UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAB DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

INTEGRAL DE HENSTOCK-KURZWEIL,
GENERALIZACIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

TESIS PRESENTADA POR:

BR. GEORGE HUAMÁN BACA

PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

ASESOR: Mgt. PEDRO QUISPE SANDOVAL

CUSCO-PERÚ

2022

PRESENTACIÓN

Señor decano de la facultad de ciencias

Señor director de la Escuela Profesional de Matemática

Señores docentes miembros del jurado

Dando cumplimiento a las normas y reglamentos de la Escuela Profesional de Matemática, pongo a vuestra consideración el trabajo de investigación intitulado ***La integral de Henstock-Kurzweil, generalización de la integral de Riemann,*** con la finalidad de optar al título profesional de licenciado en matemática.

En este trabajo de investigación se presenta un nuevo método de integrar funciones que, según lo investigado, es una buena alternativa a los métodos de integración conocidos. La aplicación del resultado de la investigación se puede realizar en diferentes ramas de la matemática y de la ciencia en general.

Se espera que este trabajo de investigación sea de utilidad y contribuya, como una herramienta más en el cálculo integral, para la formación de los nuevos profesionales en la ciencia y, así, al avance del conocimiento de los fenómenos de la naturaleza.

Atentamente,

Br. **GEORGE HUAMÁN BACA**

DEDICATORIA

Con mucho cariño y amor, a mis padres Pablo Huamán y Victoria Baca, por ser ellos tan dedicados a mí, demostrándolo además con el sacrificio que hicieron para enviarme a la universidad.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco, por haberme dado la oportunidad de formarme en la facultad de Ciencias. Asimismo, a mis profesores de la Escuela Profesional de Matemáticas, que con honestidad y empeño han contribuido en mi formación profesional.

Agradecer a mis padres y hermanos.

Mi agradecimiento al Mgt. Pedro Quispe Sandoval por haberme guiado como asesor en el desarrollo de este trabajo con paciencia, comprensión y diligencia.

ÍNDICE

RESUMEN

Con el propósito de generalizar la integral de Riemann, en el presente trabajo de investigación se presenta un nuevo enfoque de integración que es el método dado por Jaroslav Kurzweil y luego ampliado por Ralph Henstock. El método de integración de estos dos matemáticos tiene la sencillez del de Riemann, pero de mayor alcance; incluso resulta más general que el método de integración de Lebesgue dentro de los reales.

El objetivo de este trabajo es generalizar el método de integración de Riemann; a la vez que mostrar la diferencia entre estos métodos. Abordando lo que es la integral de Riemann, observamos algunas de sus deficiencias al mostrar funciones que esta no puede integrar. Previamente, en la sección de *generalidades*, se enuncian algunas propiedades que serán necesarias para desarrollar el trabajo. En seguida, se estudia las particiones y las etiquetas.

Se desarrolla, luego de demostrar el importante lema de Cousin, lo que es propiamente la integral de Henstock-Kurzweil.

Se muestra que la función de Dirichlet ahora sí se puede integrar. Se observa también que solo se hará una “leve” modificación a la integral de Riemann para definir la de Henstock-Kurzweil.

En conclusión, se verá que el método de integración de Henstock-Kurzweil mejora al método de Riemann, pues lo generaliza; además de ser igual de práctico.

Con este trabajo de investigación se pretende dar a conocer que la integral de Henstock-Kurzweil constituye una potente herramienta de integración, además de que generaliza a la integral de Riemann; y que su aplicación no resulta muy laboriosa; no obstante, solo decimos que mejora, pues está muy lejos de ser perfecta.

Palabras clave: Cousin, función gauge, integral de Henstock-Kurzweil, particiones.

ABSTRACT

In order to generalize the Riemann integral, the core of this work, this research work presents a new integration method first devised by Jaroslav Kurzweil and then expanded by Ralph Henstock. The method of integration of these two mathematicians is practical and manageable like Riemann's, but more far-reaching; It is even more general than the Lebesgue method of integration within the real ones.

The objective is to generalize the Riemann integration method, to determine the difference between these methods. We address what the Riemann integral is, we observe some of its deficiencies showing some functions that it cannot integrate. Previously, in the "generalities" section, we stated some properties that will be necessary to develop the work. Next, quickly, we will see what partitions and labels are.We develop, after demonstrating the important Cousin lemma what is properly Henstock-Kurzweil integral.It is shown that the Dirichlet function can now be integrated. It is also observed that only a “slight” modification will be made to the Riemann integral to define Henstock-Kurzweil integral. We also conclude that Henstock-Kurzweil integration method is better than the Riemann method, since it generalizad it; besides noy being complicated.

This research work is intended to show that the Henstock-Kurzweil integral constitutes a powerful integration tool, in addition to generalizing to the Riemann integral; and that its application is not very laborious.

Keywords: Cousin, Gauge function, Henstock-Kurzweil integral, partitions.

INTRODUCCIÓN

Los investigadores, dentro de la ciencia, se hallan en perenne búsqueda de nuevas alternativas y modelos matemáticos que contribuyan a la solución de las dificultades que surgen cuando aquellos son aplicados. En consonancia de esto, el objetivo general de este trabajo de investigación es mostrar que el método de integración de los matemáticos Jaroslav Kurzweil y Ralph Henstock resulta más general que el método de Georg Bernhard Riemann.

A lo largo de la historia, la integración fue definida generalmente como el proceso inverso de la diferenciación.Incluso mucho antes que Newton y Leibniz, los investigadores matemáticos buscaban la forma de encontrar las medidas de las áreas de figuras regulares e irregulares, incluso las primitivas de determinadas funciones. La noción moderna de medida se fundamenta en la de función y el campo numérico donde se trabaja. Posteriormente Riemann la mejora, redefine las ideas de Cauchy y las ideas precedentes a las de este utilizando con más precisión las particiones del intervalo sobre el cual la función está definida. No obstante que la integral de Riemann ampliaba la cantidad de funciones integrables, tiene limitaciones; existen funciones a las cuales no puede integrar, y otras a las que no puede hallar sus primitivas.

Se conoce que la integral de Riemann integra toda función continua; también toda función discontinua cuyos puntos de discontinuidad forman un conjunto de medida nula. Una función no acotada no puede ser Riemann integrable; como es el caso de:

$f(x) = \frac{1}{x}\ \ si\ \ x \in (0,1]$, y hacemos que $f(x) = 0\ \ si\ \ x = 0$; $es\ decir,\ f(0) = 0$; se observa que cuando x tiende a cero, $f(x)$ crece arbitrariamente, y como $f(0) = 0$, entonces f no es acotada en $[0,1]$, entonces no es Riemann integrable. Existen funciones acotadas que tampoco son integrables según Riemann.

Muchos matemáticos investigadores se adentraron de lleno en la búsqueda de mejores métodos de integración para encontrar soluciones a estos problemas. Entonces, Henri Leon Lebesgue, matemático francés, ubicó la partición ya no en el dominio sino en el rango de valores y realizando una construcción, valiéndose de la teoría de la medida, definió una integral; la cual resulta ser mucho mejor que la de Riemann, generalizándola. Pero aun así este nuevo método de integración también posee limitaciones que, en cierta medida, son solucionadas por la integral de Henstock-Kurzweil a la que por facilidad, en ocasiones, denominaremos HKintegral y al conjunto de las funciones HKintegrables en $[a,b]$ como HK($[a,b]$), que no necesita de la teoría de la medida. Este nuevo proceso de integración utiliza una función positiva denominada *función gauge* (pequeña modificación, en δ, de la definición de Riemann). En este caso δ ya no es una constante, sino una función estrictamente positiva que depende del comportamiento de la función a integrar. Con este cambio Henstock y Kurzweil generalizan la integral de Riemann. Además, solucionan el problema del teorema fundamental del cálculo. Puesto que, ahora, toda derivada puede ser integrada.

El presente trabajo está estructurado en cuatro capítulos. En el primer capítulo se tratan la formulación del problema, el objetivo y tipo de investigación.

En el segundo capítulo se enuncia las definiciones y propiedades básicas generales que serán utilizadas para desarrollar este trabajo.

En el tercer capítulo se aborda la integral de Riemann, las definiciones y sus propiedades que consideramos primordiales para el trabajo. Se Muestra que la función de Dirichlet no puede ser integrada por el proceso de integración de Riemann. Asimismo, se define lo que son las particiones y las etiquetas.

En el último capítulo se desarrolla la integral de Henstock-Kurzweil, se demuestra el importante lema de Cousin. Se prueba el teorema que dice: “Que toda función integrable Riemann es HKintegrable”. Luego, para hacer notar que el método de Henstock-Kurzweil integra más funciones que el de Riemann, se muestra que la función de Dirichlet esta vez sí es integrable.

Finalmente, se toca lo que es el Teorema Fundamental del Cálculo para la integración de Henstock-Kurzweil.

CAPITULO I

Planteamiento del problema

1.1.1. Caracterización del problema

Debido a que el tema de las integrales es fundamental para la ciencia en general y buscando siempre perfeccionarlo; se puede preguntar: **¿puede haber un método de integración más práctico, de resolución menos compleja y que integre muchas más funciones que la integral de Riemann?** La integral de Hesntock-Kurzweil es una nueva herramienta matemática que se aplica para integrar funciones que por medio de los métodos conocidos precedentes resultan imposibles o muy laboriosas.

El problema que existe es que el método de integración de Riemann tiene muchas limitaciones. Así, una de las condiciones que pide Riemann es que la función a integrar sea acotada definida en un intervalo cerrado y acotado, lo que es una limitación. Y existen derivadas que no son integrables por el método de Riemann; esto es, con Riemann, no todas las funciones derivadas tienen primitiva; entre otras limitaciones. La integral de Riemann-Stieltjes rectifica algunas de las deficiencias; y la de Lebesgue corrige la mayoría. En cambio, la HKintegral, además de integrar todas las funciones Riemann integrables, integra otras funciones más. Utilizamos la función de Dirichlet, o función característica para los racionales sobre [0,1], para mostrar que esta función, por medio del método de Riemann, no es integrable, pero con el de Henstock-Kurzweil sí lo es.

En la partición del dominio de la función a integrar, Riemann utiliza un $\delta > 0$; en cambio, Henstock y Kurzweil usan una función estrictamente positiva, $\delta(t) > 0$, donde t es una etiqueta y δ también depende del Ɛ de la definición de la integral de Riemann.

