



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO**  
**ESCUELA DE POSGRADO**  
**MAESTRÍA EN CIENCIAS MENCIÓN INFORMÁTICA**

**TESIS**

**ANÁLISIS DEL SONIDO TRANSITORIO PREVIO AL ATAQUE DE  
UNA NOTA DEL PIANO BASADO EN LA DINÁMICA DE SU  
GENERACIÓN**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS MENCIÓN INFORMÁTICA**

**AUTOR**

**Br RICARDO CAMPANA VARGAS**

**ASESOR:**

**Dr. RONY VILLAFUERTE SERNA**

**CODIGO ORCID: 0000-0003-4607-522X**

**CUSCO-PERÚ**  
**2023**

# INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, **Asesor** del trabajo de investigación/tesis titulada: **"ANÁLISIS DEL SONIDO TRANSITORIO PREVIO AL ATAQUE DE UNA NOTA DEL PIANO BASADO EN LA DINÁMICA DE SU GENERACIÓN"**, presentado por: **Br. Ricardo Campana Vargas** con DNI Nro.: 07790427 para optar el grado académico de **MAESTRO EN CIENCIAS MENCIÓN INFORMÁTICA**.

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 2 (dos) veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 10%.

**Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis**

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera página del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 08 de noviembre de 2023



.....

Firma

Dr. Rony Villafuerte Serna

Nro. de DNI 23957778

ORCID del Asesor 0000-0003-4607-522X

## Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: **oid: 27259:284436939** ✓

NOMBRE DEL TRABAJO

**EPG Piano.pdf**

AUTOR

**Ricardo Campana**

RECUENTO DE PALABRAS

**27062 Words**

RECUENTO DE CARACTERES

**131278 Characters**

RECUENTO DE PÁGINAS

**94 Pages**

TAMAÑO DEL ARCHIVO

**4.2MB**

FECHA DE ENTREGA

**Nov 8, 2023 12:15 AM GMT-5**

FECHA DEL INFORME

**Nov 8, 2023 12:17 AM GMT-5****● 10% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos

- 2% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 9% Base de datos de trabajos entregados
- 0% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

**● Excluir del Reporte de Similitud**

- Material bibliográfico
- Coincidencia baja (menos de 20 palabras)
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente

# Índice general

Índice General	II
Índice de figuras	V
Índice de tablas	VIII
Resumen	IX
Abstract	X
Introducción	XI
<b>1. Planteamiento del Problema</b>	<b>1</b>
1.1. Situación problemática . . . . .	1
1.2. Formulación del Problema . . . . .	4
1.2.1. Problema General . . . . .	4
1.2.2. Problemas Específicos . . . . .	4
1.3. Justificación . . . . .	5
1.3.1. Conveniencia . . . . .	5
1.3.2. Relevancia . . . . .	5
1.3.3. Implicancias Prácticas . . . . .	5
1.3.4. Valor Teórico . . . . .	5
1.3.5. Utilidad Metodológica . . . . .	5
1.4. Objetivos . . . . .	6
1.4.1. Objetivo General . . . . .	6

1.4.2.	Objetivos Específicos . . . . .	6
1.4.3.	Alcances y Limitaciones . . . . .	6
<b>2.</b>	<b>Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1.	Bases teóricas . . . . .	7
2.1.1.	El sonido . . . . .	7
2.1.2.	La música . . . . .	7
2.1.3.	La nota musical . . . . .	8
2.1.4.	Dinámica de la cuerda del piano . . . . .	11
2.2.	Marco Conceptual . . . . .	29
2.2.1.	Serie de Fourier . . . . .	29
2.2.2.	Transformada Discreta de Fourier (DFT) y la Transformada Rápida de Fourier (FFT) . . . . .	31
2.2.3.	Análisis de Fourier de señales mediante la DFT . . . . .	32
2.2.4.	Análisis cepstral y deconvolución homomórfica . . . . .	36
2.3.	Antecedentes empíricos de la investigación . . . . .	43
2.3.1.	Estudios de síntesis . . . . .	44
2.3.2.	Estudios de la dinámica . . . . .	47
<b>3.</b>	<b>Hipótesis y variables</b>	<b>52</b>
3.1.	Hipótesis . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>Metodología</b>	<b>53</b>
4.1.	Tipo y nivel de Investigación . . . . .	53
4.2.	Unidad de análisis . . . . .	53
4.3.	Técnicas de recolección de información . . . . .	55
4.4.	Técnicas de análisis e interpretación de la información . . . . .	55
4.4.1.	Extracción del transitorio . . . . .	56
4.4.2.	Obtención del espectro del transitorio . . . . .	56
4.4.3.	Análisis en tiempo-frecuencia . . . . .	56

4.4.4. Análisis cepstral . . . . .	56
4.4.5. Detección de envolventes . . . . .	56
<b>5. Resultados y Discusión</b>	<b>57</b>
5.1. Procesamiento, análisis, interpretación y discusión de resultados . . . . .	57
5.1.1. Extracción del transitorio previo al ataque . . . . .	57
5.1.2. Espectro del transitorio previo al ataque . . . . .	59
5.1.3. Análisis tiempo-frecuencia . . . . .	60
5.1.4. Análisis cepstral . . . . .	67
5.1.5. Envolventes . . . . .	71
5.1.6. Discusión . . . . .	77
5.2. Pruebas de hipótesis . . . . .	79
<b>Conclusiones</b>	<b>80</b>
<b>Recomendaciones</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>82</b>

# Índice de figuras

1.1. Variación temporal y espectro de la nota C4 (do central). . . . .	2
1.2. Sistema mecánico de un piano Steinway. . . . .	3
2.1. Espectro de frecuencia del Do central. . . . .	9
2.2. Forma de onda del Do central para flauta y saxofón. . . . .	10
2.3. Envolvente ADSR. . . . .	10
2.4. Forma de onda de la nota C4 de un piano. . . . .	11
2.5. Sistema martillo-cuerda (a) Modelo de un piano vertical. (b) Modelo ideal. .	12
2.6. Circuito de un dx de una línea de transmisión. . . . .	13
2.7. Circuito equivalente del martillo en $x_0$ . . . . .	15
2.8. Modelo idealizado de la cuerda y el martillo. . . . .	16
2.9. Ondas generadas por el golpe del martillo. . . . .	18
2.10. Porción de la cuerda que se pone en movimiento después de un tiempo $t_m$ . .	19
2.11. Fuerzas normalizadas en la cuerda vs el tiempo normalizado $t/t_a$ . . . . .	21
2.12. Espectro de energía de los modos. . . . .	24
2.13. Historia de la fuerza para $m = 1.6aM$ . . . . .	24
2.14. Espectro de energía para $\sigma = 2,5$ y $m = 1,6aM$ . . . . .	27
2.15. Sistema mecánico de un piano Steinway. . . . .	28
2.16. Espectro de un tono puro de 440 Hz. . . . .	30
2.17. Espectro de frecuencia de la nota E4. . . . .	30
2.18. Proceso de análisis de Fourier en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo. . . . .	32
2.19. Ventanas comúnmente utilizadas. . . . .	34

2.20. Secuencia E4, F4, G4 y A4. (a) Forma de onda. (b) Espectro . . . . .	35
2.21. Secuencia de notas de un piano. (a) Forma de onda. (b) Sucesión de ventanas. (c) Secuencia de notas y una ventana. (d) Subseñal producida. . . . .	36
2.22. Espectrograma de la secuencia de notas E4, F4, G4 y A4 de un piano. . . . .	37
2.23. Proceso de obtención del cepstrum de una señal. . . . .	39
2.24. Transformación directa e inversa de una señal y su cepstrum complejo. . . . .	40
2.25. Sistemas en cascada para el cálculo de la operación de cepstrum complejo $D_x[ ]$ . . . . .	41
2.26. Realización aproximada utilizando la DFT de $D_x[ ]$ y $D_x^{-1}[ ]$ . . . . .	41
2.27. Sistema de principio general de superposición con convolución. . . . .	43
2.28. Espectrograma de las notas C5 y G5. . . . .	45
2.29. Espectrograma de las nota C4. . . . .	46
2.30. Nivel de presión sonora relativa para una sola cuerda D4, 311Hz. . . . .	48
2.31. Nivel de desplazamiento, polarización vertical. (a) y (c9 A4 (440 Hz); C4 (262 Hz). . . . .	49
2.32. Aceleración del puente durante el precursor de la cuerda de la nota C4 en modo staccato. . . . .	50
2.33. Aceleración del puente durante el precursor del golpe (C4 en staccato). . . . .	51
4.1. Tareas a realizar. . . . .	55
5.1. Señal de la nota C4 ff. . . . .	57
5.2. Primeros 100 ms de la nota C4 ff. . . . .	58
5.3. Transitorio previo al ataque. Nota C4 ff. . . . .	59
5.4. Espectro del transitorio previo al ataque. . . . .	60
5.5. Desplazamientos de la cuerda medidos en el punto B, entre el martillo y el puente. . . . .	61
5.6. Espectrograma de C4 ff con 105 muestras/ventana. . . . .	61
5.7. Espectro del golpe del martillo de la nota C4 ff. . . . .	62
5.8. Respuesta en frecuencia del puente. . . . .	63
5.9. Espectrograma de los primeros 55 ms – C4ff. . . . .	64
5.10. Envoltente de 900 Hz – C4ff. . . . .	65

5.11. Envolventes modales durante el transitorio – C4 ff. . . . .	65
5.12. Banda de frecuencias menores a 260 Hz. . . . .	66
5.13. Banda de frecuencias entre el primer y segundo modos. . . . .	66
5.14. Banda de frecuencias entre el segundo y tercer modos. . . . .	67
5.15. Banda de frecuencias entre el tercer y cuarto modos. . . . .	67
5.16. Cepstrales del transitorio de la nota C4 ff. . . . .	68
5.17. Cepstrales (trazo azul) y espectrograma del transitorio de la nota C4 ff. . . . .	69
5.18. Espectrograma, cepstrales (trazo azul) y envolvente de 900 Hz del transitorio de la nota C4 ff. . . . .	70
5.19. Señal del transitorio de la nota C4 ff con su correspondiente cepstral. . . . .	70
5.20. (a) Pulso inicial de sonido. (b) Deformación de la cuerda durante el contacto martillo-cuerda de C4 ff. . . . .	71
5.21. Ejemplo de interpolación de dos picos consecutivos. . . . .	72
5.22. Envolvente ADSR de los 3 primeros segundos de la señal de la nota C4 ff. . . . .	73
5.23. Polarizaciones vertical y horizontal de D4 ff (a) y (b); presión sonora, (c) D4 ff y (d) C4 ff. . . . .	73
5.24. Espectro de los primeros 100 ms de la nota C4 ff. . . . .	74
5.25. Diagrama de bloques para el análisis estocástico. . . . .	74
5.26. Espectro estadístico de los primeros 100 ms. . . . .	75
5.27. Respuesta en frecuencia del puente. . . . .	76
5.28. Señal del transitorio entre 10 y 20 ms. . . . .	77

# Índice de tablas

5.1. Frecuencias del transitorio. . . . .	63
---	----

# Resumen

El sistema de generación de sonido de un piano es muy complejo y, está constituido por varias partes mecánicas acopladas entre sí. Cada componente influye en el timbre del instrumento generando un piso de ruido, en especial durante el transitorio previo al ataque. Las síntesis realizadas han considerado al piso de ruido como un todo y, bajo distintos enfoques y métodos, han sintetizado el sonido final. El hecho de considerarlo como un todo no es recomendable porque éste, no es generado por un solo componente mecánico, ni tampoco se produce en un instante determinado. Estudios en la mecánica de la generación han demostrado que, a lo largo del transitorio previo al ataque, el martillo, el puente, la cama entre los más destacados, juegan un rol determinante en el sonido final, generando el piso de ruido característico. Por esta razón, el presente trabajo tuvo como referencia la dinámica de la generación del sonido y, se aplicaron diversas técnicas de análisis digital. Se comprobó la presencia de frecuencias originadas por el mecanismo tecla-martillo-cama-puente en la señal audible, 900 Hz en especial, que corroboraron los estudios de la dinámica y adicionalmente otros, como los rebotes del pulso generado por el martillo cuya periodicidad permitió calcular la frecuencia de la nota estudiada, 261 Hz. Se obtuvieron resultados inesperados, como similitud a diferentes escalas de tiempo y dominios, lo cual conlleva a un cambio de dirección en el enfoque de futuros trabajos.

*Palabras clave:* procesamiento digital de audio, FFT, cepstrales, tiempo-frecuencia, filtros digitales, sonidos de un piano.

# Abstract

The sound generation system of a piano is very complex and is made up of various mechanical parts coupled together. Each component influences the timbre of the instrument by generating a noise floor, especially during the transient before the attack. The syntheses carried out have considered the noise floor as a whole and, under different approaches and methods, have synthesized the final sound. The fact of considering it as a whole is not recommended because it is not generated by a single mechanical component, nor does it occur at a given moment. Studies in the mechanics of the generation have shown that, throughout the transient prior to the attack, the hammer, the bridge, the bed among the most prominent, play a determining role in the final sound, generating the characteristic noise floor. For this reason, the present work had as reference the dynamics of sound generation and various digital analysis techniques were applied. The presence of frequencies caused by the key-hammer-bed-bridge mechanism in the audible signal was verified, in specific 900 Hz, which was corroborated by the studies of the dynamics and additionally others, such as the rebounds of the pulse generated by the hammer whose periodicity allowed calculating the frequency of the note studied, 261 Hz. Unexpected results were obtained, such as similarity at different time scales and domains, which leads to a change of direction in the focus of future work.

# Introducción

Este documento ha sido organizado en cinco capítulos. En el primero se plantea el problema en los estudios de síntesis de los sonidos de las notas de un piano. Éstos se han ido alejando de la forma de su generación, se han centrado cada vez más en el espectro de la nota sin tener en cuenta toda la dinámica involucrada, en especial durante el transitorio previo al ataque.

En el segundo capítulo, se establece todo el marco teórico del estudio. Se da una base teórica de todas las herramientas necesarias y que fueron utilizadas en el análisis del transitorio. Así mismo, se da una descripción de los diferentes estudios de la dinámica de la generación del sonido con diferentes enfoques, siendo el más importante el que aborda directamente al transitorio. También se explora estudios recientes de síntesis más relevantes.

Debido a que el presente estudio es del tipo descriptivo, con el objetivo de obtener las características del sonido transitorio previo al ataque en el dominio de la frecuencia, tiempo-frecuencia, tiempo y cepstral, no es necesario el planteamiento de una hipótesis. En el cuarto capítulo se describe toda la metodología aplicada al desarrollo del estudio.

Finalmente, en el capítulo cinco se presenta los resultados obtenidos. Se resalta la verificación de lo desarrollado en los estudios dinámicos en el sonido generado por el instrumento durante el transitorio y, las diferencias con las síntesis desarrolladas hasta el momento.

Para lograr los objetivos planteados en la presente investigación, se aplicó el análisis de Fourier: su forma básica, la transformada corta de Fourier (espectrogramas) y el análisis cepstral. Además, se desarrollaron e implementaron dos algoritmos para mejorar el procesamiento de la señal, mientras que sólo se implementó el algoritmo de Laurenti et al. (2007) para la obtención de la envolvente espectral promedio. Dadas las técnicas utilizadas, este trabajo puede enmarcarse dentro de la algoritmia.

# Capítulo 1

## Planteamiento del Problema

### 1.1. Situación problemática

El sintetizador es un sistema electrónico capaz de reproducir sonidos de distintos instrumentos musicales. El sonido sintetizado es una aproximación al sonido natural logrado mediante algoritmos. Para esta tarea, los más utilizados se basan en las características temporales y de frecuencia del sonido obtenidas a partir del análisis de una nota. En la figura 1.1 se muestra la señal y el espectro de la nota C4 de un piano (do central). La señal evidencia la envolvente ADSR (ataque, decaimiento, sostenimiento y liberación) en la que se puede observar los tres momentos característicos: el ataque, decaimiento y liberación. En todo momento la amplitud de la señal va cambiando y, por lo tanto no existe un transitorio ni un estado estacionario. Al aplicar la transformada de Fourier, en el espectro correspondiente, se puede observar los modos y el piso de ruido característico y cuyas amplitudes permanecen constantes. Por este motivo, la transformada de Fourier no es suficiente para caracterizar el sonido de un instrumento musical y, en general no es adecuada para analizar señales sin estado estacionario (Alm and Walker, 2002).

En base a las características antes mencionadas y, ante lo poco útil que resulta aplicar una simple transformada de Fourier, se han desarrollado y aplicado algoritmos cada vez más complejos para reproducir toda la banda de frecuencias en el afán de alcanzar una reproducción lo más fiel posible de éstos. Según Beauchamp (2007), un parámetro que mide la fidelidad es la percepción. Se debe entender que, el sonido es un fenómeno psico-acústico, es decir las personas son las que le dan la característica de sonido al interpretar en sus cerebros las ondas de presión que son percibidas por el sistema auditivo. Por este motivo, la percepción es un parámetro de la eficacia de un algoritmo en la generación de sonidos sintetizados de instrumentos musicales.

Existe una gran cantidad de estudios de síntesis de los sonidos de instrumentos musicales, en muchos de los cuales incluyen los sonidos del piano. Entre los más resaltantes se puede citar a Nieuwenhuijse et al. (1998), quienes obtienen la envolvente del ataque mediante una aproximación exponencial del mismo. Por otro lado, Badeau et al. (2002) utilizan un modelo sinusoidal con una envolvente exponencial. Este modelo paramétrico, determina las frecuencias, la envolvente y las amplitudes durante el ataque. De otro lado, para sintetizar las frecuencias inarmónicas Laurenti et al. (2007), utilizan un enfoque estadístico logrando aislar el piso de ruido mediante un método no lineal, sin embargo, para las pruebas, utilizaron

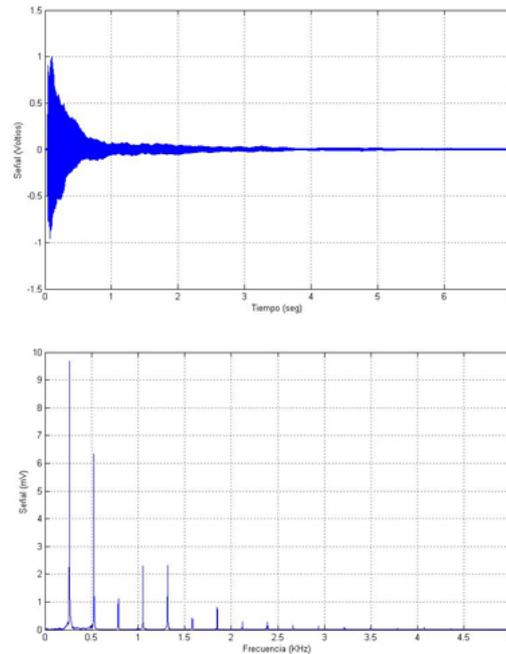


Figura 1.1: Variación temporal y espectro de la nota C4 (do central).

sonidos sintetizados y añadieron ruido gaussiano y estacionario, pero, el algoritmo utilizado puede resultar útil si se lo aplica en el análisis de un sonido natural. Trabajos de síntesis más recientes son realizados por Caetano and Rodet (2013), quienes modelan el espectro residual obteniéndolo a partir de restar la señal sintetizada de la original, utilizando un filtro de tiempo variable. Finalmente, profundizan el análisis utilizando toda la banda y modelando con eaQHM (Extended adaptive Quasi Harmonic Modeling, Caetano et al., 2016), tomando esta vez la banda completa, obteniendo mejores resultados que los anteriores, sin embargo, las pruebas de percepción no lo hicieron en la misma proporción. Se ha citado algunos de los trabajos más resaltantes, teniendo todos en común que cada vez son más complejos y demandantes de una buena potencia de cómputo, pero con poco avance a nivel de la percepción. Otro aspecto que tienen en común es el hecho de que ninguno toma en cuenta la dinámica en la generación de los sonidos, especialmente porque la mayoría de estos trabajos han sido realizados con distintos instrumentos musicales y solo con algunas notas. Todo lo anterior lleva a la pregunta si se ha alcanzado o no un límite en las síntesis que no se puede sobre pasar.

El alejamiento de la dinámica involucrada y tomar el piso de ruido como un todo han generado dificultades en su modelamiento y por la tanto en las síntesis, limitando los resultados perceptuales. Se debe tener en cuenta que el piso de ruido es originado por distintas fuentes mecánicas al interior del piano: la tecla, el martillo, la cama, el puente, la caja de resonancia y el movimiento longitudinal de las cuerdas antes de que se establezcan las ondas transversales a lo largo de ellas y, que dan al instrumento su sonido característico, (Askenfelt, 1993). En la figura 1.2 se muestra el esquema del sistema de la tecla-martillo de un piano de cola.

Askenfelt (1993) hace un análisis de las componentes transitorias del sonido de un piano, tomando en cuenta factores dinámicos que van desde el momento en que la tecla toca la cama hasta cuando el martillo es atrapado. De esta manera determina el origen de las distintas componentes de frecuencia del piso de ruido, además confirma los resultados medidos

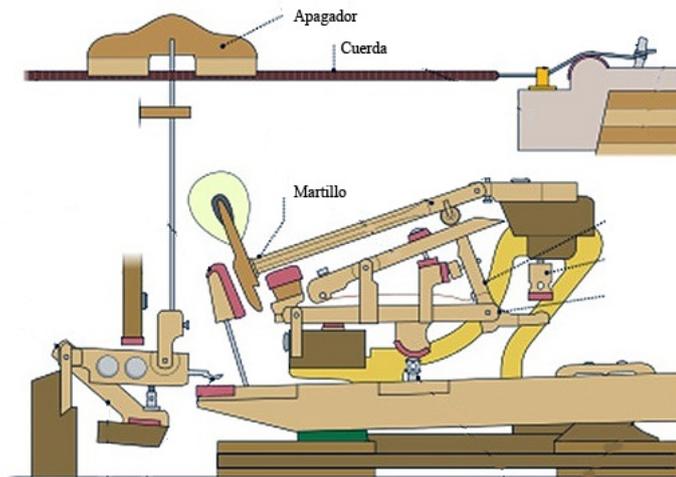


Figura 1.2: Sistema mecánico de un piano Steinway.

Fuente: <https://hinves.com/blog/demonstracion-del-funcionamiento-mecanico-de-un-piano-steinway-2/>

por Weinreich (1977) en relación a un transitorio de algunos milisegundos antes de iniciarse el ataque y, encontrados también por Boutillon (1988). Estos trabajos no llegaron a hacer un análisis espectral más detallado, sólo se limitaron a identificar las frecuencias durante experimentos realizados en las cuerdas del piano mas no en el sonido final generado. En este sentido, un análisis mediante espectrogramas hubiera ayudado. De otro lado, Masuyama et al. (2018), al considerar que, el sonido de un instrumento musical que contiene parciales o modos, tiene un comportamiento en el momento del ataque particularmente importante, propone un modelo no lineal para su análisis. El resultado obtenido demostró ser efectivo en la descomposición modal, y aún en los residuales (piso de ruido), concluyendo en relación a éste último, que se trataría del espectro del golpe del martillo sobre las cuerdas. Sin embargo, el análisis lo realiza en todo el tiempo que dura el sonido, sin tomar en cuenta que, existe un transitorio donde ocurre el golpe (Weinreich, 1977) y estas frecuencias no están presentes durante todo el tiempo que dura el sonido. Es importante señalar que este autor es el único que menciona al golpe del martillo en su trabajo de la síntesis del sonido de las notas de un piano.

Un elemento importante dentro de toda la mecánica de la generación del sonido es el martillo. Éste es estudiado de distintas maneras. Strutt and Rayleigh (1945) consideran al martillo como una masa puntual que alimenta a las cuerdas durante el tiempo que dura el contacto. Este mismo enfoque es utilizado posteriormente por Hall (1987). En ambos casos, el acoplamiento es rígido pues no toman en cuenta el fieltro con el que está recubierto el martillo, siendo éste el que le da cierta elasticidad al momento del golpe sobre las cuerdas, afectando el sonido resultante. En otros estudios, simplemente el acoplamiento es ignorado al considerar que el martillo ejerce una fuerza arbitraria sobre la cuerda en uno o varios puntos (Helmholtz 2013, Morse and Ingard 1986). De otra parte, Masuyama et al. (2018) considera que el primer sonido que se produce es el golpe del martillo sobre las cuerdas y, todo esto ocurre durante el ataque.

Otra forma en la que se enfrentó este problema fue la de aplicar analogías eléctricas, puesto que las ecuaciones que gobiernan la dinámica de las cuerdas son las mismas que las correspondientes a una línea de transmisión o una guía de onda. Nakamura (1992) y posteriormente Morse and Ingard (1986) consideran una impedancia entre un punto de la cuerda (el de contacto) y uno fijo (el extremo más cercano al punto de contacto) e implementan una simulación mediante un circuito de línea de transmisión. El problema es que, la impedancia

así tomada no es correcta, puesto que ésta es entre las cuerdas y el martillo, además que estos modelos asumen la linealidad del sistema, mientras que en la realidad no es así (Boutillon, 1988).

Los trabajos antes citados han realizado análisis basados en la dinámica de la generación del sonido, mediante experimentos y simulaciones eléctricas. Sin embargo, no hay estudios espectrales del transitorio previo al ataque que muestren la evolución de cada frecuencia durante este lapso de tiempo, que al fin y al cabo es cuando se produce prácticamente todo el piso de ruido.

Es evidente que los estudios de síntesis se han ido alejando de la dinámica involucrada en la generación del sonido mientras que los trabajos relacionados con la dinámica del sonido se han centrado en el estudio de cada parte mecánica y las frecuencias que generan y que contribuyen con el desplazamiento final de la cuerda. Todo esto ha originado un vacío entre el análisis de la dinámica de la generación del sonido y las síntesis correspondientes, que finalmente ha limitado los resultados perceptuales obtenidos hasta el momento, estableciendo un límite aparentemente insalvable.

El propósito de la presente investigación, es analizar el sonido transitorio generado por el golpe del martillo sobre las cuerdas de una nota del piano, tomando como referencia los resultados de los estudios de la dinámica involucrada, con el fin de obtener sus características en el tiempo y la frecuencia para contar con mejores opciones de síntesis y, de esta manera elevar los resultados de la percepción.

## **1.2. Formulación del Problema**

### **1.2.1. Problema General**

Los estudios de síntesis de los sonidos de las notas de un piano se han ido alejando de la dinámica involucrada en la generación del sonido mientras que, los trabajos relacionados con la dinámica del sonido se han centrado en el estudio de cada parte mecánica y las frecuencias que generan y que contribuyen con el desplazamiento final de la cuerda. Este divorcio ha limitado los resultados perceptuales obtenidos hasta el momento, estableciendo un límite aparentemente insalvable. En consecuencia, el estudio pretende analizar el sonido transitorio previo al ataque de una nota del piano basado en la dinámica de su generación.

### **1.2.2. Problemas Específicos**

- No se ha caracterizado el sonido transitorio previo al ataque generado por el golpe del martillo sobre las cuerdas correspondientes a una nota del piano.
- Las síntesis de los sonidos de un piano, no toman en cuenta la dinámica de su generación.

## **1.3. Justificación**

### **1.3.1. Conveniencia**

El estudio del transitorio previo al ataque, basado en la dinámica de su generación, ha permitido contar con la información necesaria para el desarrollo de nuevos algoritmos de síntesis que conduzcan a la obtención de un sonido más natural.

### **1.3.2. Relevancia**

En las síntesis de los sonidos de instrumentos musicales y, entre ellos del piano, se han ido aplicando modelos y algoritmos cada vez más complejos con el afán de mejorar la percepción. En este sentido, han perdido de vista la dinámica de la generación de los sonidos, lo que viene limitando la obtención de mejores niveles en la percepción, es decir, no se logra sonidos más cercanos a los naturales.

### **1.3.3. Implicancias Prácticas**

La información obtenida del transitorio previo al ataque, mediante el estudio en los dominios del tiempo, frecuencia, tiempo-frecuencia y cepstral, representa a las características de este importante lapso de tiempo en el que, se conforma la onda resultante, tanto en la cuerda como en el sonido. Por esta razón, esta información puede utilizarse en el desarrollo de futuras síntesis que logren reproducir sonidos más cercanos a los naturales.

### **1.3.4. Valor Teórico**

Este trabajo, además de la consecución de las características del transitorio, ha logrado obtener resultados que no se esperaban, tales como, la importancia de los reflejos del pulso viajero en el puente del instrumento; la presencia de una polarización horizontal de la onda en la cuerda durante el transitorio durante un pequeño lapso de tiempo y similitudes a distintas escalas de tiempo y dominios que deben investigarse.

### **1.3.5. Utilidad Metodológica**

La metodología aplicada en la presente investigación puede ser aplicada a otros instrumentos musicales, siempre que se tenga como referencia la dinámica involucrada en la generación de los sonidos correspondientes. De esta manera contar con la información suficiente como para desarrollar algún algoritmo que pueda reproducir los sonidos con mayor exactitud.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo General

Analizar el sonido transitorio previo al ataque de una nota del piano basado en la dinámica de su generación.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Analizar el sonido transitorio previo al ataque tomando como referencia la dinámica del golpe del martillo y el puente.
- Extraer las características del sonido del transitorio previo al ataque mediante la aplicación de técnicas de procesamiento digital de señales adecuadas.
- Implementar algoritmos adecuados que ayuden al procesamiento digital de la señal audible.

### 1.4.3. Alcances y Limitaciones

El golpe del martillo, los reflejos en la clavija durante el contacto martillo-cuerda, los rebotes del pulso generado en el puente así como la influencia de la estructura del instrumento forman parte del proceso desarrollado en el piano durante el transitorio previo al ataque, Askenfelt (1993). Para detectar los sucesos dinámicos antes mencionados en el sonido correspondiente al transitorio previo al ataque se realizará un análisis en distintos dominios. No se pretende desarrollar un algoritmo que sintetice la nota, debido a que se debe estudiar el sonido completo para lograrlo.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Bases teóricas

#### 2.1.1. El sonido

Se puede definir como el conjunto de ondas de longitudinales de presión que viajan usualmente a través del aire, o cualquier otro medio sólido, líquido o gaseoso, produciendo una perturbación que es captada por los oídos.

En la definición del sonido también debe considerarse tanto el fenómeno físico como el sicoacústico, ya que bajo la ausencia de un oyente puede existir un evento sonoro, pero no el evento auditivo (Miyara, 2010).

La definición del ruido básicamente se adhiere al mismo concepto del sonido, pero se ajusta más al aspecto de un evento sicoacústico que es desagradable a la percepción humana. En general se puede expresar como un sonido no deseado.

#### 2.1.2. La música

Moorer (1975), define la música como el sonido generado por ondas de presión creado por un número finito de instrumentos que tocan notas, las cuales empiezan al mismo tiempo, son de duración finita y son casi periódicas en ese intervalo. Asimismo, un instrumento musical es un objeto que produce sonidos generados por ondas de presión casi periódicas.

#### Análisis musical

Según Moorer (1975), existen diversos motivos para analizar la música: forma, armonía, estilo, etc. Todos éstos pueden definirse como análisis de alto nivel, porque trabajan con conceptos que no están definidos rigurosamente, ni tampoco conducen a un análisis matemático. De otro lado, un análisis de la forma de la onda se hace con el propósito de dar un vistazo a la dinámica de la música de instrumentos, salas de concierto, músicos, etc. y así simular los sonidos musicales, y mejorar la percepción humana de éstos, y finalmente,

detectar y rastrear el tono de una pieza cantada por una voz. Estos análisis pueden definirse como de bajo e intermedio nivel.

### **2.1.3. La nota musical**

Moorer (1975), dice que la nota quedará determinada por su tono, tiempo de inicio, duración y volumen o intensidad. Sin embargo, para realizar un análisis más completo, es necesario definir otras características como, armónicas, inarmónicas, envolvente espectral, parciales, cuasi periodicidad.

