

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO

ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSTGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS



**ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES
DEL TIPO PARABÓLICO MEDIANTE EL
MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS**

TESIS PRESENTADO POR:

Br. Víctor Hugo Salgado Loaiza

PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE:

MAESTRO EN MATEMÁTICAS

ASESOR:

Dr. Guido Álvarez Jáuregui

CUSCO - PERU

2021

DEDICATORIA

Dedico éste trabajo principalmente a DIOS todopoderoso, por estar conmigo en cada paso que doy, cuidándome y dándome fortaleza para seguir adelante y permitirme el haber llegado hasta este momento tan importante de mi vida.

A la memoria de mis padres: Simeón Salgado Trujillo y Ambrosia Loaiza Huilca, por la formación que me dieron para construir mi propio camino.

A mis hermanos, hermanas y familia en general por el apoyo que siempre me brindaron día a día y en los momentos más importantes de mi vida.

A mi dulce y hermosa sucesora Dayra Luhana por ser mi principal motivación y la razón de que me levante cada día, esforzarme por el presente y el mañana.

A todos mis amigos y amigas, por su gran amistad y apoyo que me brindan en cada momento de mi vida.

Víctor Hugo

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, doy infinitamente gracias a Dios, por haberme guiado por el camino de la felicidad hasta ahora.

Agradezco a la Universidad Nacional San Antonio Abad Del Cusco, a la Escuela de Posgrado, Maestría en Matemáticas por haberme aceptado ser parte de ella y abierto las puertas de su seno científico para poder estudiar y por la formación académica.

De manera especial expreso mi más sincero agradecimiento a mi asesor Dr. Guido Álvarez Jáuregui quien con su valiosa orientación ha contribuido a la culminación del presente trabajo y por haberme tenido toda la paciencia del mundo para guiarme durante todo el desarrollo de la tesis.

Aprovecho la oportunidad para expresar mi agradecimiento a los docentes del Departamento Académico de Matemática y Estadística de la UNSAAC por haberme impartido sus enseñanzas en las aulas universitarias y que contribuyeron en mi formación académica, profesional y personal.

Víctor Hugo

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE.....	i
LISTA DE CUADROS	ii
LISTA DE FIGURAS.....	ii
RESUMEN.....	iii
ABSTRACT.....	iv
INTRODUCCIÓN.....	1

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
1.1 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA	3
1.1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.....	3
1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA OBJETO DE INVESTIGACIÓN.....	4
1.2.1 PROBLEMA GENERAL.....	4
1.2.2 PROBLEMAS ESPECÍFICOS.....	4
1.3 HIPÓTESIS.....	4
1.4 JUSTIFICACIÓN Y/O IMPORTANCIA.....	5
1.5 OBJETIVOS	5
1.5.1 OBJETIVO GENERAL	5
1.5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	5
1.6 ANTECEDENTES INTERNACIONALES Y NACIONALES:.....	6
1.7 METODOLOGÍA	11

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	13
2.1 OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES.....	13
2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.....	14
2.2.1 PROBLEMAS DE CONTORNO, TIPOS DE CONDICIONES DE CONTORNO Y DE VALOR INICIAL	14
2.2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN	16

2.2.3	TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN.....	17
2.2.4	FORMA CANÓNICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES.....	18

CAPÍTULO III

3.1	SOLUCIÓN CLÁSICA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DEL TIPO PARABÓLICO.....	21
3.1.1	ECUACIÓN DE CALOR.....	21
3.1.2	REDUCCIÓN A UN PROBLEMA DE FRONTERA UNIDIMENSIONAL.....	22
3.1.3	SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FRONTERA.....	24
3.2	MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.....	28
3.2.1	DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO.....	28
3.2.2	DISCRETIZACIÓN DE LA VARIABLE.....	29
3.2.3	DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL.....	30
3.2.4	PROPIEDADES DE LAS DIFERENCIAS FINITAS.....	33
3.3	MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.....	33
3.3.1	ECUACION DE CALOR UNIDIMENSIONAL DEL TIPO PARABÓLICO.....	33
3.3.2	DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR UNIDIMENSIONAL DEL TIPO PARABÓLICO.....	34
3.3.3	ORDEN DE APROXIMACIÓN.....	40
3.3.4	CONVERGENCIA, ORDEN DE PRECISIÓN, ESTABILIDAD Y CONSISTENCIA.....	41
3.3.5	ESTABILIDAD.....	43
3.3.6	ESTABILIDAD DE VON NEUMANN.....	44

CAPÍTULO IV

4.1 MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS.-.....	52
4.2 RESULTADOS.....	56
CONCLUSIONES	61
SUGERENCIAS.....	62
ANEXO.....	63
BIBLIOGRAFÍA.....	66
LINKOGRAFÍA.....	68
MATRIZ DE CONSISTENCIA.....	69