1.1.2. Formulación del problema

¿Será posible generalizar la integral de Riemann, mediante el método de integración de Henstock-Kurzweil?

1.1.3. Problemas Específicos

1. ¿Será posible determinar la diferencia entre la integral de Riemann y la de Henstock-Kurzweil?
2. ¿Sera posible explicar que el método de integración de Henstock-Kurzweil resulta más general y práctico como el método de integración de Riemann?
3. ¿Será posible demostrar que una función integrable por el método de Henstock-Kurzweil, no es integrable por el de Riemann?

1.1.4. Objetivo

1.1.4.1. Objetivo general

Generalizar la integral de Riemann mediante el método de integración de Henstock-Kurzweil.

1.1.4.2. Objetivos específicos

1. Determinar la diferencia entre la integral de Riemann y la de Henstock-Kurzweil.
2. Explicar que el método de integración de Henstock-Kurzweil resulta más general y práctico como el método de integración de Riemann.
3. Demostrar que una de las funciones integrable por el método de

Henstock-Kurzweil, no es integrable por el de Riemann.

1.1.5. Justificación de la investigación

La motivación del tema de este trabajo es la observación de las limitaciones que la integral de Riemann tiene para integrar determinadas funciones y la importancia, dentro de la matemática, de encontrar nuevas formas de integrar que sean, en lo posible, sencillas de manejar, pero tan fornidas como la integral de Lebesgue, o incluso mejores. Aunque esta pretensión fue resuelta, en parte, por el francés Henri Lebesgue, continuaban existiendo problemas para integrar y recuperar varias funciones a partir de sus derivadas. Entonces se buscaba −y se sigue buscando mejorar lo existente− un método de hacer lo mismo que hizo Lebesgue para su integral, pero que sea directo, efectivo, que no use demasiado teoría de la medida; es decir, que sea menos fatigante. Fue cuando aparecieron las integrales del francés Arnaud Denjoy en 1912, y del alemán Oskar Perron en 1914, que solucionaban grandemente los problemas de sus antecesores. El inconveniente de estos nuevos métodos de integración es que su construcción es muy trabajosa y hasta complicada; por ejemplo, Denjoy utiliza, en parte de su trabajo, los números transfinitos. Estas dos integrales son equivalentes, pero un tanto dificultosas para ser aplicadas. Entonces, por las cercanías de 1960, surge la integral de Henstock-Kurzweil. Esta nueva integral hace lo mismo que la de Denjoy y la de Perron, solo que es mucho más fácil de manejarla. Utiliza la teoría de Riemann; solamente realiza una pequeña modificación; pero esta modificación tiene una repercusión muy grande en los resultados, ya que generaliza la integral de Riemann y a la de Lebesgue en muchos aspectos.

Marco teórico

1.2.1. Antecedentes de la investigación

El cálculo diferencial e integral ha sido un enorme logro del hombre en su intento exitoso de proporcionarse herramientas para entender la naturaleza, sus hechos y sucesos que le envuelven, y así poder desarrollarse.

Es Arquímedes, esencialmente, el que dio continuidad a los trabajos de Euclides. Posteriormente, usando los métodos de este, Cavalieri define sus *Indivisibles*, y también hacen su aparición los infinitesimales.

Luego de un espacio de tiempo un tanto dilatado, en el siglo XVII se retornó nuevamente al método de Arquímedes y, en el siguiente, hubo un notable interés por la matemática, donde se hizo muchos avances en el cálculo infinitesimal. Kepler, Galileo, etc., presentaron una relación del área bajo la curva. Llegando luego hasta Cavalieri quien escribió, basándose en las ideas de Kepler, que “un área está formada por segmentos indivisibles”. La geometría analítica de Descartes transformó el problema de las cuadraturas en el de hallar el área debajo de la curva. Fermat mejoró este método subdividiendo el intervalo donde se define la función en subintervalos más finos e infinitos. Barrow muestra la versión geométrica del teorema fundamental del cálculo. Y Vienen Isaac Newton y Gootfried Leibnitz de manera independiente definiendo lo que ahora se conoce como el cálculo infinitesimal. Estos, mostraron que la integral y la derivada eran conceptos inversos. Es con estos dos matemáticos que se establecen las definiciones y fundamentos matemáticos que resolvían muchos problemas que reinaban en su tiempo. El cálculo integral y diferencial recibió de Cauchy, a mediados del siglo

XIX, una fundamentación más precisa. Con Cauchy se inicia la rigurosidad en el análisis matemático; el concepto de límite le permite definir las cantidades muy pequeñas y las muy grandes. Luego B. Riemann analiza las integrales hasta entonces conocidas, sobre todo la de Cauchy, y formula su método de integración, el cual es mejorado posteriormente, entre otros, por H. Lebesgue y, en 1960, Kurzweil y Henstock, usando las ideas de Denjoy y Perrón, formulan un nuevo método de integración basándose en la de Riemann, lo que se conoce como la *Integral Generalizada de Riemann o Integral de Henstock-Kurzweil*.

Sobre el tema tratado existen, entre otras, investigaciones tales como:

- *The Henstock-Kurzweil Integral*. Tesis presentada por E. van Dijk. Faculteit Wiscunde, Natuurwetenschappen, Groningen. La tesis demuestra que realizando un pequeño cambio en la integral de Riemann se obtiene mejores resultados. Hace una comparación entre la integral de Riemann y la de Henstock-Kurzweil. Para observar las ventajas de esta última, da ejemplos. Su objetivo es mostrar que la integral de Henstock-Kurzweil tiene mejores beneficios que la de Riemann. Concluye que el Teorema Fundamental del Cálculo, con la HKintegral, no necesita condición adicional; que cada derivada es HKintegrable. Asimismo, también hace ver que al cambiar una constante por una función en la integral de Riemann conduce a mejores resultados.
- *La integral de Henstock-Kurzweil y el TFC*. Tesis presentada por Adriana Ocejo, España. La tesis expone la teoría de integración recientemente desarrollada. Demuestra que la HKintegral posee una característica

deseable en cualquier teoría de integración, puesto que es potente como la de Lebesgue, pero que no tiene su complejidad. El objetivo es la exposición de los principales resultados de la HKintegral para funciones reales definidas en intervalos cerrados con la finalidad de responder también a *si es posible formular una integral tipo Riemann que permita recuperar una función a partir de su derivada sin imponer condiciones a la derivada.*

- *Criterio del cociente para la integral de Henstock-Kurzweil*. Tesis de grado presentada por Jhony Rojas para optar al grado de Licenciado en Matemática, Universidad Central de Venezuela, facultad de ciencias, Escuela Matemática. Trabajo de investigación en el cual se da un criterio de integrabilidad por comparación de funciones integrables según Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil. Llega a la conclusión que entre la integral impropia de Riemann y la de Lebesgue ninguna es más general que la otra. Y que la integral de Henstock-Kurzweil generaliza a aquellas dos integrales.

Metodología

1.3.1.Tipo de investigación

Investigación básica.

1.3.2. Nivel de investigación

Investigación formulativa (exploratoria).

CAPITULO II

Generalidades

En este capítulo se desarrolla los conceptos y propiedades que serán indispensables para el trabajo. Algunos teoremas se enunciarán sin la demostración, pero daremos las referencias bibliográficas.

2.1.1. Conjuntos finitos e infinitos

Definición 2.1. (Lages Lima E.,1997,p.5**)**. Un conjunto $\mathrm{X} \neq \emptyset$**,** se dice finito si existe una biyección $f: I_n \longrightarrow \mathrm{X}$, donde $I_n = \{1,2,3,\dots,n\}$; $x_1 = f(1),\dots,x_n = f(n)$; tal que $\mathrm{X} = \{x_1,\dots,x_n\}$.

El conjunto nulo es finito.

Un conjunto X es infinito cuando no es vacío ni existe para ninguna $n \in \mathbb{N}$ una biyección $f: I_n \longrightarrow \mathrm{X}$.

2.1.2. Conjunto numerable

Definición 2.2. Un conjunto X se dice numerable cuando es finito o existe una biyección $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathrm{X}$. En este caso f se llama enumeración de los elementos de X. Si escribimos $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, …, $f(1) = x_n$,… se tiene entonces $\mathrm{X} = \{x_1,\dots,x_n,\dots\}$.

2.1.3. Propiedad arquimediana

2.1. Teorema. Si $x > 0$; e y un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$.

Demostración. (Ver en [12]).

2.1.4. Cuerpo

Definición 2.3. Un cuerpo es un conjunto K junto con las operaciones

+ : K x K → K	**.** : K x K → K
(a, b) ↦ a+b	(a, b) ↦ a.b

Llamadas adición y multiplicación que satisface las siguientes condiciones:

a. Axiomas de adición

Asociatividad, conmutatividad, existencia del elemento neutro, el inverso aditivo.

b. Axiomas de la multiplicación

Asociatividad, conmutatividad, existencia del elemento neutro, el inverso multiplicativo.

c. Distributividad

$a(b + c) = ab + ac, \quad a, b, c \in \mathrm{K},$

$(a + b)c = ac + bc, \quad a, b, c \in \mathrm{K}.$

Si K cumple estos nueve axiomas, entonces (K,+, **.**) es un cuerpo conmutativo.

d. Axiomas de orden

Un cuerpo (K,+, **.**) es un cuerpo ordenado si hay una relación ≤ definida en K que cumple los axiomas siguientes: reflexiva, antisimétrica, transitiva, orden total, compatibilidad del orden con la suma, compatibilidad del orden con el producto por elementos no negativos.

A la relación " ≤ " se la denomina *relación de orden*.

Los quince axiomas significan que (K, +, **.** , ≤) es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Si añadimos el axioma del supremo, entonces los 16 axiomas hacen que (ℝ,+, **.** , ≤) sea un cuerpo conmutativo totalmente ordenado en el que cualquier subconjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo.

2.1.5. Cuerpo ordenado

Definición 2.4. Si $D \subset$ K. Un cuerpo ordenado es un cuerpo K en el cual existe un subconjunto D llamado el conjunto de los elementos positivos de K tal que satisfacen las siguientes:

D_1 : La suma y la multiplicación de elementos positivos son positivos.

