UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TESIS

LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y LAS DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS

AUTOR:

Br. EDUARDO LLOCCALLASI ZAMATA

ASESOR:

Dr: IGNACIO VELASQUEZ HACHA

ORCID: 0000-0002-9306-4374

CUSCO - PERÚ

2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, **Asesor** del trabajo de investigación/tesis titulada: LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y LAS DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

presentado por: Eduardo Lloccallasi Zamata con DNI Nro.: 23974853

presentado por: .... con DNI Nro.: ....

para optar el título profesional/grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 2 veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del ***Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC*** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 8 **%.**

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera página del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 2 de Febrero de 2024

Firma

Post firma Ignacio Velazquez Huchq

Nro. de DNI 23988755

ORCID del Asesor 0000-0002-9306-4374

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: oid:27259:292518924?locale=es-MX

turnitin

Identificación de reporte de similitud: oid:27259:292518924

NOMBRE DEL TRABAJO

tesis maestria diciembre actualizado 20-1 (1).pdf

AUTOR

Eduardo Lloccallasi

RECUENTO DE PALABRAS

16025 Words

RECUENTO DE CARACTERES

81944 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

113 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

1.8MB

FECHA DE ENTREGA

Dec 5, 2023 8:06 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Dec 5, 2023 8:07 AM GMT-5

8% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada bas

- 7% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 4% Base de datos de trabajos entregados
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Cros

Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Bloques de texto excluidos manualmente
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 8 palabras)

Dedicatoria

Este trabajo dedico a mis padres: Melquiades y Justina

Por su apoyo incondicional para la realización de este trabajo.

Agradecimiento

A mis padres Melquiades y Justina, a mis hijos Kerly y Howar, a mis hermanos Miguel, Fernanda, Clímaco (Q.E.P.D), Wilfredo a mis sobrinos Miguelito y Julia de quienes he recibido un inmenso cariño y motivación para seguir superándome.

A mi asesor, Dr. Ignacio Velasquez Hacha por todo su dedicación y orientación, fundamentales para la realización de esta tesis y mi crecimiento profesional.

ÍNDICE GENERAL

Indice de notación .... **V**

Resumen .... **VII**

Abstract .... **VIII**

Introducción .... **IX**

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA **1**

1.1 Situación Problemática **1**

1.2 Formulación del Problema **1**

1.2.1 Problema General 2

1.2.2 Problemas Específicos 2

1.3 Justificación de la Investigación **2**

1.4 Objetivos de la Investigación **2**

1.4.1 Objetivo General 2

1.4.2 Objetivos Específicos 3

1.5 Antecedentes de la Investigación **3**

1.6 Metodología **5**

1.6.1 Ámbito de Estudio: Localización Política y Geográfica 5

1.6.2 Tipo de Investigación 5

1.6.3 Diseño de Investigación 5

1.6.4 Nivel de Investigación 5

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL **6**

2.1 Bases Teóricas **6**

2.2 Función Generalizada **6**

2.3 Distribuciones **7**

2.4 Operaciones con Distribuciones **11**

2.4.1 Derivada de una Distribución 11

2.5 Sucesión de Distribuciones **14**

2.6 Soporte de una Distribución **15**

2.8 Convolución entre Dos Distribuciones **31**

2.8.1 Propiedade de convolución entre Dos Distribuciones 31

2.9 Transformada de Fourier **38**

2.10 Espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ **45**

2.11 Topología en el Espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$ **46**

2.12 Transformada de Fourier en el Espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ **53**

CAPÍTULO III: ESPACIO DE DISTRIBUCIONES TEMPERADAS **70**

3.1 Distribuciones Temperadas **70**

3.2 Derivada de una Distribución Temperada **73**

CAPÍTULO IV: TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA DISTRIBUCIÓN **83**

4.1 Transformada de Fourier de una Distribucion Temperada **83**

4.2 Aplicaciones de la Transformada de Fourier de Distribuciones Temperadas **92**

4.3 Discusión de Resultados **99**

Conclusiones **101**

Recomendaciones **102**

Apéndice **103**

Matríz de consistencia **103**

Bibliografía **104**

Índice de Notación

- $\mathbb{R}^n$: Espacio euclídeo n-dimensional.
- $\mathbb{C}$: Campo complejo.
- $C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de funciones infinitamente diferenciables
- $\wp = \wp\left(\mathbb{R}^n\right) = C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte. compacto.
- $T : C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ **:** T es una funcional lineal continua o una distribución.
- $\wp' = \wp'\left(\mathbb{R}^n\right) = \left[C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\right]'$: Espacio de las distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$.
- $F\,[f] = \hat{f}$: Transformada de Fourier de f .
- $F^{-1}\,[f] = \check{f}$: Transformada inversa de Fourier de f.
- $S\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de Schwartz.
- $\wp'_0\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de distribuciones de soporte compacto.
- $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de distribuciones temperadas.
- $F[T] = \hat{T}$: Transformada de Fourier de una distribución temperada.
- $F^{-1}[T] = \check{T}$: Transformada inversa de Fourier de una distribución temperada.
- $L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de funciones medibles integrables.

- $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de funciones integrables según Lebesgue.
- $(f * g)$: convolución de f y g.
- $L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de funciones localmente integrables.
- $C\left(\mathbb{R}^n\right)$: Espacio de funciones continuas.

Resumen

En el presente trabajo de investigación se realiza la extensión o generalización de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a funciones generalizadas de distribuciones temperadas. El objetivo principal de la investigación es determinar la extensión o generalización de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a funciones generalizadas de distribuciones temperadas. La investigación se enmarca en un enfoque no experimental de carácter descriptivo, el desarrollo de la perspectiva teórica se basa en la recopilación de diferentes fuentes bibliográficas. La transformada de Fourier se introduce al espacio de funciones rápidamente decrecientes luego se extiende a funciones generalizadas de distribuciones temperadas. Asimismo las propiedades del espacio de Schwartz se preserva en el espacio de distribuciones temperadas, por consiguiente se extiende la transformada de Fourier del espacio de Schwartz a distribuciones temperadas.

PALABRAS CLAVE: Distribuciones temperadas, funciones rápidamente decrecientes, transformada de Fourier.

Abstract

In the present research work, the extension or generalization of the Fourier transform of rapidly decreasing functions to generalized functions of tempered distributions is carried out. The main objective of rapidly decreasing functions to generalized functions of tempered distributions. The research is framed in a non-experimental approach of a descriptive nature, the development of the theoretical perspective is based on the compilation of different bibliographic sources. The Fourier transform is introduced to the space of rapidly decreasing functions then extended to generalized functions of tempered distributions. Likewise, the properties of the Schwartz space are preserved in the space of tempered distributions, therefore the Fourier transform of the Schwartz space is extended in tempered distributions.

KEY WORDS: Tempered distributions, rapidly decreasing functions, Fourier transform.

Introducción

Una distribución, que generaliza el concepto de función, desarrollado inicialmente por el físico Británico P.A.M. DIRAC, introdujo la función delta de Dirac" δ ", la cual tiene la propiedad de ser igual a cero en todo $\mathbb{R}$, excepto en el origen, y tal que su integral en todo $\mathbb{R}$ es igual a 1. Es claro que δ no define una función en el sentido usual,

El Soviético SOVOLEV y el francés SCHWARTZ, dieron origen a la moderna teoría de las distribuciones, donde la δ se define como un operador sobre un espacio de funciones. Telechea, A. (1981)

La teoría de distribuciones avanzó notablemente en el desarrollo de varias ramas de matemáticas y física tales como las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, el cálculo operacional y el análisis funcional. Vargas, F.(1994)

Este trabajo tiene por objetivos. Primero es abordar a una introducción de teoría de distribuciones presentando definiciones y propiedades básicas y las operaciones con distribuciones tales como la derivada, convergencia de una sucesión de distribuciones, convolución de distribuciones.

Segundo es describir conceptos y propiedades de la transformada de Fourier en el espacio de funciones rápidamente decrecientes e introducir distribuciones temperadas.

La organización del presente trabajo presenta la siguiente secuencia.

En el capítulo I, planteamiento del problema, justificación de la investigación, objetivos.

En el capítulo II, presenta marco teórico conceptual y la base tórica enfocada en distribuciones, convolución, transformada de Fourier y el espacio de funciones rápidamente decrecientes o espacio de Schwartz, transformada de Fourier en el espacio de Schwartz; estos conceptos serán utilizados para definir la transformada de Fourier en distribuciones temperadas.

En el capítulo III, presenta conceptos, propiedades y desarrollo de las distribuciones temperadas.

En el capítulo IV, se desarrolla la extensión de la transformada de Fourier a distribuciones temperadas. Asimismo se presentan resultados, conclusiones obtenidas y las referencias bibliográficas.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Situación Problemática.

La transformada de Fourier fue introducido y estudiado por Joseph B. Fourier, sobre la propagación del calor, mediante un argumento de paso al límite del discreto al continuo a partir de las series de Fourier.

La transformada de Fourier hoy es una de las herramientas más sofisticadas para la resolución de problemas en diferentes campos tales como: el estudio de señales, óptica, tomografía, digitalización de imágenes, resonancia magnética; en todo tipo de instrumento científico que se usa para el análisis y presentación de datos. La transformada de Fourier tiene aplicaciones en el estudio de ecuaciones diferenciales como también en la física y en la propagación de ondas. Asimismo la transformada de Fourier fue introducido directamente sobre el espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ constituido por funciones infinitamente diferenciables que decrecen rápidamente en el infinito. Posteriormente Schwartz abordó estudios sobre funciones generalizadas llamadas distribuciones siendo sus aplicaciones como la transformada de Fourier.

Perez, M. (2009)

1.2 Formulación del Problema

Los fundadores principales del espacio de distribuciones fueron Joseph B.Fourier, Sobolev y Schwartz; quienes desarrollaron el estudio de la transformada de Fourier y la importancia que tiene en la matemática aplicada y de la física; esta propiedad de la transformada de Fourier es una de las herramientas sofisticadas para el estudio y tratamiento de las ecuaciones en derivadas parciales y funciones rápidamente decrecientes del espacio de Schwartz como también del espacio de distribuciones temperadas.

1.2.1 Problema General

¿Será posible realizar la extensión o generalización de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a funciones generalizadas de distribuciones temperadas?

1.2.2 Problemas Específicos

1. ¿Será posible introducir las propiedades de la transformada de Fourier al espacio de funciones rápidamente decrecientes?
2. ¿Será posible introducir las propiedades de la transformada de Fourier a distribuciones temperadas?
3. ¿Será posible extender las propiedades de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a funciones generalizadas de distribuciones temperadas?

1.3 Justificación de la Investigación

La importancia de este trabajo consiste en determinar analizar la relación y estructuración de las propiedades de la transformada de Fourier con las propiedades de las funciones rápidamente decrecientes o espacio Schwartz.

El interés por conocer estos resultados que en adelante contribuirán a comprender los conceptos y propiedades, así como la extensión de la transformada de Fourier a las distribuciones temperadas.

1.4 Objetivos de la Investigación

1.4.1 Objetivo General

Determinar la extensión o generalización de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a funciones generalizadas de distribuciones temperadas.

1.4.2 Objetivos Específicos

1. Determinar las propiedades de la transformada de Fourier del espacio de funciones rápidamente decrecientes.
2. Determinar las propiedades de la transformada de Fourier de distribuciones temperadas.
3. Determinar la extensión de las propiedades de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a funciones generalizadas de distribuciones temperadas.

1.5 Antecedentes de la Investigación

A) Antecedentes internacionales

a) Valeria, M. (2009) presenta una tesis titulada. "*La definicion de la definicion de la Transformada de Fourier y sus desigualdades en norma con pesos".*

En este trabajo ha realizado una investigacion descriptiva haciendo una revisión de resultados previamente sobre teoría de distribuciones considerando como funcionales lineales en un espacio de funciones regulares llamadas "Funciones Test" ya que en este espacio se simplifican bien las operaciones de diferenciación, la transformada de Fourier , la convolución, la traslación.

Luego define una funcional lineal y contínua sobre el espacio de Schwatrz llamado distribuciones temperadas.

b) Tellechea, E. (1981) presenta una tesis titulada "*La teoria de distribuciones y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales*".

En dicho trabajo presenta de una manera breve un panorama general de la teoría de distribuciones ejemplificando algunas aplicaciones a la teoría cuantitativa de las ecuaciones diferenciales.

En la presente tesis enfatiza los aspectos matemáticos y aplicaciones de la teoría de distribuciones en diversos campos, asimismo busca un balance en ambas direcciones presentando teorias y conceptos para el uso de distribuciones en problemas físicos modelados por ecuaciones diferenciales.

B) Antecedentes Nacionales.

a) Tineo,C. (2005) presenta una tesis titulada "*Soporte de una distribucion y aplicaciones*". En dicho trabajo caractriza a las distribuciones de soporte compacto como funcionales lineales continuas en el espacio de funciones continuas infinitamente diferenciables de soporte compacto.

Tambien define la convolución de dos distribuciones, donde uno de ellos tenga soporte compacto, pues esto permitirá resolver ecuaciones diferenciales de la forma $P(D)u = v$ (polinomio de coeficientes constantes) buscando una distribución solución u, teniendo como dato una distribución v de soporte compacto, cuya resolución es $P(D)E = \delta$, donde la distribución E es solución fundamental.

C) Antecedentes Locales

a) Lloccallasi, E. (2011) presenta una tesis titulada "*Distribuciones temperadas mediante el espacio de Schwartz en* $\mathbb{R}^n$".

En este trabajo de tesis se presenta una introducción a la teoría elemental de distribuciones, así como su estructuración de conceptos y propiedades fundamentales. También convolución, espacio de funciones rapidamente decrecientes y distribuciones temperadas.

Ahora en este trabajo actual, se amplía transformada de Fourier en las funciones rápidamente decrecientes o espacio de Schwartz y luego su extensión al espacio de distribuciones temperadas.

1.6 Metodología

1.6.1 Ámbito de Estudio: Localización Política y Geográfica

Universidad Nacional de san Antonio Abad del Cusco.

1.6.2 Tipo de Investigación

Este trabajo pertenece al tipo de investigación teórico explorativo, puesto que en el presente se describen definiciones básicas importantes y necesarias para la extensión o generalización de la transformada de Fourier a distribuciones temperadas.

Rodriguez, G. (1996)

1.6.3 Diseño de Investigación

El diseño corresponde a un diseño no experimental, de carácter descriptivo en la que se estudia la teoría necesaria y básica concerniente a la transformada de Fourier de distribuciones, además relaciona con la extensión o generalización de distribuciones temperadas.

1.6.4 Nivel de Investigación

De acuerdo a la naturaleza de estudio de la investigación es de nivel básico descriptivo.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1 Bases Teóricas

En este capítulo introduciremos conceptos y propiedades básicas de distribuciones o funciones generalizadas.

2.2 Función Generalizada

Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclídeo n-dimensional, $\mathbb{C}$ el campo complejo.

El espacio vectorial con valores complejos $E = \left\{ \varphi / \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ una función} \right\}$.

Con las operaciones de adición y multiplicación por escalar usual de funciones $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ define un espacio vectorial sobre el campo complejo.

2.2.1 Definicíon

Sea E el espacio euclídeo n-dimensional, $\mathbb{C}$ el campo complejo; la aplicación,

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle T, \varphi \rangle, \varphi \in E \end{aligned}$$

es lineal, puesto que,

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad ; \quad \varphi_1, \varphi_2 \in E$$

Además, T es continua, esto es consecuencia de la convergencia uniforme de $\left\{ \varphi_j \right\}$, esto es:

$$\lim_{j \to \infty} \langle T, \varphi_j \rangle = \left\langle T, \lim_{j \to \infty} \varphi_j \right\rangle = \langle T, \varphi \rangle ,$$

2.2.2 Definición de Función Generalizada

Sea E el espacio vectorial complejo, $T : E \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal sobre E o función generalizada si existe una sucesión $\left\{ \varphi_j \right\} \subset E$ uniformemente convergente a $\varphi \in E$, tal que:

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim \langle T, \varphi_j \rangle = \langle T, \lim \varphi_j \rangle .$$

En adelante se denotará por $E^{\prime}$ el espacio de funciones generalizadas sobre E.

Escobar, A. (2012)

2.3 Distribuciones

Según Vargas,F. (1994). La teoria de distribuciones se extiende al calculo diferencial a ciertas formas lineales y continuas definidas en un espacio topologico de funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto, estas funciones lineales y continuas se llaman distribuciones o funciones generalizadas esta clase de funciones es mucho más ámplio que la clase de funciones diferenciables en sentido usual.

2.3.1 Definición

Consideremos el espacio Euclideo $\mathbb{R}^n$ y sea $K_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ conjunto compacto, definimos la clase de funciones continuas infinitamente diferenciables de soporte compacto como la clase de funciones,

$$C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{\varphi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, \varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \text{y} \operatorname{sop}(\varphi) \subset K_\varphi \text{compacto}\right\},$$ Tal que:

$$\varphi(x)=0; \qquad \text{si} \qquad x \in \left(\mathbb{R}^n \setminus K_\varphi\right) \qquad \text{y}$$

$$\varphi(x)\neq 0; \qquad \text{si} \qquad x \in K_\varphi$$

Además $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ con las operaciones usuales de adición y multiplicación por escalar es un espacio vectorial complejo.

Con la finalidad de conceptualizar una distribución, es necesario considerar que si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto y $\varphi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es funcional de soporte compacto la clase de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto es el conjunto:

$$C_k^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) / \varphi(x)=0, \text{ si } x \notin K\right\},$$

entonces; si K es la familia de los compactos de $\mathbb{R}^n$, se tiene:

$$C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{k}} C_k^\infty\left(\mathbb{R}^n\right).$$

2.3.2 Definición de Soporte de una Función

Sea $C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ el espacio de funciones con derivadas parciales contínuas de orden infinito dimensional, se define soporte de φ como el conjunto:

$$C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}\,/\,\varphi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\text{ y }\varphi(x)=0\ ,\ x\in\mathbb{R}^n\right\}$$

Vargas, F. (1994)

2.3.3 Definición de Espacio de Funciones de Prueba

Sea $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ y τ una topología en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$, se define espacio de funciones de prueba, denotado por $\wp=C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ y las funciones que están en $\wp=C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ se llama funciones de prueba.

Perez, M. (2009)

2.3.4 Definición

Sea $K\subset\mathbb{R}^n$ subconjunto compacto, en $C_k^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ se define la semi-norma,

$$\|\varphi\|_{m,k}=\sup_{x\in k}\sup_{|\alpha|\leq m}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|$$

donde el subíndice $m=0,1,\ldots$; $\varphi\in C^m\left(\mathbb{R}^n\right)$ y α es el orden de derivación.

Vargas, F. (1994)

Es de observar que si $\{\varphi_j\}$ es una sucesión en $C_k^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, es convergente en la semi-norma definida en $C_k^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\{D^{\alpha}\varphi_j\}$ converge uniformemente sobre $K \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto compacto, para todo orden α.

Esto implica que existe $\varphi_0 \in C_k^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$\left\|\varphi_j - \varphi_o\right\|_{m,k} = \sup_{x\in k}\sup_{|\alpha|\leq m}\left|D^{\alpha}\left(\varphi_j - \varphi_o\right)(x)\right| \xrightarrow{j\to\infty} 0 .$$

o simplemente $\varphi_j \longrightarrow \varphi_0$ en la semi-norma de $C_k^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ más aún si $\{\varphi_j\}$ es una sucesión de Cauchy o fundamental, entonces $C_k^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial completo.

2.3.5 Definición de Distribución

Sea $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto, la aplicación,

$$T : C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$$

T es una funcional lineal contínua o una distribución sobre $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ si cumple las condiciones:

i) Linealidad:

$\langle T, \varphi_1 + \varphi_2\rangle = \langle T, \varphi_1\rangle + \langle T, \varphi_2\rangle$; $\quad \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

$\langle T, \gamma\varphi\rangle = \bar{\gamma}\langle T, \varphi\rangle$; $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n), \gamma \in \mathbb{C}$.