#### **Intensidad**

Según Miyara (2010), la intensidad es la cantidad de energía acústica que contiene un sonido. La intensidad viene definida por la potencia, que a su vez está determinada por la amplitud de la onda sonora, permitiendo distinguir si el sonido es fuerte o débil. Esta cualidad se mide con el sonómetro y típicamente los resultados se expresan en decibeles (dB).

Una definición algo más ajustada indica que la intensidad está relacionada con la energía que atraviesa en un segundo, la unidad de superficie perpendicular respecto a la dirección de la propagación de la onda sonora, por lo que se plantea que dicha intensidad se mide en  $W/m^2$ .

El concepto de la intensidad del sonido no es fácil de cuantificar, ya que el oído humano no le reconoce de manera lineal; es decir un sonido con una intensidad doble, no causa el doble de la sensación audible esperada (Cortes Osorio et al., 2012).

#### **Duración**

Es la cualidad que determina el tiempo de vibración de un objeto; por ejemplo, se pueden escuchar sonidos largos, cortos, muy cortos, etc.

#### **Tono**

Éste viene determinado por la frecuencia fundamental de las ondas sonoras medida en ciclos por segundo o hertz (Hz). El tono es lo que permite distinguir entre sonidos graves, agudos o medios. Para que los humanos puedan percibir un sonido, éste debe estar comprendido en un rango entre 20 y 20.000 Hz, el mismo que se define como el rango de frecuencia audible. Por debajo de éste se tienen los infrasonidos y por encima, los ultrasonidos.

Es de observar que el rango de frecuencias audibles varía ligeramente entre individuos, y para uno solo, varía en función de la edad que va reduciéndose tanto en graves como en agudos.

En la figura 2.1 se muestra el espectro en frecuencia de la nota C4 (261 Hz) para varios instrumentos musicales, tales como la flauta, el saxofón y una señal seno pura.

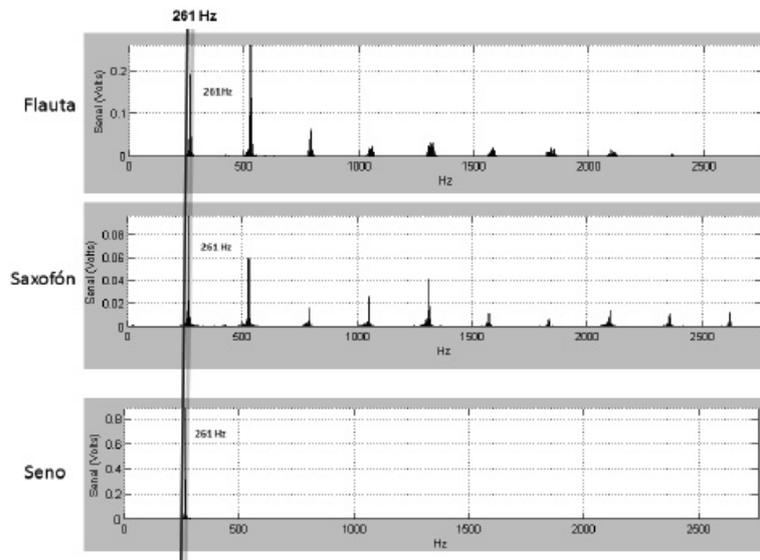


Figura 2.1: Espectro de frecuencia del Do central.

Fuente: Cortes Osorio et al., 2012.

## Timbre

Es la cualidad que confiere al sonido el contenido de armónicos que acompañan a la frecuencia fundamental. El timbre caracteriza a cada instrumento haciéndole diferente aún bajo la misma frecuencia fundamental; esta cualidad es la que permite distinguir dos sonidos, por ejemplo, entre la misma nota musical (tono) con igual intensidad producida por dos instrumentos musicales distintos. En los instrumentos musicales reales las frecuencias adicionales que componen un tono se denominan parciales, ya que la palabra armónico solo se ajusta a los múltiplos exactos de la frecuencia fundamental.

En la figura 2.2 se muestra que, aunque la nota Do central (de 261,09 Hz) puede tener el mismo tono para diferentes instrumentos, el timbre es quien da la diferencia entre ellos (nótese la forma de onda). Esto es debido que, como se puede apreciar, las tres señales tienen el mismo periodo pero diferentes formas y, al realizar un análisis de Fourier, en el espectro aparecerán líneas correspondientes a 261.09 Hz al igual que sus armónicos, con excepción de la señal sinusoidal que solo presenta una sola línea (2.1). Así mismo, al tener formas diferentes, cada una presenta frecuencias diferentes al rededor de cada armónico, lo que no aparece para la señal sinusoidal por tener sólo una frecuencia. Estos espectros adicionales constituyen el timbre de cada instrumento y permiten distinguir unos de otros.

## Armónicas e inarmónicas

Una onda perfectamente periódica puede descomponerse, mediante la serie de Fourier, en una suma de senos y cosenos, cuyas frecuencias son múltiplos de una fundamental. Cada una de éstas se denominan armónicas relacionadas o simplemente armónicas. Cuando las frecuencias no están armónicamente relacionadas (Moorer, 1975).

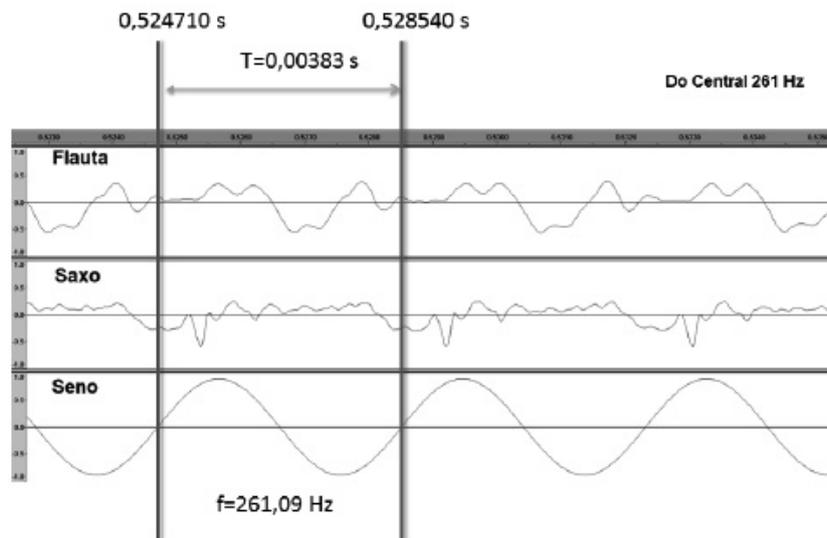


Figura 2.2: Forma de onda del Do central para flauta y saxofón.  
Fuente: Cortes Osorio et al., 2012.

### Envolvente temporal

Al observar la señal generada por un instrumento musical, se puede distinguir hasta cuatro momentos bien definidos: el ataque, decaimiento, sostenimiento y liberación, ADSR para sus siglas en inglés (Cortes Osorio et al., 2012). La figura 2.3 muestra una envolvente que define los cuatro momentos antes mencionados.

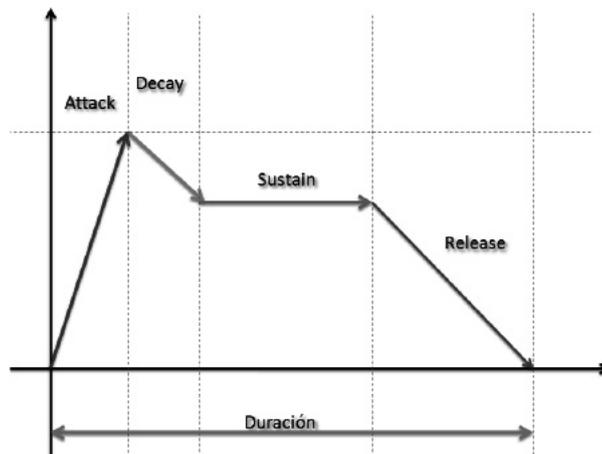


Figura 2.3: Envolvente ADSR.  
Fuente: Cortes Osorio et al., 2012.

Según Cortes Osorio et al. (2012), los instrumentos de cuerda como el piano no usan la envolvente ADSR, pues su principio físico es diferente a los instrumentos de viento. Para la nota de un piano, la envolvente carece de la etapa de sostenimiento, pasando directamente a la liberación, aunque los músicos experimentados manejan a su antojo estos momentos. La figura 2.4 muestra la onda generada por la nota C5 de un piano, donde se puede observar los tres momentos antes mencionados.

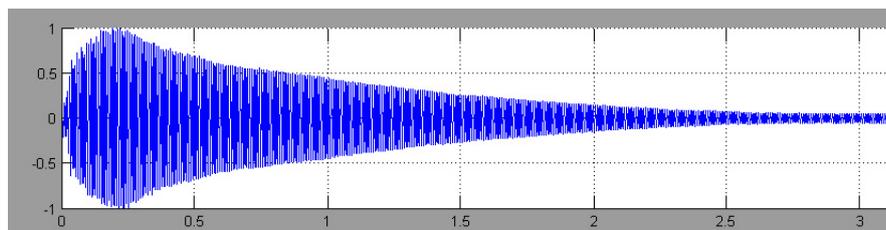


Figura 2.4: Forma de onda de la nota C4 de un piano.

## Envolvente espectral

Algunas características de la fuerza relativa de los armónicos y los parciales dan información acerca de la identidad del tono. Por ejemplo, el espectro puede revelar las frecuencias centrales de resonancias prominentes y la presencia de ceros en la fuente del sonido. La fuerza relativa de los parciales pares e impares son característicos del tubo cilíndrico de un clarinete (cerrado en un extremo), y la irregularidad del espectro puede indicar una compleja estructura resonante como la de los instrumentos de cuerdas (Martin, 1999).

## Parciales

Según Moorer (1975), muchas ondas no son periódicas, pero pueden representarse por medio de una suma de sinusoides no armónicas. El término general para estas sinusoides es de tono parcial o simplemente parcial.

## Cuasi periódicas

Este término se aplica a ondas que no son perfectamente periódicas, con ligeros corrimientos en su periodo. Los instrumentos de cuerda muestran cierta inarmonía debido al acortamiento de las cuerdas a altas frecuencias, pero debido a que la desviación es mínima, reciben el nombre de cuasi armónicas (Moorer, 1975).

### 2.1.4. Dinámica de la cuerda del piano

El piano es un sistema mecánico complejo. La generación de un sonido nace con la presión ejercida en una tecla, para luego ser transmitida mediante un sistema de palancas a un martillo, golpeando las cuerdas correspondientes a la nota. Cada una de éstas tiene un juego de dos o tres cuerdas, dependiendo de la frecuencia de la misma. El sonido se genera en el momento que el martillo provoca una perturbación en las cuerdas. Es necesario conocer la forma de vibración de éstas, ya que su energía se transmite al medio mediante ondas de presión (sonido), por lo que tendrán las mismas características en el tiempo y frecuencia (Weinreich, 1977).

De acuerdo con toda la información revisada, el análisis dinámico puede realizarse de dos maneras. Una, mediante una simulación eléctrica utilizando un modelo de línea de transmisión, y la segunda sólo con las ecuaciones de Newton.



Si la ecuación 2.2 se deriva con respecto a  $x$ , y tomando en cuenta la ecuación 2.1 se obtiene:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma \frac{\partial v}{\partial t} + rv \quad (2.4)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{T} \frac{\partial f}{\partial t}$$

La primera ecuación 2.4 muestra la variación de la fuerza vertical a lo largo de la cuerda, siendo proporcional a la aceleración y velocidad de cada elemento infinitesimal. La segunda, expresa la variación de la velocidad de vibración a lo largo de la cuerda. Sin embargo, no se está considerando el origen del movimiento.

Se observa también que, si  $r$  es muy pequeña en la ecuación 2.1, ésta puede despreciarse, quedando:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Esta última es una ecuación de onda, lo que significa que, la perturbación avanza por la cuerda de forma ondulatoria. A partir de esta ecuación, también se puede calcular la velocidad de propagación:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (2.6)$$

Se debe distinguir la velocidad de propagación de la onda en la cuerda y la velocidad de vibración (ecuación 2.3). La primera se refiere a la velocidad con la que la perturbación avanza por la cuerda, mientras que la segunda es aquella con la que se mueve un elemento infinitesimal en dirección transversal.

De otro lado, Nakamura (1992) considera una línea de transmisión de constantes eléctricas uniformemente distribuidas, como la mostrada en la figura 2.6, las ecuaciones 2.7 son las que gobiernan la dinámica de la línea.

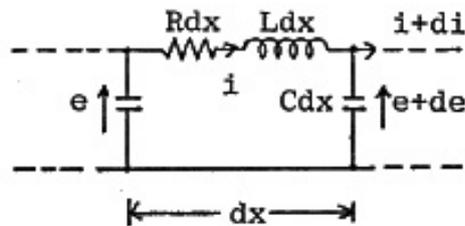


Figura 2.6: Circuito de un  $dx$  de una línea de transmisión.

Fuente: Nakamura, 1992

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri \quad (2.7)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial e}{\partial t}$$

Se observa que las ecuaciones 2.4 y 2.7 son las mismas. Los parámetros mecánicos (ecuación 2.4) y eléctricos (ecuación 2.7) se diferencian el tipo de fenómeno físico al que están modelando. Esto permite simular, por ejemplo, el comportamiento de la cuerda mediante una línea de transmisión y viceversa. Esta simulación recibe el nombre de analogía de impedancia (Nakamura, 1992), y la equivalencia de las variables y los parámetros es la siguiente:

Fuerza — Voltaje

Velocidad — Corriente

Densidad  $\sigma$  — Inductancia L

Tensión T — Reactancia capacitiva  $1/C$

Coefficiente de fricción r — Resistencia eléctrica R

Para hallar la solución, se debe tener en cuenta las condiciones iniciales y de contorno. Para el caso de la cuerda, todas las condiciones iniciales son cero, y las de contorno (véase la figura 2.3 b) a tener en cuenta son que los extremos se encuentran fijos. Para la analogía de impedancia, estos extremos equivalen a tener en cada uno, un corto circuito (Nakamura, 1992).

Para completar el modelamiento, es necesario obtener las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema cuerda-martillo. Tomando como referencia la figura 2.5 (b), se aplica la segunda ley de Newton:

$$M_H \frac{\partial V_H}{\partial t} = -K_f \int_0^t (V_H - V_0) dt = -f_H \quad (2.8)$$

Donde:

$V_H, V_0$ : velocidades verticales del martillo y cuerda respectivamente.

$f_H$ : fuerza en el punto de contacto del martillo con la cuerda.

$M_H$ : masa del martillo.

$K_f$ : rigidez del fieltro del martillo.

Para obtener la analogía de impedancia, se debe insertar en el punto  $x_0$  dos componentes discretos para simular al martillo, tal como se muestra en la siguiente figura:

Para esta conexión, las ecuaciones electrodinámicas son:

$$L_H \frac{\partial i_H}{\partial t} = -\frac{1}{C_f} \int_0^t (i_H - i_0) dt = -e_H \quad (2.9)$$

Las ecuaciones 2.8 y 2.9 son las mismas, lo que permite que se haga la siguiente analogía:

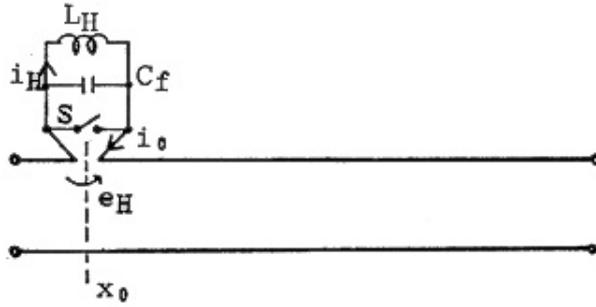


Figura 2.7: Circuito equivalente del martillo en  $x_0$ .

Fuente: Nakamura, 1992

$$M_H = L_H$$

$$K_f = 1/C_f$$

$$f_H = e_H$$

$$V_H = i_H$$

La dinámica de la generación del golpe (Hall, 1986) es la siguiente: el martillo golpea la cuerda, luego de que arribe la primera onda reflejada al punto de contacto, la fuerza generada por ésta, provoca un rebote del martillo. Para la simulación,  $L_H$  y  $C_H$  son análogos al martillo y el interruptor  $S$ , inicialmente cerrado, al abrirse simula el golpe. Posteriormente  $e_H$  es nuevamente cero, lo que es equivalente al rebote del martillo. Se considera que  $f_H$  comprime la cuerda.

De otro lado, la elasticidad de la cuerda puede simularse mediante un circuito equivalente. Sin embargo, si el golpe del martillo es el objeto de estudio, entonces puede ignorarse, debido a que el tiempo involucrado es corto (Badeau et al., 2002).

### Modelo del martillo de masa infinitesimal (Hall, 1986)

Cuando un martillo de masa  $m$  golpea una cuerda de masa  $M$ , la fuerza que genera el rebote depende de ella misma. Hay que considerar que el martillo permanece en contacto un tiempo finito, lo que complica la solución, ya que, el tiempo de ataque y decaimiento van a depender de éste.

Considerando que el martillo tiene una masa infinitesimal, Hall (1986) propone un modelo mecánico para la cuerda como el de la figura 2.8, cuyos extremos de la cuerda están localizados en  $x = 0$  y  $x = L$ , y el punto de impacto del martillo en  $x = \alpha L$ . En pianos reales, el valor de  $\alpha$  está entre 0.12 y 0.16. Además considera que la masa  $M$  de la cuerda es perfectamente flexible y sin pérdidas con una densidad de  $\mu = M/L$ . Además, cuando se encuentra bajo una tensión  $T$ , la velocidad de las ondas es:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2.10)$$

La vibración de la cuerda tiene que modelarse considerando que la cuerda se mue-

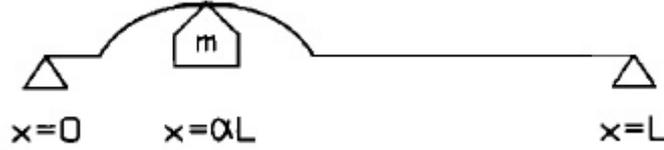


Figura 2.8: Modelo idealizado de la cuerda y el martillo.

Fuente: Hall, 1986

ve verticalmente mientras que la energía avanza de forma horizontal. Así se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

Donde la primera es en cualquier punto de la cuerda excepto en  $x = \alpha L$ . Se puede ver que se trata de una ecuación de onda; y la segunda, se cumple en  $x = \alpha L$ , y describe el movimiento vertical de cada diferencial de cuerda debido a la componente vertical de la tensión.

#### ■ *Impulso*

Como una primera aproximación, se puede considerar que el martillo transmite un impulso a la cuerda, el mismo que puede modelarse como una función delta y considerarse como una condición inicial, así como el desplazamiento vertical nulo:

$$V(x, t = 0) = U\delta(x - \alpha L) \quad (2.12)$$

$$y(x, t = 0) = 0$$

Donde  $U$  es una constante que representa la fuerza del golpe. Para encontrar la solución de la ecuación de onda (ecuación 2.11), y teniendo en cuenta la naturaleza de la función delta, se puede considerar soluciones armónicas, de la forma:

$$y(x, t) = f(t)g(x) \quad (2.13)$$

Entonces, el desplazamiento vertical variará de la forma:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \sin(n\pi x/L) \quad (2.14)$$

La ecuación 2.14 es típica de una onda estacionaria, en este caso en la cuerda del piano, y por lo tanto debe cumplir con la ecuación 2.11. Después de realizar el reemplazo, se obtiene las frecuencias de los modos de vibración de la cuerda:

$$\omega_n = nc \frac{\pi}{L} \quad (2.15)$$

Con las condiciones iniciales impuestas en las ecuaciones 2.11 y mediante un análisis de Fourier:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(n\pi/L)y(x, t = 0) dt \quad (2.16)$$

$$B_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L \sin(n\pi x/L)v(x, t = 0) dt$$

se determinan  $A_n = 0$  y  $B_n = \frac{2U}{n\pi c}$ , y así se obtiene el desplazamiento vertical de la cuerda:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2U}{n\pi c} \sin(n\pi a) \sin(\omega_n t) \sin(n\pi x/L) \pi \quad (2.17)$$

Si se considera la energía de la vibración de la cuerda, se tiene que aplicar el teorema de Parseval, de manera que para el n-ésimo modo:

$$E_n = \frac{\mu}{4L} (A_n^2 + B_n^2) \quad (2.18)$$

$$E_n = \frac{\mu U^2}{L} \sin^2(n\pi a)$$

Para determinar la constante U, se observa en la ecuación 2.18 que dimensionalmente debe tener unidades  $m^2/s$ . De otro lado, por la definición de la función delta y la ecuación 2.12, U debe ser:

$$U = bV \quad (2.19)$$

Donde: b es la longitud del contacto del martillo con la cuerda, V la velocidad del martillo. De otra parte, inicialmente se pone en movimiento una masa  $\mu b$  con una velocidad V, lo que implica que el martillo le transfiere una cantidad de movimiento o momento de:

$$I = (\mu b)V = \mu bV \quad (2.20)$$

$$I = \mu U$$

El problema con este resultado es que, la masa del martillo se aproxima a cero y b también para poder tener una cantidad de movimiento constante. Además, esta solución considera que la interacción martillo-cuerda sólo se da en  $t = 0$ , y esto no es cierto, ya que este contacto dura un tiempo finito, y luego el martillo rebota. Entonces, es necesario también considerar la dinámica de este rebote en el modelamiento realizado. Para este fin, Hall (1986) considera que la fuerza que lo genera es una onda reflejada. Tomando en cuenta la analogía de impedancia, una cuerda infinita tiene impedancia

resistiva, por lo que no provocaría una inversión de fase de la onda en el punto de contacto, porque no produce ningún reflejo. Mientras que una cuerda finita actúa como un resorte, debido a que presenta una reactancia y esto es lo que genera las ondas reflejadas. Por lo tanto, en los extremos de la cuerda, que son fijos, se generan ondas reflejadas, siendo el más cercano al punto de contacto el responsable del primer frente de onda que llega a él.

De todo lo mencionado líneas arriba, para modelar toda la dinámica del movimiento vibratorio de la cuerda, es necesario hacerlo tomando en cuenta que el sistema cuerda-martillo se comporta linealmente, por lo que se puede aplicar la superposición de dos situaciones: la primera es considerar la cuerda de longitud finita, fija en sus extremos y bajo una tensión  $T$ , lo que permite obtener las fuerzas que se ejercen sobre la cuerda y el martillo, a partir de la onda reflejada en el extremo más cercano al punto de contacto. De otra parte, al considerarla de longitud infinita, se obtiene las ecuaciones de onda a lo largo de la misma. Finalmente se suman los dos efectos y se tendrá el modelamiento completo.

### ■ *Cuerda de longitud finita*

Para el caso de la cuerda de longitud finita, se sigue considerando que el martillo es una masa puntual y que permanece en contacto con la cuerda un tiempo:

$$t_a = \frac{2\alpha L}{c} \quad (2.21)$$

Este tiempo es el que demora en llegar el primer frente de onda reflejado, desde el extremo fijo más cercano al punto de contacto, tal como se muestra en la siguiente figura:



Figura 2.9: Ondas generadas por el golpe del martillo.

La dinámica del movimiento de la cuerda es descrita por las ecuaciones 2.11, que por comodidad las volvemos a poner:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.22)$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

Donde la primera es en cualquier punto de la cuerda excepto en el punto de contacto con el martillo. Mientras que la segunda ecuación se cumple en  $x = \alpha L$  y es responsable de la fuerza de la cuerda sobre el martillo de masa  $m$ .

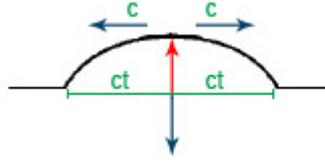


Figura 2.10: Porción de la cuerda que se pone en movimiento después de un tiempo  $t_m$ .

Transcurrido un tiempo después del golpe del martillo, una porción de la cuerda se pone en movimiento:

Se puede observar que la longitud horizontal total del desplazamiento es  $2ct$ , y con una masa de  $2\mu ct$ . Así mismo, después de un tiempo  $t_m$  transcurrido después del golpe inicial, la masa del martillo será comparable a aquella de la porción de la cuerda que se está moviendo. Entonces:

$$m = 2\mu ct_m \quad (2.23)$$

$$\mu t_m = \frac{m}{2\mu c}$$

Se debe tener en cuenta que, el martillo se detiene aún antes de que el primer frente de onda reflejado haya llegado a su posición.

$$t_m < t_a \quad (2.24)$$

#### ■ *Cuerda de longitud infinita*

En este caso, no existe la onda reflejada por lo que se puede escribir como solución a la ecuación 2.22:

$$y_0(x, t) = g_0[t - |x - \alpha L|/c] \quad (2.25)$$

Para todo tiempo  $t > |x - \alpha L|/c$

La ecuación 2.25 es una solución a la ecuación de onda, por lo que tiene que cumplirla. Asumiendo además una solución armónica, se puede aplicar el método de separación de variables, y con las condiciones iniciales en  $t = 0$ : la velocidad inicial del martillo es  $V$  y el desplazamiento vertical de la cuerda es cero. De esta manera se obtiene la solución en  $x = \alpha L$ :

$$g_0(t) = \frac{V}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \quad (2.26)$$

$$v(t) = \frac{\partial g_0}{\partial t} = V e^{-\gamma t}$$

$$\gamma = \frac{2T}{mc} = \frac{1}{t_m}$$

De acuerdo con la ecuación obtenida, se puede observar que existe una aproximación asintótica a un desplazamiento finito. En relación a la velocidad, ésta va decayendo desde su valor inicial  $V$  hasta cero.

Para el cálculo de la fuerza ejercida por el martillo sobre la cuerda, se tiene que tomar la ecuación de onda y la 2.26

$$F_0(t) = \frac{2T}{c} \frac{\partial g_0}{\partial t} = \frac{2c}{T} V e^{-\gamma t} \quad (2.27)$$

$$F_0(t) = \frac{2TmV}{mc} V e^{-\gamma t}$$

$$F_0(t) = mV e^{-\gamma t}$$

Las ecuaciones 2.27 muestran la fuerza ejercida por el martillo sobre la cuerda. Se observa que va decayendo de forma exponencial a medida que transcurre el tiempo. Para calcular la cantidad de movimiento o momento correspondiente, se debe integrar la fuerza, considerando además, que éste tiene duración infinita:

$$I_0(t) = \int_0^{\infty} F_0(t) dt \quad (2.28)$$

$$I_0(t) = mV$$

Recordando la ecuación 2.24:

$$t_a > t_m \quad (2.29)$$

$$\frac{2\alpha L}{c} > \frac{m}{2\mu c}$$

$$m < 4M$$

donde  $M$  es la masa de la cuerda. Este último resultado dice que la masa del martillo debe ser menor a la masa de la porción de la cuerda entre  $x=0$  y  $x = \alpha L$

Para completar con el análisis, se debe determinar la onda que se refleja en  $x=0$ . Hay que tener en cuenta que, en este punto la cuerda no se mueve, por lo tanto, debe haber una inversión de fase. Esta onda llega a cualquier punto  $x$  en un tiempo  $t = (x + \alpha L)/c$ , y para un tiempo posterior:

$$y_r(x, t) = -g_0[t - (x + \alpha L/c)] \quad (2.30)$$

La ecuación 2.3 debe incluirse en la solución total, como ya se mencionó anteriormente. Para encontrar  $y_r$  debe considerarse que la interacción cuerda-martillo crea constantemente nuevas perturbaciones que se propagan en ambas direcciones. Entonces cuando  $y_r$  trata de pasar por el martillo, éste genera una nueva onda:

$$y(x, t) = y_0(x, t) + y_r(x, t) + y_1(x, t) \quad (2.31)$$

Donde:

$$g_1(x, t) = g_1[t - t_a - (x - \alpha L)/c] \quad (2.32)$$

Si se aplica la segunda ecuación de 2.22 para  $x = \alpha L$ , se puede encontrar  $g_1(t)$

$$g_1(t) = Vte^{-\gamma t} \quad (2.33)$$

$$v_1(t) = \frac{\partial g_1}{\partial t} = V(1 - \gamma t)e^{-\gamma t}$$

Luego la fuerza asociada a  $y_r$  proviene íntegramente de la nueva onda  $y_1$  (Hall, 1986), y como  $F = MV$ , entonces:

$$F_1(t) = (2T/c) \frac{\partial g_1(t - t_a)}{\partial t} \quad (2.34)$$

$$F_1(t) = \gamma mV[1 - \gamma(t - t_a)]e^{-\gamma(t - t_a)}$$

En la figura 2.11 se muestra las fuerzas actuantes, la primera corresponde al martillo sobre la cuerda, y la segunda a la cuerda sobre el martillo debida a la acción de la onda reflejada en  $x = 0$ .

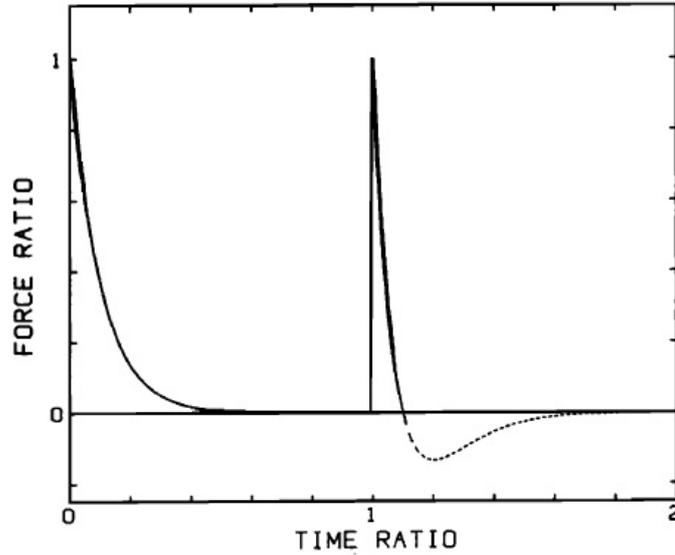


Figura 2.11: Fuerzas normalizadas en la cuerda vs el tiempo normalizado  $t/t_a$ .