Es decir: si $x, y \in D \Rightarrow x + y \in D \;\; y \quad x.y \in D$

D_2 : Dado $x \in$ K, se cumple exactamente una de las siguientes alternativas:

$x = 0,$ o $x \in D,$ o $-x \in D.$

$-D$ se escribe como: $-D := \{-x : x \in D\}$, conjunto de los negativos de K. Por lo que K = $-D \cup \{0\} \cup \{D\}$, donde $-D \cup \{0\} \cup \{D\}$ son disjuntos dos a dos.

Nota: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y que verifica el axioma del supremo, como señalamos líneas arriba.

2.1.6. Conjunto acotado

2.1.6.1. Supremo

Definición 2.5. (Apostol,T.M.,1999,p.30). Sea (M, +, ·, ≤) un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y B un subconjunto de M.

(a) Se dice que B está acotado superiormente si existe algún elemento $x_0 \in M$ tal que $\forall\, a \in B$, $a \leq x_0$, y que x_0 es una cota superior del conjunto B.

(b) Se dice que B está acotado inferiormente si existe algún elemento $x_0 \in M$ tal que $\forall\, a \in B$, $x_0 \leq a$, y que x_0 es una cota inferior del conjunto B .

Definición 2.6. Diremos que B está acotado si está acotado superior e inferiormente.

Definición 2.7. Un elemento x_0 se dice supremo de B , denotado por $x_0 = supB$, si x_0 es la menor de las cotas superiores.

2.1.6.2. Ínfimo

Definición 2.8. Un elemento x_0 se dice ínfimo de B, denotado por $x_0 = infB$, si x_0 es la mayor de las cotas inferiores.

2.1.7. Conjunto compacto

Definición 2.9. El subconjunto K ⊂ ℝ, se dice que es un conjunto compacto si es cerrado y acotado.

2.1.8. Conjunto denso

Un conjunto A es denso en X, si $\overline{\mathrm{A}} = X$.

2.1.9. Función monótona

Definición 2.10. (Figueroa R.,1916, p.421). Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

i) Se dice que la función f es *creciente,* o *estrictamente creciente,* en un intervalo de su dominio, si para dos números $x_1, x_2 \in [a, b]$ se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Se dice que f es *no decreciente* si ocurriera que

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para dos números $x_1, x_2 \in [a, b]$.

ii) Se dice que la función f es *no creciente* en un intervalo $[a, b]$ de su dominio, si para $x_1, x_0 \in [a, b]$ se cumple que si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Y si se cumple $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, entonces f es *estrictamente decreciente* o solo se dice *decreciente.*

Definición 2.11. Se dice que una función f es monótona si cumple con **i)** o **ii).**

2.1.10. Función acotada

Definición 2.12. Se dice que una función f : A ⊂ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada sobre un conjunto A ⊂ Dom(f), si existe un número real M > 0 tal que $|f(x)| \leq$ M, para todo $x \in$ A.

2.1.11. Conjunto medible

Definición 2.13. Sea X un conjunto. Una familia no vacía A de subconjuntos de X diremos que forma un $\sigma - \acute{a}lgebra$ si satisface las siguientes condiciones:

a. $\emptyset \in A,\ \mathrm{X} \in A$.

b. $Si\ C \in A$, entonces $C^c \in A$.

c. $Si\ \ C_1, C_2, \ldots \in A$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in A,\ n \in \mathbb{N}$.

Llamaremos espacio medible al par (X, A), donde X es un conjunto y A es una $\sigma - \acute{a}lgebra$ de X.

Los conjuntos medibles son los elementos de A; es decir, los conjuntos de la familia que llamamos “A" y que es un $\sigma - \acute{a}lgebra$.

2.1.12. Medida exterior de Lebesgue

Definición 2.14. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se define la medida exterior de Lebesgue de A como el conjunto:

$\mu^*(A) = \acute{\imath}nf\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n): A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$, donde $I_n = (a_n, b_n)$, e $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos abiertos; "ℓ " es longitud.

2.1.13. Conjunto de medida nula

Un subconjunto A de ℝ se dice que tiene medida cero si para cada Ɛ > 0 existe un recubrimiento de A formado por una colección numerable de intervalos abiertos cuya suma de medidas es menor que Ɛ.

Todo conjunto numerable es un conjunto de medida nula; pero existen conjuntos de medida nula no numerables; por ejemplo, el conjunto de Cantor.

Definición 2.15. (Lages Lima, E.vol2,1995, p.354). Un conjunto A ⊂ ℝ tiene medida cero (nula) si para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección numerable de I_i, con $i = 1,2,\ldots\infty$ de intervalos abiertos tales que

A $\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \leq \varepsilon$. "$\ell$" denota la longitud de cada I_i.

Observación: los conjuntos numerables tienen medida cero.

Definición 2.16. Cuando una función es continua en todo su dominio excepto en algunos puntos contables, se dice que la función es continua casi-siempre (c.c.s).

2.1.14. Función de medida nula

Definición 2.17: Sea j ⊂ ℝ y f : j⟶ ℝ una función, se dice que f es una función de medida cero (función nula) si el conjunto E = { x ϵ j : $f(x)$ ≠ 0} es un conjunto nulo.

2.1.15. Convergencia puntual de funciones

Definición 2.18. Decimos que la sucesión de funciones $f_n: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ converge puntualmente a $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in A$. Es lo mismo decir:

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in A$.

2.1.16. Convergencia uniforme de funciones

Definición 2.19. Se dice que la sucesión de funciones $f_n: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ si $\lim_{n\to\infty} sup\{|f_n(x) - f(x): x\epsilon A|\} = 0$.

2.1.17. Límite y continuidad de funciones

Definición 2.20. Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto de números reales, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuyo dominio es A, y $a \epsilon A'$ un punto de acumulación del conjunto A. Se dice que el número real L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a si para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede obtener $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in A\ y\ 0 < |x - a| < \delta$.
(x próximo a a,no puede tomar a)

Simbólicamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \equiv \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0; x\epsilon A; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definición 2.21. Una función f es continua en $a \in Dom(f)$ sí y solo si para todo ε > 0 , existe δ > 0 tal que si | $x - a$ | < δ, entonces | $f(x) - f(a)$| < ε.

Similarmente, en términos de vecindades:

f es continua en a si y solo si para cada x que se aproxima a a, $f(x)$ se aproxima a $f(a)$.

Esto quiere decir que: Para todo ε > 0, existe δ > 0, tal que si $x \epsilon V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \epsilon V_\varepsilon[f(a)]$.

2.1.18. Derivada de funciones reales

Definición 2.22. La derivada de una función $f: U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tal que este límite existe y es finito.

2.1.19. Diferenciabilidad

Definición 2.23. La aplicación $f: U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el abierto U, se dice diferenciable en el punto $a \in U$, si existe una aplicación lineal $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ talque

$f(a+h) - f(a) = T.h + r(h)$, donde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$.

2.1.20. Espacio Métrico

Definición 2.24. Un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto arbitrario y d es una función d: X x X$\longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para cualquier $x, y, z \in$ X, se tiene:

i. $d(x,y) \geq 0$;

ii. $d(x,y) = 0 \iff x = y$;

iii. $d(x,y) = d(y,x)$;

iv. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

En este caso, se dice que d es una métrica para X. También se dice que d es una *función distancia*.

2.2. Teorema. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Demostración. (Ver en [9]).

2.3. Teorema. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

i) $|x+y| \geq |x| - |y|$.

ii) $|x-y| \geq |x| - |y|$.

iii) $|x-y| \leq |x| + |y|$.

Demostración. (Ver en [9]).

2.1.21. Funciones uniformemente continuas

Definición 2.25. Sea $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío y f : $\mathrm{A} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una función real definida en A . Se dice que f es uniformemente continua en A si $\forall\ \varepsilon > 0$,

$\exists\ \delta > 0$ (que solo depende de ε) tal que: $si\ x, y\ \in \mathrm{A}$, con $|x - y| < \delta$, entonces

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

2.1.22. Función escalonada

Definición 2.26. (Figueroa R.,1916, p.421). Una función f : [a, b] $\rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo compacto [a, b], se llama función escalonada si existe una partición p $=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de [a, b] tal que f es constante en cada subintervalo abierto, por ejemplo $f(x) = c_k$, si $x \in (x_{k-1}, x_k)$.

2.1.23. Función característica o indicador

Definición 2.27. Dado un subconjunto E medible contenido en X. La función característica $\mathbf{1}_E$ toma valores 1 para elementos pertenecientes a E y 0 para el resto.

$$\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in E \\ 0 & si\ x \notin E \end{cases}$$

2.1.24. Conjunto de Cantor

Al intervalo [0,1] de $\mathbb{R}$, lo dividimos en tres partes iguales y de esta manera se obtendrá tres subintervalos que son: [0,1/3], (1/3,2/3), [2/3,1]. Luego extraemos el subintervalo abierto que está en medio. A la unión de los subintervalos que quedan la llamamos C_1. Con cada subintervalo que queda hacemos lo mismo; y luego hacemos el mismo proceso y se obtiene:

$[0,1/3] \cup [2/3,1] = C_1$

$[0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1] = \mathrm{C}_2$

$$\vdots$$

$$\mathrm{C}_\mathrm{k}\ ,$$

se sigue indefinidamente.

El conjunto de cantor, C, se obtiene y se define, interceptando todos los conjuntos C_k.

Es decir, $\mathrm{C} = \bigcap\{\mathrm{C}_\mathrm{k} : k \in \mathbb{N}\}$.

2.4. Teorema. (Principio de encaje de Cantor). Si $I_n = [a_n, b_n]$, con $n = 1,2, \ldots$, es una sucesión de intervalos cerrados que verifican $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots I_n \supset I_{n+1} \ldots$, entonces existe un número real x que está en cada intervalo.

Ver demostración en [3].

Definición 2.28. El conjunto de los números racionales es numerable.

Todo lo abordado en este capítulo fue extraído de [2] [9] [7].

CAPITULO III

Integral de Riemann y el criterio de Darboux

La integral de Riemann, que apareció en el año 1850, es utilizada como herramienta fundamental en la ciencia moderna. Esta integral, además de ser sencilla, tiene un amplio espacio de aplicaciones en la vida real; pero para investigaciones avanzadas resulta inadecuada; pues tiene limitaciones. Riemann hace un casi imperceptible cambio a la integral de Cauchy, pero que este cambio mejora aquella notablemente; escoge un punto arbitrario de los subintervalos para su etiqueta a comparación de Cauchy, que lo hacía en el extremo.

