$

Pero $\|(h_1, h_2)\| = \|h_1\| + \|h_2\|$, mientras que

$$\|f(h_1, h_2)\| \leq \|f\| \cdot \|h_1\| \cdot \|h_2\| \leq \|f\| \cdot (\|h_1\| + \|h_2\|)^2.$$

$$(\|h_1\| + \|h_2\|)^2 = 0(\|h_1\| + \|h_2\|). \blacksquare$$

GENERALIZACIÓN. En lugar de un producto de dos espacios de Banach E_1 y E_2, consideremos el producto $E_1, E_2, \dots, E_n$ espacios de Banach dado por:

$$E_1 \times \cdots \times E_n,$$

siendo n un entero cualquiera. Sobre este producto se toma la estructura de espacio vectorial producto, y la norma

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|,$$

que define la topología producto. Sea

$$f: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$$

una aplicación multilineal continua. Entonces el teorema 2.2 se generaliza:

f es diferenciable, y se tiene

$$f'(a_1, \dots, a_n) \cdot (h_1, \dots, h_n) = f(h_1, a_2, \dots, a_n) + f(a_1, h_2, a_3, \dots, a_n) + \cdots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n). \tag{2.12}$$

2.2.3 APLICACIONES CON VALORES EN UN PRODUCTO DE ESPACIOS DE BANACH

Ahora supongamos que el espacio F sea el producto de un número finito k de espacios de Banach:

$$F = F_1 \times \cdots \times F_k.$$

Introduzcamos las siguientes notaciones: para cada entero i tal que $1 \leq i \leq k$, sea

$$p_i : F \to F_i$$

la aplicación de proyección del producto sobre su $i - ésimo$ factor, y sea

$$u_i : F_i \to F$$

la inyección definida por:

$$u_i(x_i) = (0, \dots, x_i, \dots, 0)$$

[$cero$ en todos las posiciones salvo en la $i - ésima$]. Se prueba que p_i y u_i son aplicaciones lineales continuas que satisfacen a las relaciones:

$$p_i \circ u_i = 1_{F_i} (aplicación\ idéntica\ de\ F_i) \tag{2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \circ p_i = 1_F\ (aplicación\ idéntica\ de\ F).$$

PROPOSICIÓN 2.1.- Con las notaciones en (2.13), sea $f: U \to F$ una aplicación continua, donde U es un abierto de un espacio de Banach E. Para que f sea diferenciable en el punto $a \in U$, es necesario y suficiente que para cada $1 \leq i \leq k$, la función $f_i = p_i \circ f: U \to F_i$ sea diferenciable en el punto a. Entonces

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ f_i'(a). \tag{2.14}$$

PRUEBA.

Las aplicaciones lineales p_i y u_i son diferenciables. Luego si f es diferenciable, la aplicación compuesta $p_i \circ f$ es diferenciable (teorema 2.1) y

$$f_i'(a) = p_i \circ f'(a) \in \mathcal{L}(E; F_i).$$

Recíprocamente, supongamos que f_i' sea diferenciable en el punto a, cualquiera que sea el entero i $(1 \leq i \leq k)$; entonces la segunda relación de (2.13) nos da

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \circ p_i \circ f = f$$

es decir:

$$f = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ f_i,$$

luego (teorema 2.1 y la linealidad de la derivada) f es diferenciable en el punto a, y

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ f_i'(a). \blacksquare$$

NOTAS:

1) Para que la aplicación $f': U \to \mathcal{L}(E; F)$ sea continua, es necesario y suficiente que $f_i': U \to \mathcal{L}(E; F_i)$ sea continua para cada i.

2) La proposición anterior se aplica fundamentalmente cuando $F = \mathbb{R}^k$ (o bien $\mathbb{C}^k$); se tiene entonces $F_1 = \cdots = F_k = \mathbb{R}$ (o bien $\mathbb{C}$). Conocer $f: U \to \mathbb{R}^k$ equivale a conocer k funciones numéricas $f_i: U \to \mathbb{R}$ (a saber $f_i = p_i \circ f$); para que f sea diferenciable, es necesario y suficiente que cada f_i sea

diferenciable, y entonces $f'(a): E \to \mathbb{R}^k$ es la aplicación lineal tal que $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_k'(a))$.

3) Sea $f: E_1 \times E_2 \to F$ una aplicación bilineal continua y sean $u: U \to E_1$ y $v: V \to E_2$ aplicaciones continuas. Definimos $w: U \to F$ tal que

$$w(x) = f\big(u(x), v(x)\big) \tag{2.15}$$

PROPOSICIÓN 2.2.- si u y v de la nota **3)** anterior son diferenciables en el punto $a \in U$; entonces w es diferenciable en $a \in U$ y $w'(x)$ está dada por:

$$\big(w'(a)\big)(h) = f\Big(\big(u'(a)\big)h, v(a)\Big) + f\big(u(a), \big(v'(a)\big)h\big) \text{ para } h \in E \tag{2.16}$$

PRUEBA.

De la proposición 2.1, la aplicación $w: U \to E_1 \times E_2$ es diferenciable en el punto a, y su derivada es la aplicación lineal $w'(a): U \to E_1 \times E_2$ dada por:

$$\big(w'(a)\big)(h) = \Big(\big(u'(a)\big)h, \big(v'(a)\big)h\Big), h \in U$$

Por otra parte, la aplicación $f: E_1 \times E_2 \to F$ es diferenciable en todo punto de $E_1 \times E_2$, puesto que es bilineal continua (teorema 2.2). La aplicación w definida por (2.15.) es la aplicación compuesta

$$U \xrightarrow{(u,v)} E_1 \times E_2 \xrightarrow{f} F;$$

luego por el teorema 2.1 esta composición de aplicaciones es diferenciable en el punto a, y su derivada es igual a la compuesta de las aplicaciones derivadas.