Fuente: Hall, 1986

Se observa que la fuerza cambia de sentido en  $t - t_a = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{t_m}$ . Este es el instante en el que el martillo adquiere la velocidad negativa suficiente como para perder contacto con la cuerda. Al igual que para  $F_0$ , el momento de  $F_1$  se puede calcular a partir de:

$$I_1 = \int_{t_a}^{t_a + 1/\gamma} F_1(t) dt \quad (2.35)$$

$$I_1 = \frac{mV}{e}$$

$I_1$ , en el límite  $t_a < t_m$ , es una función delta aplicada en  $t = t_a$ , en el instante que la onda reflejada llega a  $x = aL$ . De esta manera se tiene el momento total sobre la cuerda en función del tiempo:

$$I = I_0 + I_1 = mv + mv/e \quad (2.36)$$

Estos momentos generan ondas que viajan en ambos sentidos de la cuerda a partir del punto de contacto en  $x = \alpha L$ , dando como resultado una onda estacionaria conteniendo distintos modos de vibración, y además hay que tener en cuenta que se tiene fuerzas externas que están generando perturbaciones. Entonces, la ecuación del movimiento es (Hall, 1986):

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + J \quad (2.37)$$

Donde  $J$  es la fuerza por unidad de longitud a lo largo de la cuerda y es función del tiempo y del espacio  $J(x,t)$ . De esta manera, la solución de la ecuación del movimiento es:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.38)$$

Para encontrar el desplazamiento vertical de la cuerda, se debe sustituir la ecuación 2.38 en la 2.37, multiplicar por  $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  para luego integrar a lo largo de la cuerda. De esta manera se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 C_n}{dt^2} + \omega_n^2 C_n = \frac{2}{\mu L} \int_0^L J(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dt \quad (2.39)$$

Hay que tener presente que, la fuerza  $\int_0^L J(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dt$  actúa, según la ecuación 2.39, a lo largo de la cuerda. Sin embargo, en el presente caso, se considera el golpe del martillo y el consiguiente rebote, como fuerzas que actúan en un punto de la cuerda en forma de impulsos, es decir,  $J(x, t) = F(t)\delta(x - \alpha L)$ . Por lo tanto, la ecuación 2.39 toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2 C_n}{dt^2} + \omega_n^2 C_n = \frac{2}{\mu L} F(t) \sin(n\pi\alpha) \quad (2.40)$$

Se debe resolver la ecuación 2.40 para hallar  $C_n$ , con el objetivo de poder determinar el espectro de energía a partir de éste coeficiente. Para esto, se puede hacer el siguiente artificio:

$$\frac{d^2 C_n}{dt^2} + \omega_n^2 C_n = e^{j\omega_n t} \frac{d}{dt} \left[ e^{-j2\omega_n t} \frac{d}{dt} (e^{j\omega_n t} C_n) \right] \quad (2.41)$$

Reemplazando en 2.40 e integrando dos veces:

$$C_n = \frac{2 \sin(n\pi\alpha)}{n\pi c\mu} e^{-j\omega_n t} \left( \int_t^{-\infty} e^{j2\omega_n u} du \right) \left( \int_u^{-\infty} e^{-j\omega_n v} F(v) dv \right) \quad (2.42)$$

Como se dedujo anteriormente, la fuerza aplicada es una suma de impulsos discretos:

$$F(t) = \sum_i I_i \delta(t - t_i) \quad (2.43)$$

Así se obtiene finalmente el valor del coeficiente temporal  $C_n$  de la ecuación del desplazamiento vertical de la cuerda (ecuación 2.38):

$$C_n(t) = \frac{2 \sin(n\pi a)}{n\pi a \mu} \sum_i I_i \sin \omega_n(t - t_i) \quad (2.44)$$

La suma de la ecuación 2.44 está limitada a aquellos impulsos con  $t_i < t$ . Por otra parte, para el cálculo del espectro de energía, primero se debe pasar  $C_n$  al dominio de la frecuencia, teniendo en cuenta que el corrimiento en el tiempo en la ecuación 2.44, se traduce en un corrimiento de fase, de manera que se obtiene:

$$C_n(\omega_n) = j \frac{2 \sin(n\pi a)}{n\pi a \mu} \sum_i I_i e^{j\omega_n t_i} \quad (2.45)$$

$$C_n(\omega_n) = j \frac{2 \sin(n\pi a)}{n\pi a \mu} (mV + (1/e)mV e^{j\omega_n t_i})$$

$$C_n(\omega_n) = j \frac{2 \sin(n\pi a)}{n\pi a \mu} mV (1 + (1/e)e^{j2n\pi a})$$

$I_0$  se calculó mediante la ecuación 2.28 y se produce en  $t = 0$ , mientras que  $I_1$  se calculó mediante 2.36 y se produce en el tiempo  $t_a$  (ecuación 2.21). Entonces ahora se puede calcular el espectro de energía de cada modo:

$$E_n = (m^2 V^2 / M) |1 + (1/e)e^{j2n\pi a}|^2 \sin^2(n\pi a) \quad (2.46)$$

$$E_n = (m^2 V^2 / M) [(1 + 1/e)^2 \sin^2(n\pi a) - (4/e) \sin^4(n\pi a)]$$

$$EL_n = \log[E_n / (m^2 V^2 / M)]_{dB}$$

En la figura 2.12 se muestra el gráfico del espectro de la energía a partir de la ecuación 2.46 expresada en decibelios:

La línea delgada muestra el espectro de la aproximación realizada en abase a un impulso. Se puede notar la diferencia entre ambos resultados. Para calcular la energía total transferida a la cuerda al momento de cesar el contacto, se tiene que considerar todos los modos, de manera que:

$$E_s = \sum_n E_n = (m^2 V^2 / M) \sum_n [(1 + 1/e)^2 \sin^2(n\pi a) - (4/e) \sin^4(n\pi a)] \quad (2.47)$$

Según Hall (1986), el martillo recupera el  $(1/e)^2 = 13,5\%$  de la energía, quedando 86.5% en la cuerda. Sin embargo, la suma de la ecuación 2.47 no es convergente, debido a que la masa  $m$  del martillo es infinitesimal y  $V$  es muy grande para que pueda mantenerse constante el momento, lo que pondría infinita energía en los modos grandes (valores altos de  $n$ ). Esta situación lleva a considerar de manera más realista la naturaleza de la masa del martillo.

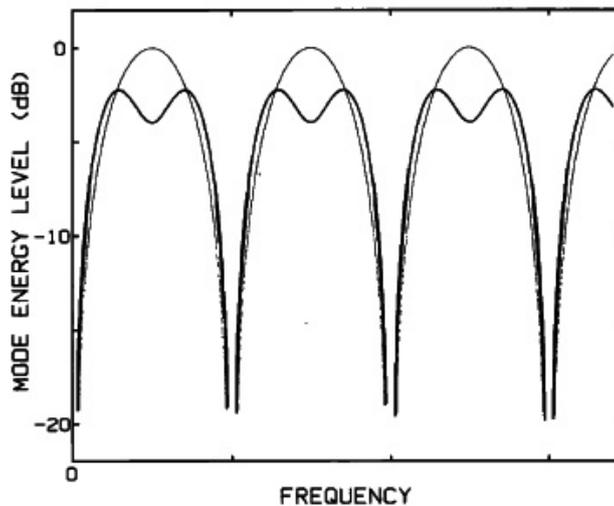


Figura 2.12: Espectro de energía de los modos.  
Fuente: Hall, 1986

### Modelo del martillo de masa pequeña pero finita (Hall, 1986)

De acuerdo con la ecuación 2.26,  $t_m$  (tiempo de desaceleración o de amortiguamiento del martillo) se calcula mediante:  $\gamma = 2T/mc = 1/t_m$ . Si la masa del martillo es finita, entonces  $t_m$  también lo será. Por lo tanto, el espectro de energía debe calcularse desde una fuerza que varíe continuamente en lugar de impulsos discretos (Hall, 1986).

Si se grafica las fuerzas de las ecuaciones 2.26 y 2.27 se obtiene el gráfico de la figura 2.13.

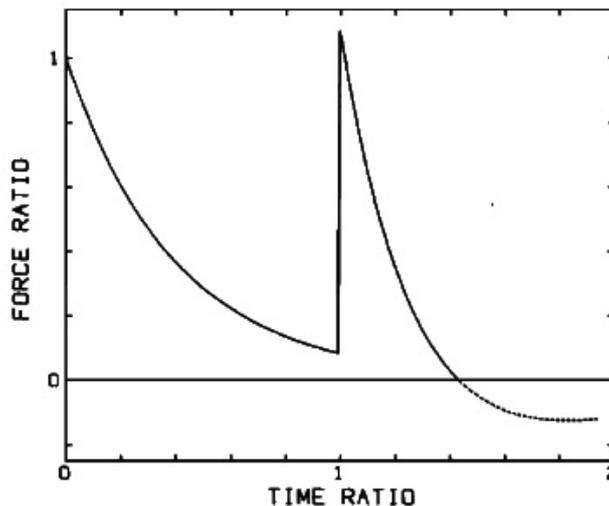


Figura 2.13: Historia de la fuerza para  $m = 1.6aM$ .  
Fuente: Hall, 1986

Al contrario de lo que muestra la figura 2.11, se puede observar que ahora la fuerza actuante es continua. Para facilitar los cálculos, se debe normalizar el tiempo de acuerdo con  $\tau = \gamma t = t/t_m$ . Normalizando el tiempo de contacto del martillo:  $t_a = 2\gamma L/c$ , se puede determinar el tiempo de llegada del primer reflejo:

$$\sigma = \gamma t_a = t_a/t_m = 4aM/m \quad (2.48)$$

Normalizando ahora el tiempo  $t_f$  en el que F llega a cero, es decir cuando el martillo deja de estar en contacto con la cuerda:

$$\lambda = \gamma t_f = t_f/t_m \quad (2.49)$$

Para poder determinar  $\lambda$ , se debe tener en cuenta que en  $t_f$  la fuerza es cero:  $F_0 + F_1 = 0$ , lo que da:

$$\lambda = 1 + \sigma + e^{-\sigma} \quad (2.50)$$

Por otro lado, también se debe normalizar la frecuencia. Recordando que  $t_m = 1/\gamma$ , se tiene entonces:

$$\omega = \omega_1 t_m = \omega_1/\gamma = (\pi c/L)(mc/2T) \quad (2.51)$$

$$\omega = \pi m/2M$$

Ahora, mediante el cálculo del momento total, se puede determinar la energía entregada al martillo debido a la reacción de la cuerda. Haciendo uso de las variables normalizadas se tendrá:

$$I = \int_0^{t_f} F(t)dt = \int_0^\lambda \frac{F(t)}{\gamma} d\tau \quad (2.52)$$

$$I = mV \left( \int_0^\lambda e^{-\tau} d\tau + \int_0^\lambda (1 - \lambda + \sigma) e^{-\tau} d\tau \right)$$

$$I = mV [1 - e^{-\lambda} + (\lambda - \sigma) e^{-(\lambda - \sigma)}]$$

$$I = mV [1 + e^{-(1+e^{-\sigma})}]$$

A partir de esta última ecuación del momento, se puede calcular la velocidad final del martillo, teniendo en cuenta que para su cálculo, la integral se tomó desde  $t = 0$ , lo que significa que la velocidad inicial del martillo es  $V$ , y por lo tanto:

$$V_f = -V [e^{-(1+e^{-\sigma})}] \quad (2.53)$$

Esta velocidad que tiene el martillo al momento de perder contacto con la cuerda implica que su energía es  $(mV_f^2/2)$ , y la fracción de energía transmitida a la cuerda es:

$$E_s/(mV_f^2/2) = 1 - [e^{-2(1+e^{-\sigma})}] \quad (2.54)$$

En relación a la ecuación 2.54, si  $m$  tiende a cero,  $\sigma$  se hace infinito, la fracción de energía es el 86.5 %, concordando con lo encontrado anteriormente. Si se incrementa  $m$ , la energía transmitida mejora un poco, llegando a 88.9 % (Hall, 1986).

Para calcular el espectro de potencia hay que recordar que la masa del martillo es finita y que, las fuerzas presentes en la interacción cuerda-martillo calculadas son:

$$F_0(t) = \gamma m V e^{-\gamma t} \quad (2.55)$$

$$F_1(t) = \gamma m V [1 - \gamma(t - t_a)] e^{-\gamma(t - t_a)}$$

En este caso, se debe utilizar la integral de la fuerza en lugar de la suma en la ecuación 2.45 para el cálculo de  $C_n$ , debido a su continuidad:

$$C_n(\omega_n) = j \frac{2 \sin(n\pi a)}{n\pi a \mu} H(n) \quad (2.56)$$

$$H(\omega_n) = \int e^{j\omega_n t} \frac{F(t)}{mV} dt$$

Luego, el espectro de energía correspondiente al modo puede calcularse a partir de:

$$E_n = (m^2 V^2 / M) \sin^2(n\pi a) |H|^2 \quad (2.57)$$

En el cálculo de  $H$  se debe tomar los tiempos de la integración de la misma manera que en la ecuación 2.52, en razón de que éstos no han sufrido ningún cambio:

$$H_n(\omega_n) = \int_0^{t_f} e^{j\omega_n t} dt + \int_{t_a}^{t_f} e^{j\omega_n t} \frac{F_1(t)}{mV} dt \quad (2.58)$$

$$H_n(\omega) = \int_0^\lambda e^{jn\omega\tau} e^{-\tau} d\tau + \int_\sigma^\lambda e^{jn\omega\tau} [1 - (\tau - \sigma)] e^{-(\tau - \sigma)} d\tau$$

Resolviendo la última integral e introduciendo el cambio de variable:  $z = jn\omega - 1$  y reordenando se obtiene:

$$H(n) = -(1 - e^{(z+1)\sigma})/z + e^\sigma (e^{z\lambda} - e^{z\sigma})/z^2 \quad (2.59)$$

Teniendo en cuenta que:  $(z + 1)\sigma = z\sigma = jn\omega\sigma = j2n\pi a$ , entonces finalmente se obtiene:

$$H(n) = -(1 - e^{j2n\pi a})/z + e^{j2n\pi a}(e^{z(\lambda-\sigma)} - 1)/z^2 \quad (2.60)$$

Si se considera el caso cuando  $m/M$  tiende a cero, entonces  $\omega = 0$ ,  $z = -1$  y  $\lambda - \sigma = 1$ . Reemplazando en la ecuación 2.6, se obtiene el caso trivial:

$$H(n) = H_0 = (1 + e^{j2n\pi a-1}) \quad (2.61)$$

Este resultado verifica lo que se obtuvo anteriormente en la ecuación 2.46, precisamente cuando se consideró al martillo con una masa puntual infinitesimal. Para un comportamiento más general y con  $n/M$  muy pequeño pero finito, es conveniente expandir la ecuación 2.60 en una serie de potencias, tomando sólo los términos lineales de  $n\omega$

$$H(n) = H_0 + jn\omega[1 + (3/e - 1)e^{j2n\pi a}] \quad (2.62)$$

En la figura 2.14 se muestra el espectro de energía calculado a partir de las ecuaciones 2.56 y 2.62, para el caso donde  $\sigma = 2,5$  y  $m = 1,6aM$ . Según Hall (1986), el efecto reactivo del término añadido a la solución trivial, es el de realzar la mitad izquierda de cada doble pico de la envolvente y atenuar el derecho.

Cuando  $n\omega > 1$ , entonces debe aplicarse una expansión en serie de potencias de la inversa, lo que da:

$$H(n) = (j/n\omega)[1 + e^{j2n\pi a}] \quad (2.63)$$

El término entre corchetes no tiene el multiplicador  $e^{-1}$  encontrado para  $H_0$ , lo que indica que para altas frecuencias el factor  $j/n\omega$  introduce una atenuación de  $6dB/oct$ , y esto se puede detectar en la mitad derecha del espectro.

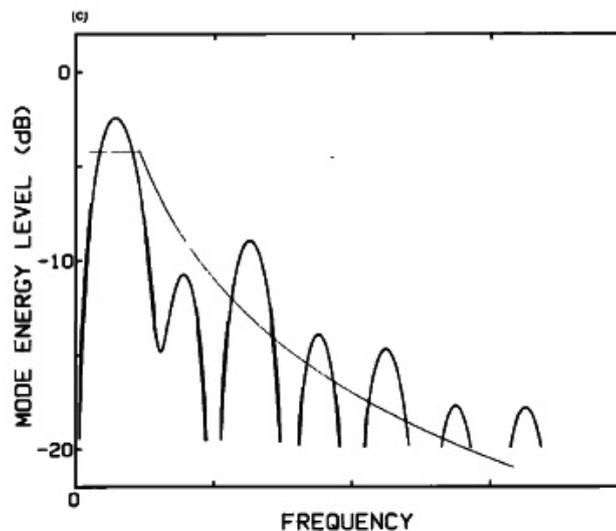


Figura 2.14: Espectro de energía para  $\sigma = 2,5$  y  $m = 1,6aM$ .

Fuente: Hall, 1986

En todo el análisis realizado se consideró que  $m/M$  es muy pequeño y por lo tanto sólo llega un frente de onda reflejado al punto de contacto, siendo éste el responsable del

rebote del martillo. Esta relación de masas se da en la banda de los tonos bajos y medios, en razón de que las cuerdas son gruesas. En los tonos altos, éstas son cada vez más delgadas, a medida que la frecuencia sea mayor, por lo que las masas llegan a ser comparables y el martillo permanece en contacto más tiempo, lo que trae como consecuencia que más de un frente de onda reflejado llegue al punto de contacto. Todo lo anteriormente mencionado constituye la restricción para la aplicación de los resultados obtenidos (Hall, 1986).

Si se observa las ecuaciones 2.56 y 2.57, ambas se encuentran en el dominio de la frecuencia, debido a que se aplicó la transformada de Fourier a  $C_n$ , con el fin de encontrar el espectro de energía. Así mismo, de acuerdo con estas ecuaciones,  $C_n$  es el producto de dos funciones en el dominio de la frecuencia, por lo tanto en el tiempo, se tendrá la convolución de las transformadas inversas de estas funciones. Lo relevante de este resultado es el hecho de que, para realizar el análisis de la señal del sonido generado, el método de los cepstrales se hace el más adecuado, debido a que éste, es capaz de encontrar ecos en una señal como producto de la convolución de dos señales en el dominio del tiempo.

Un aspecto que no ha tomado en cuenta el estudio anterior, es el hecho de que todas las cuerdas del piano tienen un sistema de amortiguamiento de las vibraciones llamado apagador, que presionan ligeramente la cuerda. El ejecutante tiene la posibilidad de deshabilitar la acción de este mecanismo mediante un pedal. En este caso, se tendría que considerar los puntos de contacto del apagador con la cuerda y añadir los reflejos que se producen a partir de ellos. En la figura 2.15 se muestra un esquema del sistema mecánico responsable de la generación del tono. En la mencionada figura no se incluye la parte externa de la tecla que está disponible al usuario.

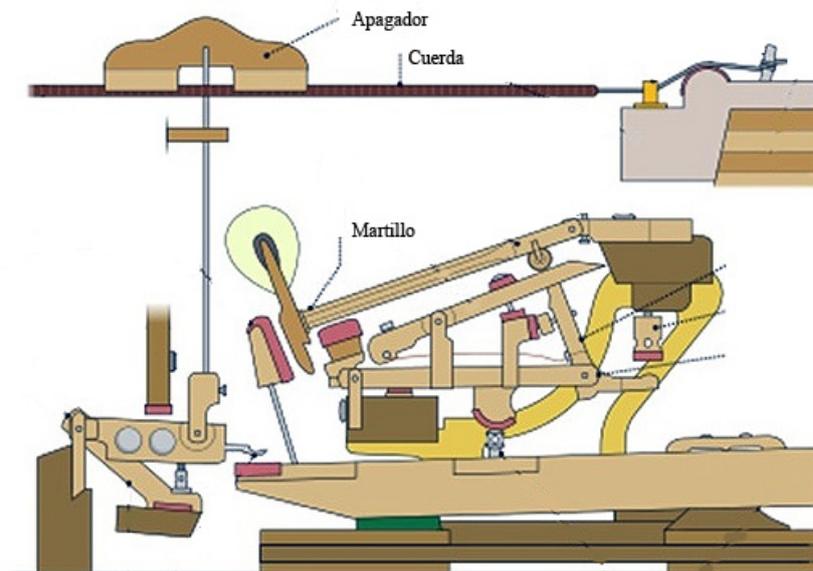


Figura 2.15: Sistema mecánico de un piano Steinway.

Fuente: <https://hinves.com/blog/demonstracion-del-funcionamiento-mecanico-de-un-piano-steinway-2/>

## 2.2. Marco Conceptual

### 2.2.1. Serie de Fourier

La teoría clásica para describir notas musicales es la serie de Fourier. Una señal  $f(t)$  (como la generada por la nota de un piano) definida en un intervalo  $[0, t_0]$ , puede expresarse en términos de la suma de senos y cosenos de la forma:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2n\pi t/t_0) + b_n \sin(2n\pi t/t_0)] \quad (2.64)$$

donde los coeficientes de fourier  $c_0, a_n, b_n$  están definidos por:

$$c_0 = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} f(t) dt \quad (2.65)$$

$$a_0 = \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} f(t) dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_0 = \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} f(t) dt, n = 1, 2, 3, \dots$$

Cada término de  $[a_n \cos(2n\pi t/t_0) + b_n \sin(2n\pi t/t_0)]$  tiene un periodo fundamental de  $t_0/n$ , por lo tanto una frecuencia de  $n/t_0$ . Así la ecuación 2.64 es una superposición de ondas con frecuencias múltiplos de la fundamental. Se sabe que si la función  $f(t)$  es diferenciable, la serie será convergente en cada punto del intervalo  $[0, t_0]$ .

Es más conveniente reescribir las ecuaciones 2.64 y 2.65 utilizando la representación exponencial de Euler. Así:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{j2n\pi t/t_0} + c_{-n} e^{-j2n\pi t/t_0}] \quad (2.66)$$

Con los coeficientes complejos de Fourier:

$$c_n = \int_{n=0}^{\infty} f(t) e^{-i2n\pi t/t_0} dt, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.67)$$

La serie de Fourier en 2.64 es idéntica, término a término, a la serie de la ecuación 2.66 y los coeficientes complejos están relacionados con aquellos de la ecuación 2.65 mediante  $c_n = (a_n + ib_n)/2$ . Desde que la señal de un sonido  $f$  tiene valores reales, se deduce de 2.672.4 que  $c_{-n}$  y  $c_n$  son complejos conjugados. En consecuencia, los coeficientes de Fourier con índice negativo duplican la información espectral (Alm and Walker, 2002).

Como ejemplo, la figura 2.16 muestra el espectro de una onda sinusoidal pura, constituido por una sola línea a 440 Hz.

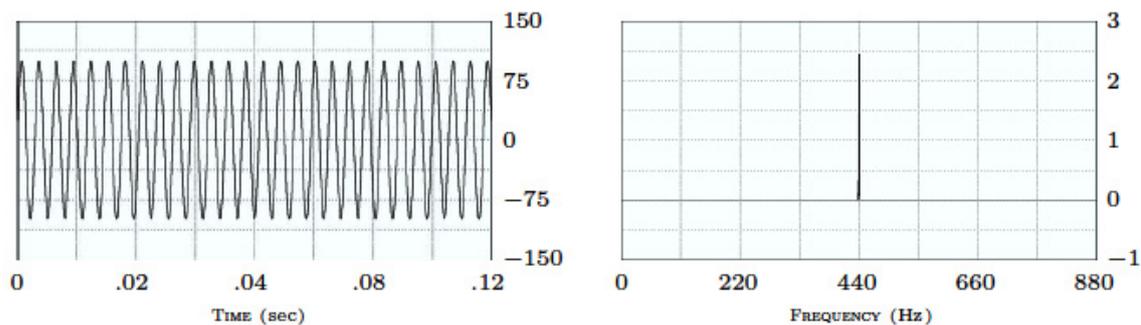


Figura 2.16: Espectro de un tono puro de 440 Hz.

Fuente: Alm and Walker, 2002.

La figura 2.17 muestra el espectro de la nota E4 de un piano. Puede observarse líneas espectrales de frecuencias aproximadas de 330 Hz, 660 Hz, 990 Hz, 1320 Hz y 1620 Hz. Notar que todas son múltiplos enteros de 330 Hz, que vendría a ser la fundamental.

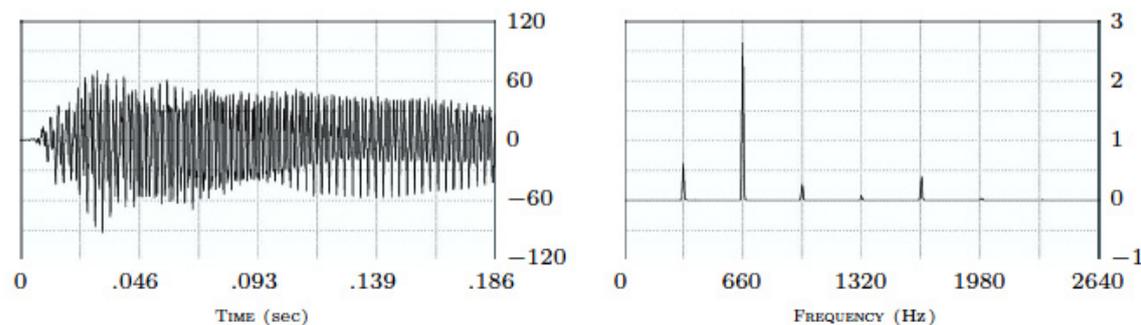


Figura 2.17: Espectro de frecuencia de la nota E4.

Fuente: Alm and Walker, 2002.

## Teorema de Parseval

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [ |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 ] \quad (2.68)$$

Esta igualdad tiene una interpretación física. Define la energía de una función  $g$  en el intervalo  $[0, t_0]$  como  $\int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt$ . Según Alm and Walker (2002), éste es el resultado más importante de la serie de Fourier. Entonces, a partir de la ecuación 2.67, es fácil ver que  $t_0 \cdot |c_n|^2$  es la energía de la componente exponencial  $c_n e^{j2n\pi t/t_0}$ . Así, esta ecuación muestra que "la energía de la señal del sonido  $f$  es igual a la suma de las energías de los coeficientes complejos (incluida la constante)". Es importante notar que  $|c_{-n}|^2 = |c_n|^2$ , entonces el teorema de Parseval puede escribirse de la forma:

$$\frac{1}{t_0} \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n|^2 \quad (2.69)$$

Así, el espectro de la serie de Fourier  $(2|c_n|^2)_{n>0}$  captura completamente la energía en las frecuencias que forman la señal de audio. Desde que  $|c_0|^2$  es la energía de una constante

es inaudible, debido a que el oído responde linealmente a las fluctuaciones de la presión del aire causadas por la señal de sonido.

### 2.2.2. Transformada Discreta de Fourier (DFT) y la Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Al igual que para señales continuas, el análisis de frecuencia de señales discretas se realiza mediante la transformada de Fourier. Ésta cambia el dominio de la señal, del tiempo a la frecuencia. Si la secuencia en tiempo discreto es  $x[n]$ , entonces su transformada es  $X(\omega)$ , de manera que:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2.70)$$

Se observa que  $X(\omega)$  es una función continua de la frecuencia, y por tanto, computacionalmente no es una representación adecuada de  $x[n]$ . Sin embargo, la señal puede representarse mediante muestras de su espectro (Proakis et al., 2007). En este caso, se tiene la Transformada Discreta de Fourier, la misma que puede definirse como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2k\pi kn/N}, k = 0, 1, 2 \dots N - 1 \quad (2.71)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2k\pi kn/N}, n = 0, 1, 2 \dots N - 1$$

Las ecuaciones 2.71 (a) y (b), son la transformada discreta de Fourier DFT directa e inversa IDFT respectivamente de la secuencia  $x[n]$ .

La DFT es una secuencia de  $N$  muestras equiespaciadas en frecuencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto del espectro de  $X(\omega)$  (ecuación 2.70).

La DFT tiene un papel muy importante en el diseño, análisis y realización de sistemas y algoritmos de tratamiento de señales en tiempo discreto. Para realizar el cómputo digital, existe una clase de algoritmos eficientes denominados la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Se puede mencionar los siguientes algoritmos FFT:

- Cálculo directo de la DFT.
- Método de divide y vencerás.
- Algoritmo FFT base 2.
- Algoritmo FFT base 4.
- Algoritmo FFT de base dividida.

Al igual que en la serie de Fourier, se puede aplicar el teorema de Parseval para ver la energía de las señales. A partir de la ecuación 2.68 se puede obtener su equivalente en el tiempo discreto:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (2.72)$$

### 2.2.3. Análisis de Fourier de señales mediante la DFT

De acuerdo con la ecuación 2.71, para realizar el cómputo de la DFT, es necesario que la señal sea una secuencia finita de muestras. Sin embargo, esto no siempre es posible, debido a que se cuenta con demasiadas muestras o son señales de longitud indefinida. De otro lado, en la gran mayoría de los casos, se debe analizar señales en el dominio de tiempo continuo, es decir éstas son analógicas, por lo que se debe cumplir con el teorema del muestreo para evitar el solapamiento en la frecuencia. En la figura 2.18 se muestra el diagrama de bloques de de proceso de análisis de Fourier en tiempo discreto:

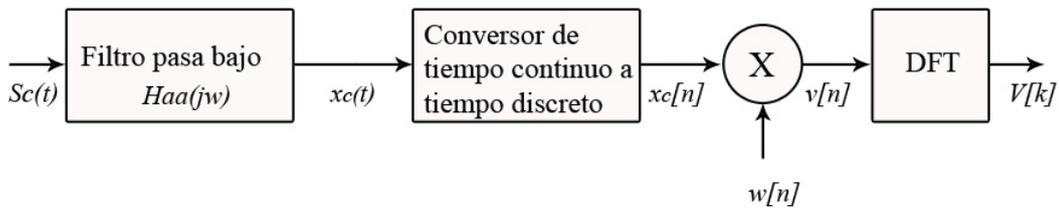


Figura 2.18: Proceso de análisis de Fourier en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo.

Fuente: Oppenheim and Schaffer, 2014.

Una señal continua, no siempre es de banda limitada, por lo que se debe filtrarla mediante un filtro pasa bajo. De no hacerlo, se corre el riesgo de tener solapamiento en sus componentes de frecuencia al momento de discretizarla.

La siguiente etapa en el proceso descrito en la figura 2.18, es la conversión de tiempo continuo a tiempo discreto, donde se muestrea la señal filtrada para poder procesarla en un computador. No es suficiente limitar en banda la señal original, como se mencionó anteriormente, sino al mismo tiempo se debe cumplir con el teorema de Nyquist, es decir que la frecuencia de muestreo debe ser al menos dos veces la frecuencia máxima de la señal analógica, con el objeto de evitar el solapamiento y la consecuente pérdida de la información que posee la señal. La respuesta en frecuencia de la conversión es entonces:

$$X(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(j\omega/T + j2\pi r/T) \quad (2.73)$$

Donde T es el periodo de muestreo. Se puede observar que es una repetición periódica del espectro de  $X_c(j\omega)$ , como resultado del muestreo en la etapa anterior. Además la ecuación 2.73 está normalizada en frecuencia y escalado en amplitud.

Para poder aplicar la DFT es necesario que la señal tenga un número finito de muestras, de allí la necesidad de multiplicarla por ventanas de tiempo de longitud finita  $L \ll N$ , donde  $N$  es el número total de muestras:

$$v[n] = w[n]x[n] \quad (2.74)$$

Al analizar este producto en la frecuencia, se tiene la operación de convolución periódica:

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (2.75)$$

La ecuación 2.75 viene a ser el espectro de la señal enventanada y se puede ver que se trata de función continua en la frecuencia. Al aplicar la DFT a  $v[n]$ , lo que se obtiene en realidad son muestras del espectro:

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v[n]e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.76)$$

$V[k]$  son muestras equiespaciadas de la transformada de Fourier de  $v[n]$ , siendo la distancia entre las frecuencias  $2\pi/N$ :

$$V[k] = V(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} \quad (2.77)$$

Es importante relacionar la frecuencia en tiempo continuo con la frecuencia de tiempo discreto (Oppenheim and Schaffer, 2014):

$$\omega = \Omega T \quad (2.78)$$

Así, las frecuencias de la DFT que corresponden a las aquellas de tiempo continuo:

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT} \quad (2.79)$$

#### ■ **Método de enventanado**

La DFT, está conformada por muestras de la transformada de Fourier de una señal limitada en banda. Las aplicaciones de la DFT en el procesamiento de señales son: el filtrado y el análisis espectral. En la figura 2.19 se muestra las ventanas más utilizadas (Oppenheim and Schaffer, 2014), las mismas que se definen mediante las siguientes ecuaciones:

$$\text{Rectangular } w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.80)$$

$$\text{Bartlett } w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, & M \text{ par} \\ 2 - 2n/M, & M/2 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\text{Hann } w[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos 2\pi n/M, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\text{Hamming } w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos 2\pi n/M, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\text{Blackman } w[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos 2\pi n/M + 0,08 \cos 4\pi n/M, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

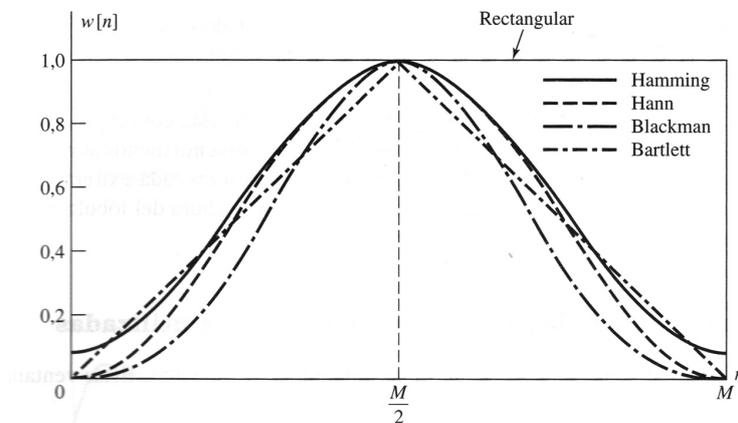


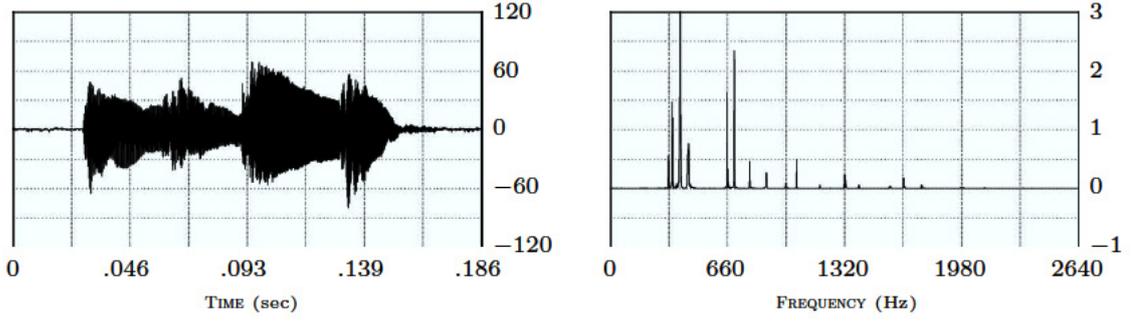
Figura 2.19: Ventanas comúnmente utilizadas.