El criterio de Darboux no usa etiquetas. Como las sumas de Reimann, Darboux utiliza la suma superior y la inferior para definir su integral. Una función es Darboux integrable cuando la integral superior y la inferior son iguales. La integral de Riemann y la de Darbuox son equivalentes.

En esta tesis se trabajará para funciones $f \geq 0$.

Este capítulo esencialmente está basada en [11][2][10] .

3.1.1. Integral de Newton

Definición 3.1. Una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que es Newton integrable sobre $[a, b]$, si existe una función diferenciable F: $[a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Siendo $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; y existen los límites laterales $F(a^+)$ y $F(b^-)$.

Definición 3.2. Sea f Newton integrable sobre $[a, b]$, la integral de Newton de f se define como: $(N)\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$.

La integral de Newton se aplica también a funciones no acotadas e intervalos no acotados.

A esta fórmula se le llama fórmula de Newton-Leibniz y el problema de recuperar la función original de una función derivada se denomina “problema de las primitivas”.

Si la función F es derivable y $F' = f$, entonces F se llama antiderivada de f, o primitiva.

Se observa que la función F no es la única primitiva, sino que F+c también es una primitiva, con “c” una constante.

3.1.2. Integral de Cauchy

Definición 3.3. Sea f: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, la integral de f definida como $\int_a^b f dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).(x_k - x_{k-1})$ se llama la integral de Cauchy.

Donde P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es cualquier subconjunto finito de $[a, b]$ y $a = x_0 < x_1, \dots < \dots < x_n = b$, y donde II P II = máx{ $x_k - x_{k-1}$: k = 1,2,3,…,n }.

Obsérvese que Cauchy se restringe a la clase de funciones continuas.

3.1.3. Particiones

Definición 3.4. Una partición del intervalo $[a, b]$ es un subconjunto o colección finita de puntos P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ y $a \in$ P, $b \in$ P; tal que $a = x_0 < x_1, \dots < \dots < x_n = b$.

Los puntos de P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dividen al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos no superpuestos, o se dice también *casi-disjuntos*. $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_2 = [x_1, x_2]$, $\dots, I_n = [x_{n-1}, x_n]$ tal que si I_j, I_k abiertos, es decir, sin los puntos extremos, $I_j \cap I_k = \emptyset$, $k = j$+1, a los cuales se les denomina intervalos asociados a P. Lo que es lo mismo decir: a lo más, los I_n pueden tener en común los puntos extremos.

El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $x_i - x_{i-1}$, se llamará i-ésimo intervalo de la partición P. Recordemos que $x_{i-1} < x_i$ para todo $i = 1,2,3, \dots, n$.

Se observa que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a = \ell([a,b])$, donde "$\ell$" denota la longitud.

Cuando nos refiramos a una partición P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ no se hará la distinción entre los puntos de P de los intervalos de P asociados.

A cada partición P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ le daremos un número real al que se nombrará como "norma de P", definida como:

II P II= máx $\{ x_k - x_{k-1} : k = 1,2,3, \dots, n \}$,

la cual es la longitud máxima de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$; es decir, el subintervalo de tamaño más grande. Está claro que los subintervalos pueden tener diferentes longitudes.

Sean P y Q, dos particiones del intervalo $[a, b]$. Se dice que Q refina a P cuando P ⊂ Q. Si se añade un nuevo punto, entonces estamos refinando.

Para la integración de Riemann y Henstock-Kurzweil, primero se necesita dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, llamados subintervalos de la partición de $[a, b]$.

Por ejemplo: si hacemos $a = 0$ y $b = 4$, entonces tenemos el intervalo [0,4]. Podemos hacer una partición dividiéndola en cuatro subintervalos de igual longitud:

P = {[0,1], [1,2], [2,3],[3,4]}. Vemos que esta es una colección finita de subintervalos cerrados y la unión de estos cuatro subintervalos es [0,4]. Por lo tanto, esto es una partición. Otra partición podría ser

P = {[0, 1/4], [1/4,4]}; ya que es una colección finita de subintervalos cerrados, cuya unión es [0,4].

El siguiente paso es considerar un punto t_i en cada subintervalo. Estos puntos serán las etiquetas. Estas etiquetas, junto con nuestra partición, formarán una colección de pares ordenados que se llamará *partición etiquetada*.

3.1.4. Etiquetas

Definición 3.5. Cualquier colección finita T= $\{ t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de puntos de $[a, b]$, tal que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, con i = 1,2,…,n, se llama conjunto de etiquetas para los intervalos asociados a la partición P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Definición 3.6. El conjunto de pares ordenados P_T = $\{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : i = 1,2,3, \dots n\}$, donde P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ y T= $\{ t_1, t_2, \dots, t_n\}$ es un conjunto de etiquetas de los intervalos de P, se llamará *partición etiquetada de* $[a, b]$.

Definición 3.7. Dado δ > 0; una partición etiquetada

P_T = $\{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : i$ = 1,2,3,…,$n\}$ se dice que es δ-fina, si para cada $i \in \{$ 1,2,3,…,n $\}$ $[x_{i-1}, x_i] \subseteq (t_i - \delta,\ t_i + \delta)$. Esto significa que la longitud de cualquier subintervalo de la partición etiquetada, siempre es menor o igual a la longitud de $(t_i - \delta,\ t_i + \delta)$.

3.1.5. La integral de Riemann

Definición 3.8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y P_T = $\{t_i, [x_{i-1}, x_i]\}$, i = 1,2, … n, una partición etiquetada de $[a, b]$; la suma de Riemann se define como

$\mathcal{S}(f, P_T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).(x_i - x_{i-1})$.

Definición 3.9. Una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ si existe un número A $\in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ tal que si P_T es una partición etiquetada de $[a, b]$ con $\|P_T\| < \delta_\varepsilon$, entonces

$$\left| \mathcal{S}(f, P_T) - A \right| < \varepsilon.$$

La integral de Riemann de f, se denotará por

$$A = (R)\int_a^b f dx, \text{ o simplemente } A = \int_a^b f dx.$$

El valor exacto de la integral se da en el límite:

Una función f: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ si

$$\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).(x_i - x_{i-1}).$$

En lo que sigue denotaremos, si hubiera caso, con R$[a, b]$ a la clase o conjunto de todas las funciones Riemann integrables sobre $[a, b]$.

Una función no acotada no es Riemann integrable.

Dada la función acotada f: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, denotaremos como

m = inf $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y M = sup$\{ f(x): x \in [a, b]\}$.

Definición 3.10. Sea P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, y $\{ \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \dots, \mathrm{I}_n\}$ conjunto de intervalos de P:

i) El ínfimo de f en el i-ésimo intervalo de P se define como

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x).$$

ii) El supremo de f en el i-ésimo intervalo de P se define como

$$M_i = \sup_{x \in I_i} f(x).$$

La expresión $\omega_i = M_i - m_i$ indica la oscilación de f en el i-ésimo intervalo de P.

En ocasiones resulta más práctico considerar las así llamadas sumas de Darboux para evaluar si una función dada es o no Riemann integrable. Tales sumas no requieren el uso explícito de etiquetas.

3.1.6. Criterio de Darboux

Definición 3.11. Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, y P = $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ la partición de $[a, b]$:

i) Suma superior se define como

S(f, P) = $\sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1})$.

ii) Suma inferior se define como

s(f, P) = $\sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i - x_{i-1})$.

Para cualquier partición P se define:

$m(b - a)$ ≤ s(f, P) ≤ S(f, P) ≤ $M(b - a)$, donde los números "S" y "s" son valores aproximados por exceso y por defecto respectivamente del área de la región limitada por el gráfico de $f\ (x) \geq\ 0$, $\forall x \in [a, b]$.

3.1. Lema. (Lages Lima E.,V1,1997, p.139). *Sean $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, P y Q dos particiones de $[a, b]$. Si Q es más fina que P, entonces*

s(f , P) ≤ s(f, Q)

S(f , P) ≥ S(f, Q).

Demostración.

Añadiendo a P un punto x_0 se define Q = P ∪ { x_0 }; donde x_0 estaría en algún subintervalo; esto es, $x_{i-1} < x_0 < x_i$.

Sean $M_1\ y\ M_2$ los supremos de f en los intervalos $[x_{i-1}, x_0\ ]\ y\ [x_0\ , x_i]$ respectivamente, es decir:

$M_1 = \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_0\ ]\ \}$ y $M_2 = \sup\{f(x): x \in [x_0\ , x_i]\}$

Como $M_1 \leq M_i\ \ y\ \ M_2 \leq M_i$; tomando $x_i - x_{i-1} = (x_i - x_0\ ) + (x_0\ - x_{i-1})$, se tiene:

$$M_i(x_i - x_{i-1}) = M_i((x_i - x_0\ ) + M_i\ (x_0\ - x_{i-1}) \geq\ M_1((x_i - x_0\ ) + M_2\ (x_0\ - x_{i-1}),$$

entonces: $M_i(x_i - x_{i-1}) \geq M_1((x_i - x_0) + M_2(x_0 - x_{i-1})$; luego

S(f, P) – S(f, Q)= $\sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1}) -$ [$\sum_{i=1}^{n-1} M_i.(x_i - x_{i-1})$ + $[M_1(x_i - x_0) + M_2(x_0 - x_{i-1})]$],luego

S(f, P) – S(f, Q) $= M_i(x_i - x_{i-1}) - [M_1(x_i - x_0) + M_2(x_0 - x_{i-1})] \geq 0,$

lo que implica que: S(f , P) ≥ S(f,Q).

Ahora, supongamos que Q contiene ya no uno, sino k puntos más que P. Por esta suposición tendríamos un número finito de particiones que sean Q_1, Q_2,…,Q_{k-1} de $[a, b]$.

Notemos que la partición Q contiene a todas, así:

P ⊆ Q_1 ⊆ Q_2…⊆ Q_{k-1} ⊆ Q. Cada partición se obtiene añadiendo un punto al anterior.

Por lo tanto: S(f, P) ≥ S(f,Q_1) ≥ S(f,Q_2) ≥… ≥ S(f,Q_{k-1}) ≥ S(f, Q).

Esto es: S(f, P) ≥ S(f, Q).