LISTA DE CUADROS

Cuadro 3.1.1: Solución por el método de separación de variables.....	27
Cuadro 3.3.3: Discretización de la ecuación de calor.....	39
Cuadro 3.3.4: comparación de soluciones de ambos métodos.....	40

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.2.1 interpretación geométrica del teorema de la existencia y unicidad.....	20
Figura 3.2.1: malla unidimensional.....	27
Figura 3.3.1: malla para resolver la ecuación de calor en la región R	34
Figura 3.3.2: Esquema de la ecuación en diferencias para la ecuación de calor.....	36
Figura 4.1.- Modelo de viga empotrada-empotrada.....	50
Figura 4.2.- Discretización del dominio para una viga empotrada-empotrada.....	50
Figura 4.3. Identificación de varios puntos discretos cercanos al nudo inicial	53
Figura 4.4.- Modelo de viga empotrada con datos.....	56
Figura 4.5.- Desratización de la viga.....	56
Figura 4.6.- Resultado.....	60

RESUMEN

Modelar matemáticamente un problema de la vida real desde el punto de vista en el que se haga intervenir dos o más variables independientes que impliquen un tratamiento de cálculo diferencial que conduce a las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y la aparición de varias variables independientes hace que este tema resulte mucho más complejo.

El presente trabajo tiene por objetivo general aplicar el método de diferencias finitas para encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas y su aplicación del método para la solución de ecuaciones diferenciales de segundo, tercer y cuarto grado que determina la solución de una viga doblemente empotrada y las deflexiones que ésta tendrá debido a la carga distribuida uniformemente.

Como objetivos específicos se tiene: determinar la solución de una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico utilizando el método de diferencias finitas mediante la discretización del dominio, de la variable y de la ecuación diferencial, comparar las soluciones obtenidas mediante los métodos clásicos y el método de las diferencias finitas y finalmente encontrar la solución a una aplicación de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas utilizando el programa computacional Matlab.

PALABRAS CLAVES: Diferencias Finitas, Ecuación de calor, discretización, Consistencia, Estabilidad, Convergencia, Solución Numérica.

ABSTRACT

Mathematically modeling a real-life problem from the point of view in which two or more independent variables are involved that involve a differential calculus treatment that leads to Differential Equations in Partial Derivatives and the appearance of several independent variables makes this subject is much more complex.

The present work has as a general objective to apply the finite difference method to find the solution of a partial differential equation by means of the finite difference method and its application of the method for the solution of differential equations of second, third and fourth degree that determines the solution of a doubly recessed beam and the deflections it will have due to the uniformly distributed load.

The specific objectives are: To determine the solution of a partial differential equation of the parabolic type using the method of finite differences by means of discretization of the domain, of the variable and of the differential equation, to compare the solutions obtained through the classical methods and the method of the finite differences and finally find the solution to an application of the partial differential equation of the parabolic type by the method of finite differences using the mat lab computer program.

KEYWORDS: Finite Differences, Heat equation, discretization, Consistency, Stability, Convergence, Numerical Solution.

INTRODUCCIÓN

En este tema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que se presenta pretende exclusivamente exponer los conocimientos que consideramos básicos para que los estudiantes de ciencias e ingeniería, entre otros puedan entender con facilidad tres ejemplos clásicos:

- Ecuaciones de tipo Hiperbólico (problemas de fenómenos oscilatorios: vibraciones de cuerda, membranas, oscilaciones electromagnéticas).
- Ecuaciones de tipo Parabólico (problemas que se presentan procesos de conductibilidad térmica y difusión).
- Ecuaciones de tipo Elíptico (problemas que presentan procesos estacionarios, ósea que no cambian con el tiempo).

En la solución de problemas con Ecuaciones Diferenciales se ha visto la necesidad del uso de Métodos Numéricos como una herramienta de solución de los mismos de una manera versátil utilizando el método de Diferencias Finitas el cual se fundamenta en el desarrollo de la Serie de Taylor.

En la solución de diversos problemas de ingeniería como por ejemplo la deflexión de vigas se utilizan técnicas de modelación, simulación y optimización de sistemas mediante la aplicación de métodos numéricos en programas de computador tales como C++, mathematica, Matlab y otros. El método numérico para la modelación y simulación de sistemas físicos que se tratan en este trabajo será resuelto por el método de diferencias finitas (MDF).

El método de diferencias finitas es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos. Siendo de una gran sencillez conceptual y constituye un procedimiento muy adecuado para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales como la ecuación de onda (hiperbólico), ecuación de calor (parabólico) y la ecuación de Laplace (elíptico) en el caso unidimensional y bidimensional.