Vargas, F.(1994)

ii) La continuidad es consecuencia de la convergencia uniforme de sucesiones $\{\varphi_j\}$ en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$; esto es:

sí $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces $\left\langle T, \varphi_j \right\rangle \longrightarrow \left\langle T, \varphi \right\rangle$, $j \in \mathbb{N}$.

En adelante se denotará por $\wp\left(\mathbb{R}^n\right) = C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ y se denomina espacio de funciones de prueba.

2.3.6 Definición de Espacio de Distribuciones

Sea $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ espacio de funciones prueba, se define la funcional lineal continua

$T : C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathbb{C}$, así el espacio de funciones lineales continuas o espacio de las distribuciones sobre $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ que se denota por $\wp' = \wp'\left(\mathbb{R}^n\right) = \left[C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\right]'$ se denomina espacio de las distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$.

La continuidad de funcionales lineales o distribuciones es consecuencia de la convergencia; esto es:

$$\lim_{j \to \infty} \left\langle T, \varphi_j \right\rangle = \left\langle T, \lim_{j \to \infty} \varphi_j \right\rangle = \left\langle T, \varphi \right\rangle, \varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Consecuentemente, se dice que $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ es una distribución si para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, existe una constante $C > 0$ *y* $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$\left|\left\langle T, \varphi \right\rangle\right| \leq C \left\|\varphi\right\|_{m,k} \tag{2.3.6.1}$$

Escobar, A. (2012)

2.3.7 Proposición

Dada una función continua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ la funcional lineal T_f definido por:

$$\left\langle T_f, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Es una funcional lineal sobre $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ por lo tanto, es una distribución.

Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi \in C_k^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene:

$$\left|\langle T_f, \varphi\rangle\right| = \left|\int_K f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \left\{\int_K |f(x)|dx\right\}\|\varphi\|_{k,0}$$

Así, T_f es una distribución sobre $\mathbb{R}^n$.

Dicho resultado permite concluir que toda función localmente integrable define una distribución.

En caso particular se tiene, la distribución Delta de Dirac δ_x como la funcional lineal,

$$\delta_x : \wp(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto \delta_x(\varphi) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\delta_x(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) = \alpha\delta_x(\varphi) + \beta\delta_x(\psi)$$

Por lo tanto, δ_x es lineal.

2.4 Operaciones con Distribuciones

En esta sección se definen algunas operaciones que son importantes en el estudio sobre funciones, así como su generalización como distribuciones.

2.4.1 Derivada de una Distribución

Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ una función, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces,

$$\left\langle D_j f, \varphi\right\rangle = \int \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi dx = -\int f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = -\left\langle f, D_j\varphi\right\rangle.$$

donde: $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Esto permite considerar una distribución $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ y asociar a ella la funcional $\dfrac{\partial T}{\partial x_j} = D_j T$ derivada de la funcional T en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido por:

$$\left\langle D_j T, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, D_j \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

consecuentemente:

$D_j T$ es funcional lineal, además, si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi \in C_k^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$,entonces

$$\left|\left\langle D_j T, \varphi \right\rangle\right| = \left|\left\langle T, D_j \varphi \right\rangle\right| \leq C \left\| D_j T \right\|_{m,k} \leq C_1 \left\| \varphi \right\|_{m+1,k}, \forall \varphi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

en consecuencia, $D_j T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Por tanto, permite definir la derivada de una distribución $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$**.**

2.4.2 *Definición de Derivada de una Distribucion*

Sea $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) \in \mathbb{N}^n$ y $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$, se define la derivada α-ésima de distribución T, denotado por $D^{\alpha} T$, como*:*

$$\left\langle D^{\alpha} T, \varphi \right\rangle = \left(-1\right)^{|\alpha|} \left\langle T, D^{\alpha} \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

donde, $D^{\alpha} \varphi = \left(\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_2}} .... \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} \right) \varphi$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

Zamora, D. (2018)

i) Es de observar que si $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$, entonces $D^{\alpha} T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

ii) Toda distribución admite derivadas de todos los órdenes mediante la fórmula de Leibniz; esto es:

Sea $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $f \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$

$$D^{\alpha}\left(fT\right) = \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(D^{\alpha-\beta} f\right)\left(D^{\beta} T\right), \text{ donde } \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\left(\alpha - \beta\right)!} \quad \text{fórmula de Leibniz} \quad (2.4.2.1)$$

2.4.3 Definición de Producto de una Distribución por una Función

Sea $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ y $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, se define el producto de T por f, denotado por fT, como:

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle \ , \ \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

Telechea, E. (1981)

Es de observar que si $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ entonces $D^{\alpha}T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$

Con dicho resultado se tiene la siguiente proposición.

2.4.4 Proposición

Sea $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ entonces $fT \in \wp'(\mathbb{R}^n)$

Demostración:

Sea $\varphi_n \in \wp(\mathbb{R}^n)$ talque $\varphi_n \longrightarrow 0$ entonces, existe K subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ talque

$sop(\varphi_n) \subset K$ y $D^{\alpha}\varphi_n \longrightarrow 0$ uniformemente en K para todo α.

Se muestra que $(fT)\varphi_n \longrightarrow 0.$

Como $(fT)\varphi_n = T(f\varphi_n)$ basta demostrar que $f\varphi_n \longrightarrow 0$ en $\wp(\mathbb{R}^n)$

a) Si $Sop(f\varphi_n) \subset Sop(\varphi_n)$.

Como $Sop(\varphi_n)$ es cerrado y compacto, entonces $Sop(f\varphi_n)$ es compacto y $Sop(f\varphi_n) \subset K$,

es decir $f\varphi_n \in \wp_K(\mathbb{R}^n)$.

b) Para demostrar se considera fórmula de Leibniz (2.4.2.1).

Para todo $x \in K$ se tiene:

$$\left|D^{\alpha}(f\varphi_n)(x)\right| \overset{(2.4.2.1)}{=} \left|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}f(x)D^{\beta}\varphi_n(x)\right|$$

$$\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left|D^{\alpha-\beta}f(x)\right|\left|D^{\beta}\varphi_n(x)\right|$$

$$\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left(\operatorname*{Sup}_{x\in K}\left|D^{\alpha-\beta}f(x)\right|\right)\left|D^{\beta}\varphi_n(x)\right|$$

$$\leq \sum_{\beta\leq a}\binom{\alpha}{\beta}\left(\sup_{x\in K}\left|D^{\beta}\varphi_n(x)\right|\right)\sup_{x\in K}\left|D^{\beta}\varphi_n(x)\right|$$

$$\leq C\sum\sup_{x\in K}\left|D^{\beta}\varphi_n(x)\right| \;,\quad \text{donde: C es una constante}$$

Como $D^{\alpha}\varphi_n \longrightarrow 0$ uniformemente en K, $\forall\alpha$, entonces, para $x\in K$, $\left|D^{\beta}\varphi_n(x)\right| \longrightarrow 0$

Luego, $\left|D^{\beta}(f\varphi_n)(x)\right| \longrightarrow 0$ para todo $x\in K$

así, $D^{\beta}(f\varphi_n) \longrightarrow 0$ uniformemente en K

Por a) y b) se tiene que $D^{\alpha}\varphi_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ en $\wp(\mathbb{R}^n)$

y como $T\in\wp'(\mathbb{R}^n)$ entonces, $T(f\varphi_n)\longrightarrow 0$, es decir, $(fT)\varphi_n \longrightarrow 0$.

Luego, $fT\in\wp'(\mathbb{R}^n)$.

2.5 Sucesión de Distribuciones

En el espacio de distribuciones $\wp'(\mathbb{R}^n)$ dotado con la topología, se dice que una sucesión $\{T_j\}$ en $\wp'(\mathbb{R}^n)$ converge a la distribución T, cuando $j\to\infty$,

$$\langle T_j,\varphi\rangle \to \langle T,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

2.5.1 Teorema

Si $T_j \longrightarrow T$ en $\wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$. entonces para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha T_j \longrightarrow D^\alpha T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$

Demostración:

Basta observar que:

$$\left\langle D^\alpha T_j - D^\alpha T, \varphi \right\rangle \overset{\text{def.}(2.4.2)}{=} (-1)^{|\alpha|} \left\langle T_j - T, D^\alpha \varphi \right\rangle \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

2.6 Soporte de una Distribución

2.6.1 Igualdad Local

Sea T_1, T_2 distribuciones definidas en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $T_1 = T_2$ localmente si $T_1 = T_2$ en cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ existe un conjunto abierto V que contiene a "x" talque $T_1 = T_2$ en V,

esto significa que,

$T_1\varphi = T_2\varphi \quad \forall \in \wp(V)$.

Es de observar que esta definición permite el estudio local de las distribuciones, por consiguiente, permite dar descripciones globales.

Así T_1 y $T_2 \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ ´talque $T_1 = T_2$ localmente entonces $T_1 = T_2$ en $\mathbb{R}^n$

Vargas, F. (1994)

2.6.2 Definición de Soporte de una Distribución

Sea $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y un abierto V que contiene a X, se define el soporte de T, denotado $\mathrm{sop}(T)$

como el conjunto:

$$\mathrm{Sop}(T) = \left\{\forall V(x), \exists \varphi \in C_0^\infty\left(V(x)\right), x \in \mathbb{R}^n / T(\varphi) \neq 0\right\}$$

Pérez, A .(2020)

Observaciones:

i) Si $\mathrm{Sop(T)}$ es un conjunto cerrado.

Sea $x_o \in (\mathrm{sop(T)})^c$, entonces existe $V(x_o)$,

talque $T(\varphi)=0\ \forall\varphi\in C_0^\infty(V(x))$ esto es;

$V(x_o)\subset(\mathrm{sop(T)})^c$ por lo tanto $(\mathrm{sop(T)})^c$ es abierto.

Por lo tanto, se concluye que $\mathrm{Sop(T)}$ es cerrado.

ii) Si $\varphi\in C_0^\infty(V(x))$ y $T\in\wp'(\mathbb{R}^n)$, talque $(\mathrm{sop(T)})\cap\mathrm{Sop}(\varphi)$ es vacío, entonces $\langle T,\varphi\rangle=0$.

iii) Si $T\in\wp'(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto por tanto existe un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ talque para $\varphi\in\wp(\mathbb{R}^n)$ con $K\cap\mathrm{Sop}(\varphi)$ vacío, se tiene que $\langle T,\varphi\rangle=0$.

2.6.3 Teorema

Sean $T\in\wp'(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi\in\wp(\mathbb{R}^n)$

a) Si $\mathrm{Sop}(\varphi)\cap\mathrm{Sop(T)}$ es vacío entonces $\langle T,\varphi\rangle=0$

b) Si $\mathrm{Sop(T)}$ es vacío entonces $T=0$

c) i) Si $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\psi=1$ en algún conjunto abierto V que contenga a $\mathrm{Sop(T)}$ entonces $\psi T=T$.

ii) Si $\mathrm{Sop(T)}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces existe $\varphi\in\wp(\mathbb{R}^n)$ talque $\psi=1$ en un conjunto abierto que contiene a $\mathrm{Sop(T)}$.

d) Sea $T\in\wp'(\mathbb{R}^n)$ y $\mathrm{Sop(T)}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Entonces T puede extenderse únicamente a una forma lineal contínua definida sobre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Recíprocamente, toda forma lineal y contínua en $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ puede restringirse a una forma lineal contínua con soporte compacto definida en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Pérez, A. (2020)

Demostración:

a) Por la parte a) del teorema (2.6.3) se obtiene:

$\mathrm{Sop}(\varphi)\cap\mathrm{Sop}(T)$ es vacío entonces $\mathrm{Sop}(\varphi)\subset\mathbb{R}^n-\mathrm{Sop}(T)$.

Se debe mostrra que $T=0$ en $\mathbb{R}^n-\mathrm{Sop}(T)$:

Si $x\in\left(\mathbb{R}^n-\mathrm{Sop}(T)\right)$, entonces existe un conjunto abierto V que contiene a x talque $T=0$ en V. Luego, $T=0$ localmente en $\mathbb{R}^n-\mathrm{Sop}(T)$.

Por lo tanto, $T=0$ globalmente en $\mathbb{R}^n-\mathrm{Sop}(T)$. Así $\langle T,\varphi\rangle=0$

b) Por ser $\mathrm{Sop}(T)$ vacío, se tiene que $x\notin\mathrm{Sop}(T)$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Luego, existe un conjunto abierto V que contiene a x talque $T=0$ en V.

Así, $T=0$ en cada punto $x\in\mathbb{R}^n$, luego $T=0$ en $\mathbb{R}^n$.

c) i) Sea $\psi\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ talque $\psi=1$ en V es un abierto talque $V\supset\mathrm{Sop}(T)$.

Entonces para $\varphi\in\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $K=\mathrm{Sop}(T)$ se tiene que $\varphi=\psi\varphi$ en V.

Es decir, $\varphi-\psi\varphi=0$ en V. Luego $\mathrm{Sop}(\varphi-\psi\varphi)\cap K$ es vacío.

Por la parte a) del teorema (2.6.3) se obtiene:

$T(\varphi-\psi\varphi)=0$, como $T\in\wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $\psi\varphi\in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ se tiene:

$T(\varphi)=T(\psi\varphi)=(\psi T)(\varphi)\quad\forall\varphi\in\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Así, $T(\varphi)=(\psi T)(\varphi)$

Por lo tanto, $\psi T = T$.

d) Unicidad:

Sea $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ y $K = \mathrm{Sop}(T)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Por la parte c) ii) del teorema (2.6.3), existe $\psi \in \wp(\mathbb{R}^n)$ talque $\psi = 1$ en algún conjunto abierto que contenga a K.

$\psi \in \wp(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, por la parte c) i) del teorema se tiene que $\psi T = T$

Como $T\varphi = (\psi T)\varphi = T(\psi\varphi), \forall \varphi \in \wp(\mathbb{R}^n)$ entonces para $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que:

$\tilde{T}(f) = T(\psi f)$ define una extensión de T a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto, $T = \tilde{T}$ en $\wp(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\tilde{T}_1$ otra extensión de T a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ talque $\tilde{T}_1(f)=0$ para funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Similarmente se tiene:

$$\tilde{T}_1(f) = \tilde{T}_1(\psi f + (f - \psi f)) = \tilde{T}_1(\psi f) + \tilde{T}_1(f - \psi f)$$

Pero, $\tilde{T}_1(f - \psi f) = 0$ pues en el abierto V se tiene que $f - \psi f = 0$.

Luego, $\tilde{T}_1(f) = \tilde{T}_1(\psi f) = T(\psi f) = \tilde{T}(f)$

Luego, $\tilde{T}_1 = T$ en $\wp(\mathbb{R}^n)$

Así, $\tilde{T}_1 = \tilde{T}$, $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto, $\tilde{T}_1 = \tilde{T}$ y la extensión $\tilde{T}$ de T es única.

$\tilde{T}$ es contínua:

Si $f_n \longrightarrow 0$ en la topología de $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, entonces $D^{\alpha} f_n$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, para todo α multi-índice esto es, $D^{\alpha} f_n \longrightarrow 0$ uniformemente en $K_{\psi} = \mathrm{Sop}(\psi)$.

Como $\tilde{T}(f_n) = T(\psi f_n)$, basta demostrar que $\psi f_n \longrightarrow 0$ en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Por la demostración de la proposición (2.4.4) y usando la fórmula de Leibniz (2.4.2.1) se tiene que $\psi f_n \longrightarrow 0$ en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Como $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $T(\psi f_n) \longrightarrow 0$

luego, $\tilde{T}(f_n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$

Por lo tanto, $\tilde{T}$ es contínua.

El recíproco de la parte d), si $W : C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal y contínua entonces

$$W\Big|_{\wp\left(\mathbb{R}^n\right)} = T : \wp\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

es una distribución de soporte compacto.

En efecto:

T es lineal.

Sea K_1 un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi \in \wp_{K_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Como W es contínua en $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ y, considerando la topología para $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ inducida

para la familia de seminormas, $\|f\|_{m,k} = \sup\limits_{\substack{|\alpha|\leq m \\ x\in K}} \left|D^{\alpha} f(x)\right|$.

Se tiene que existe una constante $C>0$, un entero no negativo m_0 y un compacto $K_0 \subset K_1$ tales que,

$$\left|W(f)\right| = C \sum_{|\alpha|\leq m_0} \sup_{x\in K_0} \left|D^{\alpha} f(x)\right| \quad \forall f \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n}\right).$$

Para $\varphi \in \wp(\mathbb{R}^{n}) \subset C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$ se tiene,

$$\left|T\varphi\right| = \left|W\varphi\right| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m_0} \sup_{x\in K_0} \left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|\leq m_0} \sup_{x\in K_1} \left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|.$$

Pues, $\sup\limits_{K_0}\left|D^{\alpha}\varphi\right| \leq \sup\limits_{K_1}\left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|$.

Luego, existe una constante $C>0$ y un entero no negativo m_0 tales que $\forall \varphi \in \wp_{K_1}(\mathbb{R}^{n})$

, $\left|T\varphi\right| \leq C \sum\limits_{|\alpha\leq m_0|} \sup\limits_{x\in K_1} \left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|$,

por lo tanto, $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ y es de observar que m_0 no depende de K_1,

T es de orden finito.

Se debe mostrar que $Sop(T)$ es compacto:

Sean K_0 un subconjunto de $\mathbb{R}^{n}$ y $\varphi \in \wp(\mathbb{R}^{n})$ talque $K_0 \cap Sop(\varphi)$ es vacío.

Entonces $\varphi = 0$ en un conjunto abierto que contenga a K_0 , $D^{\alpha}\varphi = 0$ en un conjunto abierto que contenga a K_0.

Como se sabe que, $\left|T\varphi\right| \leq C \sum\limits_{|\alpha\leq m_0|} \sup\limits_{x\in K_1} \left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|$

Se tiene que $|T\varphi| \leq 0$. Luego $T\varphi = 0$.

Por la observación iii) de la definición (2.6.2), $\operatorname{Sop}(T)$ es compacto.

Observaciones:

i) Es de observar que de acuerdo a la demostración del teorema anterior (2.6.3) parte d) se concluye que toda distribución con soporte compacto tiene orden finito.

ii) Por la parte b) del teorema (2.6.3), las distribuciones más sencillas son aquellas para los cuales su soporte consta de un solo punto.

Estas distribuciones se caracterizan de la siguiente manera:

Para $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{Sop}(T) = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^n$

Luego, se tiene que,

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta_x \tag{2.6.3.1}$$

donde C_α son constantes, $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ y T tiene orden m.

Es de observar que en (2.6.3.1) su soporte es x (excepto cuando $C_\alpha = 0$, $\forall \alpha$)

iii) Estructura local:

Sea $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ y K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una función contínua f y un multi-índice α talque

$$T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(D^\alpha \varphi)(x)dx \ , \ \forall \varphi \in \wp_k(\mathbb{R}^n)$$

iv) Estructura global:

Sea $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ con Soporte compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y V un abierto de $\mathbb{R}^n$ talque $K \subset V \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un multi-índice α talque para cada multi-índice β con

$(\beta \leq \alpha)$ existe un número de funciones f_β continuas en $\mathbb{R}^n$ cuyos soportes están contenidos en V tales que, $T = \sum_{\beta\leq\alpha} D^\beta f_\beta$

2.7 Convolución

En esta sección primero se define la convolución de una distribución, convolución de una distribución con una función en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, convolución de dos distribuciones. La convolución es importante en las aplicaciones de la transformada de Fourier en las ecuaciones diferenciales.

2.7.1 Definición de Convolución

Sea f y g funciones contínuas en $\mathbb{R}^n$, Se define la convolución de f y g como:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\,dy \ , \ x \in \mathbb{R}^n$$

una de las funciones tiene soporte compacto.