Explicitemos esta derivada:

Para ello, en la relación (2.11) $f'(a_1, a_2) \cdot (h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)$ debe reemplazarse a_1 por $u(a)$, a_2 por $v(a)$, h_1 por $\big(u'(a)\big)h$ y h_2 por $\big(v'(a)\big)h$, es decir:

$$f'(u(a), v(a))h = f\left(\left(u'(a)\right)h\,, v(a)\right) + f\left(u(a), \left(v'(a)\right)h\right)$$

Así se obtiene entonces

$$\left(w'(a)\right)(h) = f\left(\left(u'(a)\right)h, v(a)\right) + f\left(u(a), \left(v'(a)\right)h\right)$$

Con lo que la proposición queda demostrada.■

2.3 CASO EN QUE U ES UN ABIERTO DE UN PRODUCTO DE ESPACIOS DE BANACH.

Sean $E_1, E_2, \dots, E_n$ espacios de Banach. Supongamos que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, y U es un abierto de E. Sea $f: U \to F$ una aplicación continua. Para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, consideremos la inyección $\lambda_i: E_i \to E$ definida por:

$$\lambda_i(x_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

La aplicación compuesta $f \circ \lambda_i$ está definida en el abierto $(\lambda_i)^{-1}(U) \subset E_i$, que contiene $a_i \in E_i$; esta aplicación se denomina $i-esima$ aplicación parcial en el punto a.

PROPOSICIÓN 2.3.- Sean $E_1, E_2, \dots, E_n$ espacios de Banach, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ espacio producto, U un abierto de E y $f: U \to F$ una aplicación continua. Para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, consideremos la inyección $\lambda_i: E_i \to E$ definida por:

$$\lambda_i(x_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Si f es diferenciable en el punto a, entonces para cada entero i $(1 \leq i \leq n)$, la aplicación parcial $f \circ \lambda_i$ es diferenciable en el punto a_i. Se representa por $f'_{x_i}(a)$, o $\partial f / \partial x_1\,(a)$, o $f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n)$ o $\partial f / \partial x'_i\,(a_1, \dots, a_n)$ la derivada de esta aplicación parcial en el punto a. Tal aplicación es un elemento de $\mathcal{L}(E_i; F)$, llamado también la derivada parcial de f con respecto a x_i. Se tiene además

$$\big(f'(a)\big)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(f'_{x_i}(a)\right)(h_i), para\ h_1 \in E_1, \dots, h_n \in E_n. \tag{2.17}$$

PRUEBA.

Representemos por $u_i: E_i \to E$ la inyección canónica, definida por:

$$u_i(x_i) = (0, \dots ,0, x_i, 0, \dots ,0).$$

u_i es lineal continua.

Se tiene evidentemente

$$\lambda_i(x_i) = a + u_i(x_i - a_i); \quad \lambda_i(a) = a; \tag{2.18}$$

de donde

$$\lambda'_i(x_i) = u_i, \forall\, x_i \in E_i \tag{2.19}$$

Si f es diferenciable en el punto a, $f \circ \lambda_i$ es diferenciable en el punto a_i (teorema 2.1), y $(f \circ \lambda_i)' = f'(a) \circ u_i$ así $f'_{x_i}(a)$ existe y es precisamente $f'(a) \circ u_i$.

La relación (2.17) resulta de:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \circ p_i = 1_E\ (aplicación\ idéntica\ de\ E),$$

de (2.13) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} (f'(a) \circ u_i) \circ p_i = f'(a), \tag{2.20}$$

que no es sino otro modo de escribir (2.17), por consiguiente la proposición queda demostrado. ■

NOTA. Contrariamente a lo que ocurría con la proposición 2.1, la proposición 2.3 no afirma que si las derivadas parciales $f'_{x_i}(a)$ existen, la derivada $f'(a)$ existe también.

OBSERVACIONES:

a) Supongamos ahora que f sea diferenciable en todo punto de U, y sea

$$f': U \to \mathcal{L}(E; F)$$

la aplicación derivada. Entonces la aplicación "derivada parcial"

$$f': U \to \mathcal{L}(E_i; F)$$

es la compuesta de f' y de la aplicación lineal

$$\phi: \mathcal{L}(E; F) \to \mathcal{L}(E_i; F) \tag{2.21}$$

que asocia a toda aplicación lineal continua $\varphi: E \to F$, una $\varphi \circ u_i: E_i \to F$; lo que resulta en efecto de la relación.

$$f'_{x_i}(a) = f'(a) \circ u_i. \tag{2.22}$$

La aplicación lineal (2.21) tiene norma menor igual a 1, y por tanto es continua. Por consiguiente, si la aplicación derivada f' es continua, las aplicaciones f'_{x_i} son continuas.

La recíproca es cierta, puesto que la relación (2.20) muestra que la aplicación f' es igual a la suma de las aplicaciones compuestas

$$U \xrightarrow{f'_{x_i}} \mathcal{L}(E_i; F) \to \mathcal{L}(E; F),$$

Siendo $\phi^{-1}: \mathcal{L}(E_i; F) \to \mathcal{L}(E; F)$ la aplicación lineal que asocia $\varphi_i \in \mathcal{L}(E_i; F)$ a $\varphi_i \circ p_i \in \mathcal{L}(E; F)$.

b) A continuación presentamos la combinación de los casos presentados en 2.2 y 2.3, podemos decir:

Supongamos que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ y $F = F_1 \times \cdots \times F_m$. Sea U un abierto de E y sea $f: U \rightarrow F$ una aplicación diferenciable en el punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Entonces $p_i \circ f = f_i$ (donde $p_i: F \rightarrow F_i$ es la proyección) son diferenciables en el punto a, por lo que existen las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j (a), (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. Se tiene

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \in \mathcal{L}(E_j; F_i),$$

y

$$f'(a) = \sum_{i,j} u_i \circ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \circ q_j, \tag{2.23}$$

donde

$q_j: E \rightarrow E_j$, *es la proyección canónica*

$u_i: F_i \rightarrow F$, *es la inyección canónica*

Así pues, la aplicación lineal $f'(a)$ está determinada por la matriz de las $(\partial f_i / \partial x_j)(a)$; matriz de m filas y n columnas (i es el índice de las filas, correspondiendo la $i-ésima$ fila al espacio F_i; j es el índice de las columnas, correspondiendo la $j-ésima$ columna al espacio E_j). Es decir:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Además si se tiene un espacio de Banach $G = G_1 \times \cdots \times G_p$ y una aplicación continúa g de un abierto $V \subset G$ en $U \subset E$, diferenciable en un punto $b \in V$ tal que $g(b) = a$, llamando entonces h a la aplicación compuesta $f \circ g: V \to F$, la matriz $[(\partial h_i/\partial y_k)(b)]$ (y_k variando en G_k, $1 \le k \le p$) es igual al producto de la matriz $(\partial g_j/\partial y_k)(b)$ por la matriz $(\partial f_i/\partial x_j)(a)$; dicho de otro modo:

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_k}(b) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \circ \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(b). \tag{2.24}$$

Expresión que resulta del teorema 2.1 de derivación de una función compuesta:

$$h'(b) = f'(a) \circ g'(b).$$

2.4 COMPARACIÓN ENTRE $\mathbb{R}$-DIFERENCIABILIDAD Y $\mathbb{C}$-DIFERENCIABILIDAD.

La teoría precedente se aplica indistintamente a los espacios de Banach reales y a los espacios de Banach complejos. Vamos ahora a comparar ambas teorías.

Sean E y F espacios de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, los cuales pueden ser considerados también como espacios de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, para ello basta considerar el producto de un vector por un escalar solamente cuando este escalar es real.

Siendo E y F espacios de Banach sobre $\mathbb{C}$, sea U un abierto de E, y sea $f: U \to F$ una aplicación continua. Consideremos $a \in U$. Se tiene entonces dos propiedades de f:

I) f es diferenciable en el punto a, con respecto a las estructuras de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$:

II) f es diferenciable en el punto a, con respecto a las estructuras de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

En el primer caso, la derivada $f'(a)$ es una aplicación lineal continua $f'(a): E \to F$ donde "lineal" significa $\mathbb{C} - lineal$. Para mayor precisión, el espacio vectorial (normado y completo) de las aplicaciones $\mathbb{C} - lineales$ continuas de E en F se representara por $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$. En el segundo caso, la derivada $f'(a)$ es una aplicación $\mathbb{R} - lineal$ continua $f'(a): E \to F$. Análogamente al caso precedente se representara por $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones $\mathbb{R} - lineales$ continuas de E en F.

Una aplicación $\mathbb{C} - lineal$ es con mayor razón una aplicación $\mathbb{R} - lineal$; luego $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$; el espacio de Banach $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$ es un subespacio de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$, subespacio que es cerrado, puesto que es completo.

Por la definición 2.2, tenemos que la condición I) expresa que existe una aplicación $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$ que necesariamente es única, tal que:

$$\|f(x) - f(a) - g(x - a)\| = o(\|x - a\|).$$

Por la definición 2.2, tenemos que la condición II) expresa que existe una aplicación $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$, que también necesariamente es única, talque:

$$\|f(x) - f(a) - g(x - a)\| = o(\|x - a\|).$$

La condición I) implica la condición II): Si f es $\mathbb{C} - diferenciable$ en el punto a, f es con mayor razón $\mathbb{R} - diferenciable$ en el punto a, y su derivada $f'(a)$ en el caso real es la misma que en el caso complejo.

Inversamente, suponemos que f sea $\mathbb{R} - diferenciable$ en el punto a, y sea $f'(a) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$ su derivada. Para que f sea $\mathbb{C} - diferenciable$ en el punto a, es necesario y suficiente que $f'(a)$ pertenezca al subesapcio vectorial $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$ de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$.

2.5 TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS.

TEOREMA 2.3.- Sean a y b dos puntos de $\mathbb{R}$ tales que $a < b$. Representemos por $[a, b]$ el segmento cerrado que determinan a y b. Consideremos las aplicaciones continuas

$$f: [a, b] \to F, \quad g: [a, b] \to \mathbb{R},$$

donde F es un espacio de Banach. Supongamos que f y g sean diferenciables en todo punto del intervalo abierto $]a, b[$ y que

$$\|f'(x)\| \leq g'(x) \text{ para } a < x < b. \tag{2.25}$$

Entonces se tiene

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a). \tag{2.26}$$

A continuación vamos a demostrar un teorema un poco más fuerte, cuya demostración no es más difícil que la precedente. Antes de enunciarlo es necesario dar una definición.

DEFINICIÓN 2.6.- Sea F un espacio de Banach. Se dice que una aplicación $f: [a, b] \to F$ admite derivada por la derecha en un punto $x \in [a, b[$ si existe

$$f_d'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big)$$

éste límite se representa por $f_d'(x)$ y se denomina la derivada por la derecha de f en el punto x. Es un elemento de F. Se define análogamente, si existe, la derivada por la izquierda de f en un punto $x \in]a, b]$

$$f_g'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big).$$

Para que f admita una derivada $f'(x)$ en un punto $x \in]a,b[$ es necesario y suficiente que $f_d'(x)$ y $f_g'(x)$ existan y sean iguales.

TEOREMA 2.4.- Sean a y b dos puntos de $\mathbb{R}$ tales que $a < b$. Representemos por $[a,b]$ el segmento cerrado que determinan. Consideremos las aplicaciones continuas

$$f: [a,b] \to F, \quad g: [a,b] \to \mathbb{R},$$

donde F es un espacio de Banach. Supongamos que f y g son derivables por la derecha en un punto $x \in [a,b[$ tales que existe $f_d'(x)$ y de $g_d'(x)$ en todo punto $x \in]a,b[$ y que

$$\|f_d'(x)\| \leq g_d'(x) \text{ para } a < x < b. \tag{2.27}$$

Entonces se tiene

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

PRUEBA.

Sea $\varepsilon > 0$. Demostraremos que

$$\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \tag{2.28}$$

para todo $x \in [a,b]$. Una vez probada, esta relación se aplicará para $x = b$ haciendo tender ε hacia 0, lo que, en el límite, nos dará la desigualdad (2.26) del enunciado.

Consideremos el conjunto U de los $x \in [a,b]$ para los cuales (2.28) es falsa, es decir, para los que

$$\|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon. \tag{2.29}$$

Queremos probar que U es vacío. Se sabe que U es *abierto;* en efecto, puesto que se ha supuesto f y g son continuas; cada uno de los dos miembros de la desigualdad (2.29) es una función continua de x. Pero si se considera una desigualdad $\varphi(x) > 0$, donde φ es una función continua con valores numéricos, el conjunto de los puntos x que verifican esta desigualdad es abierto. Luego U es abierto.