Fuente: Oppenheim and Schaffer, 2014.

### ■ La DFT dependiente del tiempo

Cuando las señales no tienen estado estacionario la transformada de Fourier, pierde utilidad (Alm and Walker, 2002). Señales como las de radar, sonar, voz, comunicaciones de datos entre otras presentan esta característica. Un ejemplo de este tipo de señales es una secuencia de notas de un instrumento musical. Por ejemplo, Alm and Walker (2002), analizan la secuencia de notas de un piano: E4, F4, G4 y A4. La figura 2.20 muestra la grabación de la señal resultante en el dominio del tiempo y el espectro correspondiente, obtenido mediante la transformada de Fourier, calculada mediante la DFT. Puede observarse que es difícil distinguir las fundamentales y las armónicas, de hecho, el espectro es una mezcla de los espectros individuales, y no puede distinguirse el momento en el que cada una es generada.

La figura 2.20 ilustra el hecho que la DFT no basta para describir señales carentes de estado estacionario. Sin embargo, puede realizarse una aproximación mediante el enventanado de la señal con ventanas lo suficientemente pequeñas como para poder considerar que, en ese intervalo de tiempo la señal es estacionaria, y así poder aplicar la DFT. De esta manera se llega al concepto de la transformada de Fourier dependiente del tiempo. Sea  $x[n]$  la secuencia de una señal muestreada, entonces:



(a) Secuencia de notas de un piano

(b) Espectro de las notas de un piano

Figura 2.20: Secuencia E4, F4, G4 y A4. (a) Forma de onda. (b) Espectro .

Fuente: Alm and Walker, 2002.

$$X[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} \quad (2.81)$$

Hay que indicar que, en la notación del espectro, se usaron los símbolos [ ] para indicar que  $n$  es una variable discreta y  $\lambda$  es la variable continua con unidades de frecuencia (Oppenheim and Schaffer, 2014).  $w[m]$  es la secuencia de ventanas, y  $X[n, \lambda]$  es ahora una secuencia bidimensional, periódica en  $\lambda$  y período  $2\pi$ . La ecuación 2.81 puede interpretarse como la transformada de Fourier de la señal desplazada  $x[n+m]$ , vista a través de la ventana  $w[m]$ .

Si se considera nuevamente el trabajo de Alm and Walker (2002), para poder aislar las notas individuales dentro de la secuencia, si  $f(t)$  es el sonido, entonces se multiplica por una sucesión de ventanas:  $w(t-\tau_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Cada ventana tiene amplitud uno en un intervalo de tiempo  $[t_m - \epsilon, t_m + \epsilon]$  centrado en  $\tau_m$ , y decrece suavemente a cero para  $t < \tau_{m-1} + \delta$  y  $t > \tau_{m+1} - \delta$ . En la figura 2.21(b), donde  $M = 9$ , se muestran las ventanas. Aquí se está asumiendo que los valores  $\tau_m$  están separados uniformemente una distancia  $\Delta\tau$ . Estas ventanas también satisfacen:

$$\sum_{m=1}^M w(t - \tau_m) = 1 \quad (2.82)$$

sobre todo el intervalo  $[0, t_0]$ . Multiplicando ambos miembros de 2.82 por  $f(t)$  se puede ver que:

$$f(t) = \sum_{m=1}^M f(t)w(t - \tau_m) \quad (2.83)$$

Cada subseñal  $f(t)w(t - \tau_m)$  es distinta de cero solo en el intervalo  $t < \tau_{m-1} + \delta$  y  $t > \tau_{m+1} - \delta$  centrado en  $\tau_m$ . En las figuras 2.21 (c) y (d) se muestra el proceso de producir una subseñal:

Notar que en la figura 2.21 (d) el dominio de la subseñal  $f(t)w(t - \tau_m)$  está restringido a  $[\tau_{m-1} + \delta, \tau_{m+1} - \delta]$ , así, cuando se aplica la FFT a la secuencia  $f(t_k)w(t_k - \tau_m)$ , con  $t_k \in [\tau_{m-1}, \tau_{m+1}]$ , se obtiene los coeficientes de Fourier en el intervalo  $[\tau_{m-1} + \delta, \tau_{m+1} - \delta]$  para cada  $m$ .

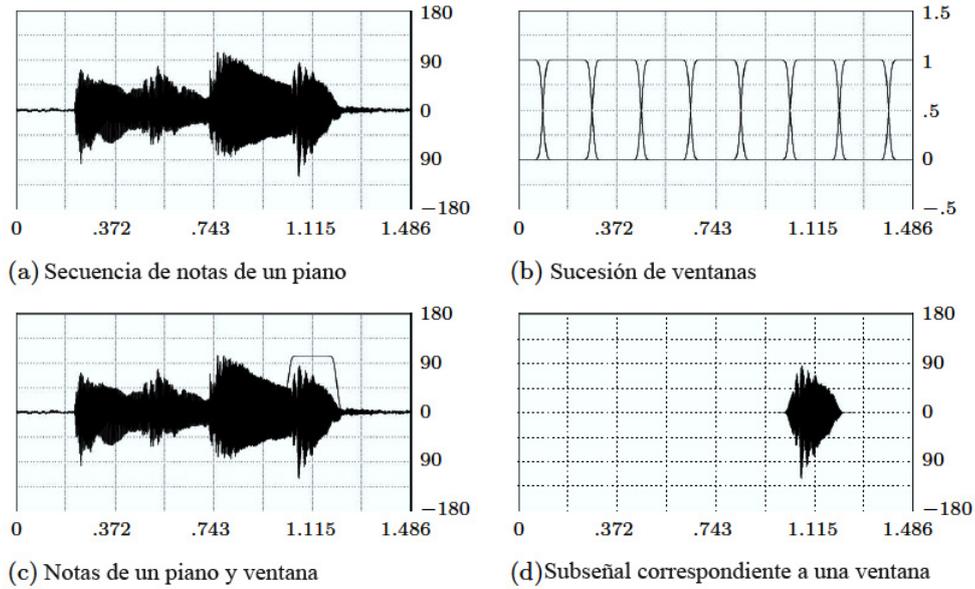


Figura 2.21: Secuencia de notas de un piano. (a) Forma de onda. (b) Sucesión de ventanas. (c) Secuencia de notas y una ventana. (d) Subseñal producida.

Fuente: Alm and Walker, 2002.

La gráfica de la ecuación 2.81 en el plano tiempo-frecuencia recibe el nombre de espectrograma. Para el caso del ejemplo, si se toma la secuencia de notas de la figura 2.20 bajo las siguientes condiciones:  $2^{15}$  valores de la secuencia  $f(t_k)$  para  $t_k$  equidistantes en un intervalo de tiempo de  $[0, 1.486]$ , Alm and Walker (2002) obtienen el espectrograma de la figura 2.22.

En la parte inferior se grafica la señal en el dominio del tiempo, mientras que en la parte superior, se tiene el espectro de energía  $2|F_m(k)|^2$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , obtenido de las  $M$  subseñales  $f(t)w(t - \tau_m)$ . Los valores más grandes tienen un color proporcionalmente más oscuro, mientras que las regiones blancas representan valores cercanos a cero. De otro lado, el eje vertical es la frecuencia en Hz, y el horizontal es el tiempo en segundos, de manera que el espectrograma da una descripción de la señal en el plano tiempo-frecuencia.

Se puede ver claramente en la figura 2.22 la separación en el tiempo del espectro de cada nota individual, apareciendo en el momento en que cada una es ejecutada, así se puede ver la fundamental y las armónicas de cada una de ellas.

La resolución del gráfico depende del ancho de las ventanas aplicadas. Mientras más cortas sean, se pierde precisión, pero se gana nitidez en los cambios abruptos de la señal (Oppenheim and Schaffer, 2014).

## 2.2.4. Análisis cepstral y deconvolución homomórfica

Borgert et al. (1963), observaron que el logaritmo del espectro de potencia de una señal contenía un eco en forma de componente aditiva periódica. Debido a ese eco y, por lo tanto, el espectro de potencia del logaritmo del espectro de potencia de la señal debería mostrar un pico en el retardo correspondiente al eco. Denominaron *cepstrum* a esta función. Aproximadamente al mismo tiempo, Oppenheim propuso una nueva clase de sistemas denominados *sistemas homomórficos*. Este concepto es muy general, pero ha sido muy estu-

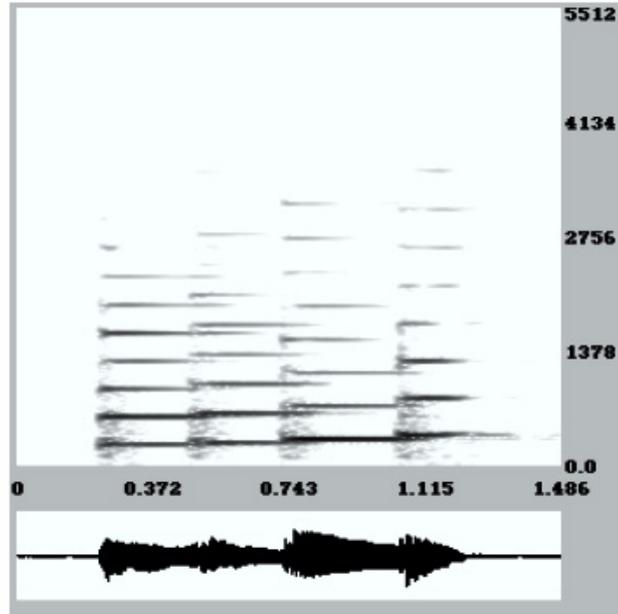


Figura 2.22: Espectrograma de la secuencia de notas E4, F4, G4 y A4 de un piano.

Fuente: Alm and Walker, 2002.

diado para la combinación de operaciones de multiplicación y convolución, porque en muchos modelos de señales intervienen estas operaciones. La transformación de una señal en su cepstrum es una transformación homomórfica que transforma la convolución en suma, por lo que es idónea para tratamiento de señales que han sido combinadas mediante una operación de convolución (Oppenheim and Schaffer, 2014).

### Eco simple

Sea una señal muestreada  $x[n]$  definida de la siguiente manera:

$$x[n] = v[n] + \alpha v[n - n_0] \quad (2.84)$$

Se puede ver que la señal está formada por la suma de una señal  $v[n]$  y una copia desplazada y escalada de si misma: eco (Oppenheim and Schaffer, 2014). Entonces  $x[n]$  puede considerarse como resultado de la convolución una señal con impulsos desplazados y escalados:

$$x[n] = v[n] * (\delta[n] + \alpha \delta[n - n_0]) \quad (2.85)$$

Si se toma la transformada de Fourier de  $x[n]$ , se obtiene:

$$X(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega}) [1 + \alpha e^{-j\omega n_0}] \quad (2.86)$$

$$|X(e^{j\omega})| = |V(e^{j\omega})| (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(n_0\omega))^{1/2}$$

El módulo del espectro de  $x[n]$  es una función real y continua de  $\omega$ . Es usual tomar el logaritmo, pero, como se verá más adelante, se aplica el logaritmo natural al módulo:

$$\ln |X(e^{j\omega})| = \ln |V(e^{j\omega})| + \frac{1}{2} \ln [1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(n_0\omega)] \quad (2.87)$$

Por comodidad se define  $C_x(e^{j\omega}) = \ln |X(e^{j\omega})|$ ,  $\omega = 2\pi f$ , y los sustituimos en la ecuación 2.87:

$$C_x(e^{j2\pi f}) = \ln |X(e^{j2\pi f})| = \ln |V(e^{j2\pi f})| + \frac{1}{2} \ln [1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(j2\pi f n_0)] \quad (2.88)$$

El primer sumando de la ecuación 2.88 depende la señal  $v[n]$ , mientras que el segundo es una combinación de la señal consigo misma: eco. Hay que tener presente que este eco es el logaritmo del módulo de una transformada de Fourier en tiempo discreto, por lo tanto es periódica en  $f$  con período  $1/n_0$ . Recordando que, si se tiene una señal periódica en el tiempo, en la frecuencia, su espectro es discreto con líneas múltiplos enteros de una frecuencia fundamental.  $C_x(e^{j2\pi f})$  es real, de variable continua y par de  $f$ . Por lo tanto, el análisis de Fourier es adecuado, tomando la transformada inversa en tiempo discreto:

$$C_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_x(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} C_x(e^{j2\pi f}) e^{j2\pi n f} df \quad (2.89)$$

$C_x[n]$  recibe el nombre de *cepstrum* de  $x[n]$ . Notar, que se regresó al dominio del tiempo discreto, pero que es distinto al inicial.

De otra parte, como el término  $\ln [1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(j2\pi f n_0)]$  es periódico en la frecuencia, con periodo  $1/n_0$  entonces,  $C_x[n]$  será distinta de cero sólo en múltiplos enteros de  $n_0$ . Borgert et al. (1963) la denomina *cuefrecia* fundamental de dicho término, para hacer la diferencia con la frecuencia, ya que  $n_0$  pertenece al dominio del tiempo y como  $x[n] \neq C_x[n]$ , hace la distinción entre uno y otro. En la siguiente figura se puede ver todo el proceso de la obtención del cepstrum de una señal:

Se puede demostrar que si  $\alpha < 1$ , entonces la ecuación 2.89 se convierte en:

$$C_x[n] = C_v[n] + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{\alpha^k}{2k}\right) (\delta[n + kn_0] + \delta[n - kn_0]) \quad (2.90)$$

En la ecuación 2.90,  $C_v[n]$  es el cepstrum de  $v[n]$ , es decir de la señal original, mientras que los impulsos discretos solo dependen del eco,  $\alpha$  y  $n_0$ .

## Cepstrum complejo

Para generalizar el concepto de cepstrum Oppenheim and Schafer (2014) consideran una secuencia estable y cuya transformada  $Z$  en forma polar es:

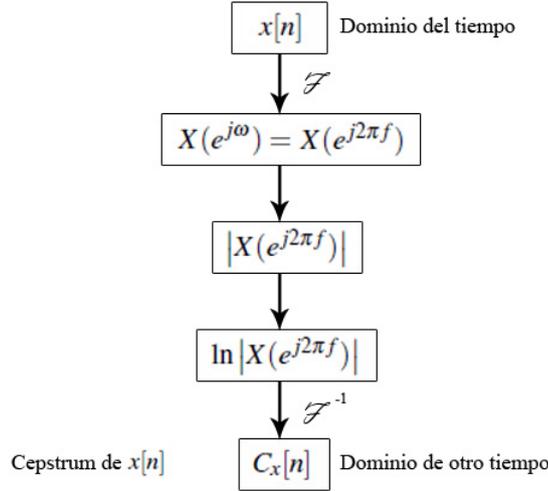


Figura 2.23: Proceso de obtención del cepstrum de una señal.

$$X(z) = |X(z)|e^{j\angle X(z)} \quad (2.91)$$

Siendo  $X(z) = |X(z)|$  y  $\angle X(z)$  el módulo y fase respectivamente de la función compleja  $X(z)$ . La secuencia al ser estable, la región de convergencia de  $X(z)$  incluye la circunferencia unidad y la transformada de Fourier en tiempo discreto de  $x[n]$  existe y es  $X(e^{j\omega})$ . Si luego se define:  $\hat{X} = \ln [X(z)]$  como la transformada Z de  $\hat{x}[n]$  (cepstrum complejo asociado a  $x[n]$ ). Luego se tendrá:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \ln [X(z)] = \ln [|X(z)|e^{j\angle X(z)}] \\ &= \ln |X(z)| + j\angle X(z) \end{aligned} \quad (2.92)$$

$\hat{X}(z)$  existe si  $\ln |X(z)|$  es convergente en serie de potencias de la forma:

$$\hat{X}(z) = \ln [X(z)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n]z^{-n}, \quad |z| \leq 1 \quad (2.93)$$

y la región de convergencia  $r_R < |z| < r_L$ . Así,  $\hat{x}[n]$  es cepstrum complejo de  $x[n]$  con  $0 < r_R < 1 < r_L$ . Se puede ver que  $\hat{x}[n]$  es estable, ya que la región de convergencia incluye a la circunferencia unidad.

Como se mencionó anteriormente, la transformada de Fourier de  $x[n]$  existe y es  $X(e^{j\omega})$ . Por lo tanto, para calcular el cepstrum asociado a  $x[n]$ , se debe tomar la DFT inversa de  $\ln X(e^{j\omega})$ :

$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln [X(e^{j\omega})] e^{j\omega n} d\omega \\ \hat{x}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\ln |X(e^{j\omega n})| + j\angle X(e^{j\omega n})] e^{j\omega n} d\omega \end{aligned} \quad (2.94)$$

Si ahora se toma solo la parte real de la ecuación 2.94 se obtendrá:

$$C_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(e^{j\omega n})| e^{j\omega n} d\omega \quad (2.95)$$

Como  $C_x[n]$  es par, entonces es igual a la parte conjugada simétrica de  $\hat{x}[n]$ , de manera que:

$$C_x[n] = \frac{\hat{x}[n] + \hat{x}^*[n]}{2} \quad (2.96)$$

La ecuación 2.96 es menos complicada en su cálculo, pero al tomar solo la parte real, no es posible recuperar  $x[n]$  a partir de  $C_x[n]$ . Sin embargo, como se demostrará más adelante, los cepstrum complejos pueden definir sistemas que sirven para separar y filtrar señales que han sido combinadas mediante la operación de convolución (Oppenheim and Schafer, 2014).

Como se describió anteriormente, para obtener el cepstrum de una secuencia, primero hay que hallar su transformada de Fourier en tiempo discreto, luego se toma el logaritmo complejo del módulo y finalmente la transformada inversa de Fourier. Todo este proceso define un sistema o una transformación en tiempo discreto, tanto de forma directa como inversa. En la siguiente figura se muestra los operadores  $D_x[\ ]$  y  $D_x^{-1}[\ ]$  que incluyen los tres pasos directos e inversos.



Figura 2.24: Transformación directa e inversa de una señal y su cepstrum complejo.

Fuente: Oppenheim and Schafer, 2014.

El sistema  $D_x[\ ]$  se representa en función de la transformada de Fourier mediante las ecuaciones:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (2.97)$$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \ln |X(e^{j\omega})|$$

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega$$

Las operaciones descritas en las ecuaciones 2.97 se describen en la figura 2.25.

Hay que recordar que para el cálculo numérico hay que aplicar la DFT en lugar de la transformada de Fourier, en razón a que se tiene secuencias finitas. Por lo tanto se tiene que usar las siguientes ecuaciones computacionales en lugar de las expresiones 2.97:

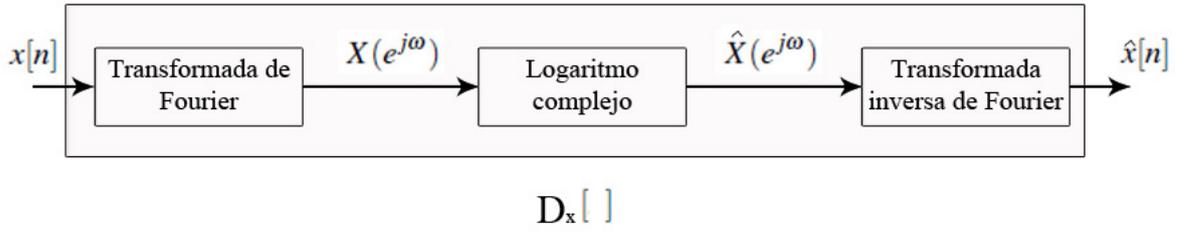


Figura 2.25: Sistemas en cascada para el cálculo de la operación de cepstrum complejo  $D_x[\ ]$ .  
Fuente: Oppenheim and Schaffer, 2014.

$$X[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \quad (2.98)$$

$$\hat{X}[k] = \ln |X(e^{j\omega})| \Big|_{\omega=(2\pi/N)k}$$

$$\hat{x}_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}[k] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

Donde  $\hat{X}[k]$  es una versión muestreada de  $X(e^{j\omega})$ , y  $\hat{x}_p[n]$  es una versión solapada en el tiempo de  $x[n]$ , por lo tanto:

$$\hat{x}_p[n] = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{x}[n + rN] \quad (2.99)$$

Tomando en cuenta la figura 2.25 y las ecuaciones 2.98, la figura 2.26 muestra estas operaciones a nivel de sistema.

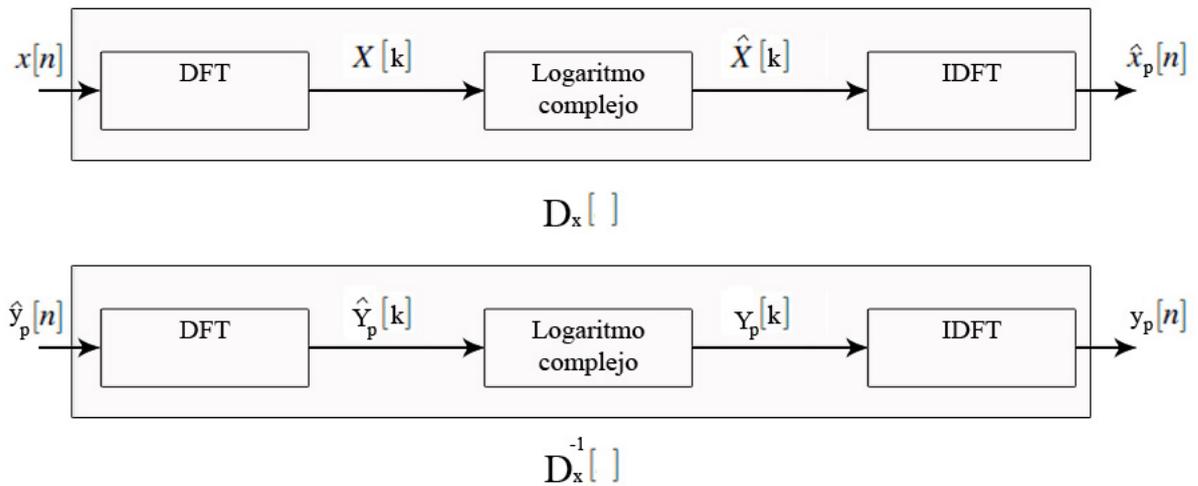


Figura 2.26: Realización aproximada utilizando la DFT de  $D_x[\ ]$  y  $D_x^{-1}[\ ]$ .

Fuente: Oppenheim and Schaffer, 2014.

Según Oppenheim and Schaffer (2014), se puede mejorar la aproximación de la transformada, incrementando la cantidad de muestras  $N$ . Añadiendo ceros a una secuencia de

entrada, generalmente es posible aumentar la frecuencia de muestreo del logaritmo complejo, por lo que no se producirá un solapamiento severo en el cómputo del cepstrum complejo.

### Cálculo recursivo del cepstrum complejo para secuencias de fase mínima

Una expresión equivalente para el cepstrum complejo está dada por

$$x[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] x[n-k] \quad (2.100)$$

Puede reordenarse de forma que proporcione una fórmula recursiva para  $\hat{x}[n]$ . Como se trata de secuencias de fase mínima, entonces  $\hat{x}[n] = 0$  y  $x[n] = 0$  para  $n < 0$ , entonces la ecuación 2.100 se transforma en:

$$x[n] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] x[n-k], \quad n > 0 \quad (2.101)$$

$$x[n] = \hat{x}[n] x[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] x[n-k], \quad n > 0$$

Despejando  $\hat{x}[n]$  de la ecuación 2.100 tenemos:

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{x[n]}{x[0]} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{x}[k] \frac{x[n-k]}{x[0]}, & n > 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

Para el cálculo de  $x[0]$  se puede aplicar el teorema del valor inicial para secuencias limitadas por la izquierda en el origen (Oppenheim and Schaffer, 2014).

$$\hat{x}[n] = \ln |x[0]| = \ln |A| \quad (2.103)$$

### Deconvolución utilizando el cepstrum complejo

Según Oppenheim and Schaffer (2014), en el filtrado de señales convolucionadas, el operador  $D_x[\ ]$  se denomina sistema característico para la convolución, ya que transformada convoluciones en sumas. Sea:

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \quad (2.104)$$

$$X(z) = X_1(z) X_2(z)$$

Siendo  $X(Z)$ ,  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$  las transformadas Z de  $x[n]$ ,  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  respectivamente. Luego tomando logaritmo para calcular el cepstrum complejo:

$$\widehat{X}(z) = \ln |X(z)| = \ln |X_1(z)| + \ln |X_2(z)| \quad (2.105)$$

$$\widehat{X}(z) = \widehat{X}_1(z) + \widehat{X}_2(z)$$

Entonces el cepstrum complejo es:

$$\widehat{x}[n] = D_x[x_1[n] * x_2[n]] = \widehat{x}_1[n] + \widehat{x}_2[n] \quad (2.106)$$

Un análisis similar permite demostrar que si:

$$\widehat{y}[n] = \widehat{y}_1[n] + \widehat{y}_2[n] \quad (2.107)$$

$$\Rightarrow D_x^{-1}[\widehat{y}_1[n] + \widehat{y}_2[n]] = \widehat{y}_1[n] * \widehat{y}_2[n]$$

Si  $\widehat{x}_1[n]$  y  $\widehat{x}_2[n]$  ocupan diferentes intervalos de frecuencia, entonces, se puede aplicar filtrado lineal al cepstrum para eliminar  $x_1[n]$  o  $x_2[n]$ . Si a esto le sigue una transformación mediante el sistema inverso  $D_x^{-1}[\ ]$ , la correspondiente componente será eliminada de la salida. La siguiente figura muestra en diagrama de bloques todo el proceso anteriormente descrito, donde  $L[\ ]$  es el filtro lineal aplicado y dependerá de cada sistema.

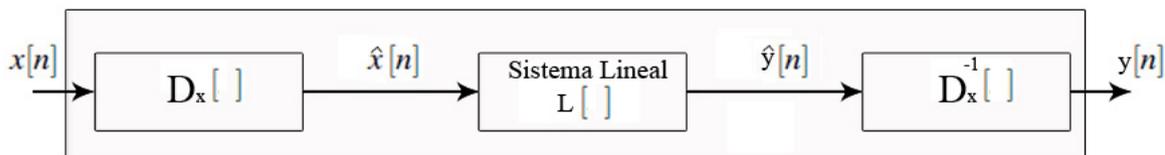


Figura 2.27: Sistema de principio general de superposición con convolución.

Fuente: Oppenheim and Schaffer, 2014.

## 2.3. Antecedentes empíricos de la investigación

Los estudios realizados en los sonidos de instrumentos musicales son de larga data. El primer trabajo reportado se remonta a Helmholtz (1885-1954), quien postuló que la percepción del timbre depende de la forma espectral resultado de un análisis en tiempo real en la membrana basilar. A esto se llamó estructura armónica (Brown, 1999). Desde entonces se han desarrollado numerosas investigaciones y, con el advenimiento de los sintetizadores, el objetivo se centró en la síntesis de los sonidos para poder reproducirlos lo más fielmente posible en dichos instrumentos; el piano no fue la excepción. Sin embargo, las limitaciones computacionales constituyeron una barrera para el logro de mayores avances. De otro lado, para el caso del piano, otros autores prefirieron comprender lo más exactamente posible, la dinámica involucrada en la generación de los sonidos, teniendo en cuenta la complejidad mecánica del instrumento.

### 2.3.1. Estudios de síntesis

Los estudios de síntesis se basan en el conocimiento de la envolvente ADSR de las notas y del espectro de las mismas. De esta manera se han realizado investigaciones en el dominio del tiempo, frecuencia y tiempo-frecuencia.

Los métodos utilizados a lo largo del tiempo para caracterizar los sonidos del piano han sido variados, y dependen del enfoque con el que se ha trabajado. Si el objetivo es el reconocimiento y posterior clasificación, no importará mucho los residuales o ruido blanco. En caso que se quiera hacer síntesis y posterior estudio perceptual, entonces lo anterior no es suficiente, y habrá que tomar en cuenta no sólo el piso de ruido, sino los momentos que presenta la señal: ataque, decaimiento y liberación.

Para trabajar en el dominio del tiempo se debe tomar en cuenta los momentos de la señal (envolvente ADSR). Es así que, Nieuwenhuijse et al. (1998) utilizan el clásico modelo sinusoidal para estimar la envolvente exponencial de las sinusoides que aparecen durante el ataque, de manera que éstas puedan representarse de forma eficiente mediante sistemas lineales invariantes en el tiempo. Sin embargo, no toman en cuenta que, dichos sistemas son causales, y ésta propiedad introduce retardos en la respuesta (Masuyama et al., 2018). Tampoco es considerado el transitorio previo al ataque, que es el momento cuando se genera toda la base de ruido de la señal. Siguiendo la misma línea, Badeau et al. (2002), utilizan el modelo sinusoidal clásico con una envolvente exponencial amortiguada, EDS (Exponentially Damped Sinusoidal). De esta manera sintetizan las frecuencias, la envolvente y las amplitudes, durante el ataque de la nota C5 (do de 525 Hz aproximadamente). El resultado obtenido es bastante bueno en los armónicos de la fundamental, sin embargo, en los subtonos, la diferencia es bastante grande. Como su trabajo fue realizado con notas tocadas de forma consecutiva aplicaron un espectrograma para ver el resultado. La figura 2.28 muestra claramente el cambio en los espectros correspondientes, pero para mostrar esto, hicieron un inventanado adecuado para esta condición. Sin embargo, esto no permite ver con claridad el transitorio previo al ataque.

Otros autores como Alm and Walker (2002) trabajaron con distintos instrumentos como el piano, la flauta y la guitarra en los dominios de la frecuencia y tiempo-frecuencia. Para la detección del tono, aplican la transformada de Fourier y la FFT, mientras que, para realizar la síntesis, sólo la serie de Fourier. Este método es suficiente para una sola nota. Sin embargo, como su estudio fue en una secuencia, el análisis de Fourier no resultó adecuado. Para resolver esta situación, utilizaron espectrogramas, además de escalogramas. Así mismo, en el análisis no tomaron en cuenta el transitorio previo al ataque ni tampoco la dinámica de la generación del sonido. Sin embargo, para la detección del espectro de frecuencias correspondiente al ataque, los espectrogramas y escalogramas pueden resultar útiles.