Cariño, J. (2013)

2.7.2 Definición de Traslación

Sea $a \in \mathbb{R}^n$ se define función $\tau_a f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ llamada traslación de f por a como:

$$(\tau_a f)(x) = f(x-a), \ x \in \mathbb{R}^n$$

Luego, la convolución se puede redefinir como:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\tau_x \tilde{f} \right)(y) g(y)\,dy$$

Tellechea, E. (1981)

2.7.3 Definición de Reflexión

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ se define función $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ llamada reflexión de f como:

$$\tilde{f}(x) = f(-x)$$

Vargas, F.(1994)

2.7.4 Definición

Sea f función localmente integrable y $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la convolución se define como:

$$(f * g)(x) = f\left(\tau_x \tilde{g}\right), \; x \in \mathbb{R}^n$$

Vargas, F.(1994)

2.7.5 Proposición

Si f es una función es localmente integrable y $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $(\tau_a f)g = f(\tau_{-a} g)$

Demostración:

$$\begin{aligned}(\tau_a f)g \overset{\text{Prop.(2.3.7)}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_a f)(x) g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(y+a) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\tau_{-a} g)(y) dy \\ &= f(\tau_{-a} g) \; , \; \tau_{-a} g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

Vargas, F (1994)

Con dicha proposición se tiene la siguiente definición.

2.7.6 Definición de Traslación de una Distribución

Sea $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ y $a \in \mathbb{R}^n$.

La aplicación $\tau_a T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ Se llama traslación de la distribución T por a

definida por:

$$\left(\tau_a T\right)(\varphi) = T\left(\tau_{-a}\varphi\right) \ , \ \forall\, \varphi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Vargas, F.(1994)

2.7.7 Proposición

Si $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces $\left(\tau_a T\right) \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$

Demostración:

$\tau_a T$ es lineal

$\tau_a T$ es continua:

En efecto:

Sea $\varphi_n \longrightarrow 0$ en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces,

i) Existe un compacto K talque $\operatorname{Sop}\left(\varphi_n\right) \subset K$.

ii) $D^{\alpha}\varphi_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ uniformemente en K, para todo α multi-índice

por la proposición (2.7.5) se tiene:

$$\left(\tau_a T\right)\varphi_n = T\left(\tau_{-a}\varphi_n\right),$$

Se debe mostrar la convergencia: $\tau_{-a}\varphi_n \longrightarrow 0$ en $C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$

a) Sea $y \in \left\{x : \left(\tau_{-a}\varphi_n\right)(x) \neq 0\right\}$ entonces $\left(\tau_{-a}\varphi_n\right)(y) = \varphi_n\left(y+a\right) \neq 0$

luego, $y + a \in \left\{x : \varphi_n\left(x\right) \neq 0\right\}$, por lo tanto, $y \in \left\{x : \varphi_n\left(x\right) \neq 0\right\} - \{a\}$.

Se concluye que $\left\{x : \left(\tau_{-a}\varphi_n\right)(x) \neq 0\right\} \subset \left\{x : \varphi_n\left(x\right) \neq 0\right\} - \{a\}$.

Luego, $\operatorname{Sop}\left(\tau_{-a}\varphi_n\right) \subset \operatorname{Sop}\left(\varphi_n\right) - \{a\}$,

por la parte i) se tiene que $\operatorname{Sop}\left(\tau_{-a}\varphi_n\right) \subset K - \{a\}$, tomando $K_1 = K - \{a\}$ se tiene que K_1 es compacto.

Luego, existe un compacto K_1 talque $\operatorname{Sop}(\tau_{-a}\varphi_n) \subset K_1$.

b) Sea $y \in K_1$ y α multi-índice.

$$D^\alpha(\tau_{-a}\varphi_n)(y) = D^\alpha(\varphi_n(y+a)) = \left(D^\alpha\varphi_n\right)(y+a),$$

como $y \in K_1$ se tiene que $y = x - a$ para $x \in K$.

Luego, $x = y + a \in K$.

Por la parte ii) se tiene:

$$\left|\left(D^\alpha\varphi_n\right)(y+a)\right| = \left|\left(D^\alpha\varphi_n\right)(x)\right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \text{ para } x \in K.$$

$$\left|D^\alpha(\tau_{-a}\varphi_n)(y)\right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \text{ para } y \in K_1,$$

luego, $D^\alpha(\tau_{-a}\varphi_n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ uniformemente en K_1.

Por a) y b) se concluye que $\tau_{-a}\varphi_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$

Como $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $T(\tau_{-a}\varphi_n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$.

Luego, $(\tau_a T)\varphi_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$.

Por lo tanto, se concluye que $(\tau_a T)\varphi_n \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Es de observar que:

1) Si $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $a \in \mathbb{R}^n$.y multi-índice entonces $D^\alpha(\tau_a T) = \tau_a\left(D^\alpha T\right)$

2) $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_x T$ es una distribución en $\mathbb{R}^n$.

2.7.8 Definición de Convolución de una D istribución con una Función en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$

Sea $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$; $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ se define la convolución de T con φ como:

$(T*\varphi)(x) = T\left(\tau_x \tilde{\varphi}\right)$ Para $x \in \mathbb{R}^n$.

Tellechea, E. (1981)

Es de observar que $T*\varphi$ es una función y se cumple $\left(T*\tilde{\varphi}\right)(0) = T(\tau_0\varphi) = T(\varphi)$

2.7.9 Teorema

Sea $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $\varphi, \psi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$, entonces

a) $\tau_x(T*\varphi) = (\tau_x T)*\varphi = T*(\tau_x\varphi)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

b) $(T*\varphi) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $D^\alpha(T*\varphi) = \left(D^\alpha T\right)*\varphi = T*\left(D^\alpha\varphi\right)$ para todo multi $-$ índice α

c) $T*(\varphi*\psi) = (T*\varphi)*\psi$

Pérez, A. (2020)

Demostración:

a) Para todo $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

i) $$\left(\tau_x(T*\varphi)\right)(y) \overset{\text{def.}(2.7.2)}{=} (T*\varphi)(y-x) \overset{\text{def.}(2.7.8)}{=} T\left(\tau_{y-x}\tilde{\varphi}\right)$$
$$= T\left(\tau_{-x}\tau_y\tilde{\varphi}\right)$$
$$= (\tau_x T)\left(\tau_y\tilde{\varphi}\right)$$
$$= \left((\tau_x T)*\varphi\right)(y)$$

Luego, $\tau_x(T*\varphi) = (\tau_x T)*\varphi$ (2.7.9.1)

ii) $\left(T*\left(\tau_x\varphi\right)\right)(y) \overset{def.(2.7.8)}{=} T\left(\tau_y\left(\tau_x\varphi\right)\right)^{\sim} = T\left(\tau_y\tau_{-x}\tilde{\varphi}\right)$

$$= T\left(\tau_{-x}\tau_y\tilde{\varphi}\right)$$

$$= \left(\tau_x\left(T*\varphi\right)\right)(y)$$

Por lo tanto, $T*\left(\tau_x\varphi\right) = \tau_x\left(T*\varphi\right)$ (2.7.9.2)

Luego de (2 .7.9.1) y (2.7.9.2) se muestra la parte a) del teorema:

Por lo tanto, se concluye que $\tau_x\left(T*\varphi\right) = \left(\tau_x T\right)*\varphi = T*\left(\tau_x\varphi\right)$

b) Sea $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, $\left(\tau_x\left(D^{\alpha}\varphi\right)^{\sim}\right) = (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\left(\tau_x\tilde{\varphi}\right)$.

Aplicando T a la igualdad se obtiene:

$$\left\langle T, \tau_x\left(D^{\alpha}\varphi\right)^{\sim}\right\rangle = \left\langle T, (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\left(\tau_x\tilde{\varphi}\right)\right\rangle = \left\langle D^{\alpha}T, \tau_x\tilde{\varphi}\right\rangle$$

Así, se obtiene:

$$\left(T*\left(D^{\alpha}\varphi\right)\right)(x) \overset{def\,(2.7.8)}{=} \left\langle T, \tau_x\left(D^{\alpha}\varphi\right)^{\sim}\right\rangle = \left\langle D^{\alpha}T, \tau_x\tilde{\varphi}\right\rangle \overset{def\,(2.7.8)}{=} \left(\left(D^{\alpha}T\right)*\varphi\right)(x).$$

2.7.10 Identidad Aproximada

Una sucesión de funciones h_j de la forma $h_j(x) = j^n h(jx)$, $j = 1, 2, 3, \ldots.,$

Se define identidad aproximada como:

$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = 1$; $h \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right), h \geq 0$

Tineo, M. (2005)

Si $h \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ se tiene que $h_j \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ y se cumple que $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = 1$

2.7.11 Teorema

Sea $\{h_j\}$ una identidad aproximada en $\mathbb{R}^n$, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ entonces

a) $\varphi * h_j \xrightarrow[(j\to\infty)]{} \varphi$ en $\wp(\mathbb{R}^n)$

b) $T * h_j \xrightarrow[(j\to\infty)]{} T$ en $\wp'(\mathbb{R}^n)$

c) $\delta * \varphi = \varphi$ donde δ es la delta de Dirac

d) $h_j \xrightarrow[(j\to\infty)]{} \delta$ en $\wp'(\mathbb{R}^n)$

2.7.12 Teorema

Sea $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ y $L : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una aplicación definida por:

$$L\varphi = T * \varphi \ , \quad \varphi \in \wp(\mathbb{R}^n) \qquad (2.7.12.1)$$

entonces L es lineal, contínua y conmuta con traslaciones; esto es:

$$\tau_x L = L\tau_x \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Recíprocamente, si $L : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

es lineal, continua y conmuta con traslaciones entonces,

existe una única $T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$ que cumple (2.7.12.1).

Demostración:

i) L es lineal:

Sea $\varphi, \psi \in \wp(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\left(T*(\alpha\varphi+\beta\psi)\right)(x) \overset{\text{def.}(2.7.4)}{=} T\left(\tau_x(\alpha\varphi+\beta\psi)^{\sim}\right) = T\left(\tau_x\left(\alpha\tilde{\varphi}+\beta\tilde{\psi}\right)\right)$$

$$= T\left(\alpha\tau_x\tilde{\varphi}+\beta\tau_x\tilde{\psi}\right)$$

$$= \alpha T\left(\tau_x\tilde{\varphi}\right)+\beta T\left(\tau_x\tilde{\psi}\right)$$

$$= \alpha(T*\varphi)(x)+\beta(T*\psi)(x)$$

Luego, $T*(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha(T*\varphi)+\beta(T*\psi)$.

Asi, $L(\alpha\varphi+\beta\psi)=T*(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha(T*\varphi)+\beta(T*\psi)=\alpha L\varphi+\beta L\psi$

ii) L conmuta con traslaciones $\forall\varphi\in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$

$$(\tau_x L)\varphi=\tau_x(L\varphi)=\tau_x(T*\varphi)=T*(\tau_x\varphi)=(L\tau_x)\varphi\,.$$

Luego, $\tau_x L=L\tau_x$

iii) L es contínua, basta mostrar que $L|_{\wp_k}$ es una aplicación contínua con valores en $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$

Además, estos dos espacios son de Frechet.

Supóngase que $\varphi_j\to\varphi$ en $C_k^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ y que $T*\varphi_j\to f$ en $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, es decir se debe probar que, $f=\lim\limits_{j\to\infty}T*\varphi_j=T*\varphi$

Sea $x\in\mathbb{R}^n$, entonces $\tau_x\tilde{\varphi}_j\to\tau_x\tilde{\varphi}$ en $C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, así

$$f(x)=\lim_{j\to\infty}(T*\varphi_j)(x) \overset{\text{def.}(2.7.4)}{=} \lim_{j\to\infty}\left\langle T,\tau_x\tilde{\varphi}_j\right\rangle \overset{T-\text{contínua}}{=} \left\langle T,\tau_x\tilde{\varphi}\right\rangle \overset{\text{def.}(2.7.4)}{=} (T*\varphi)(x)\,.$$

iii) Se demuestra el recíproco del teorema:

Se define $\langle T,\varphi\rangle = \left(L\tilde{\varphi}\right)(0)$; $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$, luego dado que $\varphi \to \tilde{\varphi}$ es un operador continuo en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$, y siendo la evaluación en 0 una forma lineal continua en $C\left(\mathbb{R}^n\right)$, T es continua en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$. Así $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$, por (2.7.11) L continua con las traslaciones, entonces

$$(L\varphi)(x) = (L\varphi)(0-(-x)) = (\tau_{-x}L\varphi)(0) = (L\tau_{-x}\varphi)(0) = \left\langle T,(\tau_{-x}\varphi)^{\sim}\right\rangle = \left\langle T,\tau_x\tilde{\varphi}\right\rangle = (T*\varphi)(x)$$

La unicidad sigue del hecho que si $W \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ es tal que $W*\varphi = 0$, $\forall\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Entonces $\left\langle W,\tilde{\varphi}\right\rangle = (W*\varphi)(0) = 0$, $\forall\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ en el sentido distribucional,

Por consiguiente $W = 0$, así suponiendo existe S talque $T*\varphi = S*\varphi$ basta tomar $W = T - S$

2.7.13 Definición de Convolución de una Distribución con una Función en $C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$

Sea $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ se define la convolución de T y f como:

$$(T*f)(x) = T\left(\tau_x\tilde{f}\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Tellechea, E . (1981)

2.7.14 Teorema

Sea $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ con soporte compacto, $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces

a) $\tau_x(T*f) = (\tau_x T)*f = T*(\tau_x f)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

b) $(T*f) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$

c) $D^\alpha(T*f) = \left(D^\alpha T\right)*f = T*\left(D^\alpha f\right)$ para todo multi-índice α

d) $T*\varphi \in \wp\left(\mathbb{R}^n\right)$

e) $T*(f*\varphi) = (T*f)*\varphi = (T*\varphi)*f$

2.8 Convolución entre Dos Distribuciones

Para la convolución de dos distribuciones consideremos que f y g dos funciones continuas en $\mathbb{R}^n$, una de las cuales tiene soporte compacto.

2.8.1 Propiedades de Convolución Entre Dos Distribuciones

Sea $T, S \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Una de las distribuciones tiene soporte compacto, se define la aplicación,

$L : C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ por:

$$L\varphi = T * (S * \varphi) \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right) \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right) \tag{2.8.1.1}$$

Vargas, F. (1994)

Esta aplicación verifica las propiedades:

- L está bien definido:

i) Si $\operatorname{Sop}(S)$ es compacto, entonces por el teorema (2.7.14) parte d) se tiene: $S * \varphi \in \wp\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Por el teorema (2.7.9) parte b) se tiene $T * (S * \varphi) \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, es decir, $L\varphi \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

ii) Si $\operatorname{Sop}(T)$ es compacto, entonces por el teorema (2.7.9) parte b), $T * \varphi \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ y por el Teorema (2.7.14) parte b) $S * (T * \varphi) \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ es decir, $L\varphi \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$

- L Conmuta con traslaciones:

i) Si $\operatorname{Sop}(S)$ es compacto, por el teorema (2.7.14) parte a) se tiene:

$$(\tau_x L)\varphi \overset{\text{def.}(2.8.1)}{=} \tau_x\left(T * (S * \varphi)\right) = T * \left(\tau_x (S * \varphi)\right) = T * (S * \tau_x \varphi) = L(\tau_x \varphi) = (L\tau_x)\varphi$$

ii) Si $\operatorname{Sop}(T)$ es compacto, por el teorema (2.7.14) parte a) o en cualquier caso, se tiene:

$$\tau_x L = L\tau_x$$

- L es lineal y contínua:

$$\text{Sea} \qquad L_1 : C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$$
$$\varphi \mapsto L_1\varphi = S * \varphi$$

Por el teorema (2.7.12) L_1 es lineal y contínua.

Sea,

$$L_2 : C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$$
$$f \mapsto L_2 f = T * f$$

L_2 es lineal.

Como $\wp_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ es un subespacio cerrado de $C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ y por el teorema (2.7.12) se concluye que:

$$L_2\Big|_{\wp_k} = T : \wp_k \subset C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \text{ es cerrado.}$$

Por lo tanto, por el teorema del gráfico cerrado resulta que $L_2\Big|_{\wp_k}$ es contínua.

Luego, L_2 es contínua.

Así, $L = L_2 \circ L_1$ es lineal y contínua.

Por tanto, L es lineal, contínua y conmuta con traslación.

Luego, por el recíproco del teorema (2.7.12) existe una única $\tilde{w} \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ que cumple,

$L\varphi = \tilde{w} * \varphi$, $\varphi \in \wp\left(\mathbb{R}^n\right)$

Es decir, $T * \left(S * \varphi\right) = \tilde{w} * \varphi$

dicho resultado permite la siguiente definición.

2.8.2 Definición de Convolución con Dos Distribuciones

Sea $\tilde{w}$ convolución de las distribuciones T y S definida por, $\tilde{w} = T * S \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$

donde $sop(T)$ es compacto.

Esta convolución se caracteriza por:

$$T*(S*\varphi)=(T*S)*\varphi \qquad \forall\varphi\in\wp(\mathbb{R}^n)$$

Es de observar que,

$$L:\wp(\mathbb{R}^n)\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ definido } L\varphi=S*(T*\varphi)\ ,\quad \varphi\in\wp(\mathbb{R}^n)$$

$$L:\wp(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{L_2}\wp(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{L_1}C^\infty(\mathbb{R}^n)$$
$$\varphi\mapsto T*\varphi\mapsto S*(T*\varphi)$$

La composición $L=L_1\circ L_2$ está bien definido, es lineal, contínua y conmuta con traslaciones.

Por lo tanto, existe una única $\tilde{S}\in\wp'(\mathbb{R}^n)$ talque $L\varphi=\tilde{S}*\varphi$

La distribución $\tilde{S}$ define la convolución entre T y S es decir $\tilde{S}=S*T$ y se caracteriza por

$$S*(T*\varphi)=(S*T)*\varphi$$

2.8.3 Teorema

Sean $T\in\wp'(\mathbb{R}^n)$, $S\in\wp'(\mathbb{R}^n)$, $w\in\wp'(\mathbb{R}^n)$

a) Si una de las distribuciones de T y S tienen soporte compacto entonces

i) $T*S=S*T$

ii) $Sop(T*S)\subset Sop(T)+Sop(S)$

b) Si dos de los soportes de T,S,w son compactos, entonces:

$$(T*S)*w=T*(S*w)$$

c) Sea δ la delta de Dirac α multi-índice entonces

i) $D^\alpha S=(D^\alpha\delta)*S$ ii) $\delta*S=S$

d) Si una de las distribuciones T y S al menos tiene soporte compacto, entonces

$$D^{\alpha}(T*S)=\left(D^{\alpha}T\right)*S=T*\left(D^{\alpha}S\right)$$

Vargas, F. (1994)

Demostración:

a) i) $\varphi_1,\varphi_2 \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ y supóngase que $\operatorname{sop}(T)$ compacto.

Por el teorema (2.7.14) parte e) , se tiene:

$$\left((T*S)*\varphi_1\right)*\varphi_2 \overset{\text{asociativa}}{=} \left(T*(S*\varphi_1)\right)*\varphi_2 \overset{\text{asociativa}}{=} T*\left((S*\varphi_1)*\varphi_2\right)$$

$$\overset{\text{conmutativa}}{=} T*\left(\varphi_2*(S*\varphi_1)\right) \overset{\text{asociativa}}{=} (T*\varphi_2)*(S*\varphi_1)$$

$$=(S*\varphi_1)*(T*\varphi_2)=S*\left(\varphi_1*(T*\varphi_2)\right)$$

$$=S*\left((T*\varphi_2)*\varphi_1\right)=S*\left(T*(\varphi_2*\varphi_1)\right)$$

$$=S*\left(T*(\varphi_1*\varphi_2)\right)=S*\left((T*\varphi_1)*\varphi_2\right)$$

$$=\left(S*(T*\varphi_1)\right)*\varphi_2=\left((S*T)*\varphi_1\right)*\varphi_2$$

Similarmente se tiene cuando $\operatorname{sop}(S)$ es compacto.