Razonemos por reducción al absurdo:

Supongamos que U es un subconjunto no vacío, entonces U tendría una cota inferior c. Se puede afirmar tres cosas:

(I) $c > a$; en efecto, la relación (2.28) es cierta para todo x suficientemente próximo a a, debido a la continuidad de los dos miembros.

(II) $c \notin U$, puesto que U es un abierto, si c pertenecería a U, existirían x tales que $a < x < c$ y $x \in U$, por lo que c no sería la cota inferior de U.

(III) $c < b$, En caso contrario U se reduciría al punto b, y no sería abierto.

Como $a < c < b$, se puede aplicar a c la hipótesis del enunciado:

$$\|f_d'(c)\| \leq g_d'(c). \tag{2.30}$$

Según la definición de $f_d'(c)$ y de $g_d'(c)$, existe un intervalo $c \leq x \leq c + \eta$ (donde $\eta > 0$) en el cual se tiene

$$\|f_d'(c)\| \geq \left\|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$g_d'(c) \leq \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Estas desigualdades y (2.30) implican

$$\|f(x) - f(c)\| \leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x - c). \tag{2.31}$$

Pero se ha visto que $c \notin U$; dicho de otro modo; se verifica

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a). \tag{2.32}$$

Las desigualdades (2.31) y (2.32) permiten obtener

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\|$$

$$\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a),$$

que es válido para $c \leq x \leq c + \eta$. Luego (2.28) es cierta para $c \leq x \leq c + \eta$. Pero entonces todo $x \leq c + \eta$ satisface (2.28), y la cota inferior de U es pues $c \geq c + \eta$, con lo que hemos llegado a una contradicción, por consiguiente el teorema queda demostrado. ■

NOTA. Se obtiene un análogo al teorema 2.4, reemplazando las derivadas por la derecha por las derivadas por la izquierda. Se deduce cambiando x por $-x$.

TEOREMA 2.5.- Sean $a < b$ dos números reales, F un espacio de Banach, $f: [a, b] \to F$ y $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones continuas sobre $[a, b]$ y diferenciables sobre $]a, b[$. Supongamos que $\|f'(x)\| \leq g'(x)$ para $a < x < b$, entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

PRUEBA.

Para un $\varepsilon > 0$ dado, consideremos la desigualdad

$$\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon. \tag{2.33}$$

Esta desigualdad se cumple estrictamente para $x = a$, por la continuidad de f y g, en una vecindad de a.

Por lo tanto,

$$c = sup\{x \in [a, b] / \|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon\}$$

existe y se tiene que $c > a$.

Mostremos que la desigualdad se cumple para c. Por definición del supremo, existe una sucesión $\{x_n\}$, $x_n \to c$, tal que

$$\|f(x_n) - f(a)\| \leq g(x_n) - g(a) + \varepsilon(x_n - a) + \varepsilon$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$, la continuidad de f y g aseguran la desigualdad (2.33) para $x = c$.

Supongamos que $c < b$. La diferenciabilidad de f y g en el punto c implica la existencia de un $\eta > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \|f'(c)\|(x - c) + \frac{\varepsilon}{2}(x - c)$$

$$g(x) - g(c) \geq g'(c)(x - c) - \frac{\varepsilon}{2}(x - c)$$

para todo $x \in [c, c + \eta]$. La hipótesis $\|f'(c)\| \leq g'(c)$ implica entonces que

$$\|f(x) - f(c)\| \leq g'(c)(x - c) + \frac{\varepsilon}{2}(x - c) \leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x - c).$$

Esto y con la desigualdad (2.33) para $t = c$, conduce a

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x - c) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon \\ &\leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in [c, c + \eta]$, lo que contradice la definición de c. Entonces, se tiene necesariamente $c = b$. Si $\varepsilon \to 0$ en (2.33) con $x = b$, se obtiene la afirmación del teorema. ■

2.6 TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS CUANDO LA VARIABLE PERTENECE A UN ESPACIO DE BANACH.

Hasta ahora f es una función de una variable real. Sea ahora U un abierto de un espacio de Banach E, y sea $f: U \to F$ una aplicación continua, con F un espacio de Banach. Recordemos que si a y b son dos puntos de E, se denomina *segmento* de extremos a y b al conjunto de puntos $x \in E$ de la forma:

$$x = (1 - t)\,a + tb, \text{ con } 0 \leq t \leq 1.$$

TEOREMA 2.6.- (Teorema de los Incrementos Finitos) Sean E y F espacios de Banach y $U \subset E$ abierto. Si $f: U \to F$ es diferenciable en U, y si el segmento de extremos a y b está contenido en U, entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(a + t(b-a))\| \|b - a\|.$$

PRUEBA.

Sea $h(t) = f(a + t(b-a))$ una aplicación diferenciable de $[0,1]$ en F y $h'(t) = f'(a + t(b-a))(b-a)$, por lo tanto

$$\|h'(t)\| \leq \|f'(a + t(b-a))\| \|b - a\|.$$

Aplicando el teorema 2.5 y reemplazando a por 0, b por 1, f por h y $g(t)$ por Mt se tiene

$$M = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(a + t(b-a))\| \|b - a\|. \blacksquare$$

CAPÍTULO III

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

3.1 LA SEGUNDA DERIVADA.

Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y $f: U \to F$ una aplicación diferenciable en U. Se tiene entonces una aplicación derivada

$$f': U \to \mathcal{L}(E; F),$$

y surge la pregunta ¿ f' es una aplicación diferenciable?

DEFINICIÓN 3.1.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y sea $f: U \to F$ una aplicación. La aplicación f es dos veces diferenciable en $a \in U$ si y sólo si la aplicación f' es diferenciable en el punto a; y se denota por $f''(a)$ siendo la derivada en el punto a de f'; tal que

$$f''(a) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)).$$

DEFINICIÓN 3.2.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E. La aplicación $f: U \to F$ es 2 veces diferenciable en el punto $a \in U$ si:

i) f es diferenciable en un entorno V de a.

ii) La aplicación $f': V \to \mathcal{L}(E; F)$ es diferenciable en el punto a.