Teniendo en cuenta que un problema de ecuaciones diferenciales parciales, el cual es una abstracción de los modelos de parámetros distribuidos para ser formulado siempre necesita de un espacio infinito dimensional entonces este

problema debe ser aproximado por otro problema discreto y ser escrito en un espacio finito dimensional. Para ello se usa el proceso de discretización, que consiste en trasladar un problema infinito dimensional a otro finito dimensional, el cual se ha sistematizado en los siguientes pasos: discretización del dominio del problema, discretización de la variable o incógnita del problema y la discretización de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico utilizando el método de diferencias finitas para la solución apropiado que aproxime la ecuación.

Finalmente podemos decir que un método numérico toma como incógnitas básicas los valores de las variables dependientes en un número finito de localizaciones llamados los puntos de la malla en el dominio de cálculo, el método incluye la tarea de proveer un conjunto de ecuaciones algebraicas para estas incógnitas y prescribir un algoritmo para resolver las ecuaciones.

Como conclusiones del presente trabajo se tiene: que el método de diferencias finitas permite determinar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico utilizando la discretización de la ecuación diferencial y que esta solución determinada mediante el método clásico de separación de variables y el de diferencias finitas son semejantes así como se muestra en el cuadro 3.3.4, finalmente es posible encontrar la solución a una aplicación de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas utilizando el programa computacional Matlab que permite acelerar los procesos y a visualizar geoméricamente los resultados.

El contenido del presente trabajo está distribuido de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se expone el planteamiento del problema y metodológico utilizado en la investigación.

En el capítulo 2, se presenta el marco teórico conceptual y las nociones fundamentales de operadores diferenciales lineales, operadores de diferencias, ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico, parabólico elíptico.

En el capítulo 3, se presenta el desarrollo del presente trabajo de investigación mostrando la solución clásica y la solución a través del método de diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial.

En el capítulo 4, se presenta la solución aplicado a la deflexión de una viga continua empotrada-empotrada con carga distribuida empleando el método de diferencias finitas.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

1.1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El método de diferencias finitas se basa en asignar puntos espaciados de manera apropiada sobre el dominio y aplicar las ecuaciones constitutivas correspondientes del fenómeno a cada punto. El método de diferencias finitas tiene como punto de partida las series de Taylor, que consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados.

Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados. El valor de los puntos seleccionados se convierte en las incógnitas. El sistema de ecuaciones algebraicas debe ser resuelto y puede llevar un número largo de operaciones aritméticas.

De esta forma se considera que la resolución de ecuaciones diferenciales es uno de los problemas más importantes de la matemática aplicada y la física matemática. En el transcurso del tiempo se fueron desarrollando diversos métodos de integración para resolver clases especiales de ecuaciones diferenciales que ocurren en la descripción de fenómenos físicos.

El presente trabajo tiene como propósito encontrar la solución de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico utilizando el método de diferencias finitas.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA OBJETO DE INVESTIGACIÓN

1.2.1 PROBLEMA GENERAL

¿Es posible encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas?

1.2.2 PROBLEMAS ESPECÍFICOS

- ¿Será posible utilizar el proceso de discretización en la solución de una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas?
- ¿Se podrá obtener los mismos resultados en forma analítica, mediante los métodos de separación de variables y el de diferencias finitas?
- ¿Será posible encontrar la solución a una aplicación de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas utilizando algún programa computacional?

1.3 HIPÓTESIS

1.3.1 HIPÓTESIS GENERAL

Existe una buena solución aproximada de las ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas.

1.3.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICOS

- Utilizando la serie de Taylor, para la aproximación de las derivadas, obtenemos el esquema de discretización en diferencias finitas del cual obtenemos una ecuación algebraica que hallará soluciones aproximadas para la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico.
- Con el desarrollo del algoritmo en el programa Matlab permitirá la visualización de la solución aproximada a una aplicación de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico.

1.4 JUSTIFICACIÓN Y/O IMPORTANCIA

La investigación es importante, pues las ecuaciones diferenciales modelan diversos fenómenos de naturaleza física, en particular los problemas estacionarios sobre conductividad térmica y su difusión. Su solución aproximada mediante el método en diferencias finitas al ser ejecutado mediante un programa computacional permite obtener de manera más rápida el resultado y además mostrarla gráficamente.

En la actualidad, en nuestro medio no existen trabajos referidos a las soluciones de ecuaciones diferenciales mediante el método de diferencias finitas, es por esa razón que surge mi interés en dar a conocer este tema sobre la solución a una ecuación diferencial parcial por que realizan un gran aporte en distintos campos científicos y disciplinas, no sólo en conocimientos concretos, sino como una nueva forma de concebir las cosas y resolver los problemas que se nos plantean.