Luego, en cualquier caso, se tiene:

$$\left((T*S)*\varphi_1\right)*\varphi_2=\left((S*T)*\varphi_1\right)*\varphi_2$$

Por lo tanto, se concluye $T*S=S*T$

a) ii) Sea $\varphi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $\psi=T*\tilde{\varphi} \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces

$$(S*T)(\varphi)\overset{\text{def.}(2.7.8)}{=}\left((S*T)*\tilde{\varphi}\right)(0)\overset{\text{asociativa}}{=}\left(S*(T*\tilde{\varphi})\right)(0)=(S*\varphi)(0)=S\left(\tau_o\,\tilde{\psi}\right)$$

$$=S(\tilde{\psi})$$

$$=S\left(\left(T*\tilde{\varphi}\right)^{\sim}\right) \qquad \text{por ii)}$$

$$=S\left(T*\tilde{\varphi}\right)^{\sim} \qquad (2.8.3.1)$$

Luego, como $\text{Sop}\left(T*\tilde{\varphi}\right)\subset \text{Sop}(T)+\text{Sop}\left(\tilde{\varphi}\right)$

Se debe verificar que $\text{sop}\left(\tilde{\varphi}\right)=-\text{sop}(\varphi)$.

Luego,

$$\text{Sop}\left(T*\tilde{\varphi}\right)\subset \text{Sop}(T)-\text{Sop}(\varphi)$$

Como $\left(T*\tilde{\varphi}\right)\in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\text{sop}\left(T*\tilde{\varphi}\right)^{\sim}=-\text{sop}\left(T*\tilde{\varphi}\right)$,

se tiene que, $\text{Sop}\left(\left(T*\tilde{\varphi}\right)^{\sim}\right)\subset \text{Sop}(\varphi)-\text{Sop}(T)$. (2.8.3.2)

En lo que sigue se muestra que $\text{Sop}(S*T)\subset \text{Sop}(S)+\text{Sop}(T)$.

En efecto:

Sea $M=\text{Sop}(S)+\text{Sop}(T)$, M es cerrado (pues, $\text{Sop}(S)$ es cerrado y $\text{Sop}(T)$ es compacto)

Si $x\notin M$ entonces $x\in M^c$.

donde M^c: complemento de M y M^c es abierto.

Luego, existe un conjunto abierto V que contiene a x talque $V\subset M^c$.

Así, $V\cap M$ es vacío.

Sea $\varphi \in \wp(V)$, (es decir sea $\operatorname{Sop}(\varphi)$ un compacto y $\operatorname{Sop}(\varphi) \subset V$).

Entonces $\operatorname{Sop}(\varphi) \cap M$ es vacío.

Por lo tanto,

$$\left(\operatorname{Sop}(\varphi) - \operatorname{Sop}(T)\right) \cap \operatorname{Sop}(S) = \phi \qquad \phi - \text{vacío}$$

$$\operatorname{sop}\left(\left(T * \tilde{\varphi}\right)^{\sim}\right) \cap \operatorname{sop}(S) = \phi \quad \text{por } (2.8.3.2)$$

$$S\left(\left(T * \tilde{\varphi}\right)^{\sim}\right) = 0 \qquad\qquad \text{por teorema (2.6.3) parte a)}$$

$$(S * T)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \wp(V) \qquad \text{por } (2.8.3.1)$$

Por lo tanto, $x \notin \operatorname{sop}(S * T)$.

Por consiguiente, se concluye $\operatorname{Sop}(S * T) \subset \operatorname{Sop}(S) + \operatorname{Sop}(T)$

b) Sea $\varphi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ y supongamos que $\operatorname{sop}(w)$ es compacto, entonces:

$$(T * S) \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right) \text{ y } (T * S) * w \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$$

$$(S * w) \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right) \text{ y } T * (S * w) \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Además, $(w * \varphi) \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$,

Luego:

$$\begin{aligned}
((T * S) * w) * \varphi &\overset{\text{asociativa}}{=} (T * S) * (w * \varphi) \overset{\text{asociativa}}{=} T * (S * (w * \varphi)) \\
&\overset{\text{asociativa}}{=} T * ((S * w) * \varphi) \\
&\overset{\text{asociativa}}{=} (T * (S * w)) * \varphi
\end{aligned}$$

Así $(T*S)*w = T*(S*w)$. (2.8.3.3)

Si $\mathrm{sop}(w)$ no es compacto entonces $\mathrm{sop}(S)$ debe ser compacto.

Así, $\mathrm{Sop}(T*S) \subset \mathrm{Sop}(T) + \mathrm{Sop}(S) = M.$ por la parte a) ii)

Como M es compacto y $\mathrm{sop}(T*S)$ es cerrado se tiene que $\mathrm{sop}(T*S)$ es compacto.

Por el teorema (2.8.3) parte a) i) y (2.8.3.3) cumple para dos distribuciones con soporte compacto,

$$
\begin{aligned}
(T*S)*w &\overset{\text{conmutativa}}{=} w*(T*S) \overset{\text{conmutativa}}{=} w*(S*T) \\
&\overset{\text{asociativa}}{=} (w*S)*T \\
&\overset{\text{conmutativa}}{=} T*(w*S) \\
&\overset{\text{conmutativa}}{=} T*(S*w)
\end{aligned}
$$

c) i) Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces por el teorema (2.7.11) parte c), $\delta*\varphi = \varphi,$ luego por el teorema (2.7.9) parte b) y parte a) i) y como la distribución δ tiene soporte compacto $(\mathrm{sop}(\delta) = \{0\})$, entonces:

Luego, $D^\alpha \delta = (D^\alpha \delta)*S$

c) ii) Si en c) i) se hace $|\alpha| = 0$ entonces, $\begin{cases} D^\alpha S = S \quad \text{y} \\ D^\alpha \delta = \delta \end{cases}$

Luego, $S = \delta * S$

Es de observar que δ es el elemento unidad para la convolución (2.8.3.3) considerada como una operación algebraica.

d) Por la parte c) i), la parte b) y la parte a) i) del teorema se tiene:

$$D^{\alpha}(T*S)=\left(D^{\alpha}\delta\right)*(T*S)=\left(\left(D^{\alpha}\delta\right)*T\right)*S=\left(D^{\alpha}T\right)*S \tag{2.8.3.4}$$

$$D^{\alpha}(T*S)=\left(\left(D^{\alpha}\delta\right)*T\right)*S=\left(T*\left(D^{\alpha}\delta\right)*S\right)=T*\left(\left(D^{\alpha}\delta\right)*S\right)=T*\left(D^{\alpha}S\right) \tag{2.8.3.5}$$

de (2.8.3.4) y (2.8.3.5) se concluye que:

$$D^{\alpha}(T*S)=\left(D^{\alpha}T\right)*S=T*\left(D^{\alpha}S\right).$$

2.9 Transformada de Fourier

En esta sección se desarrolla la transformada de Fourier, así como sus propiedades fundamentales que se necesitan en el capítulo posterior para el estudio de la transformada de Fourier del espacio de funciones rápidamente decrecientes, luego transformada de Fourier de distribuciones temperadas. Asimismo se tiene en cuenta que solo las distribuciones temperadas poseen transformada de Fourier en el sentido de Schwartz.

2.9.1 Definición de Transformada de Fourier

Sea $f \in L^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ y $\xi \in \mathbb{R}^{n}$ Se define la transformada de f en el punto ξ por

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n}} e^{-i\xi x} f(x)dx$$

donde: $\xi.x = \xi_1 x_1+\xi_2 x_2+......\xi_n x_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j \quad , \quad x \in \mathbb{R}^{n}$

La aplicación que lleva f a $\hat{f}$ se llama transformada de Fourier de f.

Se denota $F\,[f]=\hat{f}$

Vargas, F. (1994)

2.9.2 Definición Inversa de Transformada de Fourier

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ se define **l**a inversa de la transformada de Fourier de f denotado por $F^{-1}(f)$, como:

$$F^{-1}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} f(x) dx$$

Cariño, J.(2013)

2.9.3 Proposición

Sea $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\xi, x \in (\mathbb{R}^n)$ entonces:

a) $\widehat{(\tau_x f)}(\xi) = e^{-i\xi . x} \hat{f}(\xi)$

b) $\left(\tau_x \hat{f}\right)(\xi) = \left(e^{ix.y} f(x)\right)^{\wedge}(\xi)$

c) $(f * g)^{\wedge} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f} \hat{g}$

d) Si $\lambda > 0$ y $h(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ entonces $\hat{h}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$

Demostración*:*

a) $$\widehat{(\tau_x f)}(\xi) \overset{def.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi . y} (\tau_x f)(y) dy$$

$$\overset{def.(2.7.2)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi . y} f(y - x) dy$$

Haciendo $z = y - x \rightarrow z + x = y$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi .(z+x)} f(z) dz ,$$

Por la propiedad distributiva en $-i\xi.(z+x)$ se tiene:

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi.z+\xi.x)} f(z)\,dz$$

$$= e^{-i\xi.x} \overbrace{\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{\pi}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.z} f(z)\,dz \right]}^{\hat{f}(\xi)} = e^{-i\xi.x}\,\hat{f}(\xi)$$

b) $\left(\tau_x \hat{f}\right)(\xi) = \hat{f}(\xi - x) \overset{\text{def.(2.9.1)}}{=} \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi-x).y} f(y)\,dy$

Por la propiedad distributiva en $-i(\xi - x).y$ se tiene:

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.y} \left(e^{ix.y} f(y) \right) dy$$

$$= \left(e^{ix.y} f(y) \right)^{\wedge} (\xi)$$

c) $(f * g)^{\wedge} \overset{\text{def.(2.9.1)}}{=} \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} (f * g)(x)\,dx$

$$\overset{\text{def.(2.7.1)}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\,dy \right\} dx$$

Sumando y restando "y" en $-i\xi x$ se tiene:

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.(x-y+y)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\,dy \right\} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.y} f(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) e^{-i\xi.(x-y)}\,dx \right\} dy$$

Haciendo $z = x - y$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.y} f(y) \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(z) e^{-i\xi.z}\,dz \right\}}_{\hat{g}(\xi):\text{def.(2.9.1)}} dy$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.y} f(y)\left\{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{g}(\xi)\right\}dy$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{g}(\xi)\underbrace{\left\{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.y} f(y)\,dy\right\}}_{\hat{f}(\xi):\text{def}.(2.9.1)}$$

$$=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\hat{f}\,\hat{g}\right)(\xi)$$

d) $\hat{h}(\xi)\overset{\text{def}.(2.9.1)}{=}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} h(x)\,dx$

Haciendo $\frac{x}{\lambda}=u\rightarrow x=\lambda u$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx$$

Reemplazando $\frac{x}{\lambda}=u\rightarrow x=\lambda u$

$$=\frac{\lambda^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.(\lambda u)} f(u)\,du$$

$$=\underbrace{\frac{\lambda^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\lambda\xi).u} f(u)\,du}_{\hat{f}(\lambda\xi):\text{def}.(2.9.1)}=\lambda^n\hat{f}(\lambda\xi)$$

2.9.4 Teorema

Sea $g\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ *y* $P(D)$ un polinomio, α un multi-índice. Entonces cada una de las aplicaciones:

a) $f \mapsto D^{\alpha} f$

b) $f \mapsto gf$

c) $f \mapsto Pf$

Es una transformación lineal y continua de $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Demostración:

a) i) Se debe verificar que $P(D)f \in S(\mathbb{R}^n)$,

Sea $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} D_{\alpha}$ y γ, β multi-índice. (2.9.4.1)

Entonces para $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|x^{\gamma} D^{\beta}(P(D)f(x))\right| \overset{(2.9.4.1)}{=} \left|x^{\gamma} D^{\beta}\left(\sum_{|\alpha \leq m|} C_{\alpha} D_{\alpha} f(x)\right)\right| \overset{\text{asociativa}}{=} \left|x^{\gamma} \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} D^{\beta}(D_{\alpha} f(x))\right|$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} \left|x^{\gamma} D^{\beta}(D_{\alpha} f(x))\right|$$

$$D_{\alpha} = (i)^{-|\alpha|} D^{\alpha}$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} \left|x^{\gamma} D^{\beta}(i^{-|\alpha|} D^{\alpha} f(x))\right|$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} \left|x^{\gamma} D^{\beta+\alpha} f(x)\right|$$

Como $f \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces para todo γ, ξ multi-índices, existe k constante talque $\left|x^{\gamma} D^{\xi} f(x)\right| \leq k$.

En particular para $\xi = \beta + \alpha$, $\left|x^{\gamma} D^{\beta+\alpha} f(x)\right| \leq k$.

Luego, $\left|x^{\gamma} D^{\beta}(P(D)f(x))\right| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha} k = cte$

Así, $P(D)f \in S(\mathbb{R}^n)$.

ii) Se debe mostrar que la aplicación $f \mapsto D^{\alpha} f$ es contínua:

Sea $f_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ en $S(\mathbb{R}^n)$

donde $N = 0,1,2,,...$ y $|\beta| \le N$

$$(1+|x|^2)^N \left|D^{\beta}(P(D)f_n(x)\right| \le \sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha}(1+|x|^2)^N \left|D^{\beta+\alpha} f_n(x)\right|$$

Como $f_n \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R}^n)$ entonces $(1+|x|^2)^N \left|D^{\xi} f_n(x)\right| \longrightarrow 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

Luego, para cada sumando $(1+|x|^2)^N \left|D^{\beta+\alpha} f_n(x)\right| \longrightarrow 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

Por lo tanto:

$$\sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha}(1+|x|^2)^N \left|D^{\beta+\alpha} f_n(x)\right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n.$$

Así, para cada $N \in \mathbb{N}$ y para todo multi-índice β, con $|\beta| \le N$ se tiene que

$$(1+|x|^2)^N \left|D^{\beta}(P(D)f_n(x)\right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n.$$

Es decir, $P(D)f_n \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R}^n)$.

b) i) Basta mostrar que $gf \in S(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$; α, β multi-índices

$$\left|x^{\alpha} D^{\beta}(gf)\right| \overset{(2.4.2.1)}{=} \left|x^{\alpha} \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} D^{\beta-\gamma} g(x)\, D^{\gamma} f(x)\right| \le \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left|x^{\alpha} D^{\beta-\gamma} g(x)\right| \left|D^{\gamma} f(x)\right|$$

Como $g \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces para todo α, η multi-índices se tiene: $\left|x^{\alpha} D^{\eta} g(x)\right| \le C_1$.

En particular, $\eta = \beta - \gamma$, $\left|x^{\alpha} D^{\beta-\alpha} g(x)\right| \le C_1$.

Como, $f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces, para todo ξ, γ multi-índices se tiene:

$\left|x^{\xi}D^{\gamma} f(x)\right| \le k$.

En particular, $|\xi| = 0$, $\left|D^{\gamma} f(x)\right| \le k$,

luego, se obtiene: $\left|x^{\alpha}D^{\beta}(gf)(x)\right| \le \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\alpha} C_1 k = cte$.

Por lo tanto, se concluye que $gf \in S(\mathbb{R}^n)$

ii) Se debe mostrar que $f \longmapsto gf$ es contínua:

Sea $f_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ en $S(\mathbb{R}^n)$

Sea $N \in \mathbb{N}$ y α multi-índice con $|\alpha| \le N$

$$(1+|x|^2)^N \left|D^{\beta}(g f_n)(x)\right| \overset{(2.4.2.1)}{\le} \sum_{\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (1+|x|^2)^N \left|D^{\beta-\gamma} g(x)\right| \left|D^{\gamma} f_n(x)\right|$$

Como $g \in S(\mathbb{R}^n)$ luego, se tiene:

$$(1+|x|^2)^N \left|D^{\alpha-\gamma} g(x)\right| \le C$$

Por lo tanto,

$$(1+|x|^2)^N \left|D^{\alpha}(g f_n)(x)\right| \le \sum_{\gamma\le\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} C \left|D^{\gamma} f_n(x)\right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n.$$

(pues, $f_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ en $S(\mathbb{R}^n)$)

Luego, $(1+|x|^2)^N \left|D^{\alpha}(gf_n)(x)\right| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$, para todo $|\alpha| \le N$.

Así,

$$gf_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \text{ en } S(\mathbb{R}^n).$$

2.10 Espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$

El espacio de funciones rápidamente decrecientes o espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ constituido por las funciones infinitamente diferenciables $C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ con la propiedad de que las funciones y toda sus derivadas decrecen rápidamente en el infinito que el inverso de cualquier polinomio de n variables.

2.10.1 Definición de Espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$

Sea $\mathbb{R}^n$ espacio euclideo n-dimensional, $\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ se define que φ es una función rápidamente decreciente si para todo α, β multi-índices existe una constante C talque

$$\left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \le C \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

El espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ **e**s un espacio vectorial real o complejo

está dada como el conjunto:

$$S\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) : \varphi \text{ es una función rapidamente decreciente}\right\}$$

Escobar, A. (2012)

Si $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ cada una de sus derivadas parciales están también $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

En general, toda función de Prueba en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$ está también en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$, puesto que todas las funciones de prueba en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$ se anulan fuera de un intervalo finito, mientras que todas las funciones de prueba en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ decrecen rápidamente en el infinito.

Sin embargo, existen funciones en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ que no están en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Como por ejemplo $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$.

Así, $\wp(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio propio de $S(\mathbb{R}^n)$

Observaciones:

i) $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ significa que cuando $|x| \to +\infty$, φ y sus derivadas parciales decrecen a cero más rápidamente que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$.

ii) Si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ y α es un multi-índice se cumple:

$$\left(1+|x|^2\right)^N \left|D^\alpha \varphi(x)\right| \le C \quad \text{(N entero positivo)}$$

2.10.2 Definición

Una sucesión $\{\varphi_j\}_{j\ge 1}$ en $S(\mathbb{R}^n)$ converge en $S(\mathbb{R}^n)$ a φ_0 si y solo si $p_{\alpha,\beta}(\varphi_j - \varphi_0) \to 0$ cuando $j \to +\infty$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$

Escobar, A. (2012)

2.10.3 Definición

Una funcional lineal T sobre $S(\mathbb{R}^n)$ es contínua si $T(\varphi_j) \longrightarrow 0$ cuando $j \to +\infty$ en $S(\mathbb{R}^n)$.

Escobar, A. (2012)

2.11 Topología en el Espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y K un compacto en Ω, entonces:

$C_0^\infty(k)=\left\{\varphi\in C^\infty(\Omega)/\operatorname{sop}\varphi\subset K\right\}$ es espacio vectorial, donde se considera la familia de semi-normas,

$$p_{m,k}(\varphi)=\sup_{x\in K}\sup_{|\alpha|\le m}\left\{\left|D^\alpha\varphi(x)\right|\right\},\ m\in\mathbb{Z}^+.$$

Así, la funcional lineal T sobre $C_0^\infty(\Omega)=\bigcup_{k\subset\Omega}C_0^\infty(K)$ es una distribución sí para todo compacto $K\subset\Omega$, existen m y $C>0$ talque

$$\left|\langle T,\varphi\rangle\right|\le CP_{m,k}(\varphi),\ \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

En este sentido se redefine el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$; esto es:

$$S(\mathbb{R})=\left\{\varphi\in C^\infty\ /\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\right|<\infty\right\},\ \forall\alpha,\beta\in(e'-\text{nuplas})$$

Es de observar que si se toma $\Omega=\mathbb{R}^n$.

Ahora a fin de comprender la topología en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$, se desarrollará en $\mathbb{R}$; esto es:

Dada una sucesión $\{\varphi_n\}$ en $S(\mathbb{R})$, es convergente en $S(\mathbb{R})$ si α,β enteros positivos se tiene:

$$x^\alpha D^\beta\varphi_n(x)\longrightarrow 0,\ \text{uniformemente, cuando } n\to\infty$$

Se dice que $\varphi_n\longrightarrow\varphi$ en $S(\mathbb{R})$ si $\varphi_n-\varphi\longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$.

2.11.1 Definición

Sea $K\subset\mathbb{R}$ subconjunto compacto, en $S(\mathbb{R})$ definimos la seminoma:

$$\|\varphi\|_{m,k}=\sup_{x\in K}\sup_{|\alpha|\le m}\left|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\right|$$

Una sucesión $\{\varphi_m\}$ en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ es convergente en la seminorma definida en $S(\mathbb{R})$ si $\left\{x^\alpha D^\beta\varphi_m\right\}$ converge uniformemente sobre $K\subset\mathbb{R}$, esto implica que existe $\varphi\in S(\mathbb{R})$ tal que:

$$\|\varphi_m - \varphi\|_{m,k} = \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha|\le m} \left| x^{\alpha} D^{\beta}(\varphi_m - \varphi)(x) \right| \xrightarrow{m\to\infty} 0,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}x\mathbb{N}$$

o simplemente, $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ en el sentido de $S(\mathbb{R})$.