DEFINICIÓN 3.3.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y $f: U \to F$ una aplicación. La aplicación f es dos veces diferenciable en U si y sólo si es dos veces diferenciable en todo punto de U (dicho de otro modo: f es diferenciable en U, y la aplicación $f': U \to \mathcal{L}(E;F)$ lo es también). Si así ocurre f'' es una aplicación de la forma $f'': U \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E;F))$.

DEFINICIÓN 3.4.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y $f: U \to F$ una aplicación. La aplicación f es de clase C^2 (o bien dos veces diferenciable con continuidad) en U si f es dos veces diferenciable y la aplicación $f'': U \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E;F))$ es continua.

Condición equivalente: f'es de clase C^1 en U.

Recordemos que $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E;F))$ y $\mathcal{L}(E,E;F)$ definen una isometría canónica, es decir:

$$\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E;F)) \approx \mathcal{L}(E,E;F). \tag{3.1}$$

Por lo tanto $f''(a)$ define un elemento de $\mathcal{L}(E,E;F)$, es decir $f''(a): E \times E \to F$ es una aplicación bilineal continua. Frecuentemente diremos que $f''(a) \in \mathcal{L}(E,E;F)$, cuya regla de correspondencia está dado por:

$$f''(a): E \times E \to F$$

$$(h,k) \mapsto \big((f''(a))(h)\big)(k) \tag{3.2}$$

donde h y k representan dos vectores de E; puesto que $f''(a): E \to \mathcal{L}(E;F)$ es una aplicación lineal continua, el valor de $f''(a)$ sobre el vector $h \in E$ es un elemento de $\mathcal{L}(E;F)$

$$(f''(a))(h) \in \mathcal{L}(E;F).$$

Luego $(f''(a))(h)$ es una aplicación lineal continua; cuyo valor sobre un vector $k \in E$ se representa por:

$$\left((f''(a))(h)\right)(k).$$

Así queda precisado (3.2).

TEOREMA 3.1.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E, y $f: U \to F$ una aplicación, si f es dos veces diferenciable en el punto a, entonces la segunda derivada $f''(a) \in \mathcal{L}(E, E; F)$ es una aplicación bilineal simétrica; es decir:

$$\left((f''(a))(h)\right)(k) = \left((f''(a))(k)\right)(h), \forall h, k \in E \tag{3.3}$$

PRUEBA.

Definimos la función A

$$A(h,k) = f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a),$$

donde $A(h,k) = A(k,h)$. Puesto que

$$A(h,k) = f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a),$$

$$A(k,h) = f(a+k+h) - f(a+k) - f(a+h) + f(a),$$

por tanto A es simetrica.

Supongamos que:

$$\left\|A(h,k) - \left((f''(a))(k)\right)(h)\right\| = o((\|h\| + \|k\|)^2). \tag{3.4}$$

En efecto, si en (3.4) se permutan h y k, se obtiene

$$\left\|A(h,k) - \left((f''(a))(h)\right)(k)\right\| = o((\|h\| + \|k\|)^2);$$

Esta relación y (3.4) implican

$$\left\|\left((f''(a))(k)\right)(h)-\left((f''(a))(h)\right)(k)\right\|=o((\|h\|+\|k\|)^2), \tag{3.5}$$

puesto que:

$$\left\|\left((f''(a))(k)\right)(h)-\left((f''(a))(h)\right)(k)\right\|\leq\left\|\left((f''(a))(k)\right)(h)-A(h,k)\right\|$$

$$+\left\|A(h,k)-\left((f''(a))(h)\right)(k)\right\|.$$

La expresión (3.5) implica, dado $\varepsilon>0$, existe $\eta>0$ tal que

$$\left\|\left((f''(a))(k)\right)(h)-\left((f''(a))(h)\right)(k)\right\|\leq\varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2 \tag{3.6}$$

siempre que $\|h\|+\|k\|\leq\eta$. Pero, para todo escalar λ, se tiene

$$\left\|\left((f''(a))(\lambda k)\right)(\lambda h)-\left((f''(a))(\lambda h)\right)(\lambda k)\right\|=|\lambda|^2\left\|\left((f''(a))(k)\right)(h)-\left((f''(a))(h)\right)(k)\right\|.$$

Dados h y k cualesquiera en E, siempre es posible encontrar un $\lambda\neq 0$, tal que $\|\lambda h\|+\|\lambda k\|\leq\eta$; por lo que de (3.6) [$h$ y k son reemplazados por λh y λk], se obtiene:

$$\left\|\left((f''(a))(\lambda k)\right)(\lambda h)-\left((f''(a))(\lambda h)\right)(\lambda k)\right\|\leq\varepsilon(\|\lambda h\|+\|\lambda k\|)^2$$

$$|\lambda|^2\left\|\left((f''(a))(k)\right)(h)-\left((f''(a))(h)\right)(k)\right\|\leq\varepsilon|\lambda|^2(\|h\|+\|k\|)^2;$$

dividiendo ambos miembros por $|\lambda|^2\neq 0$, tenemos

$$\frac{|\lambda|^2\left\|\left((f''(a))(k)\right)(h)-\left((f''(a))(h)\right)(k)\right\|}{|\lambda|^2}\leq\frac{\varepsilon|\lambda|^2(\|h\|+\|k\|)^2}{|\lambda|^2}$$

Simplificando obtenemos la desigualdad (3.6) la cual es cierta cualesquiera que sean h y k; como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que la relación (3.3) es cierta, lo que demuestra el teorema 3.1

Así acabamos de ver que para demostrar el teorema, es suficiente probar la relación (3.4).