Los programas computacionales actuales facilitan la metodología de solución para el método de diferencias finitas aplicado a problemas complejos de ecuaciones diferenciales parciales.

El presente trabajo contribuye con el desarrollo de la teoría cuantitativa de las ecuaciones diferenciales parciales y es importante en la posibilidad que nos muestra la conexión entre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales respecto a su solución, utilizando el método de diferencias finitas.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 OBJETIVO GENERAL

Aplicar el método de diferencias finitas para encontrar la solución de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico.

1.5.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar la solución de una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico utilizando el método de diferencias finitas mediante la discretización del dominio, de la variable y de la ecuación diferencial.
- Comparar las soluciones obtenidas mediante los métodos clásicos y el método de las diferencias finitas.

- Determinar la solución a una aplicación de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas utilizando el programa computacional Matlab.

1.5 ANTECEDENTES

INTERNACIONALES:

MANUEL PATRICIO PUGARIN DIAZ (UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - 2015) presenta el trabajo titulado: Desarrollo de las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas mediante diferencias finitas, elementos finitos y mescles, que tiene por objetivo general resolver las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas aplicando los métodos de diferencias finitas, elementos finitos y mescles, determinando su grado de confiabilidad, dentro de sus objetivos específicos son: revisar las metodologías de solución aproximada de las EDP'S parabólicas; determinar la validez de las soluciones numéricas de las EDPS contrastando las soluciones analíticas sobre problemas con solución analítica correcta, finalmente comparar los resultados obtenidos con los tres métodos sobre un problema con solución analítica conocida. La metodología utilizada es proponer en las diferencias finitas utilizar fórmulas de aproximación para las derivadas, encontrar la ecuación discreteada parcial de un problema, construyendo el mallado correspondiente y encontrando su solución, para el caso de elemento finitos parte de la reformulación del problema construyendo la formulación débil combinada con el método de Galerín que permite plantear el problema en un espacio de funciones finito garantizando la existencia de la solución, finalmente para el método mescles propone el desarrollo basado en la colocación de puntos del dominio con funciones de base radial multi cuadrícula. Llegando a la siguiente conclusión: Con el método de diferencias finitas analizamos la convergencia al aumentar el número de elementos en la discretización espacial y presentamos los errores encontrados tomando como exacta la solución con el mallado más grande. Con campo de fase utilizamos los mismos mallados espaciales, salvo el valor más grande que no fue necesario utilizar, puesto que comparamos las soluciones con diferencias finitas y campo de fase bajo las mismas condiciones de discretización espacial y temporal.

ALVARO CASASUS ACEVEDO (E.T.S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES UNED - 2011) presenta el trabajo titulado: Aplicaciones del método de diferencias finitas generalizadas a problemas de elasto dinámica cuyo objetivo es plantear de forma rigurosa la formulación en diferencias finitas generalizadas de la ecuación de onda aplicado a problemas sísmicos y establecer una base sólida en el desarrollo y aplicación del método de diferencias finitas generalizadas a la solución de la ecuación de vigas sometida a cargas estáticas y dinámicas de placas delgadas, el método de diferencias finitas generalizadas se basa también en la utilización de mínimos cuadrados móviles que permite aplicar esquemas en diferencias finitas en dominios irregulares, también ha sido aplicado el método para la resolución de problemas de advección-difusión. Llega a las siguientes conclusiones: Se ha analizado el caso de una viga sometida a cargas dinámicas obteniéndose la formulación explícita del problema en DFG, posteriormente se ha analizado la convergencia del método según teorema de equivalencia de Lax.

JESUS MANUEL CHAIDEZ FELIX (UNIVERSIDAD DE SONORA - 2011) presenta el trabajo titulado: Simulación numérica del modelo Fenton - Karma con diferencias finitas y campo de fase, cuyo objetivo es comparar los resultados obtenidos y verificar la solución de la ecuación de Fenton – Karma bajo el esquema de campo de fase y ver si los resultados son aceptables, el método de cambio de fase consiste en redefinir las variables de estudio en un dominio espacial más sencillo de trabajar sin alterar las propiedades del problema original, el problema consiste en resolver un sistema de reacción – difusión auxiliar llega a las siguientes conclusiones: en este trabajo se estudian dos esquemas numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, tipo reacción – difusión. El estudio se realizó en una y dos dimensiones, siendo este último de mayor interés por sus aplicaciones en biología, matemática, física, ingeniería, entre otros.