Escobar,A. (2012)

2.11.2 Lema

a) Si $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ *y* $\psi_m \longrightarrow \psi$ en $S(\mathbb{R})$ entonces,
$\alpha\varphi_m + \beta\psi_m \longrightarrow \alpha\varphi + \beta\psi$ en $S(\mathbb{R})$,donde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

b) Si $\varphi_m \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$ en, entonces $\varphi_m\psi \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$, $\forall \psi \in S(\mathbb{R})$

c) Si $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ en $S(\mathbb{R})$, entonces $Q(x)[P(x)\varphi_m] \longrightarrow Q(x)[P(x)\varphi]$ $\forall P$ y Q

Demostración:

a) Si $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ en $S(\mathbb{R})$

Si,
$$\sup_{x\in k} \left| x^{\alpha} D^{\beta}(\varphi_m - \varphi)(x) \right| \xrightarrow{m\to\infty} 0 \qquad (2.11.2.1)$$

Si $\psi_m \longrightarrow \psi$ en $S(\mathbb{R})$,

si, $$\sup_{x\in k} \left| x^{\alpha} D^{\beta}(\psi_m - \psi)(x) \right| \xrightarrow{m\to\infty} 0 \qquad (2.11.2.2)$$

de (2.11.2.1) y (2.11.2.2) se tiene:

$$\sup_{x\in k} \left| x^{\alpha} D^{\beta}\left[\alpha(\varphi_m - \varphi)(x) + \beta(\psi_m - \psi)(x)\right] \right|$$

$$= \alpha \sup_{x\in k} \left| x^{\alpha} D^{\beta}(\varphi_m - \varphi)(x) \right| + \beta \sup_{x\in k} \left| x^{\alpha} D^{\beta}(\psi_m - \psi)(x) \right| \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

esto implica que:

$$\alpha\varphi_m + \beta\psi_m \xrightarrow{m\to\infty} \alpha\varphi + \beta\psi,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R};\varphi,\psi \in S(\mathbb{R})$$

b) Por hipótesis $\varphi_m \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$ esto implica que,

$$\sup_{x\in k}\left|x^{\alpha}D^{\beta}\varphi_m(x)\right| \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

luego, para $\psi \in S(\mathbb{R})$ se tiene:

$$\sup_{x\in k}\left|x^{\alpha}D^{\beta}(\varphi_m\psi)(x)\right| = \left[\sup_{x\in k}\left|x^{\alpha}D^{\beta}\varphi_m\right|\left|\psi\right|(x)\right] \xrightarrow{m\to\infty} (0\psi)(x) = 0$$

entonces $\varphi_m\psi \xrightarrow{m\to\infty} 0$ en $S(\mathbb{R}), \forall\psi \in S(\mathbb{R})$.

c) Si $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ en $S(\mathbb{R})$

Si $\sup_{x\in k}\left|x^{\alpha}D^{\beta}(\varphi_m - \varphi)(x)\right| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

luego:

$$Q(x)P(x)\varphi_m \longrightarrow Q(x)P(x)\varphi$$

si, $\sup_{x\in k}\left|x^{\alpha}D^{\beta}(\varphi_m - \varphi)(x)Q(x)P(x)\right| \longrightarrow 0$,cuando $m \to \infty$

$$P(x)\left[\sup_{x\in k}\left|x^{\alpha}D^{\beta}(\varphi_m - \varphi)(x)Q(x)\right|\right] \longrightarrow 0, \text{ cuando } m \to \infty$$

$$Q(x)\left[P(x)\sup_{x\in k}\left|x^{\alpha}D^{\beta}(\varphi_m - \varphi)(x)\right|\right] \longrightarrow 0, \text{ cuando } m \to \infty$$

así se tiene mostrado que:

$$Q(x)\left[P(x)\varphi_m\right] \longrightarrow Q(x)\left[P(x)\varphi\right], \text{ si } m \to \infty.$$

2.11.3 Lema

Si $\varphi_m \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi_m(x)\right|dx \longrightarrow 0,$ cuando $m \to \infty$.

Demostración:

Por hipótesis $\varphi_m \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$, entonces $\left(1+x^2\right)\varphi_m \longrightarrow 0$ converge

uniformemente cuando $m \to \infty$.

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe m_0 tal que $\forall m \geq m_0$ se tiene:

$$\left|\left(1+x^2\right)\varphi_m(x)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\left(1+x^2\right)\right|\left|\varphi_m(x)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\varphi_m(x)\right| < \frac{\varepsilon}{\left|1+x^2\right|}$$

luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi_m(x)dx\right| \leq \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \varepsilon' \text{ , es convergente.}$$

2.11.4 Corolario

Si $\varphi_m \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \left|x^\alpha D^\beta \varphi_m(x)\right| dx \longrightarrow 0$, cuando $m \to \infty$ para $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}$.

Demostración:

Si $\varphi_m \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$, entonces $x^\alpha D^\beta \varphi_m(x) \longrightarrow 0, \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}x\mathbb{N}, m \to \infty$

converge uniformemente sobre los conjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Sea φ_m y φ en $S(\mathbb{R})$, entonces $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ en $S(\mathbb{R})$

si $\varphi_m - \varphi \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$

$\varphi_m(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

además:

$$x^\alpha D^\beta \varphi_m(x) = x^\alpha D^\beta \varphi(x)$$

luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x^\alpha D^\beta \varphi_m(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x^{\alpha} D^{\beta} \varphi_m(x) - x^{\alpha} D^{\beta} \varphi(x) \right| dx = 0$$ converge uniformemente,

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x^{\alpha} D^{\beta} \left(\varphi_m(x) - \varphi(x) \right) \right| dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x^{\alpha} D^{\beta} \varphi_m(x) \right| dx \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty .$$

2.11.5 Teorema

$C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ es denso en $S(\mathbb{R})$
donde $\wp = C_0^{\infty}(\mathbb{R})$
Demostración:

Se debe probar que dado $\psi \in S(\mathbb{R})$, existe $\{\varphi_m\} \subset C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_m \longrightarrow \psi$ en la topología de $S(\mathbb{R})$.

En efecto:

Sea $\theta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $|\theta(x)| \leq 1$, con $\theta(x) = 1$ sobre la bola $|x| \leq 1$.

Es de observar si:

$K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces existe $\theta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \theta \leq 1$ y $\theta = 1$ sobre una vecindad de K.

Considerando la aplicación de dilatación:

$$\theta_m(x) = \theta\left(\frac{x}{m}\right), \; m = 1, 2 ... \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se tiene:

$$\varphi_m(x) = \theta_m(x) \psi(x).$$

Así, $\varphi_m \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, por otro lado, si $\varphi_m \longrightarrow \psi$ en $S(\mathbb{R})$ entonces se tiene:

$$\varphi_m - \psi \longrightarrow 0$$

$\varphi_m(x)=\psi(x)$

$D^{\beta}\varphi_m(x)=D^{\beta}\psi(x)$

$\lim\limits_{m\to\infty} x^{\alpha}\left[D^{\beta}\varphi_m(x)\right]=\lim\limits_{m\to\infty} x^{\alpha}\left[D^{\beta}\psi(x)\right], \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}x\mathbb{N}$

luego, se tiene:

$\lim\limits_{m\to\infty} x^{\alpha}\left[D^{\beta}\varphi_m(x)-D^{\beta}\psi(x)\right]=0$ converge uniformemente; (2.11.5.1)

de esta manera:

Si $x^{\alpha}\left[D^{\beta}\varphi_m(x)-D^{\beta}\psi(x)\right]=x^{\alpha}\left[D^{\beta}\left(\theta_m(x)\right)\psi(x)-D^{\beta}\psi(x)\right]$

usando la fórmula de Leibniz, se tiene:

$$x^{\alpha}\left[D^{\beta}\varphi_m(x)-D^{\beta}\psi(x)\right]=x^{\alpha}\left[\sum_{\beta'=0}^{\beta}\binom{\beta}{\beta'}D^{\beta'}\theta_m(x)D^{\beta-\beta'}\psi(x)-D^{\beta}\psi(x)\right]$$

considerando que $D^{\beta'}\theta_m(x)=\frac{1}{m^{\beta'}}D^{\beta'}\theta\left(\frac{x}{m}\right)$ y $\beta'=0$

$$=\sum_{\beta'=1}^{\beta}\binom{\beta}{\beta'}\frac{1}{m^{\beta'}}D^{\beta'}\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta-\beta'}\psi(x)+\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)-x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x).$$

Pero, como $\psi\in S(\mathbb{R})$ sabemos que $x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)$ es rápidamente decreciente, esto es:

Dado $\varepsilon>0$, existe m_0 tal que $\forall|x|\geq m_0$ se tiene:

$\left|x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$ (2.11.5.2)

Por otra parte, si $|\theta(x)|\leq 1$, para $|x|\geq m_0$ .se tiene:

$\left|\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$ (2.11.5.3)

Es de observar que si $|x|\leq m$, entonces $\theta\left(\frac{x}{m}\right)=1$, así para $|x|\leq m$ se tiene:

$$\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)=x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x).$$

Entonces $\forall x$ *y* $m \geq m_0$ se tiene*:*

i) $\left|\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)-x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$

esto es, si $|x| \leq m$, $|x| > m$ y $m \geq m_o$ entonces $|x| > m_o$ se tiene (2.11.5.2) y (2.11.5.3)

Es de observar que sí $\psi \in S(\mathbb{R})$ y $\theta \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$**,** entonces:

$$\left|D^{\beta'}\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta-\beta'}\psi(x)\right| \leq M, \qquad \beta'=1,2,....,\beta$$

luego, si m es suficientemente grande, se tiene:

ii) $\left|\binom{\beta}{\beta'}\frac{1}{m^{\beta'}}D^{\beta'}\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta-\beta'}\psi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2\beta}$

finalmente,

$$\left|x^{\alpha}\left[D^{\beta}\varphi_m(x)-D^{\beta}\psi(x)\right]\right|$$

$$\leq\left|\sum_{\beta'=1}^{\beta}\binom{\beta}{\beta'}\frac{1}{m^{\beta'}}D^{\beta'}\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta-\beta'}\psi(x)\right|+\left|\theta\left(\frac{x}{m}\right)x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)-x^{\alpha}D^{\beta}\psi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

2.12 Transformada de Fourier en el Espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$

La Transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ de $f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ es diferenciable y tiene derivadas continuas de cualquier orden, por lo tanto $\hat{f} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$y se define similarmente como en la sección anterior. Asimismo se muestra que la transformada de Fourier de $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$es lineal y continua.

2.12.1 Definición de Transformada de Fourier en el Espacio de Schwartz

La transformada de Fourier $F[f]:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de una función $f \in S(\mathbb{R}^n)$ denotado por $\hat{f}$ se define como:

$$F[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f(x)\,dx \quad ,$$

donde:

$$F[f] = \hat{f} \;\; ; \;\; \xi \in \mathbb{R}^n \; ; \; \xi x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j \;\; ; \; x \in \mathbb{R}^n$$

Escobar, A. (2012)

2.12.2 Definición Inversa de Transformada de Fourier en el Espacio de Schwartz

La transformada inversa de Fourier de $f \in S(\mathbb{R}^n)$ se define como:

$$F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi.x} f(x)\,dx$$

Escobar, A. (2012)

2.12.3 Teorema

a) La Transformada de Fourier,

$F: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es lineal, acotada y cumple $\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$

$$f \mapsto F(f) = \hat{f}$$

b) $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$

Vargas,F. (1994)

Demostración:

a) i) La transformada de Fourier es lineal.

Sea $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$F(f+\alpha g)(\xi) \overset{\text{def.(2.9.1)}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}(f+\alpha g)(\xi)d\xi$$

$$\overset{\text{linealidad}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f(\xi)d\xi + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\alpha\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} g(\xi)d\xi$$

$$\overset{\text{def.(2.9.1)}}{=} F(f)(\xi)+\alpha F(g)(\xi)$$

$$\overset{\text{linealidad}}{=} \left(F(f)+\alpha F(g)\right)(\xi)$$

Por lo tan to,

$F(f+\alpha g)=F(f)+\alpha F(g)$ es lineal.

ii) Para $\xi\in\mathbb{R}^n$,

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \overset{\text{def.(2.9.1)}}{\leq} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-i\xi.x}\right|\left|f(x)\right|dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)\right|dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Luego, $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \|f\|_{L^1}$

$$\left|\hat{f}\right|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$$

Así, la transformación de Fourier de L^1 en L^∞ es lineal y acotada.

b) Se debe mostrar que $\hat{f}\in C(\mathbb{R}^n)$

Sea $h\in\mathbb{R}^n$

$$\left|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)\right| \overset{\text{def}.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi+h).x} f(x)\,dx-\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-i\xi.x}\right|\left|1-e^{-ih.x}\right|\left|f(x)\right|dx$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|1-e^{-ih.x}\right|\left|f(x)\right|dx\,.$$

Como $f \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$,

$$\left|1-e^{-ih.x}\right|\left|f(x)\right| \leq 2\left|f(x)\right| \ ,\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{y}$$

$$\left|1-e^{-ih.x}\right|\left|f(x)\right| \xrightarrow[(h\to 0)]{} 0$$

Luego, por el teorema de convergencia dominada se tiene,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|1-e^{-ih.x}\right|\left|f(x)\right|dx \xrightarrow[(h\to 0)]{} 0$$

Así, $\left|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)\right| \xrightarrow[(h\to 0)]{} 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

Por lo tanto, f es continua $\mathbb{R}^n$, es decir, $f \in C\left(\mathbb{R}^n\right)$.

2.12.4 Teorema

Sea $f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ y sean α,β multi-índice y $\xi \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

a) $\left(D^{\beta}\left(x^{\alpha} f(x)\right)\right)^{\wedge}(\xi)=(i)^{|\alpha|+|\beta|}\xi^{\beta}D^{\alpha}\hat{f}(\xi)$

b) La Transformada de Fourier, $F:S\left(\mathbb{R}^n\right)\longrightarrow S\left(\mathbb{R}^n\right)$ es lineal y continua.

c) $\left(P(D)f\right)^{\wedge}(\xi)=P(\xi)\hat{f}(\xi)$

donde $P(D)$ es un operador diferencial con coeficientes constantes.

d) $\left(P(x)f\right)^{\wedge}(\xi)=P(-D)\hat{f}(\xi)$

P es un polinomio en $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

a) $\left(D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)\right)^{\wedge}(\xi)\overset{def.(2.9.1)}{=}\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi.x}D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)dx$

Como $f\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces $x^{\alpha}f\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$. $(x^{\alpha}f\longrightarrow 0$ cuando $|x|\to+\infty)$

$$D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)^{\wedge}(\xi)\overset{def.(2.9.1)}{=}\frac{(-1)^{|\beta|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}(-i)^{|\beta|}\xi^{\beta}e^{-i\xi.x}\left(x^{\alpha}f(x)\right)dx$$

$$=(-1)^{|\beta|}(i)^{-|\beta|}\xi^{\beta}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi.x}\left(x^{\alpha}f(x)\right)dx}_{\left(x^{\alpha}f(x)\right)^{\wedge}}$$

$$=(i)^{|\beta|}\xi^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)^{\wedge}(\xi) \qquad (2.12.4.1)$$

Si $\hat{f}(\xi)\overset{def.(2.9.1)}{=}\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\xi.x}f(x)dx$ y

Si $D^{\alpha}=\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial^{\alpha_2}}{\partial\xi_2}\cdots\cdots\dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial\xi_n}$ entonces,

$$D^{\alpha}\hat{f}(\xi) \overset{def.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha}\left(e^{-i\xi.x}f(x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha}\left(e^{-i\xi.x}\right)f(x)dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|}x^{\alpha}e^{-i\xi.x}f(x)dx$$

$$= (-i)^{|\alpha|}\overbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} x^{\alpha}e^{-i\xi.x}f(x)dx}^{\left(x^{\alpha}f\right)^{\wedge}}$$

$$= (-i)^{|\alpha|}\left(x^{\alpha}f(x)\right)^{\wedge}(\xi) \qquad (2.12.4.2)$$

reemplazando (2.12.4.2) en (2.12.4.1) se tiene:

$$\begin{aligned}\left(D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)\right)^{\wedge}(\xi) &= i^{|\beta|}\xi^{\beta}(-i)^{-|\alpha|}D^{\alpha}\hat{f}(\xi)\\ &= i^{|\beta|}(i)^{|\alpha|}\xi^{\beta}D^{\alpha}\hat{f}(\xi)\\ &= (i)^{|\alpha|+|\beta|}\xi^{\beta}D^{\alpha}\hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Nota:

i) $|\beta| = 0,\ \left(x^{\alpha}f(x)\right)^{\wedge}(\xi) = (i)^{|\alpha|}D^{\alpha}\hat{f}(\xi) = (i)^{|\alpha|}(i)^{|\alpha|}D_{\alpha}\hat{f}(\xi) = (-1)^{|\alpha|}D_{\alpha}\hat{f}(\xi)$

ii) $\begin{cases}|\alpha| = 0,\ i^{|\beta|}\xi^{\beta}\hat{f}(\xi) = \left(D^{\beta}f(x)\right)^{\wedge}(\xi)\\ \xi^{\beta}\hat{f}(\xi) = \left((i)^{-|\beta|}D^{\beta}f(x)\right)^{\wedge}(\xi) = \left(D_{\beta}f(x)\right)^{\wedge}(\xi)\end{cases}$

b) **S**e debe mostrar que $F : S\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow S\left(\mathbb{R}^n\right)$ está bien definida.

En efecto:

Sea $f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ y α, β multi-índices. Entonces $x^{\alpha}f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ y

$\left(1+|x|^2\right)^N \left|D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)\right| \leq C$ (por la observación ii) de 2.10.1)

$$\left|D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)\right| \leq \frac{C}{\left(1+|x|^{2}\right)^{N}} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n} \, , \; N \in \mathbb{N}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)\right|dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{\left(1+|x|^{2}\right)^{N}} < \infty$$

Luego, $D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right) \in L^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$

Por otro lado, considerando parte a) del teorema se tiene:

$$\left|\xi^{\beta}D^{\alpha}\hat{f}(x)\right| = \left|D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)^{\wedge}(\xi)\right| \leq \left\|D^{\beta}\left(x^{\alpha}f(x)\right)\right\|_{L^{1}} = C\,.$$

Luego, se concluye que $\hat{f} \in S\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ está bien definida.

i) La transformada de Fourier $F: S\left(\mathbb{R}^{n}\right) \longrightarrow S\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ es lineal.

$$\begin{aligned}
F(f+\alpha g)(\xi) &\overset{\text{def.}(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}(f+\alpha g)(\xi)\,d\xi \\
&\overset{\text{adición}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\alpha\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}g(\xi)\,d\xi \\
&\overset{\text{def.}(2.9.1)}{=} F(f)(\xi)+\alpha F(g)(\xi) \\
&\overset{\text{linealidad}}{=} \left(F(f)+\alpha F(g)\right)(\xi)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$F(f+\alpha g) = F(f)+\alpha F(g)$ es lineal.

ii) F es contínua:

En efecto:

Sea $f_n \longrightarrow 0$ en $S\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ entonces se tiene:

$$D^{\beta}\left(x^{\alpha}f_n(x)\right) \longrightarrow 0 \;\text{ en }\; S\left(\mathbb{R}^{n}\right)$$

Luego, con $p=1$, se tiene:

$D^{\beta}\left(x^{\alpha}f_n(x)\right) \longrightarrow 0$ en $L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$.

(pues, sí $f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces $f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right), S\left(\mathbb{R}^n\right)$ está inmerso en $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$

y es continua en $1 \le p < \infty$).