Los trabajos anteriores se centraron en las frecuencias correspondientes a los modos de la señal, ya sea en el dominio del tiempo, frecuencia, tiempo-frecuencia (incluidos los escalogramas) modelando el ataque mediante envolventes exponenciales amortiguadas, y realizando análisis mediante escalogramas. Laurenti et al. (2007) abordaron el problema con un enfoque diferente. Se trata de una propuesta nueva para la época, ya que el espectro del componente de ruido es separado de toda la señal, siendo ésta la suma de componentes sinusoidales, transitorios y ruido. El algoritmo aplicado es una transformación no lineal de la amplitud del espectro, cuya lógica se basa en que la mayor cantidad de energía es transportada por las componentes de frecuencia que determinan el tono (modos), mientras

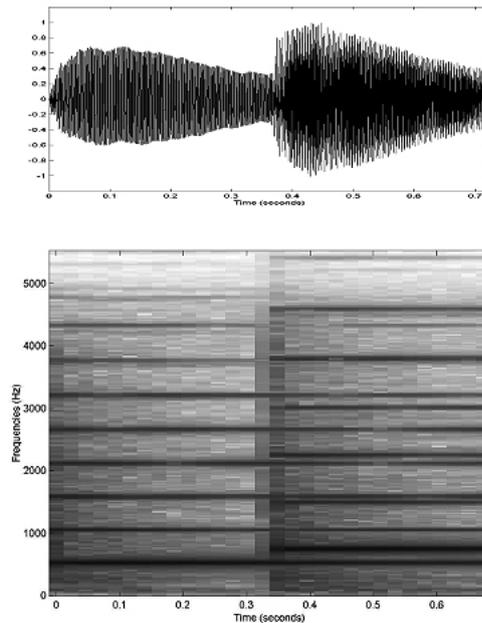


Figura 2.28: Espectrograma de las notas C5 y G5.

Fuente: Badeau et al., 2002.

que el resto tiene menor energía. De esta manera, se obtiene la envolvente espectral del ruido, donde se supone se encuentra el espectro del sonido que se quiere identificar. Sin embargo, los experimentos realizados, fueron hechos con sonidos sintetizados, y éstos al no contar con el ruido que un instrumento musical genera de forma natural, añadieron ruido gaussiano y estacionario, además de aplicar el método a toda la señal. Esto último no es lo más recomendable, pues el sonido de los instrumentos musicales no presenta estado estacionario. Además, la base de ruido no obedece a cuestiones probabilísticas sino, a las partes de un complejo sistema mecánico que es accionado cuando se presiona una tecla. Sin embargo, el método puede resultar útil para obtener la envolvente del piso de ruido. De otro lado, ante la falta de un estado estacionario, Beltrán and De Leon (2010) proponen utilizar la transformada continua compleja de wavelet (CCWT) como un posible método para analizar la señal. Éste fue aplicado al estudio de la flauta. Los resultados obtenidos mostraron que es posible aplicar este método para estos casos, pero, los autores mencionados encontraron que el algoritmo resultante no es el más eficiente.

Por su parte Caetano et al. (2013), obtienen el piso de ruido restando de la señal original la obtenida por síntesis mediante modelos sinusoidales. Utilizaron 14 instrumentos musicales, entre ellos el piano y procesaron la nota C3 (do de 131 Hz), con buenos resultados desde un punto de vista cuantitativo, pero, perceptualmente no fueron a la par. Para mejorar esta situación, Caetano et al. (2016) utilizan un método de estimación de la amplitud y la frecuencia modulada (AM-FM) de sinusoides, eaQAM, capaz de capturar ataques suaves, transitorios y ruido instrumental, pero esta vez analizando la banda completa, con mayor cantidad de instrumentos y la misma nota de piano. Los resultados cuantitativos y de percepción mejoraron mucho, sin embargo, estos últimos aún no llegan al noventa por ciento para el caso del piano.

Estudios focalizados en las notas del piano fueron realizados por Szeto and Wong (2013) mediante un espectrograma (figura 2.29) donde se puede observar todos los modos correspondientes con ligeras inarmonías, sin embargo, no se observa el transitorio al inicio

de la señal. Esto es porque las ventanas utilizadas no son lo suficientemente pequeñas como para detectar este estado, pero, también se puede observar el piso de ruido existente. Otro aspecto a considerar partir de la figura 2.29 es el hecho de que los modos no decaen a la misma tasa no tampoco lo hacen al mismo tiempo: el primer modo decae más rápido que los modos desde el segundo al sexto, mientras que los superiores lo hacen mucho más rápido. En la síntesis realizadas por Szeto and Wong (2013), la señal es modelada mediante sinusoides cuyas amplitudes son estimadas a partir de la correspondiente amplitud de la fundamental. Si bien incluyen ruido, éste no es analizado y en su lugar consideran uno de tipo gaussiano.

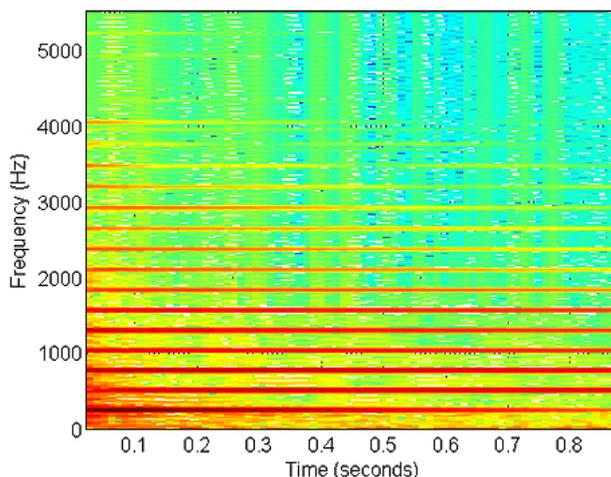


Figura 2.29: Espectrograma de las nota C4.

Fuente: Szeto and Wong 2013.

De otro lado, Cheng et al. (2015) centran su estudio en la parte del decaimiento de los sonidos de un piano. Existen distintos patrones para éste, debido al acoplamiento entre el puente y la caja y entre las múltiples cuerdas de las notas. En su trabajo llegan a distinguir hasta tres tipos de decaimiento de cada parcial: lineal, doble decaimiento y curvo (latidos), aunque Weinreich (1977), mediante experimentos en las cuerdas de un piano explica la aparición del doble latido en la envolvente ADSR del sonido. Mediante el uso de regresiones y con ajuste no lineal, Cheng et al. (2015) obtienen las envolventes temporales de las señales. En este punto, también hubiera sido posible obtener dichas envolventes mediante un filtrado adecuado en la frecuencia. Así mismo, el foco de atención para el decaimiento fueron los modos de las cuerdas y la inarmonía, por lo que el piso de ruido fue dejado de lado, y en todo caso, éste casi ya no tiene la energía suficiente en el decaimiento, como se puede observar en la figura 2.29.

Para el sonido de un instrumento musical que contiene parciales o modos, el comportamiento de éstos en el momento del ataque es particularmente importante. Masuyama et al. (2018) proponen un método de descomposición modal para este momento, utilizando el ADMM (alternating direction methods of multipliers) para su optimización. El ADMM se basa en el hecho de que, un modo corresponde a un solo pico de frecuencia y para poder identificar a cada uno, se debe filtrar la señal. Normalmente se utilizan filtros lineales causales y el problema de éstos es que, introducen retardos, corrompiendo de esta manera la descomposición modal, generando imprecisiones en la fase, por lo que no es adecuado para el análisis, siendo necesario utilizar un proceso no lineal (Masuyama et al., 2018). El resultado de la aplicación de este método mostró ser efectivo en la descomposición modal, y aún en los residuales, concluyendo en relación a éste último, que se trataría del espectro del golpe del martillo sobre las cuerdas. El residual así obtenido no sólo tiene el sonido de éste, sino también otras frecuencias debidas a otros elementos mecánicos del sistema de generación del

golpe sobre las cuerdas, que también producen sonidos, aunque de baja energía en comparación con los modos (Askenfelt, 1993). En todo caso, es el único que menciona al golpe del martillo, aunque no lo estudia en el momento en el que se produce.

En los trabajos anteriormente descritos, de una u otra manera se obtuvo el piso de ruido, importante para el estudio del golpe del martillo. Sin embargo, todos los métodos utilizados no tomaron en cuenta la secuencia de eventos desarrollados durante el proceso que van desde la presión sobre la tecla hasta, la formación de las ondas transversales en la cuerda. Esto trae como consecuencia que, la percepción no logre ser óptima.

De otro lado, existen investigaciones en la que se analizan las señales del sonido de distintos instrumentos con el objetivo de realizar una clasificación. Dentro de éstos se tienen, entre los más destacados a Bhalke et al. (2016), quienes proponen una secuencia de pasos para la extracción de silencios productos de la grabación, obtención de las características temporales, espectrales, cepstrales y la clasificación por familias de instrumento. Por su lado, Joshi and Nadgir (2014), extraen características temporales, en la frecuencia, cepstrales, MFCC y sus variantes, así como en el dominio wavelet. En las características temporales destacan los cruces por cero (ZCR) el valor cuadrático medio de la energía de la señal, mientras que, en la frecuencia, flujo, centroide espectral, ancho de banda. El trabajo fue realizado con instrumentos musicales hindúes; además no analizan los momentos de la señal, y tampoco realizan la síntesis de los sonidos estudiados. Lo interesante de estos dos trabajos es la metodología que siguen, es decir, proponen una secuencia de acciones para obtener las características deseadas. Para el análisis y síntesis de los sonidos del piano, se podrían utilizarlos, al menos para extraer sus características básicas.

Como se puede ver a medida que la potencia de cómputo fue mejorando, se fueron aplicando algoritmos cada vez más complejos para obtener una mejor síntesis; siendo el foco de atención la señal del sonido obtenida y a partir de un análisis de la misma, se han desarrollado síntesis mediante la aplicación de distintos métodos. Unos centrados en el piso de ruido mientras que otros en las características temporales, en especial la envolvente ADSR.

### **2.3.2. Estudios de la dinámica**

En el contexto de la dinámica, el elemento central es el martillo. Éste desde el momento que es accionado y junto a todos los mecanismos involucrados generan la onda en las cuerdas y así, la presión sonora.

Dentro de los trabajos centrados en el martillo, Strutt and Rayleigh (1945) consideran al martillo como una masa puntual que alimenta a las cuerdas durante el tiempo que dura el contacto. Este mismo enfoque es utilizado posteriormente por Hall (1987), quien llega a modelar las características de las fuerzas aplicadas sobre una cuerda, determinando el impulso que generan y, finalmente determina su espectro. Considera que el acoplamiento martillo-cuerda es rígido pues, no toma en cuenta el fieltro con el que está recubierto el martillo y, que le da elasticidad al momento del golpe sobre las cuerdas, afectando al sonido resultante. Además, en estudios realizados por Suzuki and Nakamura (1990) resaltan que, dependiendo del propósito de la investigación, el martillo debe ser modelado como un sistema más complejo que una masa puntual o una masa más resorte. De otro lado, Morse and Ingard (1986) y, Helmholtz (2013) consideran que el martillo ejerce una fuerza arbitraria sobre la cuerda en uno o varios puntos para, posteriormente ser liberada. Este enfoque no es tan cierto,

porque la fuerza dependerá del ejecutante quien, sigue las instrucciones en la partitura y, dependiendo del modo (stacatto o adaggio) o el nivel dinámico (forte, meso forte o piano) con el que se toque la tecla, obtendrá el sonido correspondiente (Askenfelt, 1993).

El puente tiene un efecto crucial en el tono del piano, acoplando las cuerdas pertenecientes a una nota así como el puente, la cama, la caja de resonancia en un sistema único. En este sentido, Weinreich (1977) realizó experimentos que corroboran lo anteriormente mencionado. El trabajo consistió en medir los desplazamientos de la cuerda en el punto de contacto, así como la presión sonora. Los resultados obtenidos indicaron que la parte resistiva de la admitancia del puente es mayor en la dirección vertical mientras que, la reactiva es de magnitud comparable en las dos direcciones transversales y es responsable de los corrimientos de frecuencia. En relación a los desplazamientos de la cuerda, la figura 2.30 los muestra en la dirección vertical.

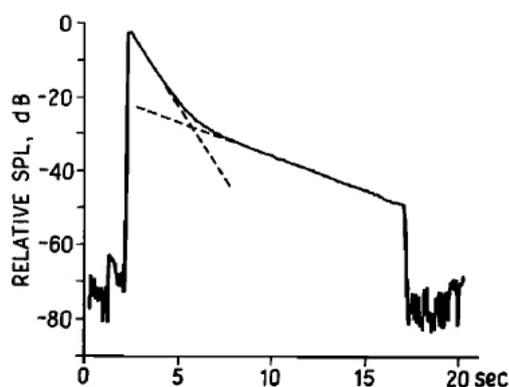


Figura 2.30: Nivel de presión sonora relativa para una sola cuerda D4, 311Hz.

Fuente: Weinreich, 1977.

Se observa que el decaimiento presenta dos tasas de disminución. La parte más rápida se debe a la polarización vertical de la onda en la cuerda mientras que, la segunda es debida a la polarización horizontal (Weinreich, 1977). La misma figura muestra un transitorio en el desplazamiento de la cuerda y también en la presión sonora. Este intervalo es de suma importancia para el análisis que se pretende realizar en la presente investigación, porque es en ese momento en que se produce el golpe del martillo.

En relación a los desplazamientos de las cuerdas, Weinreich (1977) logra medir los correspondientes a la polarización vertical, con dos cuerdas activas de las tres que conforman las notas A4 y C4. La figura 2.31 muestra los resultados obtenidos.

Comparando la presión sonora y los desplazamientos de las cuerdas, existe cierta similitud que era de esperarse, porque al moverse crean zonas de alta presión en el sentido de su movimiento, mientras que en sentido contrario se produce una descompresión. Después de un tiempo igual a la mitad del periodo de oscilación vertical, el movimiento se invierte durante la otra mitad del periodo, completando un ciclo y, todo el proceso vuelve a comenzar de nuevo con una frecuencia igual a la fundamental de la nota, de manera que se producen ondas de presión al rededor de la cuerda, las mismas que se desplazan hacia la caja de resonancia y posteriormente al exterior, obteniendo finalmente el sonido percibido.

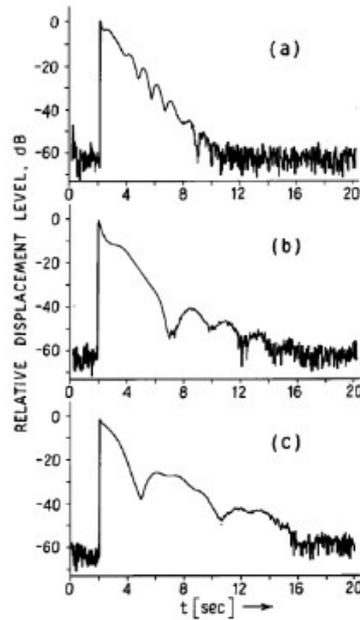


Figura 2.31: Nivel de desplazamiento, polarización vertical. (a) y (c) A4 (440 Hz); C4 (262 Hz).

Fuente: Weinreich, 1977.

### Transitorio previo al ataque

Los estudios de Weinreich (1977) muestran un transitorio previo al ataque (figuras 2.30 y 2.31). Askenfelt and Jansson realizan un estudio de ese lapso de tiempo en *From touch to string vibrations*, una serie de tres publicaciones (*I: Timing in the grand piano action*, *II: The motion of the key and hammer*, *III: String motion and spectra*). En estos estudios se resalta la importancia de la manera cómo se presiona la tecla porque, de esto depende la aceleración del martillo, el tiempo de duración del contacto con la cuerda y todas las vibraciones del sistema cuyas frecuencias contribuyen en la formación del piso de ruido.

En relación a la duración del contacto martillo-cuerda, Askenfelt and Jansson (1990) concluyen que, el tiempo de este contacto depende de la escala debido a que las masas tanto del martillo como de la cuerda no son las mismas en todo el piano así como de la compliancia no lineal del martillo, además depende del nivel dinámico con el que se haya tocado la tecla. Otro aspecto a tomar en cuenta es que, durante el tiempo de contacto, el martillo continúa moviéndose desplazando a la cuerda y, al mismo tiempo recibe impulsos debido a la reflexiones que provienen de la clavija de una frecuencia de 2100 Hz, aproximadamente 8 veces la fundamental (en este caso la nota C4 de 261 Hz) y al mismo tiempo detectaron unas oscilaciones de 800 Hz en la dirección vertical (Askenfelt and Jansson, 1991). La detección de esta frecuencia va a permitir identificar el contacto martillo-cuerda dentro de un espectrograma.

De otro lado, durante los primeros segundos de las señales figuras (2.30 y 2.31), Askenfelt (1993) encuentra que, al inicio de una nota, una variedad de transitorios se mezclan, algunos de los cuales se propagan mediante las cuerdas y otros mediante la estructura del instrumento. Los transitorios de la estructura ocurren en el puente antes y después que la primera onda transversal de la cuerda llegue al extremo más alejado (ubicado en el puente) y los denomina precursores y post cursores respectivamente.

## Precursor debido a la cuerda

Askenfelt and Jansson (1990) encuentra que, el impulso del martillo se transmite casi instantáneamente hacia el puente y la caja de resonancia por la propagación longitudinal en la cuerda. Esto debido a que la clavija del puente sufre un tirón por el estiramiento de la cuerda como producto del golpe del martillo. Este tirón llega varios mili segundos antes que la onda transversal y, produce oscilaciones en el puente. La amplitud de estas oscilaciones es de 9dB a 12 dB menor que la correspondiente de la onda transversal. La figura 2.32 muestra la aceleración del puente:

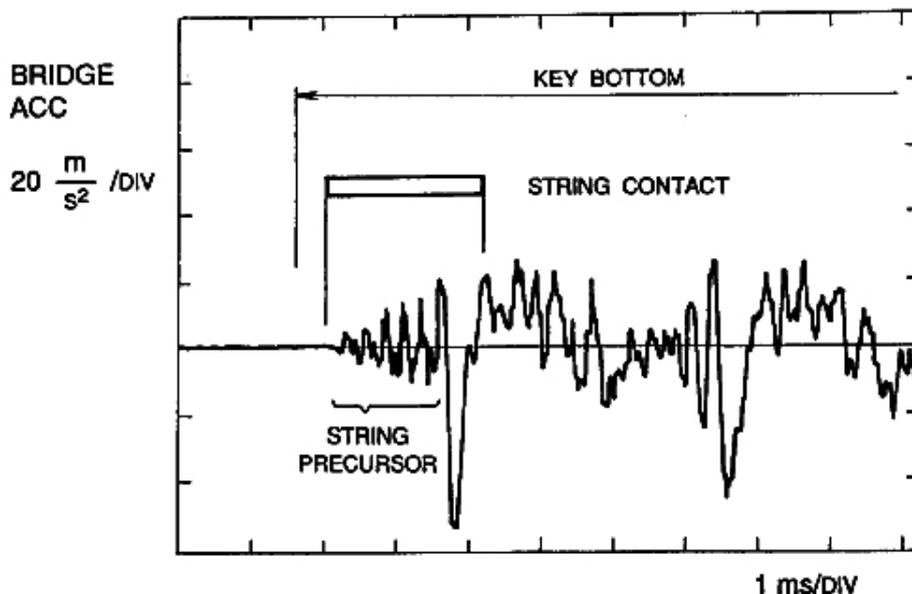


Figura 2.32: Aceleración del puente durante el precursor de la cuerda de la nota C4 en modo stacatto.

Fuente: Askenfelt, 1993.

El contacto del martillo con la cuerda dura aproximadamente de uno a dos mili segundos y, en la figura 2.32 se observa que hay unas vibraciones del puente casi inmediatamente se produce éste. Al realizar un análisis espectral de esta señal, Askenfelt (1993) encuentra que, la transmisión mediante el precursor de la cuerda es el mayor camino para los sonidos del ataque, por lo menos por encima de 1 KHz.

## Precursor debido al golpe

Para determinar las fuerzas involucradas y las vibraciones de la estructura, Askenfelt (1993) reemplaza las cuerdas por una una masa ficticia. Así determina que, la fuerza aceleradora en la tecla y después la reacción sobre el martillo, seguida de la fuerza retardada cuando el martillo es tomado por el atrape, son transmitidas hacia la cama y otras partes de la estructura. De esta manera encuentra que, el puente se mueve antes y después del golpe del martillo. La existencia de un sonido inicial antes del contacto con la cuerda era conocido por buen tiempo. La figura 2.33 muestra la señal producida.

Durante esta parte, el movimiento del puente es dominado por resonancias entre 290 Hz y 440 Hz, que fueron rastreadas en la tecla (Askenfelt 1993). Además también, hay resonancias de 100 Hz en la caja de resonancia, 95 Hz y 330 Hz en la cama, 250 Hz en el

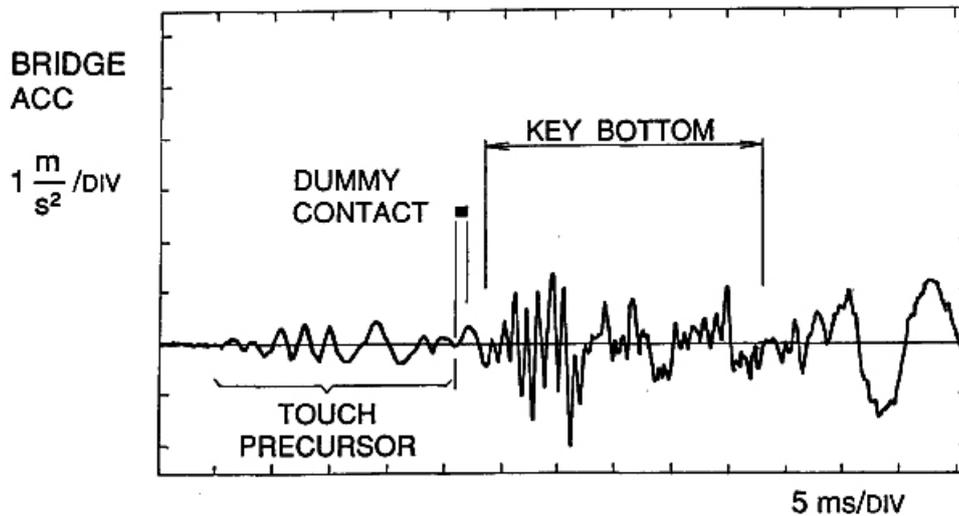


Figura 2.33: Aceleración del puente durante el precursor del golpe (C4 en stacatto).

Fuente: Askenfelt, 1993.

borde y 38 Hz en la estructura. Finalmente, concluye que, la transmisión de la cuerda da la 'mordida' en el ataque, mientras que la estructura añade el golpe de baja frecuencia y es dependiente del modo de presionar la tecla. Tanto la transmisión longitudinal de la cuerda como la estructura, definen un piso de ruido en el espectro del puente.

Los estudios de la dinámica de la generación de los sonidos no han arribado al desarrollo de síntesis basadas en los resultados obtenidos mientras que, los algoritmos utilizados en las síntesis han ido adquiriendo mayor complejidad en el afán de poder modelar de manera más precisa el piso de ruido sin lograr mejoras significativas en la percepción. Si se toma en cuenta los resultados de los trabajos de Askenfelt and Jansson (1990) se hace más evidente lo anteriormente descrito. Todo lo anteriormente descrito muestra la necesidad de realizar el análisis del transitorio de la señal de audio basado en la dinámica involucrada.

# Capítulo 3

## Hipótesis y variables

### 3.1. Hipótesis

La presente investigación es del tipo descriptiva, con el objetivo de obtener las características del sonido transitorio generado por el golpe del martillo sobre las cuerdas de las notas de un piano, previo al ataque, en el dominio de la frecuencia, tiempo-frecuencia, tiempo y cepstral. Estas características no han sido descritas en trabajos anteriores, por lo que, no es necesario plantear una hipótesis.

# Capítulo 4

## Metodología

### 4.1. Tipo y nivel de Investigación

La presente investigación es del tipo descriptiva, porque se pretende describir una parte del fenómeno físico de la onda de sonido generado por un piano, específicamente aquel generado por el golpe del martillo sobre las cuerdas de una nota. Esta descripción se hará en los dominios del tiempo, frecuencia, tiempo-frecuencia y cepstral, para poder aproximar un modelo matemático que permita realizar una síntesis.

### 4.2. Unidad de análisis

Para la realización de este estudio, se utilizará la base de datos de los Estudios de Música Electrónica de la Universidad de Iowa USA (<http://theremin.music.uiowa.edu/MISpiano.html>), de acceso gratuito.

#### Características de los archivos de audio

- Tipo de archivo: formato wav
- Frecuencia de muestreo: 44100 Hz
- Resolución: 16 bits
- Tiempo de grabación: 35.5 segundos
- Nota analizada: C4 (do central)
- Frecuencia: 261 Hz
- Nivel dinámico: forte
- Modo: estéreo
- Canal utilizado: izquierdo

## Especificaciones del piano

1. MARCA: Steinway and Sons modelo B
2. DIMENSIONES
  - Largo: 211 cm
  - Ancho: 148 cm
  - Peso neto: 345 Kg
3. ESCALA
  - Cuerdas cruzadas, gancho de cuelgue de combinación
  - Dúplex frontal Y posterior
  - Tensión 17.571 Kg
4. CUERDAS
  - Agudas: doce tamaños enteros y medios de acero sueco de lata resistencia
  - Bajas: centro de acero sueco enrollado en alambre de cobre puro
  - La más larga: gancho de cuelgue/puente: 151 cm
5. MARTILLOS: Fieltro de la parte superior e inferior de lana premium; tratada para resistir insectos y humedad: comprimida con alambre para mantener forma permanente. Moslduras y vástagos del martillo de duro arce de roca.
6. APAGADORES: Lana premium cortada horizontalmente para un amortiguado efectivo con cabezas de arce para resistencia.
7. TECLAS: Abeto europeo, pesado individualmente. Cobertura a prueba de desportillado, resistente a las manchas para los tonos naturales; antideslizante, ebonizado desgastado para los agudos. Botones de madera durable Linden refuerzan las teclas sobre el riel de equilibrio, permitiendo un máximo poder tonal con cada golpe.
8. CAMA DEL TECLADO: Hecha de tablas de abeto aserradas por cuartos. Las tablas horizontales y verticales presentan un sistema con ventilación para el escape de la humedad. La caja de resonancia de acción abovedada da un ajuste exacto, intensifica el movimiento de las teclas, y previene el "golpeteo" durante la interpretación fuerte. Los grande extremos espigados de arce proporcionan un sólido montaje para los tornillos ajustables de bronce de regulado táctil. Espesor: 4.45 cm.
9. CAJA DE RESONANCIA: de una pieza de curvado continuo de 6.985 cm de espesor. Compuesta de 16 capas de arce de rocas, con la caja de resonancia tanto interna como externa siendo presionada junta en una sola operación, lo cual proporciona integridad estructural.

<https://es.steinway.com/pianos/steinway/piano-de-cola/modelo-b>

### 4.3. Técnicas de recolección de información

Se aplicará algoritmos para el análisis en los siguientes dominios:

- Tiempo: detección del transitorio y de la envolvente ADSR.
- Frecuencia: La FFT para el cálculo de la DFT de la señal completa y del transitorio.
- Tiempo- frecuencia: espectrograma con una ventana de Hann con 50 % de solapamiento aplicada en la señal del transitorio.
- Cepstral: con desenrollamiento de fase para la detección de los reflejos del pulso viajero en el puente en la señal audible.

La implementación de los algoritmos se realizó en el software MatLab.

### 4.4. Técnicas de análisis e interpretación de la información

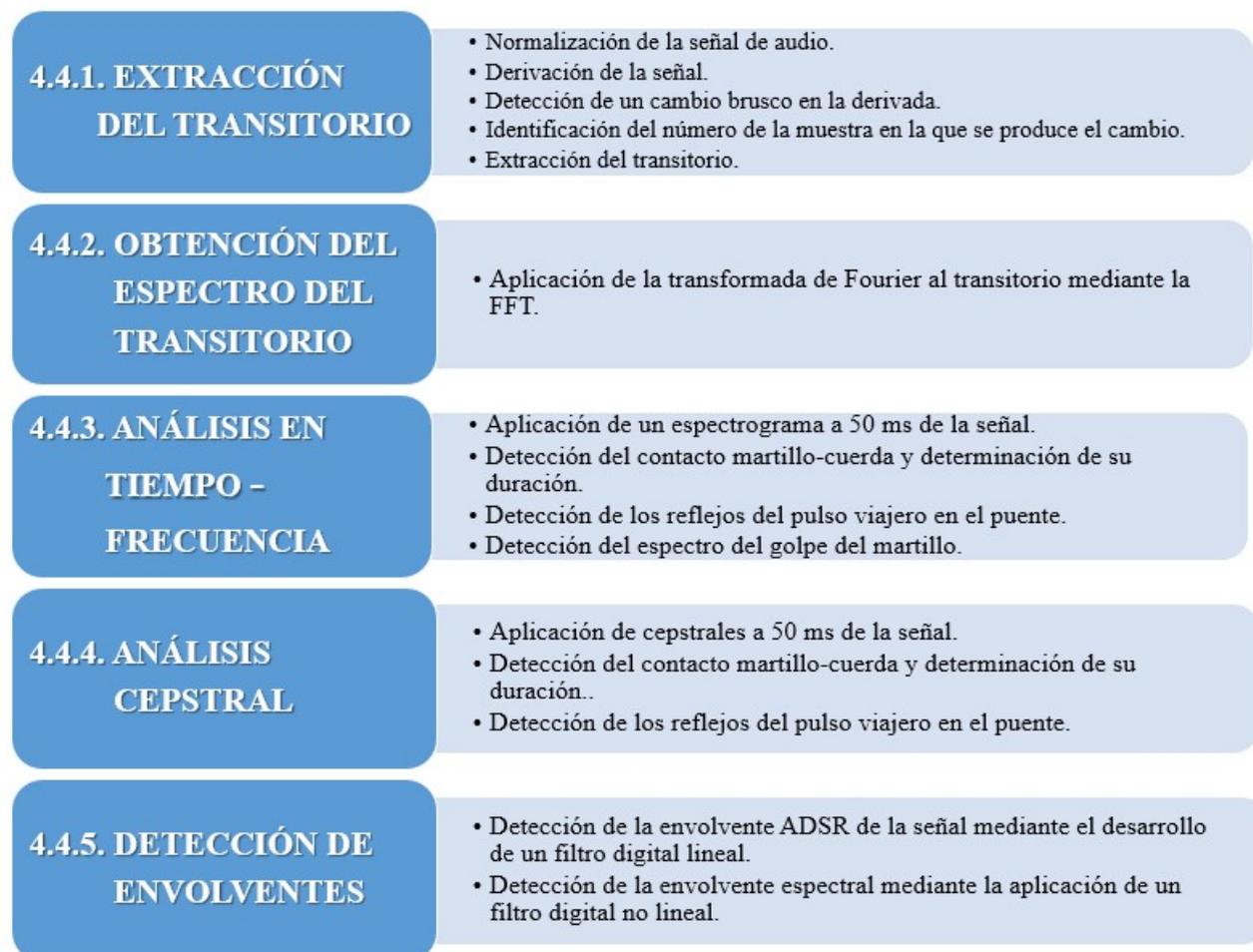


Figura 4.1: Tareas a realizar.

Este trabajo se centra en el estudio del transitorio previo al ataque en la nota C4 de un piano. El análisis se realizará mediante un procesamiento digital de la señal audible, teniendo como referencia estudios de la dinámica involucrada realizados con la nota C4 y, tiene por objetivo describir todas sus características en el tiempo y la frecuencia de manera que, toda la información obtenida sirva de base para el desarrollo futuras síntesis que aumenten los niveles de percepción.

#### **4.4.1. Extracción del transitorio**

El primer paso a realizar debe ser la determinación y extracción del transitorio del total de la señal. Para lograrlo se derivará la secuencia de la señal audible, de manera que un cambio brusco se traducirá en una derivada de valor grande. De esta manera se puede detectar y aislar el transitorio.

#### **4.4.2. Obtención del espectro del transitorio**

Una vez obtenido el transitorio, se realizará un estudio espectral del mismo, mediante la aplicación de la FFT para poder observar su contenido espectral.

#### **4.4.3. Análisis en tiempo-frecuencia**

Debido a su naturaleza transitoria, el análisis espectral simple aplicado en el subtítulo anterior no es suficiente por lo que, se aplicará espectrogramas con el objetivo de determinar la evolución de cada componente espectral determinada por Askenfelt (1993) en sus estudios de la dinámica en la cuerda. Los espectrogramas permitirán detectar el momento del contacto martillo-cuerda y su duración. Esto permitirá determinar el espectro del golpe del martillo así como la energía transferida a la cuerda.

#### **4.4.4. Análisis cepstral**

Se aplicará un estudio cepstral del transitorio con el objetivo de obtener información más precisa que la obtenida por los espectrogramas.