En particular se trabajó con el modelo matemático Fenton – Karma asociado a la propagación de potenciales de acción en los ventrículos. Este modelo fue creado por la necesidad de interpretar y analizar lo fenómenos cardiacos asociados a arritmias cardiacas, particularmente al entendimiento del problema fibrilación ventricular. La importancia de considerar el caso bidimensional se

debe a la diversidad de dominios que se pueden considerar, dependiendo de preguntas que se quieran resolver.

OMAR JONATHAN MENDOZA BERNAL (UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO - 2016): presenta el trabajo titulado por: Resolución de ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de diferencias finitas y su paralelización, siendo sus objetivos: desarrollar la metodología para resolver ecuaciones diferenciales parciales mediante el método numérico de diferencias finitas, desarrollar los algoritmos necesarios para resolver las ecuaciones diferenciales en uno, dos y tres dimensiones, implementar en una aplicación computacional la solución numérica del método de diferencias numéricas.

La metodología utilizada es generar una malla del dominio, es decir, un conjunto de puntos en los cuales se buscará la solución aproximada a la ecuación diferencial parcial.

Llegando a las siguientes conclusiones: los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales son rápidos y confiables dentro de sus rangos de aplicación, nos permiten tener una idea más clara de la solución de la ecuación diferencial en todo el dominio de interés y es relativamente sencilla su implementación. Existen situaciones en las que es preferible el uso de métodos numéricos aun cuando existe una solución analítica o semi- analítica, ´por ejemplo, la ecuación de calor tiene solución en series de Fourier.

NACIONALES:

ANAYA ALAY LERMA (UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO - 2018) presenta el trabajo titulado: Método de diferencias finitas para la solución de la onda, consistencia, convergencia y estabilidad, sus objetivos son: Aplicar el Método de Diferencias Finitas. Consistencia, Estabilidad y Convergencia, para determinar la solución aproximada, de la ecuación de la Onda Bidimensional, Utilizar, la serie de Taylor para la aproximación de las derivadas, el método de discretización de diferencias finitas (MDF). Para obtener un esquema numérico explícito, de la ecuación de onda bidimensional. Finalmente Utilizar, la serie de Taylor para la aproximación de las derivadas, el método de discretización de

diferencias finitas (MDF). Para obtener un esquema numérico explícito, de la ecuación de onda bidimensional.

Siendo sus conclusiones: El método de diferencias finitas, al ser una forma sencilla relativamente, para poder resolver la ecuación de onda bidimensional; es efectiva de acuerdo al esquema que se eligió. Con una aproximación justificable y adecuada teóricamente de las derivadas de segundo orden, y por el teorema de equivalencia de Lax, también se tuvo la convergencia, realizando primero la consistencia del esquema numérico que se cumplió satisfactoriamente. Para la estabilidad se vio que la amplificación del error es constante con el tiempo, que también se pudo decir un intervalo para la estabilidad; teniendo así comprobada la convergencia del esquema numérico.

SANTAMARIA SANDOVAL ALEX JAVIER Y RAMIREZ MARTINEZ JOSE JAVIER (UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO - 2015) Presenta el trabajo titulado: Diferencias finitas asistido con Matlab en la solución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, cuyo objetivo es encontrar la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas utilizando diferencias finitas las cuales permiten discretizar una ecuación y llegar a la solución más próxima, Las bases del método de diferencias finitas consisten en la construcción de una malla de una manera estructurada, donde los nodos de la misma, en un espacio n dimensional, están localizados en las intersecciones de n familias de líneas rectas, el reemplazo de las derivadas continuas de la ecuación diferencial por las expresiones equivalentes en diferencias finitas y la resolución del sistema de ecuaciones que queda planteado como consecuencia de la anterior sustitución. Se muestra además la importancia de la aplicación del software matemático Matlab como una herramienta de apoyo en los cálculos numéricos de las diferentes operaciones a realizar.

llegando a las conclusiones siguientes: permite determinar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas de segundo orden, para obtener dichas soluciones se utiliza una de las formas más simples y utilizable de discretización, y finalmente aplica los métodos clásicos y el método de diferencias finitas progresivas en la solución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas verificando que los resultados son semejantes.

CUMPA BARRIOS PAUL MAURICE (UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO - 2015) Presenta el trabajo titulado: Diferencias finitas asistido con Matlab en la solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, cuyo objetivo es encontrar la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas utilizando diferencias finitas las cuales permiten discretizar una ecuación y llegar a la solución más próxima, e aplica el método de aproximación con diferencias finitas el cual es explícito y consiste en definir una versión discreta de la ecuación diferencial parcial elíptica reflejada en una ecuación en diferencias, la cual nos permite a través de un sistema de ecuaciones lineales calcular una solución aproximada de la ecuación diferencial parcial sobre un dominio discreto.