En lo que sigue,

$$\left|\xi^{\beta} D^{\beta} \hat{f}_n(\xi)\right| \le \left\| D^{\beta}\left(x^{\alpha} f_n(x)\right) \right\|_{L^1} \longrightarrow 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Luego, $\left|\xi^{\beta} D^{\alpha} \hat{f}_n(\xi)\right| \longrightarrow 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

Así,

$\hat{f}_n \longrightarrow 0$ en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$,

es decir $F(f_n) \longrightarrow 0$ en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

c) Sea $P(D) = \sum\limits_{|\alpha| \le N} c_{\alpha} D_{\alpha}$, por el teorema (2.9.4), $P(D)f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Considerando la parte b) y la nota ii) del teorema (2.12.4) y la parte a) del teorema (2.9.4) se tiene:

$$\begin{aligned}
\left(P(D)f\right)^{\wedge}(\xi) &= \left(\sum_{|\alpha| \le N} c_{\alpha}\left(D_{\alpha} f\right)\right)^{\wedge}(\xi) = \sum_{|\alpha| \le N} c_{\alpha}\left(D_{\alpha} f\right)^{\wedge}(\xi) \\
&= \sum_{|\alpha| \le N} c_{\alpha} \xi^{\alpha} \hat{f}(\xi) \\
&= \left(\sum_{|\alpha| \le N} c_{\alpha} \xi^{\alpha}\right) \hat{f}(\xi) \\
&= P(\xi) \hat{f}(\xi)
\end{aligned}$$

d) Sea $P(x)=\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha x^\alpha$,

por la demostración del teorema (2.9.4) parte a) se tiene:

$P(x)f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$

Considerando la parte b) y la nota i) del teorema se tiene:

$$\left(P(x)f\right)^\wedge(\xi)=\left(\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha x^\alpha f\right)^\wedge(\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha\left(x^\alpha f\right)^\wedge(\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(-1)^{|\alpha|}D_\alpha\hat{f}(\xi)=P(-D)\hat{f}(\xi)$$

(pues, $P(-D)=\sum_{|\alpha|\leq N}(-1)^{|\alpha|}c_\alpha D_\alpha$)

2.12.5 Lema

Sea $f,g\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$. Entonces

a) $\left(\tilde{f}\right)^\wedge=\left(\hat{f}\right)^\sim$

b) $\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)g(\xi)e^{i\xi.x}d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f(x+\xi)\hat{g}(\xi)d\xi$

c) $\left\langle \hat{f},\bar{g}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\left\langle f,\bar{\hat{g}}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

d) Si $f_{(n)}$ es la función definida en $\mathbb{R}^n$ por $f_{(n)}(x)=e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ entonces,

$$f_{(n)}\in S(\mathbb{R}^n)\ ,\ \hat{f}_{(n)}=f_{(n)}\ \text{ y}$$

$$f_{(n)}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}_{(n)}(\xi)d\xi$$

Demostración:

a) Sea, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\overset{\vee}{f}\right)^{\wedge}(\xi) \overset{\text{def.(2.9.1)}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x}\, \tilde{f}(x)\, d\xi$$

$$\overset{\text{def.(2.7.3)}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f(-x)\, dx$$

$$\overset{\text{def.(2.9.1)}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(-\xi).y} f(y)\, dy$$

$$\overset{\text{def.(2.9.1)}}{=} \hat{f}(-\xi)$$

$$= \left(\hat{f}\right)^{\sim}(\xi) \text{ , Luego, } \left(\tilde{f}\right)^{\wedge} = \left(\hat{f}\right)^{\sim}$$

b) $$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, e^{i\xi.x} d\xi \overset{\text{def (2.9.1)}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.y} f(y) dy \right] g(\xi)\, e^{i\xi.x}\, d\xi$$

$$\overset{\text{def (2.9.1)}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.y} e^{i\xi.x}\, g(\xi) d\xi \right] f(y) dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.(y-x)}\, g(\xi) d\xi \right]}_{\hat{g}(y-x)} f(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y-x)\, f(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)\, f(\xi + x)\, f(\xi)\, d\xi$$

En $x = 0$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) f(\xi)\, d\xi \qquad \text{Fórmula de Parseval} \qquad (2.12.5.1)$$

c) $\left\langle \hat{f}, \overline{g} \right\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) f(\xi) d\xi = \left\langle f, \overline{\hat{g}} \right\rangle_{L^2}$

d) En $\mathbb{R}$ se tiene:

$$f_{(1)}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ y } f'_{(1)}(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

luego, $f'_{(1)}(x) + xf_{(1)}(x) = 0$.

Tomando la transformada de Fourier y la nota en la demostración del teorema (2.12.3) parte a) con $\alpha = \beta = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ y $\xi \in \mathbb{R}$ tiene:

$$\left(f'_{(1)}(x)\right)^{\wedge}(\xi) + \left(xf_{(1)}(x)\right)^{\wedge}(\xi) = 0$$

$$i\xi f'_{(1)}(\xi) + i\left(\hat{f}_{(1)}(\xi)\right)' = 0$$

$$\xi\hat{f}_{(1)}(\xi) + \left(\hat{f}_{(1)}(\xi)\right)' = 0$$

Se tiene que,

$$f'_{(1)} + xf_{(1)} = 0 \qquad (2.12.5.2)$$

y

$$x\hat{f}_{(1)} + \left(\hat{f}_{(1)}\right)' = 0 \qquad (2.12.5.3)$$

de (2.12.5.1) y (2.12.5.2) se obtiene $f_{(1)}\left(\hat{f}_{(1)}\right)' - \hat{f}_{(1)}f'_{(1)} = 0$.

Así, $\left(\dfrac{\hat{f}_{(1)}}{f_{(1)}}\right)' = 0$. Por lo tanto $\dfrac{\hat{f}_{(1)}}{f_{(1)}} = c$, (c , es una constante)

Como $f_{(1)}(0) = 1$ y

$$\hat{f}_{(1)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i0.x} f_{(1)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1$$

Por lo tanto, se concluye que $\hat{f}_{(1)} = f_{(1)}$ en $\mathbb{R}$, pues en 0, $c = 1$

En $\mathbb{R}^n$:

$$f_{(n)}(x) = \prod_{j=1}^{n} f_{(1)}(x_j) \ , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{f}_{(n)}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} f_{(n)}(x) dx \overset{def.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\Sigma \xi_j x_j} \left(\prod_{j=1}^{n} f_{(1)}(x_j) \right) dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} e^{-i\xi_j x_j} f_{(1)}(x_j) \right) dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_j x_j} f_{(1)}(x_j) dx_j$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \hat{f}_{(1)}(\xi_j)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} f_{(1)}(\xi_j)$$

$$= f_{(n)}(\xi).$$

Luego, $\hat{f}_{(n)} = f_{(n)}$ parato todo "n"

Ahora se debe mostrar que: $f_{(n)}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}_{(n)}(\xi)d\xi$

En efecto:

$$f_{(n)}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}f_{(n)}(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x|^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{j=1}^{n}e^{\frac{-x_j^2}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\frac{-x_j^2}{2}}dx_j$$

$$=1$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$f_{(n)}(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}f_{(n)}(x)dx=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}_{(n)}(x)dx, \quad x\in\mathbb{R}^n$$

2.12.6 Teorema de Inversión de Fourier

La transformada de Fourier $F:S(\mathbb{R}^n)\longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ es lineal, contínua, biyectiva y su inversa también es contínua.

Vargas, F. (1994)

Demostración:

Por el teorema (2.12.4) parte b) la transformada de Fourier es lineal y contínua.

i) Se debe mostrar que si $f\in S(\mathbb{R}^n)$ entonces $f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\xi.x}\hat{f}(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

En efecto:

Sea $f,g\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ y se define: $h(x)=g\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $\lambda>0$

Por la proposición (2.9.3) parte d) se tiene:

$$\hat{h}(\xi)=\lambda^n\hat{g}(\lambda\xi)\ ,\ \xi\in\mathbb{R}^n$$

Por la fórmula de Parseval (2.12.5.1) se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{h}(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n} h(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\lambda^n\hat{g}(\lambda\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\hat{f}(\xi)d\xi$$

Haciendo $y=\lambda\xi\rightarrow\frac{y}{\lambda}=\xi$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\hat{g}(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\hat{f}(\xi)d\xi$$

cuando $\lambda\rightarrow+\infty$, se tiene: $f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\longrightarrow f(0)$, $g\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\longrightarrow g(0)$.

Luego, por el teorema de la convergencia dominada se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(0)\hat{g}(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n} g(0)\hat{f}(\xi)d\xi$$

$$\frac{f(0)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(y)dy=\frac{g(0)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)d\xi\ ,\ \ \forall g\in S\left(\mathbb{R}^n\right). \qquad (2.12.6.1)$$

En particular si se toma $g(y)=g_{(n)}(y)=e^{-\frac{|y|^2}{2}}$ entonces, por el lema (2.12.5) parte d) se tiene:

$$\hat{g}_{(n)}=g(n)\ \text{ y } g_{(n)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}_{(n)}(y)dy\ .$$

Luego, de (2.12.6.1) se obtiene:

$$g(0)g_{(n)}(0)=\frac{g_{(0)}(0)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)d\xi$$

Para fórmula de inversión en $x=0$ y con $g_{(n)}=1$ se obtiene:

$$f(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)d\xi \qquad (2.12.6.2)$$

Ahora por (2.12.6.2) y la proposición (2.9.3) parte a) se tiene, para $x\in\mathbb{R}^n$,

$$f(x)=(\tau_{-x}f)(0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}(\tau_{-x}f)^{\wedge}(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\xi.x}\hat{f}(\xi)d\xi$$

Luego, la fórmula de inversión es válida.

b) $\mathbb{F}$ es inyectiva:

Sea $F(f)=0=\hat{f}$

Por la fórmula de inversión se tiene:

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\xi.x}(0)d\xi=0\ ,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n$$

luego, $f=0$

c) $\mathbb{F}$ es suryectiva:

Se debe mostrar que, existe $g\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ talque $F(g)=f$

como F está definida, $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Sea $x \in S(\mathbb{R}^n)$.

$$\hat{\hat{f}}(x) = \left(\hat{f}\right)^{\wedge}(x) \overset{\text{def}.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi.x} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(-x).\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$$= f(-x)$$

$$= \tilde{f}(x)$$

Luego, $\hat{\hat{f}} = \tilde{f} \in S(\mathbb{R}^n)$

Por lo tanto, se tiene:

$$F\left(\tilde{f}\right) = \left(\tilde{f}\right)^{\wedge} = \left(\hat{f}\right)^{\sim} = \hat{\hat{\hat{f}}} \in S(\mathbb{R}^n)$$

Asi, existe $g = \hat{\hat{\hat{f}}} \in S(\mathbb{R}^n)$ talque

$$F(g) = \hat{f} = \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = \left(\hat{\hat{f}}\right)^{\sim} = \left(\tilde{f}\right)^{\sim} = f.$$

b) La inversa de F es contínua, Luego, por b) y c) existe la inversa de F.

$$F : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \quad \text{es contínua}$$
$$f \mapsto \hat{f}$$

y

$$\tilde{} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \quad \text{es contínua}$$
$$f \mapsto \tilde{f}$$

donde, $\sim$: función reflexión

Como $F^{-1} = F \circ \tilde{}$ entonces F^{-1} es contínua $F^{-1}(f) = F\left(\tilde{f}\right) = \left(\tilde{f}\right)^{\wedge} = \hat{\hat{\hat{f}}}$.

CAPÍTULO III: ESPACIO DE DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

3.1 Distribuciones Temperadas

Con las propiedades algebraicas y analíticas de la transformada de Fourier en el espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ que se desarrolló en el capítulo anterior, en este capítulo se desarrolla distribuciones temperadas, que está formado por todos los funcionales lineales y contínuas definidas sobre $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

3.1.1 Definición de Distribuciones Temperadas

Una aplicación $T : S\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una distribución temperada sí:

i) T es lineal

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^n); \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

ii) T es continua Si $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ en $S\left(\mathbb{R}\right)$, entonces $\langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$ en $\mathbb{C}$.

Valeria, M (2009)

Se sigue de la definición de convergencia en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$ y en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ que una sucesión φ_n que converge a φ en el sentido de $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$ también converge a φ en sentido de $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Por lo tanto, Todo funcional lineal y continuo en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ también lo es en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$.

$$S'\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \wp'\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Un funcional lineal y contínua sobre $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ se llama distribución temperada sí y solo sí existe una constante $C > 0, m \in \mathbb{N}$ talque $\left|\langle T, \varphi \rangle\right| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{|\beta| \leq m} \left(\left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right|\right)$, $\forall \varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

El espacio de las distribuciones temperadas se denota por $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$

Es decir:

$$S'\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{T\in\wp'\left(\mathbb{R}^n\right):T:S\left(\mathbb{R}^n\right)\longrightarrow\mathbb{C}\text{ es lineal y contínua }\right\}$$

Observaciones:

1) Una distribución T es una distribución temperada, si es extendida a un funcional lineal y contínua sobre $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

2) Si $T\in\wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ admite una extensión contínua a toda $S\left(\mathbb{R}^n\right)$, por lo tanto, T es una distribución temperada, es decir $T\in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

3) Una distribución no siempre se puede extender a una distribución temperada.

3.1.2 Definición

Una sucesión de distribuciones temperadas $\{T_n\}$ en $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ converge a $T\in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ si:

$$\langle T_n,\varphi\rangle\xrightarrow{(n\to\infty)}\langle T,\varphi\rangle\quad\forall\varphi\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Tellechea, E. (1981)

Si $\{T_n\}$ converge a $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ converge también en $\wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y luego se tiene que $T\in\wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Dicho resultado permite el siguiente corolario.

3.1.3 Corolario

Si $T\in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces $T\in\wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$

Demostración:

Por hipótesis se sabe que $T\in S'\left(\mathbb{R}^n\right)\Leftrightarrow\exists C>0,m\in\mathbb{Z}^+$, tal que

$$\left|\langle T,\varphi\rangle\right|\le C\sup_{|\alpha|\le m}\sup_{|\beta|\le m}\left(\left|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\right|\right);\ \varphi\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

luego, si K es un compacto en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi \in \wp(K) \subset S(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene:

$$\left|\langle T, \varphi \rangle\right| \leq C \sup_{|x| \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} \left(\left|x^{\alpha}\right|\right) \sup_{x \in K} \sup_{|\beta| \leq m} \left(\left|D^{\beta} \varphi(x)\right|\right) = C' p_{m,k}(\varphi) \quad , \quad T \in \wp'(\mathbb{R}^n)$$

Por lo tanto, como consecuencia de este resultado se tiene que, el dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$ denotado por $S'(\mathbb{R}^n)$ está formado por todos los funcionales lineales y continuos sobre $S(\mathbb{R}^n)$ y sus elementos se llaman distribuciones temperadas, pues los elementos de $S'(\mathbb{R}^n)$ son también elementos de $\wp'(\mathbb{R}^n)$, es decir :

$$S'(\mathbb{R}^n) \subset \wp'(\mathbb{R}^n)$$

3.1.4 Corolario

Sea $1 \leq p < \infty$, si $L^p(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones integrables según Lebesgue entonces:

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n).$$

En efecto:

Si k es un compacto en $\mathbb{R}^n$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_k |f| \leq \int_k |f|^p < \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty$$

luego, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

si $k = 1, \quad 1 < p < \infty$, se tiene:

$$\int |f(x)| \frac{1}{1+|x|^2} dx \leq \|f\|_{L^p} \left(\int \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^q} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad 1<q<\infty$; Por lo tanto $f \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$

3.1.5 Teorema

Sea $g \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, P un polinomio y α es un multi-índice. Entonces:

a) PT
b) gT
c) $D^\alpha T$

Son también distribuciones temperadas.

En efecto:

a) $(PT)(\varphi) = T(P\varphi) \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

b) $(gT)(\varphi) = T(g\varphi)$

c) $(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$

3.2 Derivada de una Distribución Temperada

En esta sección se presentan definiciones y se muestran propiedades de la derivada de una distribución temperada.

3.2.1 Definición de Derivada de una Distribucion Temperada

Sea $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ *y* α un multi-índice. La derivada de una distribución temperada se define como:

$$\left\langle D^{\alpha}T,\varphi\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle T,D^{\alpha}\varphi\right\rangle$$

Tellechea, E. (1981)

Es de observar que, $D^{\alpha}T$ es una distribución temperada.

Dicho resultado permite la siguiente proposición.

3.2.2 Proposición

Si $T\in S'(\mathbb{R}^{n})$, entonces $D^{\alpha}T\in S'(\mathbb{R}^{n})$.

Demostración:

$\left\langle D^{\alpha}T,\varphi\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle T,D^{\alpha}\varphi\right\rangle$

Si $\varphi_{n}\longrightarrow\varphi$ en $S(\mathbb{R}^{n})$, entonces $D^{\alpha}\varphi_{n}\to D^{\alpha}\varphi$

Si T es una distribución temperada, también lo es todas sus derivadas sucesivas.

$$\left\langle D^{\alpha}T,\varphi_{n}\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle T,D^{\alpha}\varphi_{n}\right\rangle\longrightarrow(-1)^{|\alpha|}\left\langle T,D^{\alpha}\varphi\right\rangle=\left\langle D^{\alpha}T,\varphi\right\rangle$$

3.2.3 Definición de Producto de un Polinomio y una Distribución Temperada

Sea P un polinomio y $T\in S'(\mathbb{R}^{n})$, se define el producto de P y T como:

$$\langle P(x)T,\varphi(x)\rangle=\langle T,P(x)\varphi(x)\rangle \quad , \quad \varphi\in S(\mathbb{R}^{n})$$

Tellechea, E. (1981)

3.2.4 Proposición

Si $T\in S'(\mathbb{R}^{n})$, entonces $PT\in S'(\mathbb{R}^{n})$.

Demostración:

Por el teorema (2.9.4) la aplicación $f \mapsto Pf$ de $S\left(\mathbb{R}^n\right)$en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ está bien definida y contínua.

3.2.5 Definición de Multiplicación de una Distribución Temperada por una Función

Sea $g \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, se define multiplicación de g y T como:

$$\langle gT, f \rangle = \langle T, gf \rangle \ , \ f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Vargas,F. (1994)

3.2.6 Definición

Sea $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ **y** $x \in \mathbb{R}^n$.La aplicación $\tau_x T : S\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\left(\tau_x T\right) f = T\left(\tau_{-x} f\right) \ , \ \forall f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Tellechea, E. (1981)

3.2.7 Proposición

Si $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, entonces $\tau_x T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Demostración:

Por el teorema (2.10.8) la aplicación $f \mapsto \tau_x f$ de $S\left(\mathbb{R}^n\right)$en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ es lineal y contínua se prueba que $\tau_x T$ es una funcional lineal contínua en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

3.2.8 Teorema

Sea $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$entonces,

$T * \varphi \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $D^{\alpha}(T * \varphi) = \left(D^{\alpha} T\right) * \varphi = T * \left(D^{\alpha} \varphi\right)$

$\mathbf{T * \varphi}$ determina una distribución temperada, α multi-índice

Demostración:

Basta mostrar que $T*\varphi$ define una distribución temperada,

Si $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, existe una cte $C > 0$ y enteros k,n talque

$$\left|\langle T,\varphi\rangle\right| = c\|\psi\|_{k,n} \ , \ \forall\psi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Por lo tanto, para $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\left|(T*\varphi)(x)\right| = \left|T\left(\tau_x\tilde{\varphi}\right)\right| \leq C\left\|\tau_x\tilde{\varphi}\right\|_{k,n} = C\sum_{\substack{|\alpha|\leq k\\|\beta|\leq n}} \sup_y\left|y^\alpha\right|\left|D_y^\beta\varphi(x-y)\right|$$

$$= C\sum_{\substack{|\alpha|\leq k\\|\beta|\leq n}} \sup\left|(-y+x)^\alpha\right|\left|D_y^\beta\varphi(y)\right|$$

Como $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, lo cual es polinómicamente acotado y por lo tanto$(T*\varphi) \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

3.2.9 Proposición

Sea $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, entonces $gT \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Demostración:

Por el teorema (2.10.4) la aplicación $f \mapsto gf$ de $S\left(\mathbb{R}^n\right)$en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ está bién definida y contínua.