Ahora probemos el caso s(f, P) ≤ s(f, Q); que se desarrolla similarmente:

Sean m_1 y m_2 los ínfimos de f en los intervalos $[x_{i-1}, x_0]$ y $[x_0, x_i]$ respectivamente, es decir:

$m_1 = \inf\{f(x): x\epsilon[x_{i-1}, x_0]\}$ y $m_2 = \text{ínf}\{f(x): x\epsilon[x_0, x_i]\}$

como $m_i \leq m_1$ y $m_i \leq m_2$, tomando

$x_i - x_{i-1} = (x_i - x_0) + (x_0 - x_{i-1})$, se tiene

s(f , Q) – s(f, P) = $m_1(x_i - x_0) + m_2(x_0 - x_{i-1}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$, lo que implica que s($f$, P) ≤ s($f$, Q).

Ahora, veamos cuando Q contiene k puntos más que P, se hace igual que el anterior, en la suma superior; por lo tanto: s(f, P) ≤ s(f, Q). □

3.2. Corolario. *Si f :$[a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces se cumple que s(f, P) ≤ S(f, Q), para cualesquier particiones P y Q.*

Demostración.

Para cualquier partición P, tenemos

s(f, P) $\leq$ S(f, P)

s(f, P) $\leq$ S(f, P) $\leq$ S(f, Q),

s(f, P) $\leq$ S(f, Q) para P más fina. Por el lema 3.1. $\square$

Definición 3.12. La integral superior e inferior de una función acotada f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ se define respectivamente como:

$\overline{\int} f(x)dx$ = ínf{S(f, P) : P partición}, $x \in [a, b]$

$\underline{\int} f(x)dx$ = sup{s(f, P) : P partición}, $x \in [a, b]$.

Para todo $x \in [a, b]$, se cumple que:

$$\underline{\int} f(x)dx \leq \overline{\int} f(x)dx$$

3.3. Corolario. *Dada la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$m\,(b - a) \leq \underline{\int} f(x)dx \leq \overline{\int} f(x)dx \leq M(b - a).$

Demostración.

Como $m \leq M$ entonces $m(b - a) \leq M(b - a)$.

Por otra parte:

Supongamos que A es el conjunto de valores de s(f, P) para k particiones P cada vez más finas, y B sea el conjunto de valores de S(f, P) para las mismas particiones P.

Esto es: A = { x: x real que indica el área de s(f, P) para cada partición P} y

B = { y : y área para S (f, P) para las mismas particiones P}

Entonces si $x \in$ A e $y \in$ B se tiene que $x \leq y$, para todo x, y; donde supA $\leq$ ínfB.

Por corolario 3.2, se tiene que para toda partición P tenemos s(f, P) $\leq$ S(f, P).

Como los valores de s(f, P) para toda partición P son menores o igual a los de S(f, P) para las mismas particiones P, entonces sup s(f, P) $\leq$ ínf S(f, P),

Pero sup s(f, P) = $\underline{\int} f(x)dx$, e ínf S(f, P)= $\overline{\int} f(x)dx$, luego

$\underline{\int} f(x)dx \leq \overline{\int} f(x)dx$

Ahora: como $m \leq m_i \leq M_i \leq M$; donde $m_i\ y\ M_i$ son para cada intervalo de la partición, luego entonces, por definición de integral superior e inferior:

$m(b-a) \leq \underline{\int} f(x)dx \leq \overline{\int} f(x)dx \leq M(b-a)$. $\square$

Definición 3.13. Se dice que la función acotada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, es integrable sobre $[a,b]$ si: $\underline{\int} f(x)dx = \overline{\int} f(x)dx$;

Este valor se llama integral de Riemann dada por Darboux, y está dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int} f(x)dx = \overline{\int} f(x)dx.$$

Esta definición dada por Gastón Darboux en 1875 es equivalente a la de Riemann.

Definición 3.14. Se dice que la función acotada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, es integrable sobre $[a,b]$ si: sup s(f, P) = ínf S(f, P).

No cualquier función acotada es integrable Riemann. Las aproximaciones por exceso y defecto mejoran cuando se va refinando la partición P.

Geométricamente decimos que cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, la existencia de $\int_a^b f(x)dx$ significa que la región bajo la curva f es medible; esto es, existe el área de esta región. Y si la función f es continua en todo su dominio exceptuando en algunos puntos (puntos de discontinuidad) cuya medida del conjunto de estos puntos es cero, entonces la función sigue siendo integrable. Toda función continua es integrable Riemann.

En el caso general, se tiene el área externa $\overline{\int} f(x)dx$ y el área interna $\underline{\int} f(x)dx$ que pueden resultar diferentes.

3.4. Teorema. (Riemann-Darboux). *Sea* $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) f *es integrable Riemann, i.e.,* $f \in R[a, b]$

b) Para todo $\mathcal{E} > 0$*, existen particiones P y* Q *de* $[a, b]$ *tal que*

$$|S(f, Q) - s(f, P)| < \mathcal{E}.$$

c) Para todo $\mathcal{E} > 0$*, existe una partición P de* $[a, b]$ *tal que*

$$|S(f, P) - s(f, P)| = osc \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \mathcal{E},$$

donde osc significa 'oscilación'.

Esto es una condición inmediata para la integrabilidad de f*.*

Demostración.

a)$\Rightarrow b)$

Supongamos que P sea una cierta cantidad de particiones de $[a, b]$; luego, para cada partición hay un valor de s(f, P) y otro de S(f, P), es decir, suma inferior y superior, respectivamente.

Supongamos que A sea el conjunto de los valores de s(f, P) producidas para cada partición, y B el de las sumas superiores S(f, P). Entonces, por corolario 3.2, se tiene que

s (f, P) ≤ S(f, P), para todo $x \in$ A ,$y \in$ B, con $x \leq y$,de donde sup A ≤ ínf B.

Como f es integrable Riemann (por a)), entonces por definición 3.14., se tiene que supA = infB, entonces se cumple que ∀ ε existe $x \in$ A ,$y \in$ B tal que $y - x < \varepsilon$, de donde cumple b),

$|S(f, Q) - s(f, P)| < \mathcal{E}$;

b) ⇒ c)

Como $\left| S(f, Q) - s(f, P) \right| < \varepsilon$; sea $\check{P}$ = (P ∪ Q) una partición que refina a ambos, entonces por el lema(3.1), se tiene $s(f, P) \leq s(f, \check{P}) \leq S(f, \check{P}) \leq S(f, P)$, es decir, para una partición más fina la suma inferior no disminuye y la suma superior no aumenta. Por lo que, como $s(f, \check{P}) \leq S(f, \check{P})$, se tiene que

$S(f, \check{P}) - s(f, \check{P}) < \varepsilon$.

i.e., $S(f, \check{P}) - s(f, \check{P}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1})$.

c) ⇒ a) Por otro lado, como existen $x \in$ A, $y \in$ B tal que $y - x < \varepsilon$, entonces

supA = infB. Por lo tanto, *f* es integrable. □

3.5. Teorema. (Ocejo, M. A. ,2008, p.13). *Si $f \in R([a,b])$, entonces f es acotada sobre $[a,b]$.*

Demostración.

Supongamos que $f \in \mathrm{R}([a,b])$ tiene integral A, y no es acotada. Como

$f \in \mathrm{R}([a,b])$ existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición etiquetada de $[a,b]$ con

$\| \mathrm{P} \| < \delta$, entonces $| \boldsymbol{S}(f, \mathrm{P}) - A | < 1$.

Sumando $| A |$ a esta última expresión $| \boldsymbol{S}(f, \mathrm{P}) - A | + | A | < 1 + | A |$……….(I)

El teorema 2.3 ii), dice $|\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P})| - |A| \leq |\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P}) - A|$. Le sumamos a ambos miembros $|A|$.

$|\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P})| \leq |\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P}) - A| + |A| < 1 + |A|$, este último es por (I); entonces

$|\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P})| < 1 + |A|$……………………………………..(*)

Sea $\mathrm{P} = \{[x_{i+1}, x_i]: i = 1,2, \dots, n\}$ una partición tal que $\| \mathrm{P} \| < \delta$. Como f no es acotada en $[a,b]$, luego existe algún intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ que pertenece a P tal que en ese intervalo f no es acotada. De las particiones, P, elegimos etiquetas para cada subintervalo de la siguiente manera:

Para $i \neq k$, sean las etiquetas los $t_i = x_i$.

Como $| x_k - x_{k-1} |$ es la magnitud del intervalo donde f no es acotada, luego

$| f(t_k).(x_k - x_{k-1}) |$ puede resultar muy grande, entonces escogemos para k una etiqueta t_k tal que:

$|f(t_k)(x_k - x_{k-1})| > 1 + | A | + |\sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})|$..................(1)

Por $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \geq |\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|$, teorema 2.3.i), tenemos

$| \boldsymbol{S}(f, P) | = | f(t_k)(x_k - x_{k-1})| + |\sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1}| \geq$

$| f(t_k)(x_k - x_{k-1})| - |\sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1}| > 1 + | A |$, por (1)

Entonces, $| \boldsymbol{S}(f, P) | > 1 + |A|$; lo cual contradice nuestra suposición (*); lo que implica que f está acotada. □

3.1.7. Función de Dirichlet

Definición 3.15. La función $\chi_Q: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Д(x) = \chi_Q = \begin{cases} 1 & si\ x \in Q \\ 0 & si\ x \notin Q, i.e\ \ x \in \mathbb{I}\ , \end{cases}$$

se llama *función de Dirichlet*.

3.6. Teorema. (Brito, W., 2011, p.414). *La función de Dirichle* $Д(x) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es acotada, pero no es integrable Riemann.*

Demostración.

a) Utilizaremos la definición de Darboux.

Se sabe que para cualquier par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$; con $x < y$, existen $r \in Q$, $x < r < y$.

Sea P = $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partición de $[0, 1]$. Por definición de función de Dirichlet, se tiene que: si $x \in [0, 1]$ es irracional, entonces Д(x) = 0; y si $x \in [0, 1]$ es racional, entonces Д(x) = 1.

Como 0 < 1, entonces podemos hacer que $m = 0\ y\ M = 1$ para cada intervalo de la partición P, es decir:

m_k= ínf{ Д (x) : $x \in [x_{k-1}, x_k]$} = 0

M_k = sup{ Д (x) : $x \in [x_{k-1}, x_k]$} = 1,

luego por definición de suma inferior y superior, se tiene:

s(Д, P) = $\sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i - x_{i-1})$= $\sum_{i=1}^{n}(0).(x_i - x_{i-1})$ = 0

S(Д, P) = $\sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1})$= $\sum_{i=1}^{n}(1).(x_i - x_{i-1})$ = 1.