Probaremos (3.4)

Partimos de la desigualdad:

$$\left\|A(h,k)-\left((f''(a))(k)\right)(h)\right\| \leq \|A(h,k)-(f'(a+k))(h)+(f'(a))(h)\|$$

$$+\left\|(f'(a+k))(h)-(f'(a))(h)-\left((f''(a))(k)\right)(h)\right\|. \quad (3.7)$$

Vamos a mayorar cada una de las cantidades del segundo miembro, es decir

$$\|A(h,k)-(f'(a+k))(h)+(f'(a))(h)\| \quad (3.8)$$

y

$$\left\|(f'(a+k))(h)-(f'(a))(h)-\left((f''(a))(k)\right)(h)\right\|. \quad (3.9)$$

Empecemos por (3.9). Se tiene

$$\left\|(f'(a+k))(h)-(f'(a))(h)-\left((f''(a))(k)\right)(h)\right\|$$
$$\leq \|h\| \cdot \|f'(a+k)-f'(a)-(f''(a))(k)\|.$$

Según la definición de la derivada de la función f' en el punto a, se tiene

$$\|f'(a+k)-f'(a)-(f''(a))(k)\| = o(\|k\|).$$

Luego la cantidad (3.9) es $\|h\| \cdot 0(\|k\|)$, y es con mayor razón $\|h\| \cdot o(\|h\|+\|k\|)$.

Vamos ahora a mayorar (3.8).

Consideremos la función auxiliar

$$B(h) = f(a+k+h) - f(a+h) - \big(f'(a+k)\big)(h) + \big(f'(a)\big)(h).$$

Luego (3.8) es precisamente $\|B(h) - B(0)\|$. De la desigualdad de los incrementos finitos (teorema 2.6), se obtiene

$$\|B(h) - B(0)\| \leq \|h\| \sup_{0\leq t\leq 1} \|B'(th)\|.$$

Así

$$B'(h) = f'(a+k+h) - f'(a+h) - f'(a+k) + f'(a);$$

luego (3.8) está mayorado por

$$\|h\| \cdot \sup_{0\leq t\leq 1} \|f'(a+k+th) - f'(a+th) - f'(a+k) + f'(a)\|. \tag{3.10}$$

Vamos a mayorar ahora (3.10); de la definición de $f''(a)$, se tiene

$$\begin{cases} f'(a+k+th) = f'(a) + \big(f''(a)\big)(k+th) + o(\|k+th\|) \\ \quad f'(a+th) = f'(a) + \big(f''(a)\big)(th) + o(\|th\|) \\ \quad f'(a+k) = f'(a) + \big(f''(a)\big)(k) + o(\|k\|). \end{cases}$$

Luego combinando, se obtiene

$$\|f'(a+k+th) - f'(a+th) - f'(a+k) + f'(a)\| = o(\|k+th\|) + o(\|th\|) + o(\|k\|).$$

Como $\|k+th\| \leq \|k\| + \|h\|$ y $\|th\| \leq \|h\|$ cualquiera que sea t $(0 \leq t \leq 1)$, se observa que la expresión (3.10) es de la forma $o(\|h\| + \|k\|)$, y por consiguiente (3.8) está mayorado por

$$\|h\| \cdot o(\|h\| + \|k\|).$$

Finalmente, cada una de las cantidades (3.8) y (3.9) es:

$$\|h\| \cdot o(\|h\| + \|k\|)$$

luego también su suma. Entonces (3.7) muestra que

$$\left\|A(h,k) - \big((f''(a))(k)\big)(h)\right\| = \|h\| \cdot o(\|h\| + \|k\|)$$

ello significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que se tiene

$$\left\|A(h,k) - \big((f''(a))(k)\big)(h)\right\| \leq \varepsilon\|h\|(\|h\| + \|k\|)$$

siempre que $\|h\| + \|k\| \leq \eta$. Con mayor razón, la desigualdad $\|h\| + \|k\| \leq \eta$ implica

$$\left\|A(h,k) - \big((f''(a))(k)\big)(h)\right\| \leq \varepsilon(\|h\| + \|k\|)^2,$$

lo que demuestra (3.4).

Por consiguiente el teorema 3.1 queda demostrada.■

3.2 CASO EN QUE E ES UN PRODUCTO DE ESPACIOS.

Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E, y $f: U \to F$ dos veces diferenciable en el punto $a \in U$. Ello implica (por definición) que f es diferenciable en todo punto x de un entorno de a. De (2.17) se tiene.

$$\big(f'(x)\big)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)(h_j), \qquad \forall\, h_j \in E_j. \tag{3.11}$$

La misma fórmula, aplicada a f' en lugar de f, nos da

$$\big(f''(a)\big)(k_1, \dots, k_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\right)(k_i), \quad \forall\ k_i \in E_i. \tag{3.12}$$

Por consiguiente,

$$\left((f''(a))(k_1, \dots, k_n)\right)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a) \right)(k_i) \right)(h_1, \dots, h_n). \tag{3.13}$$

Además se sabe que

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}\big(E_i; \mathcal{L}(E; F)\big),$$

por tanto

$$\left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a) \right)(k_i) \in \mathcal{L}(E; F),$$

y su valor sobre el vector $(h_1, \dots, h_n) \in E$, es un elemento de F.

Para calcular $\partial f'/\partial x_i\,(a)$, se utiliza la relación (3.11) que describe f'; derivando (3.11) con relación a x_i se obtiene

$$\left(\left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a) \right)(k_i) \right)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a) \right)(k_i) \right)(h_j). \tag{3.14}$$

Representemos por $\left(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j\right)(a)$ el valor, en el punto a, de $\partial/\partial x_i\left(\partial f/\partial x_j\right)$ es un elemento de $\mathcal{L}\left(E_i; \mathcal{L}(E_j; F)\right) \approx \mathcal{L}(E_i, E_j; F)$. De la igualdad de (3.13) y (3.14) tenemos:

$$\left((f''(a))(k_1, \dots, k_n)\right)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a) \right)(k_i) \right)(h_j)$$

$$\left((f''(a))(k_1, \dots, k_n)\right)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)(k_i) \right)(h_j). \tag{3.15}$$

Que es la relación fundamental que expresa $f''(a) \in \mathcal{L}(E, E; F)$ por medio de las derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \in \mathcal{L}(E_i, E_j; F).$$

Esta expresión es, para la segunda derivada, la análoga de lo que era (2.23) para la primera derivada.