#### **4.4.5. Detección de envolventes**

Se obtendrán las envolventes en el dominio del tiempo así como en la frecuencia de la señal total.

# Capítulo 5

## Resultados y Discusión

### 5.1. Procesamiento, análisis, interpretación y discusión de resultados

El objetivo de la presente investigación es el estudio del transitorio previo al ataque. Por este motivo es indispensable detectarlo y posteriormente proceder a su extracción de la señal total. La figura 5.1 muestra el primer segundo de la señal total.

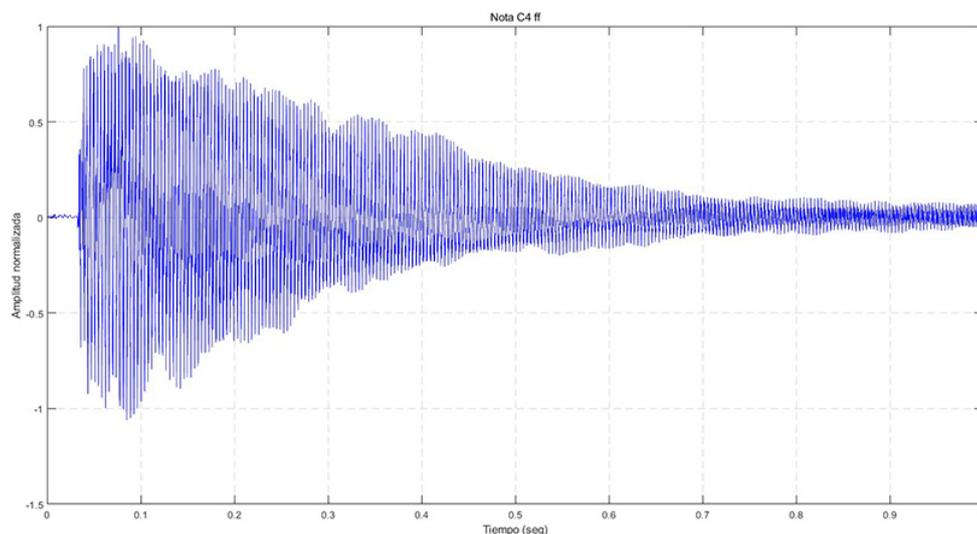


Figura 5.1: Señal de la nota C4 ff.

#### 5.1.1. Extracción del transitorio previo al ataque

Se puede notar que el transitorio previo al ataque tiene una duración entre 30 a 40 ms. Para poder determinarlo con precisión no es conveniente medir y comparar las magnitudes de la señal, puesto que se tendría que establecer un umbral que resultaría muy variable. Esta variación se debe a que este transitorio depende del nivel dinámico que se le haya dado a la

cuerda al momento de presionar la tecla. La figura 5.2 muestra los primeros 100 ms de la señal en la que se observa con claridad el transitorio previo al ataque. Una característica que presenta es la suavidad de la variación del sonido desde el inicio hasta el momento en el que se inicia el ataque, es decir, cuando las variaciones de la amplitud son más pronunciadas. Esto sugiere que es mejor tomar la derivada de la señal para poder medir la tasa de cambio de la amplitud.

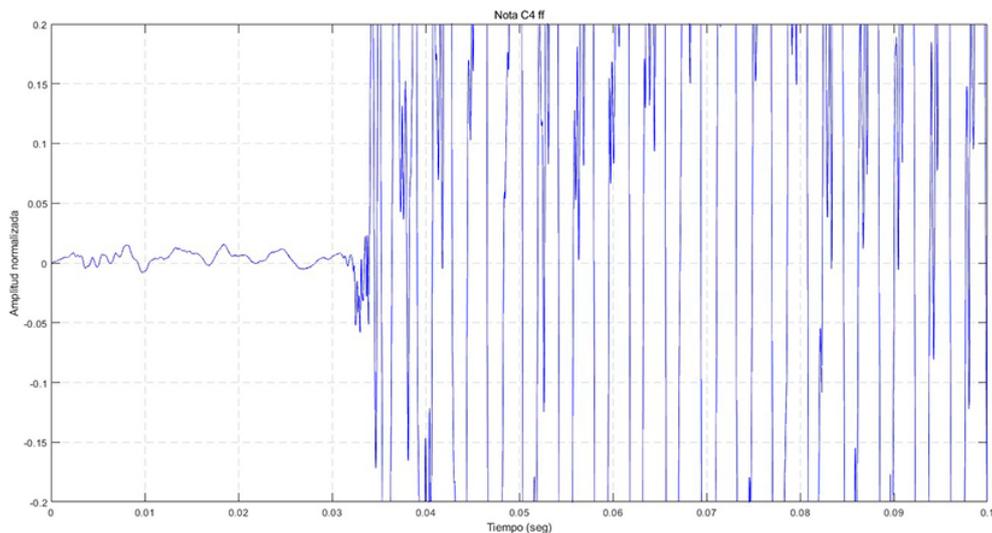


Figura 5.2: Primeros 100 ms de la nota C4 ff.

En este caso también se tiene que establecer un umbral, pero, al medir las variaciones y teniendo en cuenta que la derivada es el valor de la pendiente de la recta tangente, éste no dependerá del nivel dinámico de la señal. Así, si la señal presenta cambios bruscos significa que el valor del ángulo de la recta tangente es grande. Con este criterio se estableció distintos valores hasta encontrar que el valor indicado era de 15. Debido a que la frecuencia de muestreo es de 44100 Hz, los cambios en la amplitud entre dos muestras consecutivas es muy sutil, por lo que se calculó la derivada por cada 25 muestras, con lo que el algoritmo desarrollado fue:

```
[datosleidos, fm]=audioread(cadena);
datosleidos=datosleidos/max(datosleidos); //Normalización
inicio=1; //eliminación de ceros al inicio
while datosleidos(inicio)==0
inicio=inicio+1;
end
//Cálculo de la derivada de la curva y detección de la duración del preataque
puntero=inicio;
i=1;
pendiente=0.000001;
```

```

delta=25/fm;
while pendiente<15
pendiente=(datosleidos(puntero)-datosleidos(i))/delta;
i=puntero;
puntero=puntero+25;
end

```

La figura 5.3 muestra la señal del transitorio extraída del total de la señal.

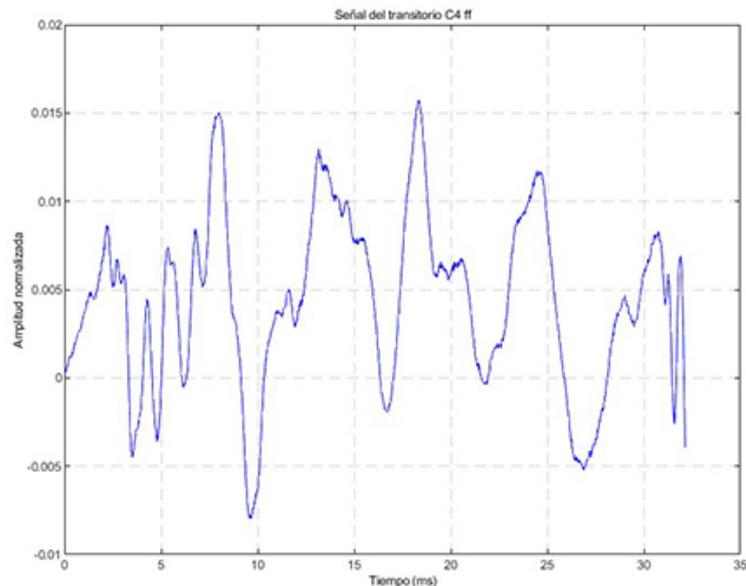


Figura 5.3: Transitorio previo al ataque. Nota C4 ff.

- Umbral de detección: 15
- Duración: 32.1 ms
- N° de muestras: 1417

### 5.1.2. Espectro del transitorio previo al ataque

Una vez que se obtuvo el transitorio, lo que sigue es el análisis espectral básico mediante la transformada de Fourier aplicada a la señal obtenida. Por este motivo, se aplicó la FFT al transitorio y, cuyo resultado se puede observar en la figura 5.4

Se puede observar que los modos de la nota aún no están establecidos. La frecuencia de 187.13 Hz es la que tiene mayor energía después del término promedio. Un aspecto importante a destacar es el hecho de que, se aplicó la transformada de Fourier a una señal carente de estado estacionario, característica principal del transitorio previo al ataque. Además, de acuerdo con los estudios de Askenfelt and Jansson (1993), en este lapso de tiempo se activan

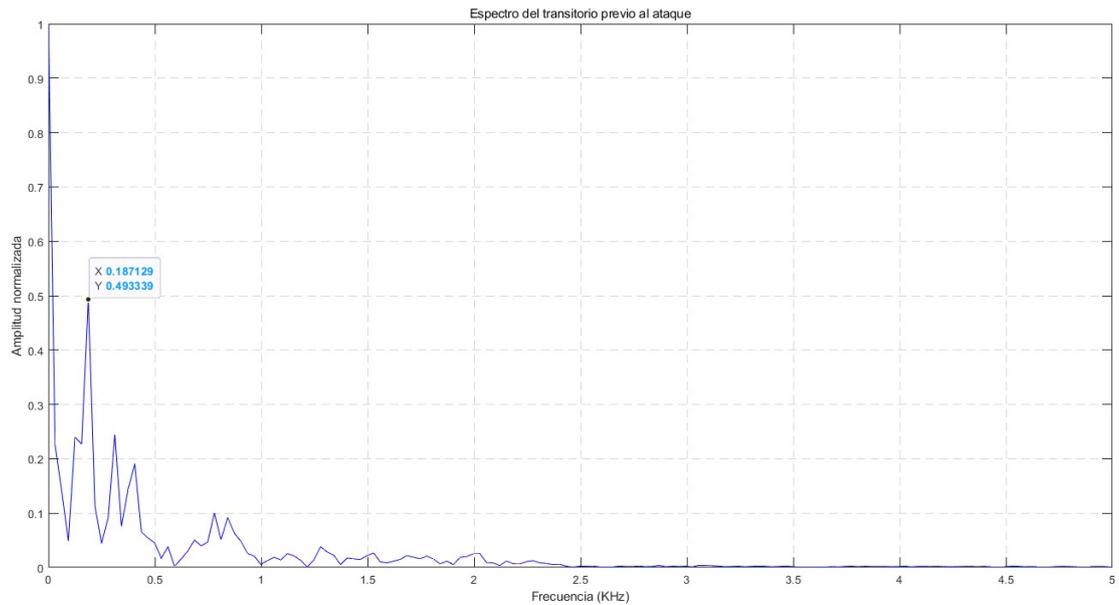


Figura 5.4: Espectro del transitorio previo al ataque.

frecuencias diferentes a los modos de las notas, en instantes determinados y de duración variada. Todo esto hace imposible la detección de las frecuencias mencionadas mediante un simple análisis de Fourier siendo, lo más adecuado un estudio en tiempo-frecuencia para poder ver la evolución de todas las frecuencias involucradas, Alm and Walker (2002).

### 5.1.3. Análisis tiempo-frecuencia

#### Contacto martillo-cuerda y reflejos en el puente

Para poder determinar el momento en el que se inicia el golpe del martillo y la duración del contacto martillo-cuerda además, los reflejos del pulso resultante en el puente es necesario tener una temporización de los eventos mencionados.

Askenfelt and Jansson (1993) mediante un experimento, determinaron la secuencia de los eventos para la nota C4 ff, desde la formación del primer pulso hasta el segundo reflejo en el puente. La figura 5.5 muestra los pulsos generados en la cuerda.

- I: Pulso de la primera generación que se dirige al puente.
- II: Es el reflejo de I que se dirige hacia la clavija.
- III: Es el pulso II que retorna desde la clavija y viaja hacia el puente.

El contacto martillo-cuerda, el pulso que genera en la cuerda y los consecuentes reflejos en el puente son eventos únicos (Askenfelt and Jansson 1993). Por este motivo, para poder detectarlos en la señal, se hace necesario un análisis en el dominio del tiempo-frecuencia.

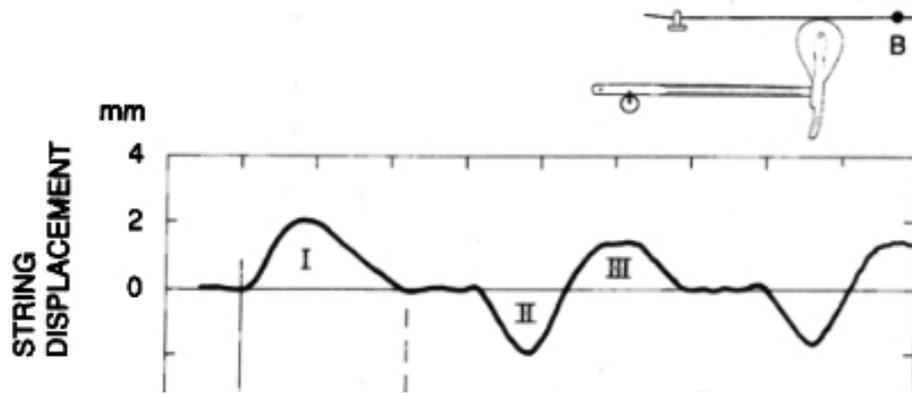


Figura 5.5: Desplazamientos de la cuerda medidos en el punto B, entre el martillo y el puente.

Fuente: Askenfelt and Jansson, 1993

*Diseño del espectrograma:* Se debe tomar en cuenta los 2.4 ms estimados por Askenfelt and Jansson (1993) para la duración del contacto martillo-cuerda. Basándose en este resultado, el tamaño de la ventana calculado es de 105 muestras y, con un solapamiento entre ventanas del 50 por ciento. La ventana utilizada fue una de Hamming Con los parámetros definidos, cada una tiene una duración de 1.2 ms debido al solapamiento establecido. La figura 5.6 muestra el espectrograma resultante para un tiempo de 55 ms de la señal, tiempo suficiente para poder observar al transitorio.

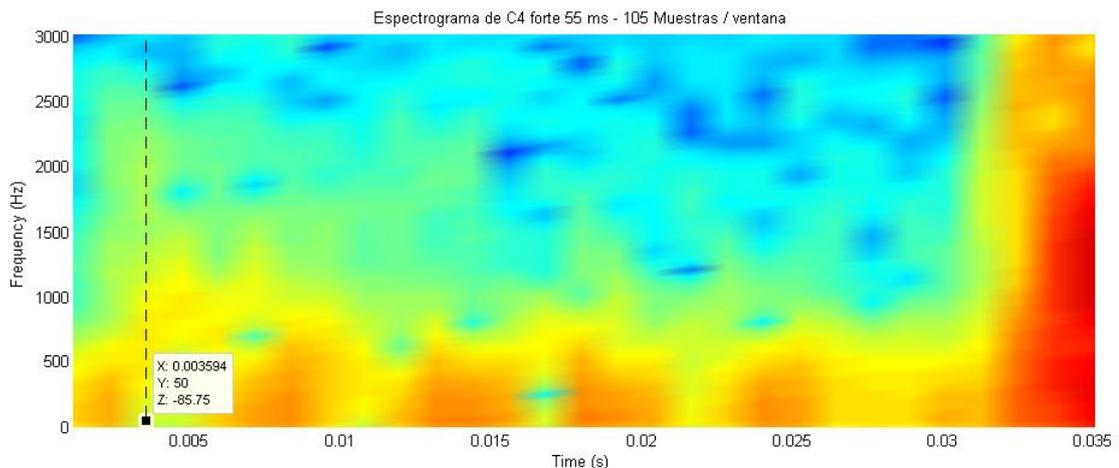


Figura 5.6: Espectrograma de C4 ff con 105 muestras/ventana.

## Golpe y contacto martillo-cuerda

Askenfelt (1993) encuentra que, el contacto martillo-cuerda tiene una duración de 2.4 ms y que, durante este tiempo se produce un movimiento longitudinal de la cuerda que provoca vibraciones de alta frecuencia en el puente, las mismas que van desde 1 KHz hasta 5 KHz. El espectrograma de la figura 5.6 muestra estas frecuencias durante los primeros 4.5 ms con mayor intensidad. Por lo tanto, se puede concluir que el contacto se inició alrededor del primer milisegundo (1.119 ms según el espectrograma) y finalizó en 3.584 ms. Esto significa que la duración del contacto martillo-cuerda es de 2.465 ms. Se debe mencionar que, la imagen del espectrograma de la figura 5.6 ha sido difuminada para que se pueda ver una continuidad en la frecuencia.

Para la determinación del espectro del golpe, es necesario tomar una ventana que ocupe 2.5 ms aproximadamente, manteniendo el solapamiento. Esto lleva a un tamaño de ventana de 212 muestras. Esto permite tomar la señal durante el contacto martillo-cuerda y así determinar su espectro.

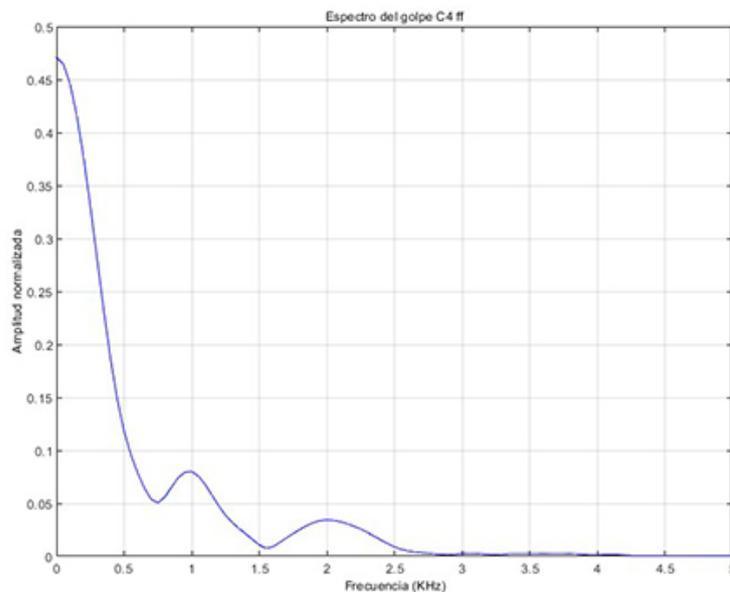


Figura 5.7: Espectro del golpe del martillo de la nota C4 ff.

El resultado obtenido es consistente con el espectro de un pulso. En la figura 5.7 se observa que alrededor de 750 Hz no llega a ser cero. Esto se debe a que entre 750 Hz y 1 KHz hay frecuencias que son activadas de forma diferente, por ejemplo la de 900 Hz (Askenfelt, 1993) y también, a la dispersión de la onda en la cuerda (Podlesak and Lee, 1988).

## Reflejos en el puente

El espectrograma de la figura 5.6 muestra zonas oscuras de forma periódica posteriores a la correspondiente del golpe del martillo. Éstas se caracterizan por la activación de las bajas frecuencias, al rededor de los 500 Hz. Aramaki et al. (2001) y Askenfelt (1993) encontraron que, el puente es acelerado y vibra con frecuencias bajas.

Comparando el espectro de la figura 5.8 con el espectrograma obtenido, es claro que, al menos durante el transitorio previo al ataque, el puente vibra durante momentos específicos, es decir, cuando recibe mayor energía. Esto sucede cuando los pulsos en la cuerda recién formados alcanzan el puente y se reflejan, transmitiendo parte de su energía. La banda de 0 a 500 Hz aproximadamente, tiene mayor energía, tal como lo muestra el espectrograma, durante:

1. 7.2 – 9.6 ms
2. 13.21 – 16.81 ms
3. 18.02 – 21.62 ms

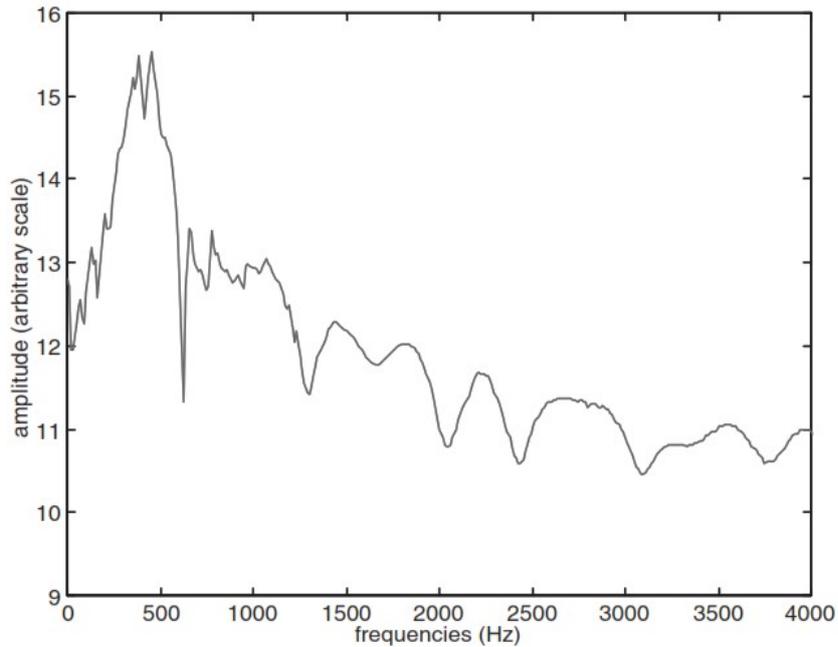


Figura 5.8: Respuesta en frecuencia del puente.

Fuente: Aramaki et al. (2001)

- 4. 24.02 – 26.43 ms
- 5. 30.04 – 32.44 ms

Hay que tener en cuenta que un espectrograma depende del tamaño de la ventana escogida y del traslape entre ellas. Mientras más pequeña sea la ventana la resolución disminuye, pero muestra las variaciones de frecuencia de mejor manera. Esta relación costo-beneficio entre la resolución y la variación de frecuencias es una fuente de imprecisión que, sin embargo, puede ser solucionada mediante un estudio cepstral de la señal.

### Estudio de las envolventes espectrales

La secuencia de eventos desarrollados en la generación del sonido es estudiada por Askenfelt (1993) y, los denomina: pre toque, post toque, pre cuerda y post cuerda.

Tabla 5.1: Frecuencias del transitorio.

POST TOQUE	
Frecuencia (Hz)	Origen
100	Caja de resonancia
250	Cama
300	Cama
900	Tecla
PRECUERDA	
Frecuencia (KHz)	Origen
1-2	Transmisión por la estructura
2-5	Transmisión longitudinal

La tabla 5.1 muestra un resumen de las principales frecuencias. Askenfelt (1993) realizó el trabajo en modo stacatto y, llegó a la conclusión que, el nivel dinámico sólo afecta al pre toque. Así mismo, una vez que el martillo queda quieto en su apoyo, la tecla deja de vibrar y el martillo aún lo sigue haciendo a 900 Hz. Estas vibraciones son transmitidas por la estructura y se acoplan a las cuerdas, por lo tanto, el sonido generado debe presentar esta característica.

La evolución de la frecuencia de 900 Hz puede seguirse mediante el espectrograma de la figura 5.9. Se puede observar picos de amplitud de dicha frecuencia que son indicadores de la actividad del martillo y que, coinciden con lo encontrado por Askenfelt (1993) en sus estudios dinámicos en el instrumento.

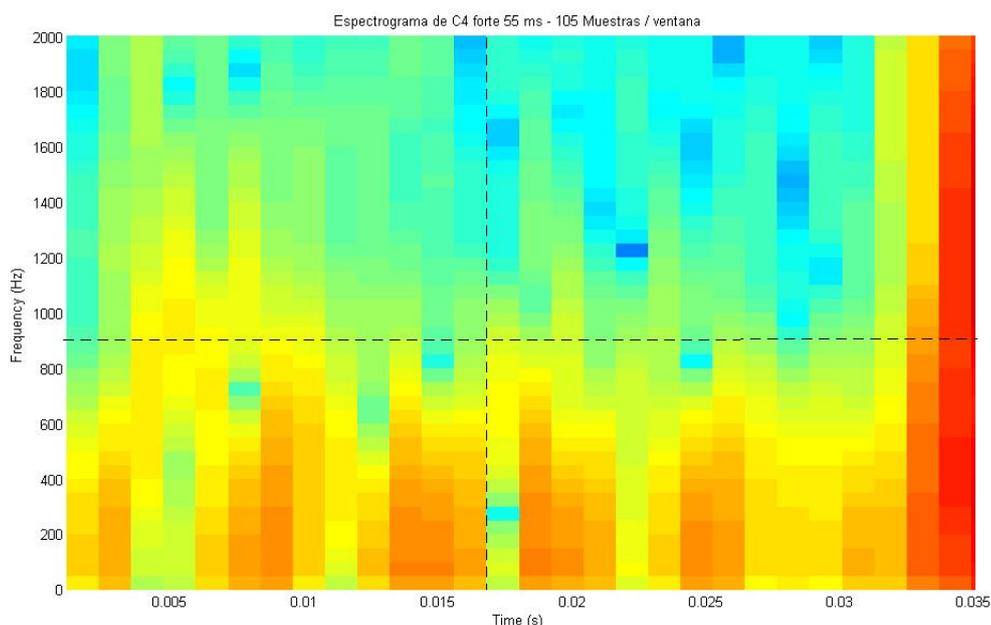


Figura 5.9: Espectrograma de los primeros 55 ms – C4ff.

A partir del espectrograma utilizado, se puede aislar determinadas frecuencias para poder observar su evolución. En la figura 5.10 se observa la variación de 900 Hz, donde se aprecia un repunte a partir de los 16.83 ms alcanzando un pico en 19.23 ms. Askenfelt (1993) determina que el tiempo desde que el martillo deja de estar en contacto con la cuerda hasta el momento en el que queda sobre su soporte y, continua vibrando con una frecuencia de 900 Hz está entre 10 a 20 ms. Los resultados obtenidos para esta frecuencia son:

- Fin del contacto martillo-cuerda: 3.854 ms.
- Martillo empieza a vibrar a 900 Hz: 16.83 ms.
- Duración del movimiento del martillo desde la cuerda hasta su soporte: 13.23 ms.

## Comportamiento modal

- Los modos de la nota

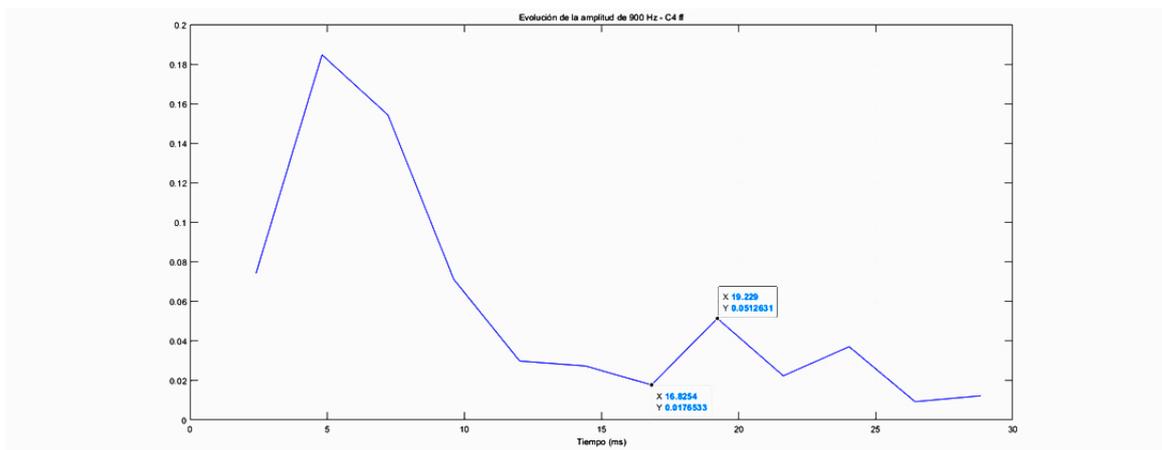


Figura 5.10: Envoltente de 900 Hz – C4ff.

En el espectrograma puede observarse que, durante este transitorio aún no aparecen las líneas correspondientes a cada una de las frecuencias. El comportamiento de los tres primeros modos se muestra en la figura 5.11. Como era de esperar, la componente fundamental tiene mayor energía, mientras que para los siguientes modos va disminuyendo.

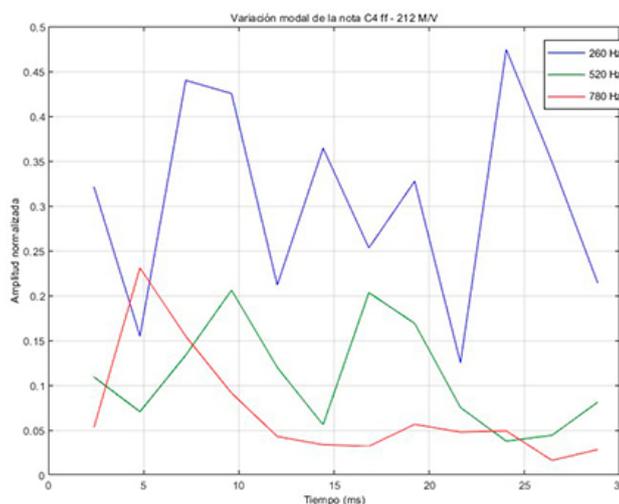


Figura 5.11: Envoltentes modales durante el transitorio – C4 ff.

- **Frecuencias menores al primer modo**

El comportamiento de la banda de frecuencias menores al primer modo parece quedar marcado por este último, tal como se muestra en la figura 5.12. Es claro que una vez finalizado el contacto martillo cuerda hay una disminución de su amplitud para luego aumentar. La frecuencia de 100 Hz queda con mayor energía, lo que indica que el puente está vibrando y éstas son transmitidas hacia las cuerdas por lo que, puede registrarse en la señal sonora.

- **Frecuencias entre el primer y segundo modos**

La banda entre el primer y segundo modos, se ve influenciada por 520 Hz (segundo modo). En la figura 5.13 se observa que la cantidad de picos de las envoltentes ha disminuido con relación a la banda anterior, pero, el comportamiento inicial es el mismo.

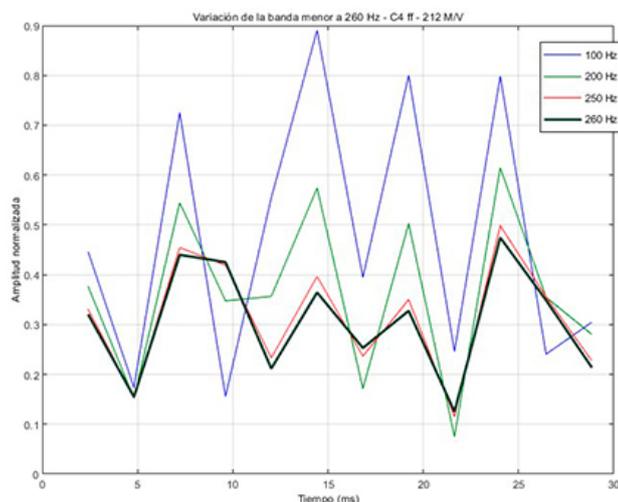


Figura 5.12: Banda de frecuencias menores a 260 Hz.

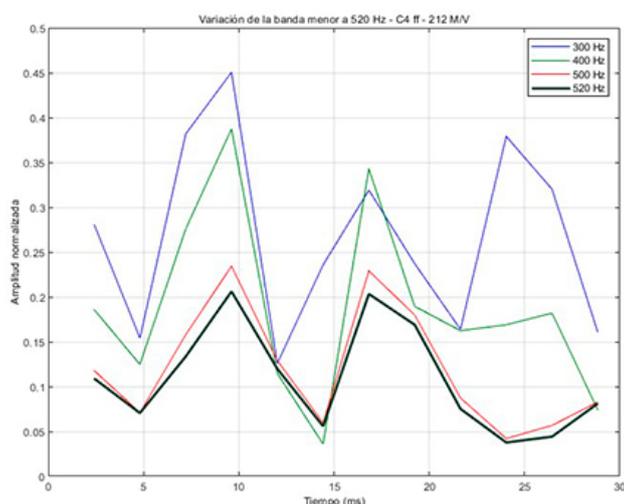


Figura 5.13: Banda de frecuencias entre el primer y segundo modos.