3.2.10 Corolario

Si f es de crecimiento lento, entonces $f \in S'(\mathbb{R})$.

Demostración:

Si $\varphi \in S(\mathbb{R})$ se tiene también $\left(1+|x|^2\right)^{k+1}$, $\varphi \in S(\mathbb{R})$

luego, $\left|\left(1+|x|^2\right)^{k+1}\varphi(x)\right| \leq M$, entonces,

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||\varphi(x)|dx$$

$$\le CM\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \infty$$

donde, $\langle f,\varphi\rangle \le \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$

Por tanto, esta funcional es contínua sobre $S(\mathbb{R})$, puesto que,

$\varphi_n \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$.

Se debe mostrar que $\langle f,\varphi_n\rangle \longrightarrow 0$

En efecto:

$\varphi_n \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$ implica $\left(1+|x|^2\right)^{k+1}\varphi_n \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R})$

entonces,

$$|\langle f,\varphi_n\rangle| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||\varphi_n(x)|dx$$

$$\le C\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+x^2\right)^k |\varphi_n(x)|dx$$

$$= C\int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(1+x^2\right)^{k+1}\varphi_n(x)\right| \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$< C\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \longrightarrow 0$$

Como consecuencia de este resultado se afirma que, toda distribución definida por un polinomio, es una distribución temperada.

3.2.11 Proposición

Sea $\wp'_o(\mathbb{R}^n)$ espacio de distribuciones de soporte compacto, si $T \in \wp'_o(\mathbb{R}^n)$ entonces $T \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración:

Sea el compacto $K = \text{sop}T$, entonces $\theta T = T$ para algún $\theta \in \wp\left(\mathbb{R}^n\right)$. Así mismo, existe

$m \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tal que para $K_1 = \text{sop}\theta$ se tiene,

$\left|\langle T, \phi\rangle\right| \leq C p_{m,k_1}(\phi)$, $\forall \phi \in C^{\infty}_{k_1}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

En particular para cualquier $\varphi \in C^{\infty}_{0}\left(\mathbb{R}^n\right)$,

$$\left|\langle T, \varphi\rangle\right| = \left|\langle \theta T, \varphi\rangle\right| = \left|\langle T, \theta\varphi\rangle\right| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in k_1} \left(\left|D^{\alpha}\theta\varphi(x)\right|\right) \leq C_1 \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in k_1} \left(\left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|\right)$$

$$\leq C_1 \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|\right)$$

Lo cual, es una semi-norma contínua sobre $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Convergencia en $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$:

Dada una sucesión $\{T_m\}$ en $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, se dice que $T_m \longrightarrow 0$ en $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$

sí $\langle T_m, \psi\rangle \longrightarrow \langle T, \psi\rangle$ en $\mathbb{C}$, para cada $\psi \in S(\mathbb{R})$.

En general:

$\langle T_m, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle$ en $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$

Sea $f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$,

entonces:

$\left|\langle T_f, \varphi\rangle\right| \leq \int \left|f(x)\right|\left|\varphi(x)\right| dx \leq \|f\|_p \|\varphi\|_q$, $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$

donde $1 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ y $\| \ \|_p \equiv \| \ \|_{L^p}$

entonces, si $f_m \longrightarrow f$ en $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$, tenemos $T_{f_m} \longrightarrow T_f$ en $S'(\mathbb{R})$.

Luego, la aplicación $f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow T_f \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ es contínua,

Es de observar que:

$$\left|\left\langle T_{f_m} - T_f , \varphi\right\rangle\right| \leq \|f_m - f\|_p \|\varphi\|_q \longrightarrow 0 .$$

Luego, en particular se tiene algunos ejemplos de distribuciones temperadas

1) Muestre que las distribuciones temperadas son distribuciones, es decir: $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$

Solución:

i) Es lineal.

ii) Continuidad:

Supóngase entonces que $\{\varphi_n\} \longrightarrow 0$ en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$ talque existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ talque $\operatorname{Sop}(\varphi_n) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sup\limits_{x\in K}\left|D^\alpha \varphi_n(x)\right|\right\} = 0$ para cualquier β

Por consiguiente,

$$\left\{\|\varphi_n(x)\|_{\alpha,\beta}\right\} = \left\{\sup_{x\in K}\left|x^\alpha D^\alpha \varphi_n(x)\right|\right\} \leq C_\alpha \left\{\sup_{x\in K}\left|D^\beta \varphi_n(x)\right|\right\} \longrightarrow 0$$

donde $C_\alpha > 0$ talque $\left|x^\alpha\right| \leq C_\alpha$ para todo $x \in K$

luego, se tiene que $\{\varphi_n\} \to 0$ en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$, así $\{T(\varphi_n)\} \to T(0)$

y T es contínua en $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$.

2) Por la proposición (3.2.11), Toda distribución con soporte compacto es una distribución temperada.

En Efecto:

Sea $K = \operatorname{sop}(T)$ donde $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y K es compacto.

Entonces existe $\psi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ Talque,

$\psi = 1$ en algún abierto V talque $K \subset V$

Se define la extensión $\tilde{T}$ de T.

Así, $\tilde{T}(f) = T(\psi f)$, $f \in S(\mathbb{R})$

Por lo tanto, $\tilde{T}$ es lineal.

Se muestra que $\tilde{T}$ es contínua:

Si $f_n \longrightarrow 0$ en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces $D^\alpha f_n \longrightarrow 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$, $\forall\alpha$ multi-índice

luego, $D^\alpha(\psi f_n) \longrightarrow 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$,

Por lo tanto, $\psi f_n \longrightarrow 0$ en $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Como $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ se tiene que $T(\psi f_n) \longrightarrow 0$

Así, $\tilde{T}(f_n) \longrightarrow 0$ luego, $\tilde{T}$ es contínua en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

$T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ admite una extensión contínua a toda $S\left(\mathbb{R}^n\right)$,

por lo tanto, T es una distribución temperada es decir $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

3) La delta de Dirac, definida como $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ Para todo $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$

es distribución temperada.

4) Para todo $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ con soporte compacto se puede identificar con una distribución temperada, en el sentido que existe una única $\tilde{T} \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ cuya restricción a $\wp\left(\mathbb{R}^n\right)$ coincide con T.

5) Una función integrable es una distribución temperada, pues:

$f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$ existe si φ es acotada, $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

6) Dada una distribución temperada $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y es un polinomio $P(x)$, entonces $P(x)T$ es una distribución temperada; esto es:

$$\langle P(x)T,\varphi\rangle = \langle T, P(x)\varphi(x)\rangle \text{ y } [P(x)\varphi(x)] \in S\left(\mathbb{R}^n\right),\ \varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

7) Se definen, para $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\tau_h T$, $\delta_a T$ y $\tilde{T}$ por:

i) $\langle \tau_h T,\varphi\rangle = \langle T, T_{-h}\varphi\rangle$ (traslación)

ii) $\langle \delta_a T,\varphi\rangle = \left\langle T, a^{-d}\,\delta_{\frac{1}{a}}\varphi\right\rangle$ (dilatación)

iii) $\left\langle \tilde{T},\varphi\right\rangle = \left\langle T,\tilde{\varphi}\right\rangle$ (reflexión)

Son distribuciones temperadas.

8) Sea P un polinomio en X talque $\int_{\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^{-N} P(x)\right| dx < \infty$.

Entonces P define una distribución temperada T_P como:

$$T_P(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x)\varphi(x)dx\ ,\quad \varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

9)Toda distribución temperada es una distribución de orden finito.

En efecto:

Sea $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto $\varphi \in \wp_K$

Como $\wp\left(\mathbb{R}^n\right) \subset S\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces, $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ y como $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$

existe un entero positivo N y una constante C tales que

$$\left|T(\varphi)\right| \leq C P_N(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} \left(1+|x|^2\right)^N \left|D^\alpha \varphi(x)\right|$$

$$\text{En } K, \left(1+|x|^2\right)^N \quad \left(1+|x|^2\right)^N \leq C_1$$

es acotada, es decir existe una constante C_1 talque

$$\left|T(\varphi)\right| \leq C C_1 \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} \left|D^\alpha \varphi(x)\right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} \left|D^\alpha \varphi(x)\right|$$

Así, $T \in \wp'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y como el entero N no depende del compacto K, T es de orden finito. Por consiguiente, con los conceptos, definiciones y propiedades fundamentales de este capítulo se tiene que solo las distribuciones temperadas poseen transformada de Fourier en el sentido de Schwartz, que es el objetivo a desarrollar en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IV: TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA DISTRIBUCIÓN TEMPERADA

En este capítulo la transformada de Fourier, definidas en el espacio de Schwartz se extiende al espacio de distribuciones temperadas considerando definiciones y propiedades de la transformada de Fourier en el espacio de Schwartz y en consecuencia se tiene la extensión de la transformada de Fourier a una distribución temperada.

4.1 Transformada de Fourier de una Distribucion Temperada

Antes de definir la Transformada de Fourier de una distribución temperada, supóngase que f es una función entonces,

Sea $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, se requiere definir una distribución $\hat{T} \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ talque si $T \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces $\hat{T}$ sea la distribución temperada asociada a $\hat{f}$, donde f es la función de $L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ que representa a T. Sí $f \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces $T_f = T_{\hat{f}}$. Es decir,

$\hat{T}_f(\varphi) = T_{\hat{f}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\varphi$, $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$. Por la fórmula de Parseval (2.12.4.1)

$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = T_f\left(\hat{g}\right)$, se dice que $\hat{T}_f(g)$ tiene que ser definida por $T_f\left(\hat{g}\right)$.

Así para $\hat{T} \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$, se define $\hat{T} : S\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\hat{T}(g) = T\left(\hat{g}\right) \quad \forall g \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Bajo estas condiciones se tiene la siguiente definición.

4.1.1 Definición de Transformada de Fourier de una Distribución Temperada

La Transformada de Fourier $F[T]$ de una distribución temperada $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ es un funcional

$F[T]: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \hat{\varphi} \right\rangle, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

donde $F[T] = \hat{T}$ denota transformada de Fourier de una distribución temperada.

Es de observar que,

$$F: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$$
$$\varphi \mapsto F(\varphi) = \hat{\varphi}$$

es una aplicación contínua de $S(\mathbb{R}^n)$ en $S(\mathbb{R}^n)$ y como T es contínua en $S(\mathbb{R}^n)$, se deduce que $\hat{T} \in S'(\mathbb{R})$.

Esta relación define una aplicación lineal contínua sobre $S(\mathbb{R}^n)$,

pues si $\varphi_n \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{\varphi}_n \longrightarrow 0$ en $S(\mathbb{R}^n)$.

4.1.2 Definición de Transformada Inversa de Fourier de una Distribución Temperada

Si $T \in S'(\mathbb{R}^n)$, se define su transformada inversa de Fourier $\check{T}$, como:

$$\left\langle \check{T}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \check{\varphi} \right\rangle, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Es de observar,

i) Para que esta definición tenga sentido es necesario que se cumpla $F[\varphi] = \hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$

ii) $F: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ es contínua, por lo tanto F de $S'(\mathbb{R}^n)$ en $S'(\mathbb{R}^n)$ es continua.

Similarmente: F^{-1} de $S'(\mathbb{R}^n)$ en $S'(\mathbb{R}^n)$ es contínua.

Además, se tiene el resultado,

$$F^{-1}FT = T = FF^{-1}T$$

Si $T \in S'(\mathbb{R})$, $\phi \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, con $T = T_\phi$ entonces

$$\hat{T}_\phi(\varphi) \overset{\text{def.}(4.1.1)}{=} T_\phi\left(\hat{\varphi}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\hat{\varphi}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x)\varphi(x)dx = T_{\hat{\phi}}(\varphi)$$

4.1.3 Corolario

Si $T_n \longrightarrow T$ en $S'(\mathbb{R})$, entonces $\hat{T}_n \longrightarrow T$ en $S'(\mathbb{R})$.

En efecto:

$$\left\langle \hat{T}_n, \varphi \right\rangle = \left\langle T_n, \hat{\varphi} \right\rangle \longrightarrow \left\langle T, \hat{\varphi} \right\rangle = \left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle$$

4.1.4 Proposición

Si $T \in S^{'}(\mathbb{R})$ entonces $\hat{T} \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$

Demostración:

Como $\hat{T} = T_{\circ}{}^{\wedge}$, entonces $\hat{T}$ es lineal y contínua en $S\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Luego, $T \in S^{'}\left(\mathbb{R}^n\right)$

4.1.5 Teorema

a) La Transformada de Fourier $F : S^{'}\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow S^{'}\left(\mathbb{R}^n\right)$ es una aplicación lineal, biyectiva y continua con inversa contínua.

b) $T \in S^{'}(\mathbb{R})$ y P un polinomio, entonces $\left(P(D)T\right)^{\wedge} = P\hat{T}$ y $\left(PT\right)^{\wedge} = P(-D)\hat{T}$

Vargas, F. (1994)

Demostración:

a) Por la proposición (4.1.4) $\hat{T} \in S'(\mathbb{R})$ cuando $T \in S'(\mathbb{R})$.

Luego, $\mathcal{F}$ es lineal.

i) F es contínua, sea $T_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ en $S'(\mathbb{R})$, entonces

Para todo $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $T_n(f) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$

Como $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $T_n\left(\hat{f}\right) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$

Pero, $T_n\left(\hat{f}\right) = \hat{T}_n(f)$, luego, $\hat{T}_n(f) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n)$

Esto significa que $\hat{T}_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ en $S'(\mathbb{R})$.

ii) $\mathcal{F}$ biyectiva, por el teorema (2.12.6)

$F: S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo y que

$F\left(\hat{\hat{\hat{f}}}\right) = \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f$, $f \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces ,para $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$T(f) = T\left(\hat{\hat{\hat{\hat{f}}}}\right) = \hat{T}\left(\hat{\hat{\hat{f}}}\right) = \hat{\hat{T}}\left(\hat{\hat{f}}\right) = \hat{\hat{\hat{T}}}\left(\hat{f}\right) = \hat{\hat{\hat{\hat{T}}}}(f) \qquad (4.1.5.1)$$

(pues, $\left\langle \hat{T}, \hat{\varphi} \right\rangle = \left\langle T, \hat{\hat{\varphi}} \right\rangle \equiv T\left(\hat{\hat{\varphi}} \right)$)

Luego, $T = \hat{\hat{\hat{\hat{T}}}} = F\left(\hat{\hat{\hat{T}}} \right)$, por lo tanto F es suryectiva.

Ahora, supóngase que $\hat{T} = F(T) = 0$

De (4.1.5.1) para $f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$, $T(f) = \hat{T}\left(\hat{\hat{\hat{f}}} \right)$ =0, Luego $T = 0$ y por lo tanto, F es inyectiva.

La inversa de F es contínua:

Por ii) existe la inversa de F.

Basta verificar que $\hat{\hat{T}} = \tilde{T}$ y que $\left(\hat{T} \right)^{\sim} = \left(\tilde{T} \right)^{\wedge}$

Sea $g \in S$ entonces $\hat{\hat{T}}(g) = \hat{T}\left(\hat{g} \right) = T\left(\hat{\hat{g}} \right) = T\left(\tilde{g} \right) = \tilde{T}\left(g \right)$, luego $\hat{\hat{T}} = \tilde{T}$

Por lo tanto, se conoce como la fórmula de inversión para distribuciones temperadas.

$$\left(\hat{T} \right)^{\sim}(g) = \left(\hat{T} \right)\left(\tilde{g} \right) = T\left(\left(\tilde{g} \right)^{\wedge} \right) = T\left(\left(\hat{g} \right)^{\sim} \right) = \tilde{T}\left(\hat{g} \right) = \left(\tilde{T} \right)^{\wedge}(g)$$

Luego, $\left(\hat{T} \right)^{\sim} = \left(\tilde{g} \right)^{\wedge}$ de esta manera $F^{-1} = F \circ \sim$

Por lo tanto, F^{-1} es contínua.

b) Por el teorema (2.12.4) partes c) y d), las definiciones y propiedades de operaciones con distribuciones temperadas se tiene:

Sea $f \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(P(D)T\right)^{\wedge}(f) \overset{\text{def.}(4.1.1)}{=} \left(P(D)T\right)\left(\hat{f}\right) \overset{\text{teorema}(2.9.4)\,a)}{=} \left(\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha D_\alpha T\right)\left(\hat{f}\right)$$

$$= \left(\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \left(D_\alpha T\right)\right)\left(\hat{f}\right)$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha (i)^{-|\alpha|}\left(D_\alpha T\right)\left(\hat{f}\right)$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha (i)^{-|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}\, T\left(D_\alpha \hat{f}\right)$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha (-1)^{|\alpha|}\, T\left(D_\alpha \hat{f}\right)$$

$$= T\left(\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \hat{f}\right)$$

$$= T\left(P(-D)\hat{f}\right)$$

$$= T\left((Pf)^{\wedge}\right)$$

$$= \hat{T}(Pf)$$

$$= \left(P\hat{T}\right)(f)$$

Luego, $\left(P(D)T\right)^{\wedge} = P\hat{T}$

Similarmente se prueba que $(PT)^{\wedge}(f) = \left(P(-D)\hat{T}\right)(f)$, $\forall f \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$

4.1.6 Teorema

Si $F\check{T} \equiv T$ y $\overset{\vee}{F}T \equiv \check{T}$, entonces la aplicación $F[f]: S'\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ es un isomorfismo en el espacio de las distribuciones temperadas $S'(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo, cuya inversa es $\check{F}$.

(donde "$\equiv$" denota equivalencia)

Demostración:

Se debe mosrar que, $\check{F}FT \equiv T$ y $F\check{F}T \equiv T$

En efecto:

$$\left\langle \check{F}FT, \varphi \right\rangle = \left\langle FT, \check{F}\varphi \right\rangle \equiv \left\langle FT, \check{\varphi} \right\rangle = \left\langle T, F\check{\varphi} \right\rangle \equiv \left\langle T, \hat{\check{\varphi}} \right\rangle = \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Por tanto, $\check{F}FT = T$

Similarmente, para $F\check{F}T = T$

Como se sabe que F es contínua desde que $T_m \longrightarrow 0$ en $S'(\mathbb{R}^n)$, entonces para $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

se tiene:

$\langle FT_m, \varphi \rangle = \langle T_m, F\varphi \rangle \equiv \left\langle T_m, \hat{\varphi} \right\rangle \longrightarrow 0$ en $\mathbb{C}$, esto es:

$\hat{T}_m \longrightarrow 0$ en $S'(\mathbb{R}^n)$

análogamente,

$\check{F}T_m \equiv \check{T}_m \longrightarrow 0$ en $S'(\mathbb{R}^n)$.

4.1.7 Teorema

Si $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ entonces $F(D^\beta x^\alpha T) = (D^\beta x^\alpha T)^\wedge = (2\pi)^{|\beta|-|\alpha|} i^{|\alpha|+|\beta|} x^\beta D^\alpha FT$.