Las bases del método de diferencias finitas consisten en la construcción de una malla de una manera estructurada, donde los nodos de la misma, en un espacio n dimensional, están localizados en las intersecciones de n familias de líneas rectas, el reemplazo de las derivadas continuas de la ecuación diferencial por las expresiones equivalentes en diferencias finitas y la resolución de sistema de ecuaciones. Se muestra además la importancia de la aplicación del software matemático Matlab como una herramienta de apoyo en los cálculos numéricos de las diferentes operaciones a realizar.

Llegando a las conclusiones siguientes: permite determinar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden, para obtener dichas soluciones se utiliza una de las formas más simples y utilizable de discretización, y finalmente aplica los métodos clásicos y el método de diferencias finitas progresivas en la solución de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas verificando que los resultados son semejantes.

LOCALES:

ROJAS RAYME EVER (UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO - 2017) presenta el trabajo titulado: modelos matemáticos mediante ecuaciones diferenciales parciales, solución a través de la transformada de Laplace, que tiene como objetivo Proponer, analizar y aplicar la transformada de Laplace para encontrar la solución de los modelos matemáticos en ecuaciones diferenciales parciales utilizando la siguiente metodología de investigación

analítico-deductivo, por lo tanto se recolectará información relacionada con el tema, se consultará con personas que tengan conocimiento del tema. Toda esta información se analizará mediante procedimientos matemáticos. En este trabajo se utilizará el método deductivo y la técnica a utilizar será el analítico. Llegando a las siguientes conclusiones: El método de la transformada de Laplace definido en su forma compleja permite resolver ecuaciones diferenciales parciales en el que se utiliza el teorema de residuos, se aplicó la transformada de Laplace para determinar la solución de los modelos matemáticos planteados a través de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales bajo las condiciones iniciales (de frontera) propuestas y las soluciones determinadas a través de la transformada de Laplace para los modelos matemáticos planteados a través de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son exactamente iguales como sabemos a las determinadas mediante el uso del método clásico de separación de variables.

AGUILAR ARIZACA ROMMEL RONALD (UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO - 2014) estudio: la solución de las ecuaciones diferenciales parciales utilizando las ecuaciones integrales.

En el proceso de describir los fenómenos que ocurren en la naturaleza, el uso de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es de gran importancia y en consecuencia encontrar su respectiva solución que nos proporcione el comportamiento del fenómeno natural. Llegando a la conclusión, que, estableciendo un procedimiento para poder encontrar la solución a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la cuerda vibrante de longitud finita y la conducción de calor a través de una varilla de longitud finita, utiliza las funciones de Green como funciones auxiliares y las ecuaciones integrales para abordar la solución de las ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico y parabólico.

1.6 METODOLOGÍA

La presente investigación es del tipo analítico - deductivo puesto que para su desarrollo se tendrá que requerir de procedimientos matemáticos mediante el proceso de discretización que consiste en trasladar un problema infinito dimensional a otro finito dimensional.

En el presente trabajo se utilizará el método analítico y la técnica o estrategia deductiva.

La investigación tiene un nivel básico, en vista que se trata de investigar y relacionar hasta cierto punto nuevos conceptos, relacionándolos e infiriendo otros resultados. Este nivel de investigación no se ocupa de las aplicaciones prácticas.

El diseño de investigación es no experimental, debido a que manipula conceptos en condiciones abiertas, este diseño es del tipo transversal en vista que describe y analiza la interrelación entre dos métodos, debido a que en la investigación estudia la dependencia de la Solución de la Ecuación de Calor por medio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales mediante el método de diferencia finitas.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1 OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES

Sea $I = (a, b)$ un intervalo en \mathbb{R} y $C^n(I)$ el espacio vectorial de todas las clases de funciones reales de variables reales que tienen una n -ésima derivada continua en todos los puntos de I .

DEFINICIÓN 2.1.1.- Se dice que una transformación lineal $L : C^n(I) \longrightarrow C(I)$,

es un operador diferencial lineal de orden n sobre el

intervalo I , tal que su regla de correspondencia es:

$$L(D) = L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

Donde los coeficientes $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, son funciones reales continuas en todos los puntos de I , y $a_n(x) \neq 0$, para todo $x \in I$.

Así, si $f \in C^n(I)$, entonces:

$$\begin{aligned} Lf(x) = L[f(x)] &= \left[a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) \right] f(x) \\ &= a_n(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{df(x)}{dx} + a_0(x) f(x) \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el espacio vectorial: $C^n(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ tiene derivada parcial de orden } n \text{ continua en toda la región } \mathbb{R} \right\}$

Entonces, $L : C^n(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R})$, es un operador diferencial lineal de orden lineal n .