Luego, por definición de integral inferior y superior, definición 3.12, se tiene que

$\underline{\int}$Д $(x)dx$= sup{s(Д, P)} = 0 y $\overline{\int}$Д $(x)dx$ = ínf{S(Д , P)} = ínf{1} = 1,

con $x \in [0, 1]$.

Observamos que $\underline{\int}$Д $(x)dx \neq \overline{\int}$Д $(x)dx$, lo cual implica que Д no es integrable; pues debe cumplir definición 3.13, $\underline{\int}$Д $(x)dx = \overline{\int}$Д $(x)dx$, para que sea Riemann integrable. □

b) Ahora, usando Criterio de Cauchy.

En efecto:

Tomando Ɛ = 1/4. Sean Q y P dos particiones de [0, 1], de modo que: si Q es una partición cuyas etiquetas son números racionales, entonces $\boldsymbol{S}$(Д, Q) = 1, mientras que si P es una partición cuyas etiquetas son números irracionales entonces $\boldsymbol{S}$(Д, P) = 0.

Puesto que se puede tomar tales particiones con normas suficientemente pequeñas, y como entre dos números reales x e y, con $x < y$ siempre existen números racionales e irracionales no importando cuán próxima estén x e y; podemos hacer $\|Q\| < \delta$ y $\|P\| < \delta$ además, como $\mathbb{R}$ es ordenado, concluimos que la función de Dirichlet no es Riemann integrable puesto que por el criterio de Cauchy se cumple:

$|\boldsymbol{S}(Д, Q) - \boldsymbol{S}(Д, P)| = |1 - 0| = 1 > ¼ = \varepsilon$. Lo cual contradice a la definición de Cauchy al respecto. Pues debería ser $|\boldsymbol{S}(Д, Q) - \boldsymbol{S}(Д, P)| < \varepsilon$. □

Nota: El criterio de Cauchy es el siguiente:

Una función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable en $[a, b]$ sii para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si Q, P son particiones etiquetadas de $[a, b]$ con $\|Q\| < \delta_\varepsilon$; $\|P\| < \delta_\varepsilon$, entonces $|\boldsymbol{S}(h, P) - \boldsymbol{S}(h, Q)| < \varepsilon$.

CAPITULO IV

Integral de Henstock-Kurzweil

En este capítulo se desarrolla la integral de Henstock-Kurzweil, que es la parte principal del trabajo. Esta integral se obtiene haciendo una ligera modificación a la definición de la integral de Riemann. Ahora, $\delta > 0$ ya no es un escalar sino una función con valores positivos. No olvidemos que la longitud de la base de los rectángulos (rectangulitos) cuyas áreas sumamos para hallar el área bajo la curva(suma total), suma en el límite, es δ o menores que esta. A cualquiera de las deltas (números muy pequeños) podemos llamarla 2δ, según nos convenga para la operación; por ejemplo, cuando nos convenga hacer bolas o entornos. De esta manera surge una nueva teoría de integración denominada *Integral de Henstock-Kurzweil,* o, *generalización de la integral de Riemann*.

Este capítulo se basa en [2][4][6][10], principalmente.

4.1.1. Particiones etiquetadas

Para simplificar, a menudo se eligen como etiquetas los puntos finales, izquierdo o derecho, de los subintervalos $[x_{i-1},\ x_i\ ]$.

Así para $[a, b]$ = [0, 4], la partición puede ser P = {[0,1], [1,2], [2,3] [3, 4]} en la cual se puede escoger las etiquetas t_i como los puntos de la izquierda. Entonces, la partición etiquetada que obtenemos al hacer esto es: P_T = {(0, [0,1]), (1, [1,2]), (2, [2,3]), (3, [3,4])}. Ya sabiendo que los subintervalos forman una partición de [0,4] y además 0 ∈ [0,1], 1 ∈ [1,2], 2 ∈ [2,3] y 3 ∈ [3,4], por lo que P_T es una partición etiquetada de [0,4].

También se podría elegir los puntos en medio de los subintervalos para que sean las etiquetas o en cualquier punto de un subintervalo.

4.1.2. La integral de Henstock-Kurzweil

Para la definición de la integral de Henstock-Kurzweil, en lugar de que δ sea una constante, ahora será una función a la que denotaremos a veces con $\mathcal{f}$. Este cambio no significativo trae muchas ventajas como se verá más adelante. La única restricción a la función $\mathcal{f}$ es que debe ser estrictamente positiva, diríamos que obviamente. Dicha función se llamará *gauge* (indicador, medidor). De aquí en adelante, δ-gauge o $\mathcal{f}$ o $\delta(t)$, serán indistintos.

4.1.3. Función Gauge

Definición 4.1. Una función $\mathcal{f}$: $[a,b] \longrightarrow (0,+\infty)$ tal que $\mathcal{f}(x) > 0$, $\forall x \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]$, se llama *gauge*.

Definición 4.2. (Brito,W.,2011,p 410). Sea $\delta : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva, una partición etiquetada $P_T = (t_i\,,\ [x_{i-1},x_i])_{i=1}^{n}$ de $[a,b]$ se llama δ-fina, o subordinada a δ, si para cada $i \in \{1,2,3,\dots,n\}$, se cumple que:

$t_i \in [x_{i-1},x_i]) \subseteq ((t_i - \delta(t_i),\ t_i + \delta(t_i)).$

Nota 1:

La función δ se dice que sea estrictamente positiva, pero no se dice nada sobre su continuidad.

Nota 2:

Como ejemplos de funciones gauge, podemos tener $\mathcal{f}(x) = \delta(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}^+$. También podría considerarse la función $\mathcal{f}(x) = \cos x$ que es un gauge en el intervalo [o, $\pi/4$], porque es estrictamente positiva en ese intervalo.

4.1. Lema.(Dijk van,E.,2014, p.6). *Sean* I_1 *e* I_2 *intervalos que tienen como máximo un punto en común. Si* I_1 *e* I_2 *son* $\mathcal{f}$*-finos, entonces la unión* $I = I_1 \cup I_2$ *es* $\mathcal{f}$*-fina.*

Demostración.

Si I_1 e I_2 son $\mathcal{f}$-finos, entonces existen particiones etiquetadas(para I_1 e I_2) P_1: = {$(t_i,\ [x_{i-1}, x_i]$: $1 \leq i \leq n\}$ y P_2: = $\{t_j,\ [x_{j-1}, x_j]$: $1 \leq j \leq m\}$ respectivamente que son $\mathcal{f}$-finas, tales que $0 \leq x_i - x_{i-1} \leq \mathcal{f}(t_i)$ y $0 \leq x_j - x_{j-1} \leq \mathcal{f}(t_j)$ para todo $i = 1,2,..., n$; y $j = 1,2,..., m$. ($P_T = P_{T1} \cup P_{T2}$)

Ahora, uniendo las particiones etiquetadas y la llamamos $P = P_1 \cup P_2$, entonces la longitud de cada subintervalo sigue siendo menor que el valor de $\mathcal{f}$ en la etiqueta correspondiente, por lo que P es $\mathcal{f}$-fina. Como P_1 y P_2 son particiones etiquetadas, entonces $P = P_1 \cup P_2$ es una partición etiquetada de $I = I_1 \cup I_2$. Por lo tanto, para $I = I_1 \cup I_2$ existe una partición etiquetada que es $\mathcal{f}$-fina y así $I = I_1 \cup I_2$ es $\mathcal{f}$-fino. □

El lema que viene a continuación es muy importante para lo que se desarrollará en este capítulo.

4.2. Lema de Cousin. (Dijk van,E.,2014, p.7). *Si* $\delta: [a, b] \to (0, \infty)$ *es un gauge y* $a \leq c < d \leq b$, *entonces existe una partición* δ*-fina de* $[c, d]$. *($\mathcal{f} = \delta$).*

Lo que es lo mismo:

Si $\mathcal{f}$ *es un gauge en* $[a, b]$, *entonces existe una partición etiquetada de* $[a, b]$ *que es* $\mathcal{f}$*-fina*

Demostración.

Por contradicción:

Supongamos que en $[a, b]$, no existe partición etiquetada δ-fina.

Sea $\mathrm{I} = [a, b]$, tal que d = $(a + b)/2$ es el punto medio de I . Entonces, de los intervalos $[a, d]$ y $[d, b]$ al menos uno de ellos $[a, d]$ o $[d, b]$, no tiene ninguna partición etiquetada δ-fina.

Denotemos con $\mathrm{I}_1 = [c_1, k_1]$ al intervalo que no tiene ninguna partición etiquetada δ-fina. Ahora, sea $d_1 = (c_1 + k_1)/2$ punto medio de $[c_1, k_1]$. Entonces se tiene los intervalos $[c_1, d_1]$ y $[d_1, k_1]$. Haciendo lo mismo que el paso anterior, decimos al menos uno de los dos $[c_1, d_1]$ o $[d_1, k_1]$, no tiene ninguna partición etiquetada δ-fina.

Elegimos otro intervalo $\mathrm{I}_2 = [c_2, k_2]$ que no posee partición etiquetada δ-fina alguna. Haciendo el mismo proceso anterior, sea d_2 punto medio de I_2 … infinitamente.

De esta manera se consigue una sucesión $\{\mathrm{I_n}\}_{n=1}^{\infty}$ de intervalos no δ-finas de modo que se obtiene intervalos encajados

$$\mathrm{I} \supseteq \mathrm{I}_1 \supseteq \mathrm{I}_2 \supseteq \mathrm{I}_3 \supseteq \ldots. \supseteq \mathrm{I_n} \supseteq \mathrm{I_{n+1}} \supseteq \ldots,$$

tal que la longitud $m(\mathrm{I_n}) \cong 0$.

Por el Principio de encaje de Cantor, teorema 2.4, existe un único $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{I}$ tal que

$\cap_{n=1}^{\infty} \mathrm{I_n} = \{\mathrm{x}_0\}$

Hasta aquí este último $\mathrm{I_n}$ no es δ-fina……………… (*)

Como $\delta(x) > 0$, por propiedad de Arquímedes, teorema 2.1, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que la longitud $m(\mathrm{I_n}) = \frac{b-a}{2^n} < \delta(x)$ … … … … … … … … … … … … … … (¡)

Por (¡) vemos que $\mathrm{I_n} \subseteq (\mathrm{x}_0 - \delta(\mathrm{x}_0), \mathrm{x}_0 + \delta(\mathrm{x}_0))$, por lo tanto el par $(\mathrm{x}_0, \mathrm{I_n})$ es una partición etiquetada δ-fina. Lo cual contradice a (*).