Demostración:

Supongamos $T = x^\alpha T$, entonces $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ se tiene:

$$\left\langle F\left(D^{\beta}T\right),\varphi\right\rangle \overset{def.(4.1.1)}{=} \left\langle D^{\beta}T,F\varphi\right\rangle$$

$$\overset{def.(2.4.2)}{=} (-1)^{|\beta|}\left\langle T,D^{\beta}F\varphi\right\rangle \ , \quad F\varphi=\hat{\varphi}$$

$$=(-1)^{|\beta|}\left\langle T,F\left((-2\pi i)^{|\beta|}x^{\beta}\varphi\right)\right\rangle$$

$$=(-1)^{|\beta|}(-2\pi i)^{|\beta|}\left\langle x^{\beta}FT,\varphi\right\rangle.$$

Por lo tanto:

$$F\left(D^{\beta}T\right)=(-1)^{|\beta|}(-2\pi i)^{|\beta|}x^{\beta}FT=(2\pi i)^{|\beta|}x^{\beta}FT$$

Por otro lado, también se tiene:

$$\left\langle FT,\varphi\right\rangle=\left\langle F\left(x^{\alpha}T\right),\varphi\right\rangle \text{, pues } T=x^{\alpha}T$$

$$\overset{def.(4.1.1)}{=} \left\langle x^{\alpha}T,F\varphi\right\rangle$$

$$=\left\langle T,x^{\alpha}F\varphi\right\rangle=\left\langle T,(2\pi i)^{-|\alpha|}F\left(D^{\alpha}\varphi\right)\right\rangle$$

$$=(2\pi i)^{-|\alpha|}\left\langle T,F\left(D^{\alpha}\varphi\right)\right\rangle$$

$$=(2\pi i)^{-|\alpha|}\left\langle FT,D^{\alpha}\varphi\right\rangle$$

$$=(2\pi i)^{-|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}\left\langle D^{\alpha}FT,\varphi\right\rangle$$

$$=(2\pi i)^{-|\alpha|}(i)^{-|\alpha|}(i)^{2|\alpha|}\left\langle D^{\alpha}FT,\varphi\right\rangle.$$

Por lo tanto:

$$F\left(T\right)=(2\pi)^{-|\alpha|}(i)^{|\alpha|}D^{\alpha}FT$$

luego:

$$F\left(D^{\beta}x^{\alpha}T\right)=F\left(D^{\beta}T\right)$$

$$=(2\pi i)^{|\beta|}x^{\beta}FT$$

$$=(2\pi i)^{|\beta|}x^{\beta}(2\pi)^{-|\alpha|}(i)^{|\alpha|}D^{\alpha}FT$$

$$=(2\pi)^{|\beta|-|\alpha|}i^{|\alpha|+|\beta|}x^{\beta}D^{\alpha}FT.$$

4.1.8 Teorema

Si $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ y multi-índice $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(ix)^\alpha \hat{T} = \left(D^\alpha T\right)^\wedge \quad y \quad D^\beta \hat{T} = F\left((-ix)^\beta T\right)$$

En general:

$$(ix)^\alpha D^\beta \hat{T} = F\left(D^\alpha\left((-ix)^\beta T\right)\right)$$

Demostración:

Sea $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ entonces,

$$(ix)^\alpha \hat{T}(\varphi) = \hat{T}\left((ix)^\alpha \varphi\right) \overset{def.(4.1.1)}{=} T\left((ix)^\alpha \varphi\right)^\wedge = T\left((-D)^\alpha \hat{\varphi}\right)$$

$$= D^\alpha T\left(\hat{\varphi}\right)$$

$$= \left(D^\alpha T\right)^\wedge (\varphi)$$

Además,

$$D^\beta \hat{T}(\varphi) = \hat{T}\left((-D)^\beta \varphi\right) = T\left[\left((-D)^\beta\right)^\wedge \varphi\right]$$

$$= T\left((-ix)^\beta \hat{\varphi}\right)$$

$$= (-ix)^\beta T\left(\hat{\varphi}\right)$$

$$= \left(\left(\left\{(-ix)^\beta\right\}^\wedge\right) T\right)(\varphi)$$

Para el caso general se tiene:

$$F\left\{D^{\alpha}\left((-ix)^{\beta}T\right)\right\}(\varphi)\overset{def.(4.1.1)}{=}D^{\alpha}\left((-ix)^{\beta}T\right)\left(\hat{\varphi}\right)=(-ix)^{\beta}T\left((-D)^{\alpha}\hat{\varphi}\right)$$

$$=(-ix)^{\beta}T\left(\left\{\left\{(ix)^{\alpha}\varphi\right\}^{\wedge}\right\}\right)$$

$$=T\left((-ix)^{\beta}\left((ix)^{\alpha}\varphi\right)^{\wedge}\right)$$

$$=T\left(F\left\{D^{\beta}(ix)^{\alpha}\varphi\right\}\right)$$

$$=T\left(\left(D^{\beta}(ix)^{\alpha}\varphi\right)^{\wedge}\right)$$

$$=(ix)^{\alpha}D^{\beta}\hat{T}(\varphi)$$

4.1.9 Teorema de la Transformada de Fourier y las Derivadas

Si $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\cap L^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ tales que

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\in L^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$

ii) $f(x)\longrightarrow 0$ cuando $|x|\rightarrow\infty$ entonces $\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi)=i\xi_j\hat{f}(\xi)$

Demostración:

Integrando por partes se tiene:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi)=(2\pi)^{\frac{-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-ix.\xi}\,dx$$

$$=(2\pi)^{\frac{-n}{2}}\,i\xi_j\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix.\xi}\,dx$$

$$=i\xi_j\hat{f}(\xi)$$

4.2 Aplicaciones de la Transformada de Fourier de Distribuciones Temperadas

A continuación, se desarrolla algunas aplicaciones de la Transformada de Fourier de distribuciones temperadas.

1) Si $\hat{\delta}_a(\varphi)$, para $a \in \mathbb{R}^n$ para todo $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$

$$\hat{\delta}_a(\varphi) \overset{def.(4.1.1)}{=} \delta_a\left(\hat{\varphi}\right) = \hat{\varphi}(a)$$

$$\overset{def.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iax}\varphi(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-iax}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\varphi(x)dx$$

2) Sea $\delta_o \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Hallar $\hat{\delta}_o$

En efecto:

Sea $\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$

$$\hat{\delta}_o(\varphi) \overset{def.(4.1.1)}{=} \delta_o\left(\hat{\varphi}\right) = \hat{\varphi}(0) \overset{def.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} 1\varphi(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} 1(\varphi)$$

Luego, $\hat{\delta}_o = \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\right)1$

Es de observar que:

$$\check{\delta}_o(\varphi) \overset{def.(4.1.2)}{=} \delta_o\left(\check{\varphi}\right) = \check{\varphi}(0) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)\ ,\ \forall \varphi \in \left(\mathbb{R}^n\right)$$

Luego, $\check{\delta}_o = \delta_o$

3) Si los polinomios son distribuciones temperadas. Determinar su transformada de Fourier del polinomio 1.

En efecto: 1 es distribución temperada pues:

$$1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} 1\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx\ ,\ \forall \varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

$$\hat{1}(\varphi) \overset{def.(4.1.1)}{=} 1\left(\hat{\varphi}\right) \overset{def.(2.9.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi.0}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \varphi(0)$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \delta_o(0)\ ,\ \forall\varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Luego, $\hat{1} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \delta_o$

4) Sea δ una distribución de soporte compacto, por lo tanto, es una distribución temperada. Hallar su transformada de Fourier.

En efecto:

$$\hat{\delta}(\varphi) \overset{def.(4.1.1)}{=} \delta\left(\hat{\varphi}\right) = \hat{\varphi}(0) \overset{def.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx$$

$$\overset{def.(2.9.1)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} 1\varphi(x)dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} 1(\varphi)$$

Luego, $\hat{\delta} = \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\right)1.$

5) Verificar la transformada de Fourier de la expresión $F\left[\delta_{x_o}\right](x) = e^{-ix_o x}$ en el sentido de distribuciones temperadas.

En efecto:

$$F\left[\delta_{x_o}\right](\varphi) \overset{def.(4.1.1)}{=} \delta_{x_o}\left(F[\varphi]\right) = F[\varphi](x_o) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{-ix.x_o}dx = T_f(\varphi)\text{, con } f(x) = e^{-ix_o.x}$$

Tomando $x_0 = 0$ se tiene: $F[\delta_o] = 1$

luego, $\delta_o = F^{-1}[1] = \dfrac{1}{(2\pi)^n} F[1]$.

En consecuencia $F[1] = (2\pi)^n \delta_o$

6)Transformada de Fourier de una derivada:

Sea $\varphi \in S(\mathbb{R}^n), T \in S'(\mathbb{R}^n)$ y α un multi-índice, se cumple:

$$F\left[D^\alpha \varphi\right] = i^{|\alpha|} y^\alpha F[\varphi] \ , \ F\left[\partial^\alpha T\right] = i^{|\alpha|} x^\alpha F[T]$$

donde D^α y ∂^α denotan cualquier derivada de α en el sentido clásico y distribucional.

En efecto:

$$F\left[D^\alpha \varphi\right](y) \overset{def.(2.9.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x) e^{-ix.y} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) D^\alpha \left(e^{-ix.y}\right) dx$$

$$\overset{def.(2.9.1)}{=} i^{|\alpha|} y^\alpha \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix.y} dx}_{F[\varphi]}$$

$$= i^{|\alpha|} y^\alpha F[\varphi](y)$$

En el caso distribucional se tiene:

$$F\left[\partial^\alpha T\right](\varphi) \overset{def.(4.1.1)}{=} \partial^\alpha T(F[\varphi]) = -i^{|\alpha|} T\left(D^\alpha F[\varphi]\right)$$

$$= (-i)^{|\alpha|} T\left(F\left[(-i)^{|\alpha|} x^\alpha \varphi \right]\right)$$

$$= i^{|\alpha|} F[T]\left(x^\alpha \varphi\right)$$

$$= i^{|\alpha|} x^\alpha F[T](\varphi)$$

7) Transformada de Fourier de una traslación:

Para cualesquiera $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ y $T \in S'(\mathbb{R}^n)$,se cumple:

$$F[\tau_a\varphi] = e^{-a.y}F[\varphi]\ ,\ F[\tau_a T] = e^{-a.y}F[T]$$

donde τ_a denota el operador de traslación por el vector $a \in \mathbb{R}^n$

En efecto:

$$F[\tau_a\varphi](y) \overset{\text{def.}(2.9.1),(2.7.2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y-a)e^{-ix.y}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)e^{-i(u+a).y}du = e^{-ia.y}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)e^{-iu.y}du$$

$$= e^{-ia.y}F[\varphi](y)$$

En el caso distribucional se tiene:

$$F[\tau_a T](\varphi) \overset{\text{def.}(4.1.1)}{=} \tau_a T(F[\varphi]) \overset{\text{def.}(2.7.6)}{=} T(\tau_{-a}F[\varphi])$$

$$= T\left(F\left[e^{-ia.x}\varphi\right]\right)$$

$$= F[T]\left(e^{-ia.x}\varphi\right)$$

$$= e^{-ia.x}F[T](\varphi)$$

8) Transformada de Fourier de un grupo de escala:

Para cualesquiera $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, se cumple

$$F[\varphi(\lambda x)] = \frac{1}{|\lambda|^n}F[\varphi]\left(\frac{y}{\lambda}\right)\ ,\ F[T(\lambda x)] = \frac{1}{|\lambda|^n}F[T]\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

En efecto:

Si $\lambda \neq 0,$ se tiene

$$F[\varphi(\lambda x)](y) \overset{\text{def.}(2.9.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda x)e^{-ix.y}dx = \frac{1}{|\lambda|^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)e^{\frac{-iu.y}{\lambda}}du = \frac{1}{|\lambda|^n}F[\varphi]\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

En el caso distribucional se tiene:

$$F\left[T(\lambda x)\right](\varphi) \overset{def.(4.1.1)}{=} T(\lambda x)\left(F[\varphi]\right) = T\left(\frac{1}{|\lambda|^n} F[\varphi]\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = T\left(F\left[\varphi(\lambda y)\right]\right)$$

$$= F[T]\left(\varphi(\lambda y)\right)$$

$$= \frac{1}{|\lambda|^n} F[T]\left(\frac{y}{\lambda}\right)(\varphi)$$

9) Transformada de Fourier de un producto de convoluciones:

Para cualesquiera $\varphi, \psi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$ y $T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ se cumple

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]F[\psi] \quad , \quad F[\varphi * \psi] = \frac{1}{(2\pi)} F[\varphi]F[\psi]$$

donde la convolución $\quad (T * \varphi)(x) = T\left(\tau_x R_\varphi\right)$

En efecto:

$$F[\varphi * \psi](y) \overset{def.(2.9.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \psi)(x) e^{-ix.y} dx \overset{def.(2.7.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-\xi)\psi(\xi)d\xi\right) e^{-ix.y} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{-ix.y} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-\xi) e^{-i(x-\xi).y} dx\right)}_{F(\varphi)} dy$$

$$= F[\varphi](y) F[\psi](y) dx$$

Por otra parte, de la interpretación distribucional de la convolución se obtiene:

$$F[\varphi * \psi](y) \overset{def.(4.1.1)}{=} (T * \varphi)\left(F[\psi]\right) = T\left(R_\varphi * F[\psi]\right) = \frac{1}{(2\pi)^n} T\left(F\left[F[\varphi]\right]\right) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[T]\left(F[\varphi]\psi\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} F[\varphi]F[T](\psi)$$

Tomando, $F^2[\varphi]=(2\pi)^n R_\varphi$ en virtud del cálculo siguiente:

$$
\begin{aligned}
F^2[\varphi](z) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\varphi)(y)e^{-ix.z}dy \\
&\overset{def.(2.9.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{-iy.z}dx\right)e^{-iy.z}dy \\
&\overset{def.(2.9.1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-iy.(x+z)}dy\right)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} F[1](x+z)\varphi(x)dx \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n}\delta_0(x+z)\varphi(x)dx \\
&= (2\pi)^n \left(R_\varphi\right)(z)
\end{aligned}
$$

10) Indica si la función es verdadero o falso

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ es una función impar, entonces la transformada seno de Fourier de f definida como:

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{sen}(xy)dx \text{ coincide con } \frac{i}{2}F[f](y)$$

Solución:

Es verdadero, pues:

$$\frac{i}{2}F[f](y)=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixy}dx$$

$$=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(xy)\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{sen}(xy)\,dx$$

$$=\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}(xy)\,dx$$

Por la imparidad de f.

4.3 Discusión de Resultados

Según Valeria, M. (2009) en su trabajo de tesis ha realizado una investigacion sobre teoría de distribuciones considerando como funcionales lineales y continuas sobre $S\left(\mathbb{R}^n\right)$ donde sus elementos se llaman distribuciones temperadas y define su transformada de Fourier.

.Dada una distribución $T \in S^{'}\left(\mathbb{R}^n\right)$ se define transformada de Fourier $\hat{T}$ como:

$$\left\langle \hat{T}, u \right\rangle = \left\langle T, \hat{u} \right\rangle, \forall u \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

donde,

$$\begin{aligned} \hat{T} : S\left(\mathbb{R}^n\right) &\longrightarrow \mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R} \\ u &\mapsto \left\langle \hat{T}, u \right\rangle = \left\langle T, \hat{u} \right\rangle \end{aligned}$$

Por otro lado, Según Tellechea, E. (1981) presenta en su trabajo un panorama brebe sobre teoría de distribuciones y aplicaciones en ecuaciones diferenciales. También enfatiza las aplicaciones de distribuciones tales como distribuciones temperadas.

Según Tineo,C. (2005) presenta en su trabajo la caractrizacion de las distribuciones de soporte compacto como funcionales lineales continuas en el espacio de funciones continuas infinitamente diferenciables de soprte compacto.

En cambio, en este trabajo de investigación para hacer una extensión de la transformada de Fourier a distribuciones temperadas, previamente considerando conceptos y propiedades fundamentales de la Transformada de Fourier se introduce en el espacio de Schwartz $S\left(\mathbb{R}^n\right)$

y luego su extensión a distribuciones temperadas; esto es:

$T \in S'\left(\mathbb{R}^n\right)$ se define su transformada de Fourier $\hat{T}$ como:

$$\hat{T} : S\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \mapsto \left\langle \hat{T}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \hat{\varphi} \right\rangle, \forall \varphi \in S\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Es un funcional lineal en sentido de distribuciones temperadas.

a) Lloccallasi, E. (2011) en este trabajo de tesis presenta una introducción a la teoría elemental de distribuciones, así como su estructuración, de conceptos y propiedades fundamentales.

Ahora en este trabajo, se amplia la transformada de Fourier en las funciones rapidamente decrecientes o espacio de Schwartz y luego su extensión al espacio de distribuciones temperadas.

Conclusiones

1. La transformada de Fourier se introduce al espacio de funciones rápidamente decrecientes y luego se extiende a funciones generalizadas de distribuciones temperadas.
2. Las propiedades de la transformada de Fourier se introduce al espacio de funciones rápidamente decrecientes.
3. Las propiedades de la transformada de Fourier y las distribuciones temperadas son conceptos teóricos que se aplican a muchos problemas en ecuaciones diferenciales que no se pueden resolver por otros métodos.
4. Las propiedades del espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ se preserva en el espacio de las distribuciones temperadas, por consiguiente se extiende la transformada de Fourier del espacio de Schwartz a distribuciones temperadas $S'(\mathbb{R}^n)$.

Recomendaciones

Las recomendaciones después del desarrollo de este trabajo de tesis son:

1. La transformada de Fourier está relacionado con funciones rápidamente decrecientes y es netamente un tema de especialidad, por lo tanto, sugiero como un curso de distribuciones que debe ser impartida en la maestría de matemática, dado que la teoría de distribución es importante en la física teórica, pues esta clase de funciones es mucho más ámplio que la clase de funciones diferenciables en sentido ordinario.

2. La transformada de Fourier es muy importante en las aplicaciones a muchos campos de la matemática y física en particular a distribuciones temperadas; por lo tanto, se recomienda hacer mayor énfasis en los estudiantes de la maestría en matemática.

3. Incentivar a futuros investigadores que la transformada de Fourier no solo se puede extender a distribuciones temperadas sinó también a muchos campos de la tecnología moderna.

4. En la maestría de matemática se recomienda realizar talleres o laboratorio sobre modelamiento de la transformada de Fourier.

Apéndice

Matríz de Consistencia

Tema: La Transformada de Fourier y las Distribuciones Temperadas

Problema general	Objetivos	Variables	Metodología
¿Será posible extender las propiedades de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a funciones generalizadas de distribuciones temperadas? **Problemas específicos.** 1. ¿Será posible introducir la transformada de Fourier al espacio de funciones rápidamente decrecientes? 2. ¿Será posible introducir la transformada de Fourier a distribuciones temperadas? 3.¿Será posible realizar la extensión o generalización de la transformada de la Fourier de funciones rápidamente decrecientes a distribuciones temperadas?	**Objetivo general** Obtener la extensión o generalización de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a funciones generalizadas de distribuciones temperadas. **Objetivos específicos** 1. Determinar las propiedades de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes. 2.Determinar las propiedades de la transformada de Fourier de distribuciones temperadas. 3. Determinar la extensión o generalización de la transformada de Fourier de funciones rápidamente decrecientes a distribuciones temperadas.	No Corresponde	Es una investigación de carácter descriptivo, para su desarrollo se ha recopilado información de las diferentes fuentes bibliográficas disponibles.

Bibliografía

1. Cariño, O. J. (2013). *La transgormdora de Fourier en* L_1. Licenciado en Matematicas. Benemérica Universidad Autónoma de Puebla, Mexico.
2. Escobar, L. A. (2012). *Introduccion a la teoria de distribuciones*.Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá-Colombia.
3. Guzmán, J. C. (2012). BOA E MÁ COLOCAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR. Universidad Federal de Minas Gerais, Brasil
4. Pérez , A. (2020).Teoria de Distribuciones.Murcia
5. Iório, V. (1999). *Un curso de graduacion.* Instituto de Matematicas y ciencias afines.
6. Valeria, M. (2009). *La definicion de la Transformada de Fourier y sus desigualdades en norma con pesos.*
7. Russell, W. *La transformada de Fourier: Propiedades y aplicaciones*.
8. Schwartz, L. (1966). *Theórie des Distributions*
9. Tellechea, A. E. (1981). *La teoria de distribuciones y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales.* Universidad de sonora, Hermosillo.
10. Tineo, C. M. (2005). *Soporte de una distribución y aplicaciones*. Universidad Nacional de San Marcos.
11. Vargas, F. (1994). *Teoria de distribuciones*.
12. Olea, M. (2012). *La Transformada de Fourier*, Argentina.
13. Rodriguez, G. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*, España.
14. Zamora, D. (2018). *Teoría de distribuciones*. Instituto de Física La Plata, Argentina.

.