■ **Frecuencias entre el segundo y tercer modos**

En la figura 5.14 se muestra las envolventes de la siguiente banda. Esta vez, la situación cambia; el comportamiento inicial es contrario a los dos casos anteriores, es decir, estas frecuencias se activan durante el contacto martillo cuerda para alcanzar su pico máximo casi inmediatamente después de haber finalizado dicho contacto. Por otra parte, a partir de los 700 Hz las frecuencias muestran una envolvente similar a la de 900 Hz, frecuencia que como se dijo anteriormente y según Askenfelt (1993), es determinante en la generación del sonido.

En relación a esta banda, al igual que para los 900 Hz (figura 5.10), todas las frecuencias sufren una activación después de los 16.04 ms. Esta situación sugiere que en este instante sucede algo único y que puede observarse en el espectrograma de la figura 5.9.

■ **Frecuencias entre el tercer y cuarto modos**

La influencia de los 900 Hz se ve también en la siguiente banda, tal como se muestra en la figura 5.14. Al igual que lo mencionado en el párrafo anterior, después de los

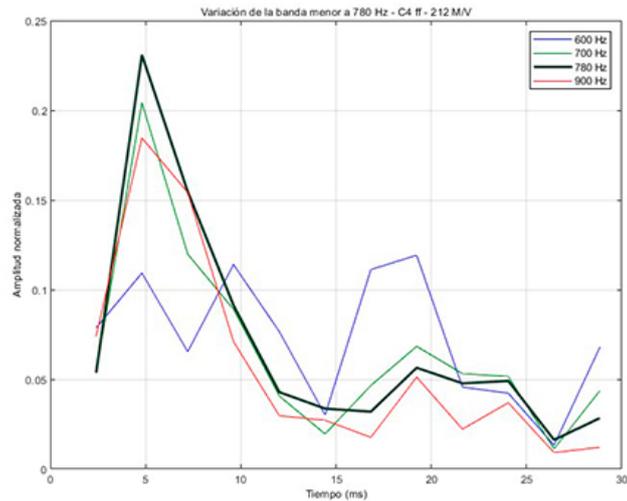


Figura 5.14: Banda de frecuencias entre el segundo y tercer modos.

16.83 ms existe una reactivación de las frecuencias de la banda aunque, esta vez, todas tienen un comportamiento similar.

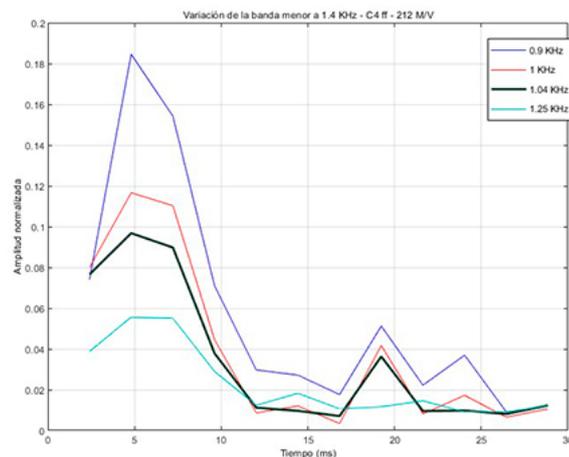


Figura 5.15: Banda de frecuencias entre el tercer y cuarto modos.

De acuerdo con la forma del transitorio, es de esperar que el comportamiento final de los modos de la nota aún no esté definido, debido a que el pulso generado por el martillo está realizando sus primeros reflejos en el puente y en la clavija. Sin embargo, es importante conocer su evolución durante el transitorio.

#### 5.1.4. Análisis cepstral

Al analizar el espectrograma del transitorio, se determinó los instantes en los que se produjeron los reflejos de los pulsos en el puente. Dadas las características del dominio tiempo-frecuencia, estos tiempos son aproximados. Por otro lado, los cepstrales, al ser útiles en la detección de ecos, resultan convenientes para el presente estudio puesto que, los reflejos pueden considerarse como “ecos” del pulso viajero en la cuerda.

Para el análisis se ha tomado un total de 2200 muestras, lo que equivale a 50 ms, tiempo que incluye a todo el transitorio. Los resultados obtenidos en el dominio cepstral confirman los reflejos ocurridos en el puente, figura 5.16. Es una medición más precisa que la obtenida mediante los espectrogramas, debido a que en éstos el solapamiento entre ventanas con el objeto de conseguir una “continuidad” en la evolución de las amplitudes de las diferentes frecuencias no permite mucha exactitud.

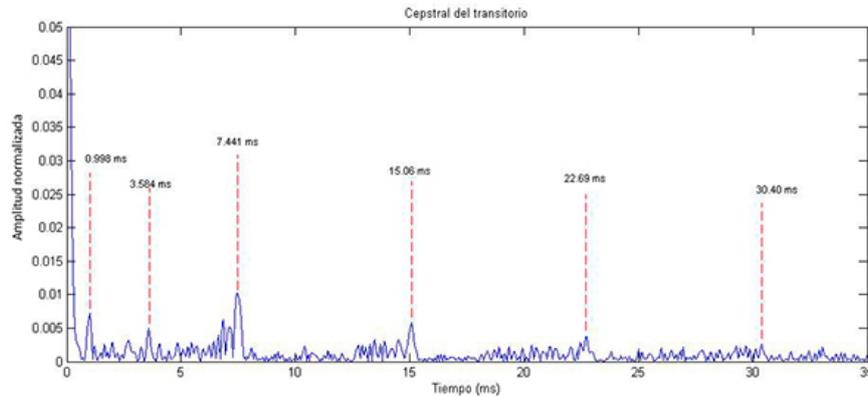


Figura 5.16: Cepstrales del transitorio de la nota C4 ff.

Los dos primeros pulsos cepstrales indican el inicio y final del golpe del martillo, obteniéndose así la duración del pulso generado. Haciendo el cálculo correspondiente, éste da 2.585 ms, acorde con lo estimado por Askenfelt (1993). Comparando este resultado con el obtenido mediante el espectrograma (2.465 ms), el error cometido en este último es de apenas -4.64 por ciento. En todo caso, al ser capturado este evento en la señal sonora implica que el golpe en sí mismo genera un sonido.

El pulso cepstral a los 7.441 ms corresponde al reflejo del pulso recién formado después del golpe y, los siguientes a los subsecuentes reflejos. Esto quiere decir que, el pulso en la cuerda demora en recorrer una distancia igual a dos veces la longitud de la cuerda un tiempo igual al transcurrido entre dos pulsos cepstrales consecutivos. Observando esa periodicidad en los pulsos cepstrales se tiene:

$$T_1 = 15,06 - 7,441 = 7,619ms$$

$$T_2 = 22,69 - 15,06 = 7,63ms$$

$$T_3 = 30,4 - 22,69 = 7,71ms$$

El periodo promedio entonces es:  $T_a = 7.653$  ms. Por otro lado, se puede observar que este periodo es dos veces el correspondiente a la nota, 3.831 ms. Esto significa que la frecuencia entre reflejos es la mitad de la correspondiente a la nota, en este caso 261 Hz. Este resultado es útil, pues se podría desarrollar un sistema embebido que mida el tiempo entre los reflejos y así, determinar la frecuencia de la nota de una manera precisa. También se podría medir la tensión a la que está sometida si se conoce su densidad:

$$v = \frac{2L}{T_a} \quad (5.1)$$

donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda en la cuerda obtenida en base a la longitud  $L$  de la cuerda y del periodo de los reflejos en el puente. Tomando la ecuación de onda, esta velocidad está determinada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (5.2)$$

donde  $T$  es la tensión de la cuerda y  $\mu$  la densidad lineal de masa de la cuerda. Igualando las dos ecuaciones 5.1 y 5.2 se obtiene la tensión:

$$T = \left(\frac{2L}{T_a}\right)^2 \mu \quad (5.3)$$

Entonces, el instrumento que se podría desarrollar no sólo mediría la frecuencia del sonido generado por la cuerda sino, también la tensión a la que está sometida.

Al traslapar el espectrograma con los cepstrales de la nota se puede confirmar los instantes en los que se producen el golpe del martillo y los reflejos en el puente. La figura 5.17 muestra dicho traslape

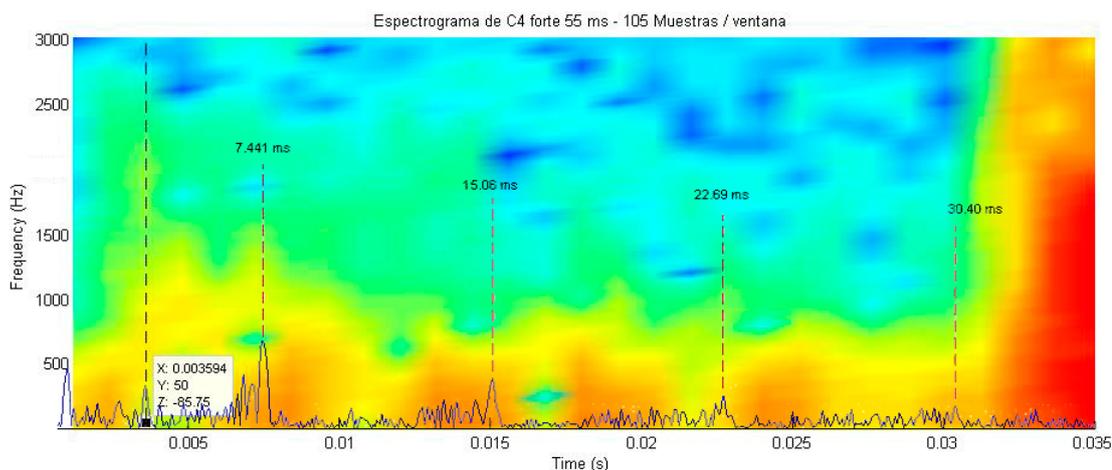


Figura 5.17: Cepstrales (trazo azul) y espectrograma del transitorio de la nota C4 ff.

Al analizar el golpe y el contacto martillo-cuerda (los dos primeros pulsos cepstrales), se puede observar que, al momento de finalizar dicho contacto, las altas frecuencias alcanzan su máximo. Esto indica que, la transmisión de energía se produjo vía longitudinal a través de la cuerda y por la estructura (Askenfelt, 1993).

## Anomalía

En la figura 5.17, entre el segundo y tercer pulsos cepstrales, existe una zona oscura distinta a las correspondientes de los reflejos. Las frecuencias de la banda entre 100 Hz y 400 Hz sufren una drástica disminución para, luego aumentar sus amplitudes de forma apreciable. Aparentemente podría tratarse de un reflejo en el puente, pero, es una situación

única durante el transitorio, tal como lo muestra el análisis cepstral: no existe ningún pulso que indique algún reflejo.

Así mismo, contrastando con el comportamiento de la frecuencia de 900 Hz, se observa que el “relanzamiento” de esta frecuencia ocurre al producirse la anomalía generando dos picos, como un doble “latido”, típico de la envolvente ADSR del piano. En la figura 5.18 se hace la superposición mencionada anteriormente.

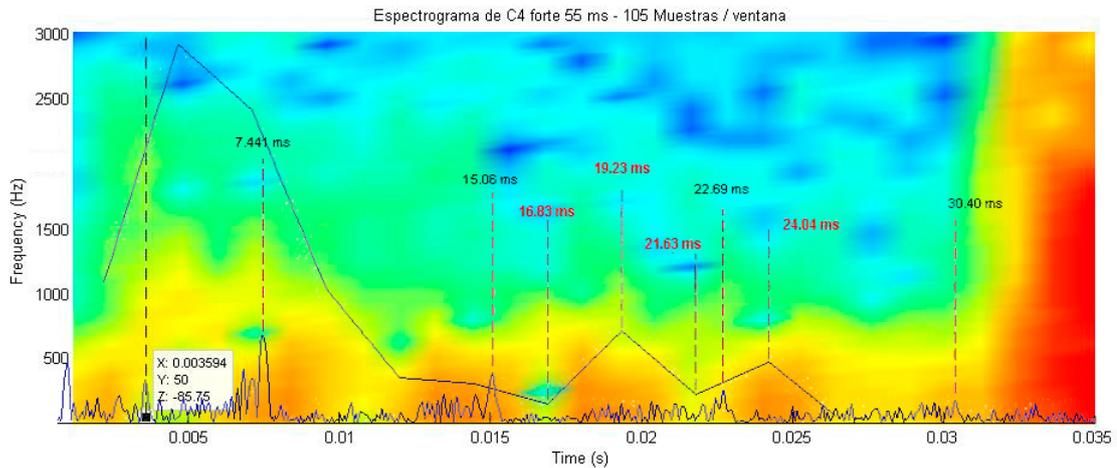


Figura 5.18: Espectrograma, cepstrales (trazo azul) y envolvente de 900 Hz del transitorio de la nota C4 ff.

El doble latido es estudiado por Weinreich (1977) en la envolvente de la señal completa. Demuestra que este fenómeno se debe a la aparición de ondas transversales horizontales en las cuerdas debido al acoplamiento existente entre ellas mediante el puente. Esta situación podría estar presentándose durante el transitorio y, de allí la anomalía e inmediatamente después, la banda oscura entre los dos reflejos que muestra el espectrograma.

Para observar, en la señal, los momentos en los que se producen los reflejos, se debe superponerla con su cepstral. Se puede ver los instantes en los que se producen los reflejos en el puente (figura 5.19). Esta contrastación permite distinguir lo siguiente:

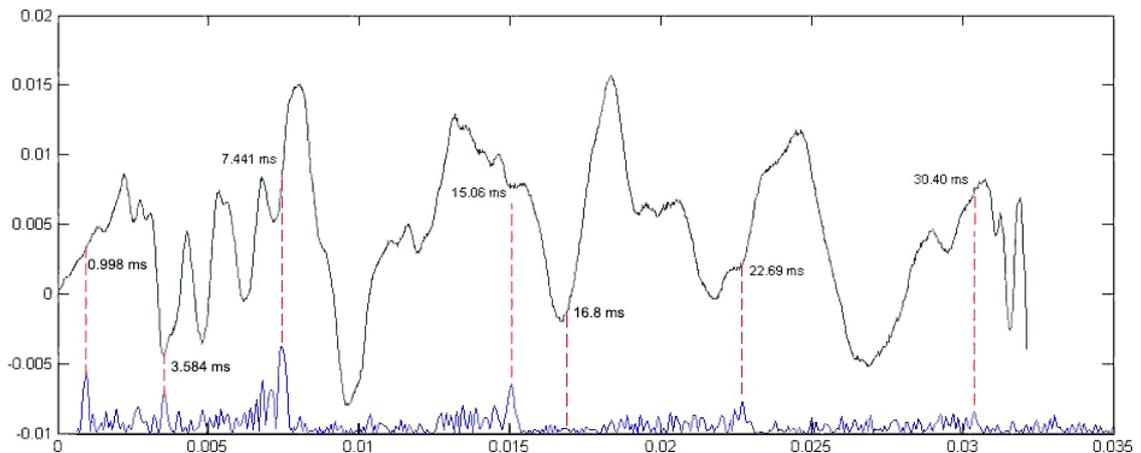


Figura 5.19: Señal del transitorio de la nota C4 ff con su correspondiente cepstral.

Primero: el pulso inicial es evidentemente el generado por el golpe del martillo, sin embargo, su duración queda bastante definida mediante el estudio cepstral: entre los 0.998

ms y 3.584 ms. También se puede ver que tiene consistencia con la deformación de la cuerda durante el contacto martillo-cuerda estudiado por Askenfelt and Jansson, (1993) y mostrada en la figura 5.20. Los picos de la deformación de la cuerda se deben al reflejo de la onda en la clavija, los puntos A1-A4 en el gráfico de la velocidad de la cuerda. Al comparar el desplazamiento de la cuerda con el sonido generado, en éste se observa los cuatro picos, pero con amplitudes distintas, así como los tiempos en los que se producen. Hay que recordar que, al producirse el contacto, la cuerda se estira y provoca vibraciones en el puente, y éstas se acoplan al sonido, de allí la presencia de frecuencias entre 1 KHz y 2 KHz (Askenfelt, 1993) observadas en el espectrograma. De otra parte, hay que tomar en cuenta también el retardo en la propagación de la onda longitudinal transmitida por la cuerda y su acoplamiento al sonido final.

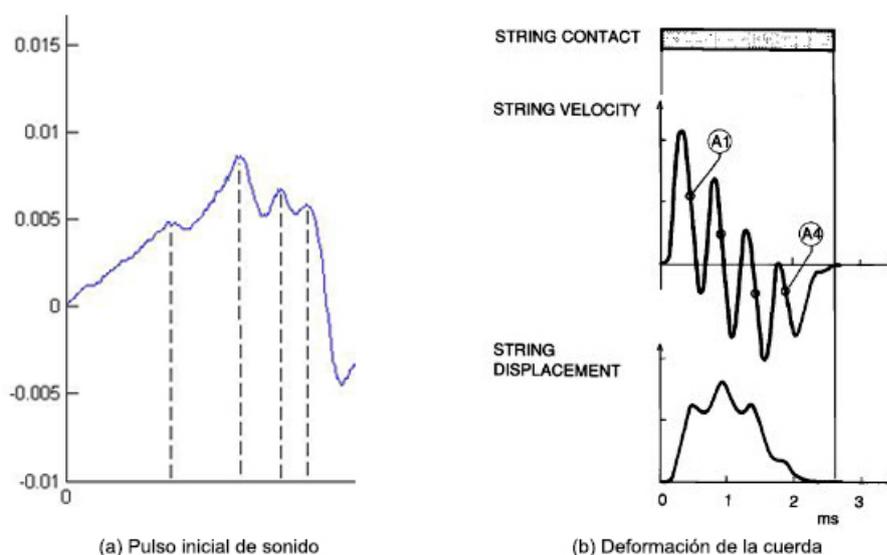


Figura 5.20: (a) Pulso inicial de sonido. (b) Deformación de la cuerda durante el contacto martillo-cuerda de C4 ff.

Fuente: Askenfelt and Jansson, 1993.

Segundo: el análisis cepstral de la figura 5.19 no muestra ningún pulso a los 16.8 ms, tiempo en el que se produce la anomalía mostrada en el espectrograma. Como quiera que cada pulso cepstral es un indicativo de un reflejo en el puente, quiere decir que en el instante mencionado no lo hay. Este hecho estaría en contradicción con el resultado obtenido mediante el espectrograma, sin embargo, al activarse las frecuencias bajas es un indicativo de que el puente está sometido a fuerzas que provocan su vibración. Las únicas fuentes de éstas son las cuerdas, y de acuerdo con lo estudiado por Weinreich (1977), esta activación del puente se debería a la aparición de una onda transversal en el plano horizontal, iniciándose cuando el pulso en la cuerda se dirige hacia la clavija y a mitad de camino, para luego disminuir y volver a aparecer durante el decaimiento.

### 5.1.5. Envoltentes

#### Envolvente ADSR

Para hacer un estudio en el dominio del tiempo se analizó la envolvente ADSR de la señal, en razón a lo relacionado con la anomalía y su posible relación con la polarización

horizontal de la onda durante el transitorio. Con el objeto de extraerlo se desarrolló el siguiente algoritmo:

1. Detección de los picos positivos.
2. Reemplazo con ceros las muestras que no contienen picos.
3. Establecimiento de un umbral para la diferencia entre dos picos consecutivos.
4. Si la diferencia entre dos picos consecutivos es mayor al umbral se debe eliminar el pico de menor valor.
5. Completar las muestras entre picos consecutivos con valores proporcionales a la diferencia.

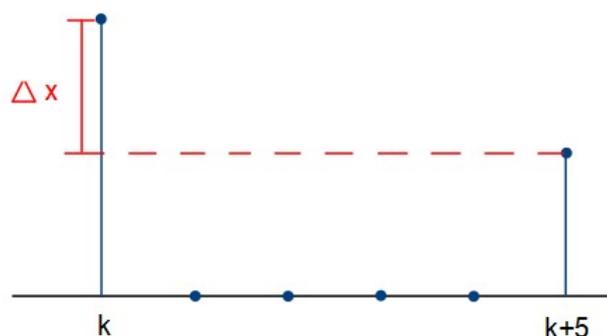


Figura 5.21: Ejemplo de interpolación de dos picos consecutivos.

En la figura 5.21, se tomó como ejemplo 6 muestras consecutivas, donde  $x_k$  es la secuencia de los picos de la señal, entonces:

$$\Delta x = x_{(k+5)} - x_k \quad (5.4)$$

Luego

$$x_{(k+1)} = x_k + \frac{\Delta x}{5} \quad (5.5)$$

En general se puede obtener la siguiente recurrencia:

$$x_{(k+1)} = x_k + \frac{\Delta x}{p} \quad (5.6)$$

Donde  $p$  es el número de muestras del segmento.

La figura 5.22 muestra el resultado de la aplicación del algoritmo anteriormente descrito. Se observa el transitorio previo al ataque y, luego de éste, el decaimiento y la liberación. Se ha obtenido la envolvente ADSR clásica, aunque en ésta normalmente no se menciona ni se toma en cuenta al transitorio inicial. Así mismo, durante el decaimiento, se observa el doble latido descrito y explicado por Weinreich (1977) desde un punto de vista dinámico.

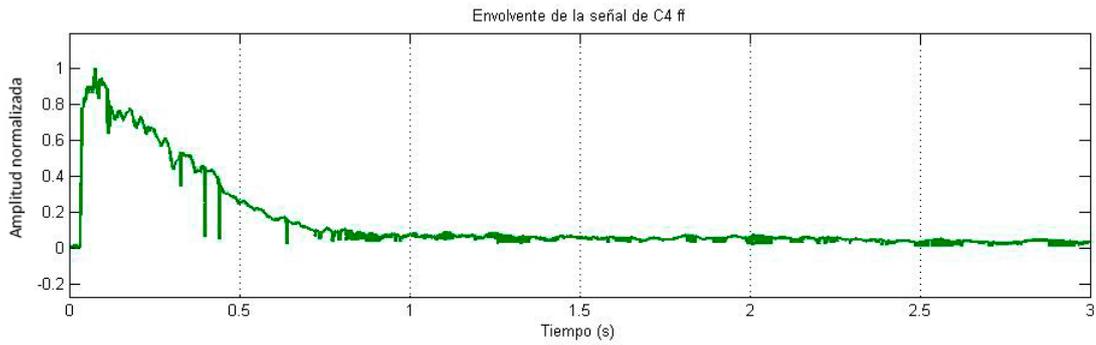


Figura 5.22: Envolvente ADSR de los 3 primeros segundos de la señal de la nota C4 ff.

Weinreich (1977) demuestra que el doble latido de la envolvente de la señal se debe a la aparición de ondas horizontales en la cuerda, fundamentalmente al acoplamiento entre ellas mediante el puente. La figura 5.23 (a) muestra el desplazamiento de la cuerda cuando la onda tiene solo polarización vertical, mientras que en (b) muestra la polarización horizontal. Como las cuerdas están acopladas mecánicamente mediante el puente, éste les transmite parte de su energía, de manera que, de forma efectiva, el desplazamiento de las cuerdas es como se muestra en la figura 5.23 (c).

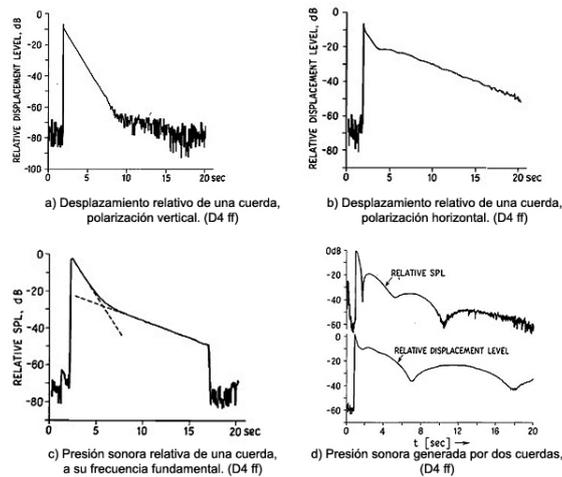


Figura 5.23: Polarizaciones vertical y horizontal de D4 ff (a) y (b); presión sonora, (c) D4 ff y (d) C4 ff.

Fuente: Weinreich (1977).

Weinreich (1977) también obtuvo el desplazamiento de las cuerdas para la nota C4 y su correspondiente presión sonora, tal como se muestra en la figura 5.23 (d), donde se puede observar el doble latido.

## Envolvente espectral

Para obtener la envolvente espectral del transitorio, primero se debe hallar el espectro del mismo periodo de tiempo. Se tomó los primeros 100 ms de la señal de manera que se incluya al transitorio. Así, el espectro resultante es el que se muestra en la figura 5.24.

Se puede observar que están definidos los modos de la nota con un importante piso de ruido. Sin embargo, en razón de las variaciones de las amplitudes de las frecuencias, es mejor



Figura 5.24: Espectro de los primeros 100 ms de la nota C4 ff.

obtener la envolvente espectral, tal como se hizo para la señal completa en el dominio del tiempo. Por otro lado, aplicar el algoritmo descrito en el acápite anterior no sería adecuado debido a la presencia del piso de ruido y su bajo nivel relativo. Por esta razón, se utilizó el método no lineal de Laurenti et al. (2007) para obtener un espectro estocástico por su característica no determinista.

El método utilizado por Laurenti et al. (2007) consiste en una transformación no lineal de la amplitud del espectro, cuya lógica se basa en que la mayor cantidad de energía es transportada por las componentes de frecuencia que determinan el tono (modos), mientras que el resto tiene menor energía. Esto evita la necesidad de utilizar filtros tipo peine que pueden resultar muy complejos. El diagrama de bloques mostrado en la figura 5.25 muestra el algoritmo para la obtención de la envolvente temporal de la señal. Para los fines de la presente investigación se obtendrá solo una estimación del espectro, específicamente el correspondiente a los 100 primeros mili segundos.

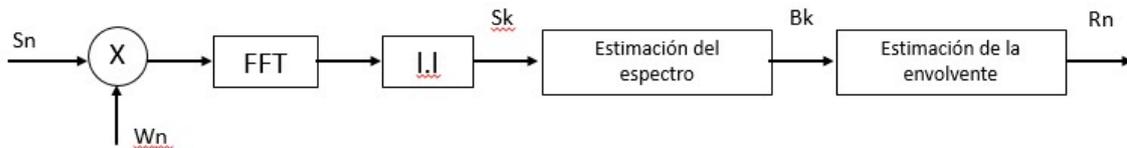


Figura 5.25: Diagrama de bloques para el análisis estocástico.

Fuente: Laurenti et al., 2007.

$B_k$  es la estimación del espectro de la señal cuya entrada es el valor absoluto de la FFT de la señal muestreada  $S_n$  mediante un enventanamiento  $W_n$ . El algoritmo para obtener el espectro estadístico de la señal es el siguiente:

1. Considerar la secuencia de sonido  $S_n$ , con  $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$  de  $N_t$  muestras, tomadas con una frecuencia de muestreo de  $f_s = \frac{1}{T_s}$ .
2. Tomar la DFT de  $S_n$  de las  $N_t$  muestras con una ventana  $W_n$ , pudiendo ser ésta de

Hann, de Hamming o de Blackman.

$$S_k = \left| \sum_{n=0}^{N_t-1} S_n W_n e^{-\frac{j2\pi nk}{N_t}} \right| \quad (5.7)$$

$$k = 0, 1, \dots, N_t-1$$

3. Remover ceros de  $S_k$  y reemplazarlos por:

$$S'_k = \frac{S_{k-1} + S_k + S_{k+1}}{3} \quad (5.8)$$

4. Calcular el recíproco:  $R_k = \frac{1}{S'_k}$

5. Para suavizar  $R_k$  aplicar la convolución cíclica de  $N_f$  puntos del filtro principal:

$$R'_k = \frac{1}{N_f} \sum_{h=-m}^{m-1} R_{k-h \bmod N_t} \quad (5.9)$$

donde  $m = \frac{N_f}{2}$ . El filtro es un tren de impulsos en el tiempo de longitud  $N_f$ , equivalente a un filtro tipo peine.

6. Calcular  $B_k$ :

$$B_k = \frac{1}{R'_k} \quad (5.10)$$

Para determinar el valor de  $N_f$  se debe tener en cuenta que, mientras más grande sea su valor, el resultado será más suavizado. Se ha escogido  $N_f = 52$ , obteniéndose el espectro estadístico del piso de ruido mostrado en la figura 5.26.



Figura 5.26: Espectro estadístico de los primeros 100 ms.

Si bien el tiempo considerado excede al del transitorio, se observa que los modos de la nota ya están activos, los mismos que durante el transitorio muestran un comportamiento distinto, tal como se vio anteriormente en el estudio de las bandas de frecuencia mediante un espectrograma. Así mismo, los modos son los que determinan la forma general de la

envolvente, sin embargo, el piso de ruido tiene una importante influencia debido a que, en el filtro usado, los picos han sido minimizados al tomar el recíproco de la FFT de la señal y, luego pasar por la convolución cíclica. De esta manera, sus niveles son comparables con los del piso de ruido y, así obtener la envolvente mostrada en la figura 5.26.

Otro aspecto a destacar, es que la envolvente espectral de los 100 primeros mili segundos obtenida incluye al transitorio, lo que significa que éste terminó y, la cuerda está vibrando según los modos y con un piso de ruido prácticamente establecido. Esto sugiere que el comportamiento de las cuerdas y, por lo tanto, del sonido generado por ellas, queda determinado en los primeros mili segundos, incluyendo al transitorio y el inicio del ataque.

Aramaki et al. (2001) determinaron el espectro de la aceleración del puente, tal como lo muestra la figura 5.27. Si se compara con la envolvente espectral estadística de la figura 5.26, se puede observar que hay una similitud entre ambas, especialmente hasta los 2 KHz. Algo interesante que hay que destacar, es que el espectro de la figura 5.27 corresponde a la señal entera mientras que, la envolvente estadística solo a los primeros 100 ms, es decir, la similitud se da en una pequeña fracción del tiempo total y, en el dominio de la frecuencia.

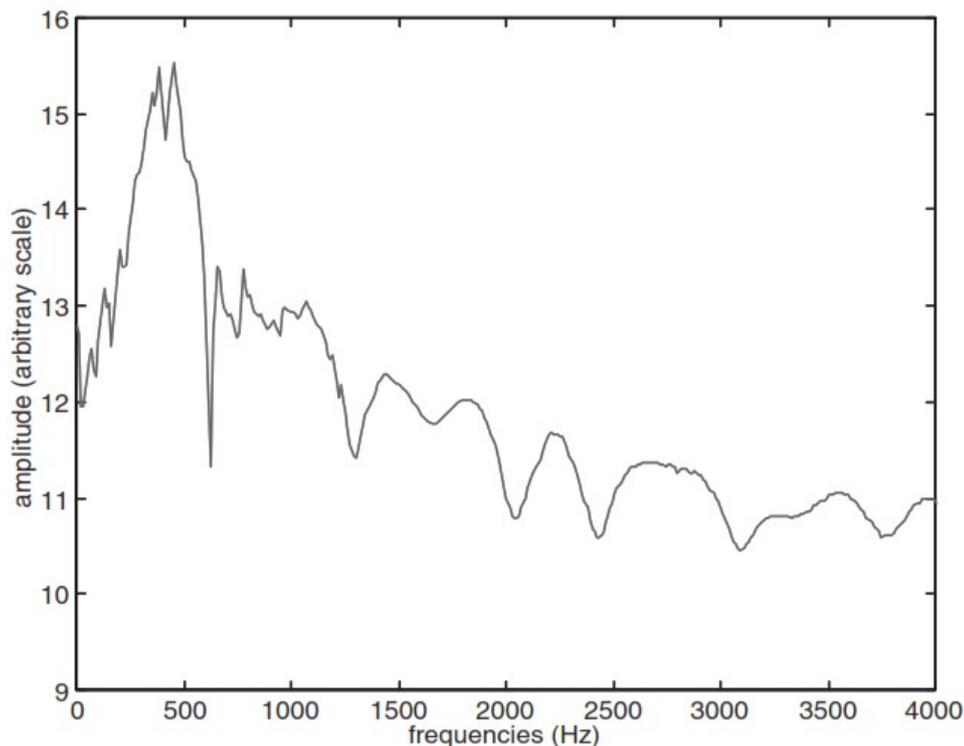


Figura 5.27: Respuesta en frecuencia del puente.