Por consiguiente la suposición es falsa.

x_0 es la etiqueta de esta partición.

Por lo que $[a, b]$ posee una partición δ-fina. □

El centro o la esencia de lo que nos dice el lema de Cousin, que es equivalente al axioma del supremo y a la propiedad arquimediana, es que agarra un subintervalo conveniente, o toda la partición de la definición de Riemann y lo vuelve a partir hasta obtener un subintervalo, o subintervalos, cuyo tamaño sea menor que un número muy pequeño que podemos llamar un Ɛ; es decir, un subintervalo de longitud prácticamente cero. Estos subintervalos, de longitud cero, se colocan como entorno de un punto en donde la función f a integrar no es continua o no es acotada; es decir, en aquellos puntos donde la integral de Riemann tenga dificultades o impedimentos para integrar. O sea, si en un punto *"a"* del domino de una función f, esta no es acotada, entonces hacemos la partición aplicando el lema de Cousin, y luego al punto "a" lo 'rodeamos' con un 'entorno Cousin (tamaño δ-fina)' ; es decir, tomaríamos como etiqueta al punto "a". Como la base del rectángulo que formamos, que tiene altura el valor de la función en "a", f(a), tiene longitud (medida) cero, entones el producto *altura por base* vale cero; hay que observar aquí las otras sutilezas.

Definición 4.3. (Brito, W.,2011, p.852). Sea f: $[a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, el número Ç = $\int_a^b f$ se llama integral de Henstock-Kurzweil de f si para todo Ɛ > 0 existe una función gauge $\boldsymbol{\mathcal{f}}$ tal que | $\mathcal{S}(f$, P) − Ç | ≤ Ɛ siempre que la partición etiquetada

P = $\{(t_i,\ [x_{i-1}, x_i]) \colon 1 \leq i \leq n\ \}$ de $[a,b]$ es $\boldsymbol{\mathcal{f}}$-fina.

En lugar de establecer la longitud de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ más pequeña que una constante δ como en la definición de la integral de Riemann, usaremos un indicador o función gauge $\boldsymbol{\mathcal{f}}$ para comparar las longitudes.

Definición 4.4. Para $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in$ HK($[a, b]$) si y solo si para cada Ɛ > 0 existe una cubierta de Cousin, Ş, tal que si P_1 y P_2 son particiones contenidas en Ş, entonces $|\boldsymbol{S}(f, P_1) - \boldsymbol{S}(f, P_2)| <$ Ɛ.

El siguiente teorema nos dice que toda función integrable Riemann es HKintegrable, con el mismo resultado, naturalmente.

4.3. Teorema. (Ocejo A. ,2008, p. 36). *Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable, con $\int_a^b f$ = A, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$, con $\int_a^b f$ = A.*

Demostración.

Sea Ɛ > 0.

Como f es integrable-Riemann, entonces por definición de la integral de Riemann, existe una constante $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $P_T := \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \leq n\}$ es una partición etiquetada de $[a, b]$ donde $x_i - x_{i-1} \leq \delta_\varepsilon$, siendo δ_ε norma $\forall\ i = 1,2,..., n$, entonces $|\boldsymbol{S}(f, P_T) - A| \leq$ Ɛ, donde A es la integral de Riemann.

Ahora, considerando como función gauge a $\mathfrak{f}(x) = \delta_\varepsilon$; es decir, justamente la δ de la integral de Riemann, entonces como P_T es una partición etiquetada de $[a, b]$ que es δ_ε-fina, puesto que $x_i - x_{i-1} \leq \delta_\varepsilon$ y, $\mathfrak{f}(x) = \delta_\varepsilon$, por lo que $x_i - x_{i-1} \leq \mathfrak{f}(x)$, entonces $|\boldsymbol{S}(f, P_T) - $ Ç $| \leq$ Ɛ. (Puesto que ya estamos con $\mathfrak{f}(x)$).

Lo que implica que f es Henstock-Kurzweil integrable, con $\int_a^b f$ = Ç .

Por lo que A = Ç . □

Hemos probado que *toda función integrable por Riemman es integrable por la integral de Henstock-Kurzweil.*

4.4. Teorema. (Dijk van, E. ,2014, p.13). *Sea* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. *Si* f *= 0, excepto en un número contable de puntos en* $[a, b]$*, entonces* f *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$ *con* $\int_a^b f$ *= 0.*

Demostración.

Dado Ɛ > 0. Definamos el conjunto $\mathrm{A} = \{ a_n : n \in \mathbb{Z}^+ \} = \{ x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$.

Ahora, definamos un gauge apropiado en $[a, b]$, como:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 \quad si\ x \epsilon\, [a, b]\,, \qquad x \notin \mathrm{A} \\ \dfrac{\varepsilon 2^{-n}}{|f(a_n)|} \qquad si\ \ x \,\epsilon\, \mathrm{A}. \end{cases}$$

Sea P = $\{(t_i, [x_{i-1}, x_i]\} : 1 \leq i \leq n\}$ una partición etiquetada de $[a, b]$ δ-fina, tal que $x_i - x_{i-1} \leq \delta(x)$ para todos los $1 \leq i \leq n$.

Ahora, sea τ el conjunto de todos los índices i tal que las etiquetas $t_i \in \mathrm{A}$, del cual elegimos n_i tal que $t_i = a_{n_i}$. Por otro lado, sea σ el conjunto de índices j tal que $t_j \notin \mathrm{A}$; pero se sabe que si tomamos dicha etiqueta, entonces $f(t_j) = 0$, por lo tanto,

$f(t_j).(x_j - x_{j-1}) = 0$. Lo que implica que las etiquetas que no están en A no contribuyen a la $\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P})$; por lo que

$$|\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P})| = |\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})| = \left| \sum_{i\in\tau} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j\in\sigma} f(t_j)(x_j - x_{j-1} \right|$$

$$\leq |\textstyle\sum_{i\in\tau} f(t_i)(x_i - x_{i-1})| + \left|\sum_{j\in\sigma} f(t_j)(x_j - x_{j-1}\right|$$

$$\leq |\textstyle\sum_{i\in\tau} f(t_i)\delta(x)|; \quad \text{pues, } x_i - x_{i-1} \leq \delta(x) \text{ y } \left|\sum_{j\in\sigma} f(t_j)(x_j - x_{j-1}\right| = 0$$

$$\leq \textstyle\sum_{i\in\tau} \left|f(a_{n_i})\right| \dfrac{\varepsilon 2^{-n_i}}{\left|f(a_{n_i})\right|} = \sum_{i\in\tau} \varepsilon 2^{-n_i}\,; \quad t_i = a_{n_i} \in A,$$

$$\leq \varepsilon \textstyle\sum_{i=1}^{n} 2^{-n_i} = \varepsilon, \text{ es decir,}$$

$|\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P})| \leq \varepsilon$.

Como Ɛ > 0 es arbitrario, y como | $\boldsymbol{S}(f$, P) − 0 | ≤ Ɛ, solo queda que Ç = 0; es decir,

|$\boldsymbol{S}(f$, P) − Ç| ≤ Ɛ, entonces, podemos concluir que f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$, con HKintegral $\int_a^b f$= 0. □

4.5. Proposición. *La función de Dirichlet Д : $[a, b]$→ ℝ es Henstock-Kurzweil integrable, con $\int_a^b$ Д $= 0$.*

Demostración.

Sea $\{r_1, r_2, \ldots\}$ conjunto de números racionales en $[a, b]$. Definimos la función δ que depende de Ɛ > 0 como:

$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} & si\ x = r_i \\ 1 \quad si\ \ x\ \notin \{r_1, r_2, \ldots\}. \end{cases}$, donde f= δ no es constante, como sabemos.

Supongamos que P_T = $\{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : 1 \leq i \ \leq n\}$ es una partición etiquetada δ-fina de $[a, b]$.

Si $t_i \in \{r_1, r_2, \ldots\}$ es una etiqueta, entonces Д(t_i) = 1 y $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta(t_i)$ para cada i; donde $[x_{i-1}, x_i]$ es el subintervalo correspondiente a la etiqueta t_i. Puesto que P_T es δ-fina; luego entonces, $x_i - x_{i-1} \subseteq ((t_i - \delta(t_i)$, t_i + $\delta(t_i)))$.

Así, para las etiquetas $t_i \in \{r_1, r_2, \ldots\}$, tenemos Д$(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 2\delta(t_i)$, para cada subintervalo, ya que Д(t_i)= 1; es decir, $(1)(x_i - x_{i-1}) = \ (x_i - x_{i-1}) \leq 2\delta(t_i)$.

Si $t_i \notin \{r_1, r_2, \ldots\}$ es una etiqueta irracional, entonces Д(t_i) = 0 y $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta(t_i)$, $\delta(t_i)$ =1, donde $[x_{i-1}, x_i]$ es el subintervalo correspondiente a la etiqueta $t_i \epsilon\ \mathbb{I} \subset [0, 1]$. , $a = 0,\ b = 1$. Por lo que Д$(t_i)(x_i - x_{i-1})$= 0. De esta forma, los subintervalos con las etiquetas irracionales no contribuyen a $\boldsymbol{S}$(Д, P_T), lo que implica que solo nos interesarán las etiquetas que son racionales; por lo que:

Si $t_i \in \{r_1, r_2, \dots\}$, entonces: $Д(t_i)(x_i - x_{i-1})$= $(1)(x_i - x_{i-1})$= $x_i - x_{i-1}$; esto ocurre en cada subintervalo donde la etiqueta es un racional

Luego, tenemos que:

$|\boldsymbol{S}(Д, \mathrm{P_T})| = |\sum_{i=1}^{\infty} Д(t_i)(x_i - x_{i-1})|$+$|\sum_{i=1}^{\infty} Д(t_i)(x_i - x_{i-1})|$, para racionales e irracionales, respectivamente.