2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

DEFINICIÓN 2.2.1.- Una ecuación diferencial parcial para una función

$u(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$, con derivadas parciales

$u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots$ es una relación de la forma:

$$F(u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots) = 0 \dots\dots\dots(2.2.1)$$

donde F es una función de las variables $u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots$ en donde solamente ocurrirán un número finito de derivadas.

La solución general de una ecuación diferencial en derivadas parciales de orden n es una función $u(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ y la solución particular es aquella que se obtiene de la solución general aplicando valores en la frontera.

DEFINICIÓN 2.2.2.- Se llama orden de una ecuación diferencial parcial al orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación.

Así, si x, y son variables independientes, $u=u(x,y)$ es la función buscada, entonces:

$y u_x - x u_y = 0$ es una ecuación diferencial de 1er orden.

$u_{xx} - u_{yy} = 0$ es una ecuación diferencial de 2do orden.

NOTA

También se utiliza las siguientes notaciones:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}; u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}; u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \dots$$

2.2.1 PROBLEMAS DE CONTORNO, TIPOS DE CONDICIONES DE CONTORNO Y DE VALOR INICIAL

En las ecuaciones diferenciales parciales el espacio de las variables independientes es multidimensional por lo que se busca soluciones definidas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, substituyendo los extremos de intervalo por el borde $\partial\Omega$ de

la región Ω . Cuando se impone condiciones sobre el valor de la solución y de sus derivadas en el borde de la región tenemos un problema de contorno.

Las condiciones de contorno que se encuentran son del tipo:

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(x) = f(x); \quad x \in \partial\Omega \dots\dots\dots(2.2.2)$$

donde α y β son constantes dadas, f es una función dada en $\partial\Omega$ y $\frac{\partial u}{\partial x}$ es la derivada de u en la dirección normal a $\partial\Omega$.

DEFINICIÓN 2.2.3.- Un problema de contorno se conoce como condición de DIRICHLET, si $\beta = 0$ en la condición (2.2.2)

DEFINICIÓN 2.2.4.- Un problema de contorno se conoce como condición de NEWMANN si $\alpha = 0$ en la condición (2.2.2)

DEFINICIÓN 2.2.5.- Un problema de contorno es un problema de CAUCHY o de valor inicial si se impone el valor de la solución y sus derivadas normales a lo largo de una curva o superficie inicial.

DEFINICIÓN 2.2.6.- Un problema de contorno es de tipo MIXTO si y sólo si los valores de la solución y de sus derivadas respecto de tiempo hasta el orden $k-1$ (si la ecuación diferencial parcial es de orden k en t) se describen en el instante $t=0$ como función de x , y al mismo tiempo que se imponen condiciones de contorno para todo $t \geq 0$ respecto de las variables espaciales.

DEFINICIÓN 2.2.7.- Un problema de contorno es lineal si y solamente si la ecuación en derivadas parciales a la que está asociada es lineal y las propias condiciones de contorno también son lineales, se tiene, por tanto:

$$\text{E.D.P Lineal: } L(u) = f$$

$$\text{Conds. cont. lineales: } L_1(u) = f_1, \dots, L_k(u) = f_k$$

Si $f_1 = \dots = f_k = 0$ se dice que las condiciones de contorno son homogéneas.

2.2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

La ecuación diferencial parcial de segundo orden para la función de dos variables independientes x, y en el caso de la ecuación (2.2.1) tiene la forma:

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \dots\dots\dots(2.2.3)$$

Siendo $A(x, y), B(x, y), C(x, y)$ funciones de las variables x, y en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y la función incógnita $u = u(x, y)$.

La parte principal de la ecuación (2.2.3) es el operador

$$L(u) : A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} \dots\dots\dots(2.2.4)$$

Supongamos que las funciones A, B, C son continuas en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y que no se anulan simultáneamente, el discriminante de la ecuación (2.2.3) es la función $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\delta(x, y) = B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y) \dots\dots\dots(2.2.5)$$

Si $f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la ecuación (2.2.3) se llama ecuación diferencial parcial homogénea.

OBSERVACIÓN:

- i. Una relación funcional que satisface la ecuación (2.2.2), es llamada integral intermedia.
- ii. Toda ecuación $u(x, y, z) = 0$ para la cual $u_z \neq 0$ y satisface la ecuación se denomina solución de la ecuación (2.2.3).

2.2.3 TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Las ecuaciones diferenciales parciales son del tipo:

- Si $\delta(x, y) = B^2 - 4AC = 0$ la ecuación diferencial parcial se denomina de tipo PARABÓLICO.