Expresemos ahora que $f''(a): E \times E \to F$ es una aplicación bilineal simétrica (teorema 3.1). Cambiando k_i y h_i (para cada i), (3.15) resulta:

$$\sum_{i,j}\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)(k_i)\right)(h_j) = \sum_{i,j}\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)(h_i)\right)(k_j),$$

y cambiando los índices del sumando i y j en el segundo miembro;

$$\sum_{i,j}\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)(k_i)\right)(h_j) = \sum_{i,j}\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right)(h_j)\right)(k_i).$$

Esto es una identidad en $k_1, \dots, k_n$, $h_1, \dots, h_n$, de donde se obtiene

$$\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)(k_i)\right)(h_j) = \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right)(h_j)\right)(k_i) \qquad (3.16)$$

para todo par (i,j), lo que expresa que la aplicación bilineal

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a): E_j \times E_i \to F$$

es la aplicación compuesta de la aplicación simetría A que va de $E_j \times E_i$ en $E_i \times E_j$ tal que aplica (h_j, k_i) en (k_i, h_j) y de la aplicación bilineal

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a): E_i \times E_j \to F.$$

Donde las aplicaciones bilineales $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$ y $(\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i)(a)$ se deducen una de otra por el cambio de las variables $k_i \in E_i$ y $h_j \in E_j$.

En particular, $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_i)(a)$, representada también por $(\partial^2 f/\partial (x_i)^2)(a)$ es una aplicación bilineal simétrica $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a): E_i \times E_i \to F$.

3.3 DERIVADAS SUCESIVAS

Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y $f: U \to F$ una función dos veces diferenciable. Se tiene entonces la aplicación "segunda derivada":

$$f'': U \to \mathcal{L}_2(E; F),$$

donde $\mathcal{L}_2(E; F)$ designa el espacio de Banach $\mathcal{L}(E, E; F)$ formado por las aplicaciones bilineales continuas $f^{(2)}(a): E \times E \to F$. En general representaremos por $\mathcal{L}_n(E; F)$ el espacio de las aplicaciones multilineales continuas

$$f^{(n)}(a): \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n\, factores} \to F.$$

Si f'' es diferenciable en el punto $a \in U$, denotaremos por $f'''(a)$, o también por $f^{(3)}(a)$ la derivada de f'' en el punto a; donde $f'''(a)$ es un elemento de $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}_2(E; F)) \approx \mathcal{L}_3(E; F)$.

En general se tiene:

"f es n veces diferenciable en el punto a", donde $f^{(n)}(a) \in \mathcal{L}_n(E; F)$. Supongamos definidas estas nociones para $n-1$; diremos entonces que f es n veces diferenciable en a si existe un entorno abierto V de a tal que f sea $n-1$ veces diferenciable en cada punto de V, y si la aplicación $f^{(n-1)}$ de V en $\mathcal{L}_{n-1}(E; F)$ es diferenciable en el punto a; entonces la derivada de $f^{(n-1)}$ en el punto a se representa por $f^{(n)}(a)$ y se denomina derivada $n-ésima$ de f en el punto a; el cual es un elemento de $\mathcal{L}_n(E;F)$.

Para $h_1, \dots, h_n \in E$ se representa por $(f^{(n)}(a))(h_1, \dots, h_n)$ el valor de

$f^{(n)}(a): E \times \cdots \times E \to F$ para el elemento $(h_1, \dots, h_n) \in E \times \cdots \times E$.

DEFINICIÓN 3.5.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y $f: U \to F$ una aplicación, la aplicación f es de clase C^n en U (o también, que f es n veces diferenciable con continuidad en U), si f es n veces diferenciable en todo punto de U, y si la aplicación

$$f^{(n)}: U \to \mathcal{L}_n(E;F)$$

es continua.

Habiendo definido así $f^{(n)}$ para $n \geq 1$ (cuando esta derivada $n-ésima$ existe).

NOTA. Denotaremos por $f^{(0)} = f$ (derivada $cero-ésima$), asi diremos que f es de clase C^0 si f es continua.

DEFINICIÓN 3.6.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y $f: U \to F$ una aplicación, la aplicación f es de clase C^∞ si es de clase C^n para todo n.

NOTA. Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E y $f: U \to F$ una aplicación, para que f sea n veces diferenciable en el punto a $(n \geq 1)$, es necesario y suficiente que $f'(x)$ exista en todo punto x de un entorno abierto V de

a, y que la aplicación $f': V \to F$ sea $n-1$ veces diferenciable en el punto a; entonces

$$f^{(n)}(a) = (f')^{(n-1)}(a).$$

Se tiene del mismo modo, para $n \geq 2$,

$$n = 2 \; se \; tiene \;\; f^{(n)}(a) = (f'')^{(n-2)}(a),$$

$$n = 3 \; se \; tiene \;\; f^{(n)}(a) = (f''')^{(n-3)}(a)$$

Generalizando para $n = n-1$ se tiene:

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)^{(n-(n-1))}(a).$$

TEOREMA 3.2.- Sean E y F espacios de Banach, U un abierto de E, y $f: U \to F$, si f es n veces diferenciable en el punto $a \in U$, la derivada $f^{(n)}(a) \in \mathcal{L}_n(E;F)$ es una aplicación multilineal simétrica $f^{(n)}(a): E \times \cdots \times E \to F$.

Dicho de otro modo, si $h_1, \dots, h_n$ son n vectores de E, y si σ designa una permutación cualquiera sobre $[1,2,\dots,n]$, se tiene

$$\left(f^{(n)}(a)\right)(h_1, h_2, \dots, h_n) = \left(f^{(n)}(a)\right)\left(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(n)}\right). \qquad (3.17)$$

PRUEBA.

El teorema se propone solamente para $n \geq 2$, puesto que ya se ha demostrado para $n = 2$ (teorema 3.1). Vamos a proceder por inducción: Sea $n \geq 3$, y supongamos el teorema demostrado para $n-1$.

Sea $f^{(n)}(a)$ la derivada de la aplicación

$$f^{(n-1)}: V \to \mathcal{L}_{n-1}(E;F),$$

que por hipótesis existe en un entorno V de a.