$= |\sum_{i=1}^{\infty}(1)(x_i - x_{i-1})|$+$|\sum_{i=1}^{\infty}(0)(x_i - x_{i-1})|$

$= |\sum_{i=1}^{\infty}(1)(x_i - x_{i-1})|$; pero como $(x_i - x_{i-1}) \leq 2\delta(t_i)$, tenemos

$|\boldsymbol{S}(Д, \mathrm{P_T})| = \sum_{i=1}^{\infty} \left|(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2\delta(t_i)$

$|\boldsymbol{S}(Д, \mathrm{P_T})| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2\delta(t_i)$ como t_i es racional, entonces por definición de la función δ, tenemos que $\delta(t_i) = \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, entonces, por principio de sustitución, tenemos:

$|\boldsymbol{S}(Д, \mathrm{P_T})| \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \mathcal{E}$.

i.e., $|\boldsymbol{S}(Д\,, \mathrm{P_T})| \leq \mathcal{E}$, lo que implica que

Д ϵHK($[a, b]$). □

Observación: la definición de HK es $|\boldsymbol{S}(Д, \mathrm{P_T}) - Ç|< \mathcal{E}$ y como $\boldsymbol{S}(Д, \mathrm{P_T})$ es muy pequeña, entonces Ç también es muy pequeña.

Como $\mathcal{E}$ es arbitrario entonces Ç = 0; lo que es equivalente $\int_0^1 Д = 0$.

Nota: Se podría hacer el mismo procedimiento considerando $(x_i - x_{i-1}) \leq \delta(t_i)$,

Y $\quad \delta(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^i} & si\ x = r_i \\ 1 & si\ \ x\ \notin \{r_1, r_2, \dots\}. \end{cases}$

En la sección anterior vimos que cada función integrable-Riemann es integrable Henstock-Kurzweil. Aquí hemos demostrado que la declaración inversa es falsa al dar un ejemplo de una función que es HKintegrable, pero no integrable-Riemann.

4.1.4. Unicidad de la integral de Henstock-Kurzweil

4.6. Teorema. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral de Henstock-Kurzweil de f en $[a, b]$, es única.*

Demostración.

Supongamos que los dos números reales $Ç_1, Ç_2$, son la integral de Henstock-Kurzweil de f en $[a, b]$.

Como $Ç_1$, es la integral Henstock-Kurzweil de f, entonces para $\varepsilon/2 > 0$ existe un gauge $\mathcal{f}_1$ en $[a, b]$ tal que si P_1 es una partición $\mathcal{f}_1$-fina de $[a, b]$ entonces

$| \mathcal{S}(f, P_1) - Ç_1| \leq \varepsilon/2.$ (1)

De manera similar: si $Ç_2$ es la HKintegral de f, para $\varepsilon/2$ existe un gauge $\mathcal{f}_2$ en $[a, b]$ tal que si P_2 es una partición $\mathcal{f}_2$-fina de $[a, b]$, entonces

$| (\mathcal{S}(f, P_2) - Ç_2 | \leq \varepsilon/2.$ (2)

Ahora: definamos un nuevo gauge: $\mathcal{f} := \min \{\mathcal{f}_1, \mathcal{f}_2\}$ tal que P es una partición etiquetada de $[a, b]$ que es $\mathcal{f}$-fina. Puesto que P también es $\mathcal{f}_1$-fina y $\mathcal{f}_2$-fina, por la construcción de P, tenemos que

$$|Ç_1 - Ç_2| = |Ç_1 - \mathcal{S}(f, P) + \mathcal{S}(f, P) - Ç_2| \leq |\mathcal{S}(f, P) - Ç_1| + |\mathcal{S}(f, P) - Ç_2|$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Es decir, $| Ç_1 - Ç_2 | \leq \varepsilon$.

Lo cual implica que $Ç_1 - Ç_2 = 0$, entonces $Ç_1 = Ç_2$. Por lo tanto, la integral de Henstock-Kurzweil de f en [a, b] es única. $\square$

4.1.5. El Teorema Fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del cálculo establece que si F es diferenciable en $[a, b]$ y $F' = f$, entonces $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

La condición necesaria para que f sea integrable-Riemann es que debe ser integrable. Esta condición es necesaria, puesto que no todas las derivadas resultan ser integrables Riemann. Esta es una de las deficiencias de la integral de Riemann. En cambio, toda derivada es Henstock-Kurzweil integrable.

Definición 4.5. Sea $F: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $[a, b]$ en un punto $t \in [a, b]$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $\delta(t) > 0$ tal que para cualquier $x, y \in [a, b]$, satisfaciendo $t - \delta(t) < x \leq t \leq y < t + \delta(t)$, se cumple que

$|F(y) - F(x) - F'(t)(y - x)| \leq \varepsilon(y - x)$.

4.7. Teorema. (Brito W., 2011, p.816). *Si la función* $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $[a, b]$, *entonces* $F' = f$ *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$ *con* $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como existe $F'(t)$, entonces por definición 4.5, para un $\varepsilon_1 = \varepsilon/b - a$ existe $\delta(t)$, tal que $\left|\frac{F(m)-F(t)}{m-t} - F'(t)\right| \leq \varepsilon/b - a.$, donde $m \in [a, b]$ y $|m - t| \leq \delta(t)$.

$\mathfrak{f}_{(t)} = \delta(t)$ es la función positiva gauge; $f(t) = F'(t)$.

Tomemos una partición etiquetada $\delta(t)$-fina de $[a, b]$, $\mathrm{P_T} = (t_i, [x_{i-1}, x_i])$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

Podemos hacer que $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta(t_i)$;

$\left| F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) \ldots\ldots..(**)$; esto ocurre para cada $i = 1,2,3,\ldots,n$.

También se puede hacer que $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$ (1)

y sabemos que $\boldsymbol{S}(f, \mathrm{P_T}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ (2)

Luego, $\left| \boldsymbol{S}(f,\mathrm{P_T}) - \big(F(b) - F(a)\big) \right| = \left| -\big[\big(F(b) - F(a)\big) - \boldsymbol{S}(f,\mathrm{P_T})\big] \right|$

$= \left| \big[\big(F(b) - F(a)\big) - \boldsymbol{S}(f,\mathrm{P_T})\big] \right| = \left| [F(b) - F(a) - \boldsymbol{S}(f,\mathrm{P_T})] \right|$, aquí reemplazamos (1) y (2), y así, tenemos

$$= \left| \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right|,$$

luego

$$= \left| \sum_{i=1}^{n}[(F(x_i) - F(x_{i-1})) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})] \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| [(F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})] \right|$$

Por $(**)$, tenemos

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

Pero: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$, entonces

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Esto es

$\left| \boldsymbol{S}(f,\mathrm{P_T}) - \big(F(b) - F(a)\big) \leq \varepsilon \right.$ (3)

Como esto es así y $\big(F(b) - F(a)\big)$ es un número que, digamos, lo denotamos con Ç ; es decir: $\big(F(b) - F(a)\big) =$ Ç (4)

,entonces en (3), sería:

$\left| \mathcal{S}(f, P_T) - Ç \right| \leq \varepsilon$, lo cual cumple con la definición de HKintegral que dice que existe un Ç $= \int_a^b f$. (5)

(5) en (4), luego,

$F(b) - F(a) = \int_a^b f$. $\square$

Nota: si f es una función HKintegrable, $\left| f \right|$ no necesariamente es HKintegrable. Como es el caso de la derivada de $F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$

Es debido a esto, también, que la gran mayoría de los estudiosos prefieren la integral de Lebesgue.

Conclusiones

En este trabajo de investigación se llegó a las siguientes conclusiones:

I. El método de integración de Riemann no puede integrar la muy conocida función de Dirichlet, entre otras; pero el de Henstock-Kurzweil sí la integra, además de integrar cualquier función integrable-Riemann. Con ello la integral de Henstock-Kurzweil está generalizando la integral de Riemann.

II. Al hacer un ligero cambio en δ al método de la integral de Riemann, se obtiene el método de integración de Henstock-Kurzweil, diferente al de Riemann.

III. El método de integración de Henstock-Kurzweil generaliza al de Riemann; además de ser igual de práctico.

IV. La integral de Henstock-Kurzweil integra, además, muchas funciones no integrables por Riemann. Usamos una de ellas, la función de Dirichlet, para demostrar esto.

Sugerencias

- El método de integración de Henstock-Kurzweil se debería impartir en las universidades.
- Se sugiere, a la Escuela Profesional de Matemática de la UNSAAC y a las de todas las otras universidades, adoptar también la enseñanza de este nuevo método de integración, tal vez, como un complemento, por ahora.
- Se sugiere a los investigadores de matemática avanzada o física superior, además de la integral de Lebesgue, tener en cuenta la integral de Henstock-Kurzweil como una alternativa; puesto que en el nivel avanzado la integral de Riemann resulta inadecuada, porque empieza a fallar mucho.

Referencias bibliográficas

[1] Lages Lima, E.,(1995), ***Curso de análise***; volumen 2; quarta edição. IMPA,Brasil. Projeto Euclides.

[2] Brito, W. ***Las integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil***, recuperado en 2021 de www.ciens.ula.ve.

[3] Fava, N; Zó, F. ***Medida e integral de Lebesgue***,(2013),recuperado el 2020 de www.dm.uba.ar.

[4] Steven, K., González, J. ***Introduction to the Henstock-Kurzweil integral***,(2015), recuperado en 2021 de www.math.unm.edu.

[5] Pérez, J. A. ***Topología de conjuntos***. (2015), extraído en 2022 de www.sociedadmatemáticamexicana.org.mx.

[6] Van Dijk, E. ***The Henstock-Kurzweil integral***, recuperado en 2021 de http://fse.studenttheses.ub.rug.nl. Thesis mathematics. Rijksuniversiteit Groningen

[7] Seymour Lipschutz, (1970), ***Topología general***,Mc Graw-Hill, México.

[8] Bernal G, L. ***Series de funciones e integral de Lebesgue***,(2015), Universidad de Sevilla.

[9] Figueroa. R. G. ***Matemática básica y análisis 1***,(1916),Lima, Ed. RGM.

[10] Ocejo Monge, A. ***La integral de Henstock-Kurzweil y el Teorema Fundamental del Cálculo***;(2019), recuperado en 2021 de https://lic.mat.uson.mx; *tesis.*

[11] Lages Lima, E.,(1997), ***Análisis real***; volumen1;textos del IMCA.

[12] Apostol, T. M. (1999) ***Calculus vol1***; Mexico. Editorial Reverte .