Fuente: Aramaki et al., 2001.

Por otro lado, hay que tener presente que, el puente es fundamental en el acoplamiento de las cuerdas y sus vibraciones, así como, la dispersión ocasionada por la resistencia a la flexión de las cuerdas (Podlesak and Lee, 1988), por lo que es de esperar que, el espectro del sonido y de la aceleración del puente no sean iguales, pero, si similares; similitud que podría probarse mediante un estudio de correlación.

Otra interesante similitud, que se puede observar, se da entre la envolvente estadística de los primeros 100 ms con la envolvente ADSR. Al principio, existe un aumento rápido de las amplitudes para luego tener un doble pico y, finalmente, un doble latido. Llama la atención que esta similitud se da en dominios y tiempos distintos que, en todo caso, se podría esperar

que se dé solo en el dominio del tiempo.

La figura 5.28 muestra un segmento del transitorio entre los 10 ms y 20 ms. En esta figura se destaca el pulso previo al segundo reflejo en el puente y, cuyo sonido, se da a partir de los 12 ms, y presenta una forma similar a la envolvente de la señal, con un doble pico al inicio y el latido típico de la envolvente ADSR del piano. Esta vez, la similitud se estaría dando en el dominio del tiempo y a escalas diferentes.

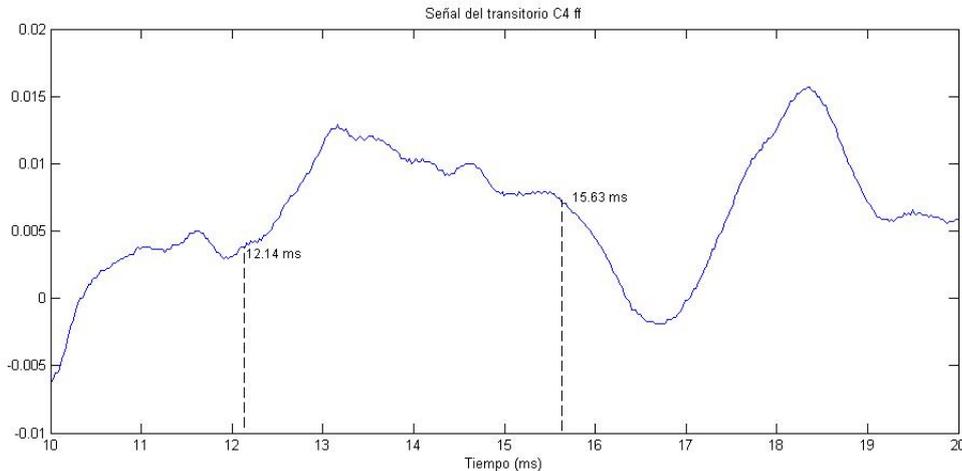


Figura 5.28: Señal del transitorio entre 10 y 20 ms.

### 5.1.6. Discusión

El estudio del sonido transitorio, previo al ataque, basado en la dinámica de su generación, permitió verificar el proceso mecánico involucrado. En este sentido, los análisis realizados en el dominio tiempo-frecuencia y cepstral fueron de mucha utilidad al momento de identificar, en el sonido producido por el piano, eventos como el inicio del golpe, duración del mismo, reflejos en el puente entre otros.

En relación al golpe del martillo y la duración del mismo, los estudios de estos eventos realizados por Askenfelt (1993) en la dinámica de las cuerdas y el puente permitieron su detección en la señal de audio, específicamente durante el transitorio previo al ataque. Se verificó la presencia de altas frecuencias en el sonido al momento del golpe debido a la aceleración que sufre el puente por transmisión longitudinal (Askenfelt, 1993) que, finalmente se acoplan a las cuerdas y por consiguiente a la presión sonora. También, se midió la duración del golpe a partir del análisis cepstral, dando 2.585 ms. Este resultado puede variar según sea la nota de la que se trate, así como también, del nivel dinámico que el ejecutante imprima a la tecla (Askenfelt 1993).

Por otro lado, de no haberse tomado como referencia la dinámica de las ondas en las cuerdas, no sería posible detectar los reflejos en los extremos, tanto en la clavija como en el puente. En este aspecto, el análisis cepstral resultó mucho más útil que el espectrograma utilizado, ya que cada reflejo puede interpretarse como el “eco” de un pulso viajero.

Los primeros reflejos en la clavija son muy importantes porque le dan forma al primer pulso y, se producen aun cuando el martillo está en contacto con las cuerdas (Askenfelt 1993), permitiendo realizar la medición de su duración. De hecho, en la figura 5.16 se puede

observar pequeños pulsos cepstrales entre los dos primeros, siendo indicadores de la presencia de los reflejos mencionados.

En cuanto al puente, los reflejos permiten medir con bastante precisión la frecuencia fundamental (primer modo) a la que está vibrando la cuerda y, por lo tanto, del sonido que genera. Esto es de suma importancia para los técnicos, ya que se consigue mediciones muy exactas y, así ellos podrían realizar una afinación perfecta.

Un resultado inesperado constituye la presencia de una polarización horizontal de la onda en la cuerda y, detectada en el sonido. Weinreich (1977), de hecho, establece que, el doble latido presente en la envolvente ADSR se debe precisamente a esta polarización, pero, evidentemente a escala de tiempo mayor. Este resultado constituye un descubrimiento.

Los resultados obtenidos en la presente investigación han demostrado que el transitorio previo al ataque tiene un papel crucial en el sonido del piano. Las similitudes encontradas a diferentes escalas tanto en el tiempo como en la frecuencia parecen indicar que este pequeño lapso de tiempo es determinante en el sonido final. En el dominio del tiempo, se puede encontrar en una porción del transitorio la envolvente ADSR. En la frecuencia, la similitud del espectro de la aceleración del puente (Aramaki et al., 2001) con la envolvente espectral de los 100 primeros milisegundos del sonido es otra muestra. Tomando en cuenta que, el espectro obtenido por Aramaki et al. (2001) ha sido en la señal total, nuevamente se tiene similitudes a escalas de tiempo distintas, análogas a la anteriormente mencionada. Finalmente, la semejanza entre la envolvente ADSR con el espectro de la aceleración del puente es particularmente especial, porque se da en dominios diferentes. Por todo lo mencionado, es necesario realizar mayores estudios de estas similitudes ya que, de existir, se estaría frente a una autosimilitud, característica de los fractales. Esto último daría la posibilidad de desarrollar un algoritmo basado en la geometría fractal capaz de sintetizar el sonido del piano. Otro resultado que refuerza lo anteriormente mencionado es el hecho de haber detectado en el transitorio la aparición de ondas horizontales después del primer reflejo en el puente mientras que, Weinreich (1977) demostró su presencia durante el decaimiento. Nuevamente se tiene una similitud a escalas diferentes.

Así mismo, teniendo en cuenta todas las características del transitorio descritas en el instrumento y en el sonido y que, además, éstas constituyen el piso de ruido del sonido generado por el instrumento, es evidente que no es adecuado tomarlo como un todo.

Badeau et al. (2002) utilizan el modelo sinusoidal clásico con una envolvente exponencial amortiguada. En este caso, hay que tener en cuenta que, incluir una envolvente al modelo sinusoidal, significa que en la frecuencia, los espectros de la señal sinusoidal y de las exponenciales convolucionan, creando repeticiones que pueden, en el peor de los casos, producir traslapes, lo que finalmente, genera distorsiones.

Laurenti et al. (2007) separan el espectro del componente del piso ruido de la señal completa. Sin embargo, este espectro es considerado, una vez más como un todo. Si bien, el espectro no se altera con en el caso anterior pero, no se distingue toda la evolución de las frecuencias a lo largo del transitorio. De otro lado, el algoritmo utilizado por estos autores sirvió para la estimación de la envolvente espectral.

Los estudios realizados por Caetano et al. (2013 y 2016) utilizan algoritmos más complejos (estimación de la amplitud y la frecuencia modulada AM-FM de sinusoides, eaQAM) para la síntesis de los sonidos. Estos algoritmos extraen el espectro del piso de ruido de la

señal total, sin tener en cuenta la evolución de los modos ni de las bandas de frecuencias involucradas durante el transitorio.

Masuyama et al. (2018), mediante el método de descomposición modal ADMM (alternating direction methods of multipliers) aisló los modos así como el piso de ruido, concluyendo en relación a éste último, que se trataría del espectro del golpe del martillo sobre las cuerdas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el residual así obtenido no proporciona la información del golpe del martillo, los reflejos en el puente y la aparición de la polarización horizontal detectadas en el presente trabajo de investigación.

En resumen, los resultados del presente trabajo da consistencia entre los estudios de la dinámica de la generación del sonido y el transitorio previo al ataque. Adicionalmente, se encontró que durante este transitorio se produce una segunda polarización en la onda resultante en la cuerda y, finalmente, se encontraron similitudes a diferentes escalas, en tiempo y en frecuencia. De otro lado, los resultados obtenidos, también demostraron que no se puede tomar el piso de ruido como un todo. Esto debido a que primero, este ruido no tiene un transitorio por lo que no se puede obtenerlo a partir de la señal completa y segundo, éste es producto de una secuencia de eventos que se desencadenan desde el momento que el ejecutante presiona una tecla, generándose vibraciones de frecuencias que evolucionan de distintas maneras durante el transitorio.

A esta altura, es evidente que el modelamiento dinámico de la onda en la cuerda no es suficientemente descrito mediante la ecuación de onda clásica, aún si se considera un grado de libertad adicional en el eje horizontal del plano transversal. Esto debido a que, la onda en la cuerda no tiene ambas polarizaciones desde el inicio y no se puede predecir el momento en el que aparece la onda horizontal. Todo lo mencionado, junto a la posible dimensión fractal involucrada, lleva a la conclusión de que es necesario un modelamiento diferente. La dinámica compleja podría resultar útil en este aspecto. ¿Se tendría que desarrollar una “física fractal”?

## 5.2. Pruebas de hipótesis

La presente investigación es del tipo descriptiva, con el objetivo de obtener las características del sonido transitorio generado por el golpe del martillo sobre las cuerdas de las notas de un piano, previo al ataque, en el dominio de la frecuencia, tiempo-frecuencia, tiempo y cepstral. Estas características no han sido descritas en trabajos anteriores, por lo que, no fue necesario plantear una hipótesis y, por lo tanto, no aplica una prueba de la misma.

# Conclusiones

- Se realizó una revisión de estudios relevantes de la dinámica de la generación del sonido del piano, los mismos que sirvieron de referencia para el análisis del transitorio previo al ataque y, así poder obtener sus características en el dominio de la frecuencia. Estudios realizados por Askenfelt (1993), fueron los más relevantes para poder identificar, en el sonido resultante, todas las características del golpe del martillo y la influencia del puente. No menos importante, el estudio de Weinreich (1977) permitió encontrar la polarización horizontal de la cuerda durante el transitorio y, además, presente en el sonido generado.
- Para la extracción de las características del sonido del transitorio previo al ataque se utilizaron técnicas de procesamiento y análisis en frecuencia: la transformada de Fourier básica, la transformada de Fourier dependiente del tiempo (espectrogramas), la misma que permitió la detección del golpe del martillo y los reflejos en el puente y, el análisis cepstral para la medición de los reflejos de la onda en el puente con mayor precisión.
- Se desarrollaron dos algoritmos para el análisis de la señal. El primero, realizado en el dominio del tiempo, sirvió para determinar la duración del transitorio mediante la implementación de la derivada modificada de la señal y, el segundo, desarrollado en la frecuencia, pero implementado mediante su ecuación de diferencias, para la obtención de la envolvente ADSR. Así mismo, se implementó el método de Laurenti et al. (2007).

# Recomendaciones

- El estudio cepstral del transitorio permite determinar la frecuencia de la nota y adicionalmente, la tensión en la cuerda, siempre y cuando se conozca la densidad de la misma. Se podría desarrollar un sistema embebido que mida estas dos variables fundamentales en la afinación de un piano.
- En vista de las similitudes encontradas a diferentes escalas de tiempo y frecuencia, se hace necesario realizar estudios más exhaustivos para comprobar si existe alguna ley fractal que gobierna toda la dinámica involucrada en la generación del sonido y, de ser así entonces, desarrollar un algoritmo fractal para su síntesis.
- Hoy en día existen muchas aplicaciones de los fractales en medicina, meteorología, antenas entre otras. Además, se ha comprobado que en la naturaleza existe cierta "ley fractal". Por esta razón y los resultados de esta investigación es casi natural preguntarse si es posible desarrollar una nueva física basada en fractales. La dinámica compleja es una posible herramienta que podría abrir el camino en ese sentido.

# Bibliografía

- Alm, J. F. and Walker, J. S. (2002). Time-frequency analysis of musical instruments. *SIAM review*, 44(3):457–476.
- Aramaki, M., Bensa, J., Daudet, L., Guillemain, P., and Kronland-Martinet, R. (2001). Resynthesis of coupled piano string vibrations based on physical modeling. *Journal of New Music Research*, 30(3):213–226.
- Askenfelt, A. (1993). Observations on the transient components of the piano tone. *STL-QPSR*, 34(4):15–22.
- Askenfelt, A. and Jansson, E. V. (1990). From touch to string vibrations. i: Timing in the grand piano action. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 88(1):52–63.
- Askenfelt, A. and Jansson, E. V. (1991). From touch to string vibrations. ii: The motion of the key and hammer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(5):2383–2393.
- Askenfelt, A. and Jansson, E. V. (1993). From touch to string vibrations. iii: String motion and spectra. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93(4):2181–2196.
- Badeau, R., Boyer, R., and David, B. (2002). Eds parametric modeling and tracking of audio signals. In *Proc. of the 5th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx)*, pages 139–144.
- Beauchamp, J. W. (2007). *Analysis, synthesis, and perception of musical sounds*. Springer.
- Beltrán, J. R. and De Leon, J. P. (2010). Estimation of the instantaneous amplitude and the instantaneous frequency of audio signals using complex wavelets. *Signal Processing*, 90(12):3093–3109.
- Bhalke, D., Rao, C. R., and Bormane, D. S. (2016). Automatic musical instrument classification using fractional fourier transform based-mfcc features and counter propagation neural network. *Journal of Intelligent Information Systems*, 46(3):425–446.
- Borgert, B., Healy, M., and Tukey, J. (1963). The quefrequency analysis of time series for echoes: cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe craking. In *Proc. Symp. On Time Series Analysis*, Rosenblatt, M. ed, pages 209–243.
- Boutillon, X. (1988). Model for piano hammers: Experimental determination and digital simulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(2):746–754.
- Brown, J. C. (1999). Computer identification of musical instruments using pattern recognition with cepstral coefficients as features. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105(3):1933–1941.

- Caetano, M., Kafentzis, G., Degottex, G., Mouchtaris, A., and Stylianou, Y. (2013). Evaluating how well filtered white noise models the residual from sinusoidal modeling of musical instrument sounds. In *Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA), 2013 IEEE Workshop on*, pages 1–4. IEEE.
- Caetano, M., Kafentzis, G. P., Mouchtaris, A., and Stylianou, Y. (2016). Full-band quasi-harmonic analysis and synthesis of musical instrument sounds with adaptive sinusoids. *Applied Sciences*, 6(5):127.
- Caetano, M. and Rodet, X. (2013). Musical instrument sound morphing guided by perceptually motivated features. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 21(8):1666–1675.
- Cheng, T., Dixon, S., and Mauch, M. (2015). Modelling the decay of piano sounds. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2015 IEEE International Conference on*, pages 594–598. IEEE.
- Cortes Osorio, J. A., Knott, A. M., and Chaves Osorio, J. A. (2012). Aproximación a la síntesis de la música a través del análisis de fourier. *Scientia et Technica*, 17(52).
- Hall, D. E. (1986). Piano string excitation in the case of small hammer mass. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 79(1):141–147.
- Hall, D. E. (1987). Piano string excitation ii: General solution for a hard narrow hammer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 81(2):535–546.
- Helmholtz, H. (2013). *On the sensations of tone*. Courier Corporation.
- Joshi, M. and Nadgir, S. (2014). Extraction of feature vectors for analysis of musical instruments. In *Advances in Electronics, Computers and Communications (ICAIECC), 2014 International Conference on*, pages 1–6. IEEE.
- Laurenti, N., De Poli, G., and Montagner, D. (2007). A nonlinear method for stochastic spectrum estimation in the modeling of musical sounds. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 15(2):531–541.
- Martin, K. D. (1999). *Sound-source recognition: A theory and computational model*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Masuyama, Y., Kusano, T., Yatabe, K., and Oikawa, Y. (2018). Modal decomposition of musical instrument sound via alternating direction method of multipliers. In *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*.
- Miyara, F. (2010). *Acústica y sistemas de sonido*. Universidad Nacional de Rosario.
- Moorer, J. A. (1975). On the segmentation and analysis of continuous musical sound by digital computer.
- Morse, P. M. and Ingard, K. U. (1986). *Theoretical acoustics*. Princeton university press.
- Nakamura, I. (1992). The vibration of a struck string (acoustical research on the piano, part 1). *Journal of the Acoustical Society of Japan (E)*, 13(5):311–321.
- Nieuwenhuijse, J., Heusens, R., and Deprettere, E. F. (1998). Robust exponential modeling of audio signals. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on*, volume 6, pages 3581–3584. IEEE.

- Oppenheim, A. V. and Schaffer, R. W. (2014). *Discrete-time signal processing*. Pearson Education.
- Podlesak, M. and Lee, A. R. (1988). Dispersion of waves in piano strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(1):305–317.
- Proakis, J. G., Manolakis, D. G., nica (trad.) Santalla del Rj o, V., and Luis, J. (2007). *Tratamiento digital de señales*. Pearson Educación.
- Strutt, J. W. and Rayleigh, B. (1945). *The theory of sound*. Dover.
- Suzuki, H. and Nakamura, I. (1990). Acoustics of pianos. *Applied Acoustics*, 30(2-3):147–205.
- Szeto, W. M. and Wong, K. H. (2013). Sinusoidal modeling for piano tones. In *Signal Processing, Communication and Computing (ICSPCC), 2013 IEEE International Conference on*, pages 1–6. IEEE.
- Weinreich, G. (1977). Coupled piano strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 62(6):1474–1484.

## MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
<p><b>Problema general</b>                      Los estudios de síntesis de los sonidos de las notas de un piano se han ido alejando de la dinámica involucrada en la generación del sonido mientras que, los trabajos relacionados con la dinámica del sonido se han centrado en el estudio de cada parte mecánica y las frecuencias que generan y que contribuyen con el desplazamiento final de la cuerda. Este divorcio ha limitado los resultados perceptuales obtenidos hasta el momento, estableciendo un límite aparentemente insalvable. En consecuencia, el estudio pretende analizar el sonido transitorio previo al ataque de una nota del piano basado en la dinámica de su generación.</p> <p><b>Problemas Específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. No se ha caracterizado el sonido transitorio previo al ataque, generado por el golpe del martillo sobre las cuerdas correspondientes a una nota del piano.</li> <li>2. Las síntesis de los sonidos de un piano no toman en cuenta la dinámica de su generación.</li> </ol>	<p><b>Objetivo general</b>                      Analizar el sonido transitorio previo al ataque de una nota del piano basado en la dinámica de su generación.</p>	<p>La presente investigación es del tipo descriptiva no experimental, con el objetivo de obtener las características del sonido generado por el golpe del martillo sobre las cuerdas de las notas de un piano en el dominio de la frecuencia. Estas características no han sido descritas en trabajos anteriores, por lo que, no es necesario plantear una hipótesis.</p>	<p><b>Independientes</b>                      No corresponde porque la investigación es del tipo descriptiva no experimental.</p>	<p><b>Tipo de Investigación:</b>                      La investigación es del tipo descriptiva no experimental.</p>
	<p><b>Objetivos específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 Analizar el sonido transitorio del ataque tomando en cuenta como referencia la dinámica de su generación.</li> <li>2 Extraer las características del sonido del transitorio previo al ataque mediante la aplicación de técnicas de procesamiento digital de señales.</li> </ol>			
				<p><b>Método:</b>                      Se aplicará algoritmos para el análisis en los siguientes dominios:</p>

```
%Calcula la duración del transitorio previo al ataque y
%halla y grafica el espectro del preataque
pregunta='Ingresar nota: ';
tono=input(pregunta, 's');
cadena=['Piano.ff.' tono '.wav '];
[datos_leidos, fm]=audioread(cadena);
datos_leidos=datos_leidos/max(datos_leidos); %Normalización
%eliminacion de ceros al inicio
inicio=1;
while datos_leidos(inicio)==0
    inicio=inicio+1;
end
%Cálculo de la derivada de la curva y
%detección de la duración del preataque
puntero=inicio;
i=1;
pendiente=0.000001;
delta=25/fm;
while pendiente<15
    pendiente=datos_leidos(puntero)-datos_leidos(i)/delta;
    i=puntero;
    puntero=puntero+25;
end
%Dibujo de la señal en el tiempo
muestras=puntero -inicio-25;
nuevo=datos_leidos(inicio:inicio+muestras-1);
duracion=(muestras)/fm; %duración del preataque
tiempo=linspace(0,duracion,muestras); %gráfica en el tiempo
plot(tiempo,nuevo);grid;
tiempo_etiqueta=floor((muestras/fm)*1000);
etiqueta=['Primeros ' num2str(tiempo_etiqueta) ' mseg de la nota ' tono];
title(etiqueta)
```

```
pregunta='Nivel dinámico? ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=['g:\unsaac\maestria\procesamiento\' nota '\'];
pregunta='Ingresar nota ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=[cadena 'G_' nota '.mat'];
archivo=cadena;
load(archivo);
fr=fft(datos_leidos(1:4410));%100 ms sde la señal, incluye al transitorio
frd=log(abs(fr));%+sqrt(-1)*unwrap(angle(fr));
c=(1/(2*pi))*abs(ifftr(frd));%calculo del cepstrum del golpe del martillo
t=linspace(0,100,2205);
plot(t,c(1:2205))
```

```
pregunta='Nivel dinámico? ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=['G:\unsaac\maestria\procesamiento\' nota '\'];
pregunta='Ingresar nota ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=[cadena 'G_' nota '.mat'];
archivo=cadena;
load(archivo);
Z1=zeros(1,64);
Z2=zeros(1,1217);
%neo=[Z1 Y(383:23714)];
%neo=[Z1 Y(65:1409)];
neo=[Y(65:822) Z1];
fr=fft(neo);%neo es la señal emitida por el golpe del martillo
frd=log((abs(fr))+sqrt(-1)*unwrap(angle(fr)));%logaritmo complejo de la transf. de la
señal
c=real(ifft(frd));%calculo del cepstrum del golpe del martillo
%save(archivo);
plot(tiempo,c);
grid
```

```
function Z=derecha(X, desp, modulo)
y=X;
for d=1:desp %N° de desplazamientos
    contador=1;
    while contador<=modulo
        if contador==1
            X(contador)=y(modulo);
        else
            X(contador)=y(contador-1);
        end
        contador=contador+1;
    end
end
y=X;
end
Z=X;
```

```
%Carga los datos de la nota
pregunta='Nivel dinámico? ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=['g:\unsaac\maestria\procesamiento\' nota '\'];
pregunta='Ingresar nota ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=[cadena 'G_' nota '.mat'];
archivo=cadena;
load(archivo);
pregunta='Número de polos? ';
nota=input(pregunta, 's');
polos=str2num(nota);
%Calcula el vector de los coeficientes rss
Phiss=zeros(1,2*polos);
for m=1-polos:polos
    for n=1:length(datos_leidos)
        if m>=n
            n=n+1;
        else
            if (n-m)<=length(datos_leidos)
                prod=datos_leidos(n)*datos_leidos(n-m);
                Phiss(m+polos)=Phiss(m+polos)+prod;
            end
        end
    end
end
%Construye la matriz de coeficientes
for i=1:polos
    for j=1:polos
        Rss(i,j)=Phiss(polos-(j-i));
    end
end
%Construye el vector rss
rss=[Phiss(polos+1:2*polos)]';
%Cálculo de los coeficientes Ak
A=Rss\rss;
%Aplica el filtro directo
for n=1:length(datos_leidos)
    env(n)=0;
    for k=1:polos
        if n>k
            env(n)=env(n)+A(k)*env(n-k);
        end
    end
    env(n)=datos_leidos(n)+env(n); %falta considerar la ganancia
end
tt=linspace(0,35.5,length(datos_leidos));
plot(tt,env);grid
```

```
%Cálculo del espectrograma de los 100 primeros mili segundos de la nota
pregunta='Nivel dinámico? ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=['H:\unsaac\maestria\procesamiento\' nota '\'];
pregunta='Ingresar nota ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=[cadena 'G_' nota '.mat'];
archivo=cadena;
load(archivo);
%Espectrograma
[S1,F1,T1]=spectrogram(nuevo,105,[],882,44100); %Y filtrado, nuevo sin filtrar
spectrogram(nuevo,105,[],882,44100, 'yaxis')
pause
```

```
pregunta='Nivel dinámico? ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=['G:\unsaac\maestria\procesamiento\' nota '\'];
pregunta='Ingresar nota ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=[cadena 'G_' nota '.mat'];
archivo=cadena;
load(archivo);
%Ubica todos los picos positivos y sus ubicaciones
[valor, lugar] = findpeaks(datos_leidos, 'minpeakheight',0);
%Construye la matriz picos [lugar valor sig dif]
sig=[valor(2:length(valor))' 0];
sig=sig';
dif=sig-valor;
picos=[lugar valor sig dif];
%crea el vector de picos positivos envol
envol=zeros(1,length(datos_leidos))';n=2;
for k=1:length(lugar)
    while n<lugar(k)
        envol(n-1)=0;
        n=n+1;
    end
    envol(n)=valor(k);
    n=n+2;
end
%eliminación de los picos pequeños .0328
aux=valor;
umbral=.0328;
for k=1:length(lugar)
    if k<length(lugar)
        delta=abs(valor(k+1)-valor(k));
        if delta>=umbral
            if valor(k)>valor(k+1)
                aux(k+1)=0; %valor(k+1)
            else
                aux(k)=0; %valor(k)
            end
        end
    end
end
valor=aux;
n=2;
for k=1:length(lugar)
    while n<lugar(k)
        envol(n-1)=0;
        n=n+1;
    end
    envol(n)=valor(k);
    n=n+2;
end
%Ubica de nuevo los picos en envol
[valor, lugar] = findpeaks(envol, 'minpeakheight',0);
%Construye la matriz picos [lugar valor sig dif]
sig=[valor(2:length(valor))' 0];
sig=sig';
```

```
dif=sig-valor;
picos=[lugar valor sig dif];
%Une los picos
envol(1)=0;
n=2;
for k=1:length(valor)-1
    if k==1
        distancia=picos(1,1);
        inc=picos(1,2)/distancia;
        while n<picos(1,1)
            envol(n)=envol(n-1)+inc;
            n=n+1;
        end
    else
        distancia=picos(k,1)-picos(k-1,1);
        inc=picos(k-1,4)/distancia;
        while n<picos(k,1)
            envol(n)=envol(n-1)+inc;
            n=n+1;
        end
    end
    n=n+1;
end
tt=linspace(0,26.5,length(envol));
plot(tt,envol,tt,datos_leidos)
```

```
%Carga los datos de la nota
pregunta='Nivel dinámico? ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=['g:\unsaac\maestria\procesamiento\' nota '\'];
pregunta='Ingresar nota ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=[cadena 'G_' nota '.mat'];
archivo=cadena;
load(archivo);
%Ventana de Blackman
M=length(nuevo);%Longitud de la ventana
for j=drange(1:M)
    HAMM=(0.42-0.5*cos(2*pi*j/M)+0.08*cos(4*pi*j/M));
    nuevo(j)=nuevo(j)*HAMM;
end
NFFT=2^(nextpow2(muestras)-1);
% Cálculo y Gráfica del espectro
%NFFT=2^(nextpow2(muestras-inicio+1)-1);
frecuencias=linspace(0, fm/2, final/2); %Espectro de la nota
longmed=muestras/2;
fr=abs(fft(nuevo(1:NFFT)))/longmed;
longitud=length(fr);
%Cálculo del espectro inverso
%Determinación y corrección de los ceros
for k=drange(2:longitud-1)
    if fr(1)<=0.05
        fr(1)=1;
    else
        if k<longitud-1
            primero=fr(k-1);
            segundo=fr(k);
            if segundo<=0.0005%original en 0.0005
                if k<longitud-1
                    fr(k)=(primero+segundo+fr(k+1))/3;
                else
                    fr(k)=1;
                    fr(k+1)=1;
                end
            end
        end
    end
end
end
inverso=1./fr;%Espectro inverso
%Filtro promedio
Nf=1; %Ancho de la ventana y convolución cíclica
R=0;
%for k=1:NFFT
%    R(k)=0;
%end
R=zeros(1,1024);
%R=R';
for h=-Nf/2:Nf/2-1
    if h>0
        aux=izquierda(inverso,abs(h),NFFT);
```

```
else
    aux=derecha(inverso,h,NFFT);
end
R=R+aux(1:NFFT)';
end
R=1./R;
plot(frecuencias(1:NFFT/2+1),R(1:NFFT/2+1));grid
% Títulos de las gráficas
titulo=['ESPECTRO ESTOCÁSTICO DE LA NOTA ' tono ', Nf = ' num2str(Nf)];
title(titulo);
xlabel('Frecuencia (Hz)');
```

```
function Z=izquierda(X, desp, modulo)
y=X;
for d=1:desp %N° de desplazamientos
    contador=modulo;
    while and(0<contador, contador<=modulo)
        if contador==modulo
            X(contador)=y(1);
        else
            X(contador)=y(contador+1);
        end
        contador=contador-1;
    end
end
y=X;
Z=X;
```

```
%Carga los datos de la nota
pregunta='Nivel dinámico? ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=['G:\unsaac\maestria\procesamiento\' nota '\'];
pregunta='Ingresar nota ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=[cadena 'G_' nota '.mat'];
archivo=cadena;
load(archivo);
resonancias=[900];
%resonancias=[38 95 100 250 290 330 440 900 1000];
ventana=(1:20);
for v=1:length(T1)
%for v=1:length(ventana) %Forma la matriz de los valores del espectro de las ↙
resonancias
    for r=1:1 %Interpola los valores de las resonancias en la ventana v
        N=resonancias(r);
        contador=1;
        while F1(contador)<N
            contador=contador+1;
        end
        N2=F1(contador);
        N1=F1(contador -1);
        valormax=abs(S1(contador,v));
        valormin=abs(S1(contador-1,v));
        if (valormax-valormin)>0
            RASTREO(v,r)=valormin+abs(valormax-valormin)*(N-N1)/(N2-N1);
        else
            RASTREO(v,r)=valormin-abs(valormax-valormin)*(N-N1)/(N2-N1);
        end
    end
end
end
%plot(ventana,RASTREO(1:20,7));grid
%plot(ventana,RASTREO(1:12,1),ventana,RASTREO(1:12,2),ventana,RASTREO(1:12,3),ventana, ↙
RASTREO(1:12,4),ventana,RASTREO(1:12,5),ventana,RASTREO(1:12,6),ventana,RASTREO(1: ↙
12,7),ventana,RASTREO(1:12,8),ventana,RASTREO(1:12,9));grid
%for r=1:3
%    plot(ventana,RASTREO(1:20,r));grid
%    pause
%end
```

```
pregunta='Nivel dinámico? ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=['E:\unsaac\maestria\procesamiento\' nota '\'];
pregunta='Ingresar nota ';
nota=input(pregunta, 's');
cadena=[cadena 'G_' nota '.mat'];
archivo=cadena;
load(archivo);
%Espectrograma
[S1,F1,T1]=spectrogram(nuevo,137,[],65536,44100); %Y filtrado, nuevo sin filtrar
spectrogram(nuevo,137,[],65536,44100, 'yaxis')
save(archivo)
```