Puesto que $f^{(n-1)}$ toma sus valores en el subespacio de $\mathcal{L}_{n-1}(E;F)$ formado por las aplicaciones $(n-1)$ lineales simetricas. Luego, para $h_1 \in E$, $\left(f^{(n)}(a)\right)(h_1)$ es un elemento de este espacio; dicho de otro modo:

$$\left(\left(f^{(n)}(a)\right)(h_1)\right)(h_2, \dots, h_n),$$

es una función simétrica de $h_2, \dots, h_n$. Es precisamente

$$\left(f^{(n)}(a)\right)(h_1, h_2, \dots, h_n).$$

con lo que ya vemos que la aplicación multilineal $f^{(n)}(a): E^n \to F$ es una función simetrica de las ultimas $n-1$ variables. Sera, pues, suficiente demostrar que

$$\left(f^{(n)}(a)\right)(h_1, h_2, \dots, h_n)$$

no cambia de valor cuando se permutan h_1 y h_2; en efecto, sabemos que toda permutación de n elementos es la compuesta de un numero finito de "transposiciones", cada una de las cuales permuta dos elementos consecutivos. Sabemos también que nada cambia si estos dos elementos son h_i y h_{i+1}, siendo $2 \leq i \leq n-1$; luego todo quedará demostrado si probamos que sucede lo mismo con h_1 y h_2. Pero $f^{(n)}(a)$ es la derivada segunda de $f^{(n-2)}$, con lo que

$$\left(\left(f^{(n)}(a)\right)(h_1)\right)(h_2) \in \mathcal{L}_{n-2}(E;F)$$

es simétrica en h_1 y h_2, según el teorema 3.1 aplicado a la función $f^{(n-2)}$.■

CONCLUSIONES

Al culminar el presente trabajo de investigación llegamos a las siguientes conclusiones

[1] Se desarrolló las derivadas de orden superior de una aplicación $f: U \to F$ en espacios de Banach, y se presentaron tres casos tales como:

- La derivada de segundo orden.
- Caso en que E es un producto de espacios.
- Las derivadas sucesivas.

[2] Se probó que las aplicaciones lineales cuya segunda derivada existe y pertenece a $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))$ a través de un isomorfismo puede ser representado por $\mathcal{L}(E \times E;F)$ y esto permite concluir que las aplicaciones diferenciables son bilineales y continuas.

[3] El teorema de los incrementos finitos nos permite demostrar el teorema 2.4 lo cual es semejante al teorema del valor medio de Lagrange tratados en los cursos de Cálculo Diferencial 1.

SUGERENCIAS

[1] Sugerimos que en el desarrollo del curso de Análisis Funcional que se dicta en la Carrera Profesional de Matemática se debe tomar en cuenta un estudio más extenso de los temas respectivos para llegar a estudiar y profundizar las derivadas en diferentes espacios y así llegar al estudio de las Derivadas de Orden Superior en los Espacios de Banach.

[2] Existen muchas vertientes mediante las cuales, esta tesis puede ser extendida ya sea en el terreno del análisis o dentro del campo de las aplicaciones, esto sugiere el camino que permite darle un más completo acabado a este trabajo a manera de una investigación a futuras investigaciones.

[3] Para un mejor entendimiento de este trabajo, sugerimos la siguiente hoja de ruta: Espacios vectoriales y aplicaciones lineales - Espacios normados, sucesiones convergentes y espacios de Banach - Aplicaciones lineales y continuas, isomorfismos, isometrías y equivalencia de normas - Aplicaciones multilineales continuas y la isometría natural - Aplicaciones diferenciables y el teorema de los incrementos finitos - Derivadas de orden superior: La segunda derivada, caso en que E es un producto de espacios, las derivadas sucesivas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. E. Taylor, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Library of Congress Cataloging in Publication Data, Pág. 49 – 209, New Your, 1958.

[2] A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, segunda edición, editorial MIR, Pág. 130 - 277, Moscú, 1975.

[3] A. Ttito y N. M. Salazar, *Introducción al Análisis Funcional*, editorial Impresiones "Valle", Pág. 1 - 149, Cusco, 2004.

[4] E. L. Lima, *Curso de Análise Vol. 1*, Projeto Euclides, IMPA, Pág. 1 - 86, Rio de Janeiro, 1989.

[5] E. L. Lima, *Curso de Análise Vol. 2*, Projeto Euclides, IMPA, Pág. 1 - 86, Rio de Janeiro, 1989.

[6] G. Corach y E. Andruchow, *Notas de Análisis Funcional*, revista publicada por FCE y N, Pág. 7 - 86, Buenos Aires, 1997.

[7] H. C. Muller, *Cálculo Diferencial en Espacios de Banach*, pág. 1 - 37, 2008.

[8] H. Cartan, *Cálculo Diferencial*, ediciones Omega S.A., pág. 1 - 72, Barcelona, 1972.

[9] J. Benítez, *Diferenciabilidad en espacios de Banach*, revista publicada por la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1999.

[10] K. Yosida, *Functional Analysis*, sexta edición, impreso por Springer - Verlag, Pág. 1 - 60, Berlín, 1980.

[11] M. Fabián, V. Montesinos y V. Zizler, *Diferenciabilidad en Espacios de Banach*, Publicación de la Revista de RACSAM, Pág. 101 - 125, Madrid, 2006.

[12] M. Mereb, *Derivación en Espacios Normado*, Buenos Aires, 2003.

[13] P. Gajardo, *Diferenciabilidad en Espacios Vectoriales Normados*, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile, 2000.

[14] P. M. Rodríguez, *Derivación de Espacios Normados*, publicado por la Universidad de la Patagonia, La Patagonia, 2003.

LINKOGRAFÍA

[1] http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_de_Banach. Fecha: 30-06-2012.

[2] http://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_vectorial_normado. Fecha: 30-06-2012.

[3] http://grupo.us.es/gfqm127/dir_php/docencia/archivos/1227180224-AF Tema%202-Teoria.pdf. Fecha: 08-04-2012.

[4] http://mate.dm.uba.ar/~smartin/practica6.pdf. Fecha: 08-04-2012.

[5] http://web.usal.es/~navas/af/espacios_normados.pdf. Fecha: 22-09-2012.

[6] http://www.ehu.es/~mtpalezp/libros/anafun2.pdf. Fecha: 22-09-2012.

[7] http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/anfun/afb-t.pdf. Fecha: 15-12-2012.

[8] http://www.ugr.es/~mmartins/Docencia/Old/DocenciaMatematicas/Analisis_funcional/resumen_01.pdf. Fecha: 15-12-2012.