En efecto:

Sea la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

de la parte principal dado en (2.2.4) vemos que:

$$A = \alpha^2; B = 0 \text{ y } C = 0$$

Reemplazando en la ecuación de la discriminante dado en (2.2.5) se

tiene:

$$\delta(x, y) = 0^2 - 4\alpha^2(0)$$

$$\delta(x, y) = 0$$

Como $\delta(x, y) = B^2 - 4AC = 0$ luego la ecuación diferencial parcial es del tipo PARABÓLICO.

Este tipo de ecuaciones surgen en problemas físicos en los que aparecen el fenómeno de difusión: de calor, concentración de una sustancia en un fluido, concentración de electrones en un semiconductor.

- Si $B^2 - 4AC > 0$ la ecuación diferencial parcial se denomina de tipo HIPERBÓLICO. Este tipo de ecuaciones surgen en problemas físicos en los que aparecen el fenómeno de propagación de ondas: vibraciones de una cuerda, ondas sonoras, ecuaciones de Maxwell.

La ecuación que rige la cuerda vibrante es:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; c = \text{constante} > 0$$

Donde $A = c^2$, $B = 0$ y $C = -1$.

- Si $B^2 - 4AC < 0$ la ecuación diferencial parcial se denomina de tipo ELÍPTICO. Este tipo de ecuaciones surgen en problemas de los fenómenos estacionarios.

La ecuación que rige la ecuación de Laplace en el plano es:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2} = 0$$

Donde $A = C = 1$ y $B = 0$.

2.2.4 FORMA CANÓNICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos la ecuación diferencial:

$$L(u) : A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \dots\dots\dots(2.2.6)$$

Donde A, B y C , son constantes reales.

Para transformar (2.2.6) en su forma canónica hacemos un cambio de variables Sean $\xi = \xi(x,y)$; $\eta = \eta(x,y)$ funciones con derivadas continuas hasta el segundo orden en una vecindad del punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ con jacobiano

$$J(x,y) = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

con $J(x_0, y_0) \neq 0$.

Luego por continuidad el jacobino no se anula en una vecindad del punto (x_0, y_0) y, por el teorema de la función inversa, podemos resolver localmente $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ en una vecindad del punto $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$ y las funciones x y y son de clase C^2 en dicha vecindad.

Definiendo entonces $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ y por la regla de la cadena se tiene:

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x$$

$$u_y = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = v_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}$$

Por tanto, si u es una solución clásica de la ecuación (2.2.6), v es una solución clásica de la ecuación (2.3.6), entonces:

$$A'(\xi, \eta)v_{\xi\xi} + 2B'(\xi, \eta)v_{\xi\eta} + C'(\xi, \eta)v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \dots\dots\dots(2.2.7)$$

Donde:

$$A'(\xi, \eta) = A(x, y)(\xi_x)^2 + B(x, y)\xi_x \xi_y + C(x, y)(\xi_y)^2$$

$$B'(\xi, \eta) = A(x, y)\xi_x \eta_x + B(x, y)(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + C(x, y)\xi_y \eta_y \dots\dots\dots(2.2.8)$$

$$C'(\xi, \eta) = A(x, y)(\eta_x)^2 + B(x, y)\eta_x \eta_y + C(x, y)(\eta_y)^2$$

calculando el discriminante de la ecuación (2.2.7) obtenemos:

$$\Delta(\xi, \eta) = B(\xi, \eta)^2 - A(\xi, \eta)C(\xi, \eta) = \delta(x, y)J(x, y)^2$$

donde:

$$\delta(x, y) = B(x, y)^2 - A(x, y)C(x, y)$$

es el discriminante de la ecuación (2.2.6). Como el jacobiano nunca se anula en una vecindad del punto (x_0, y_0) , el signo de $\Delta(\xi_0, \eta_0)$ es igual al signo de $\delta(x_0, y_0)$, es decir la ecuación (2.2.6) es parabólica, hiperbólica y elíptica en (x_0, y_0) si solamente si la ecuación (2.2.7) es parabólica, hiperbólica y elíptica respectivamente en (ξ_0, η_0)

OBSERVACIÓN:

Para cada clase de ecuación, el tipo de condición de contorno y la naturaleza de la solución son diferentes. Además, cada una de ellas corresponde, en las aplicaciones, a un tipo diferente de problema físico:

- Las hiperbólicas describen problemas de vibraciones (y requieren dos condiciones iniciales, además de las de contorno)
- Las parabólicas describen problemas de difusión y requieren una condición inicial, además de las de contorno).
- Las elípticas describen problemas de estado de equilibrio (y no requieren condiciones iniciales además de las de contorno).

¹TEOREMA DE LA EXISTENCIA Y UNICIDAD

Sea R una región rectangular del plano xy , definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$,

que contiene al punto (x_0, y_0) . Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en F , entonces

existe un intervalo I , centrado en x_0 , y una función única, $y(x)$ definida en I , que satisface el problema de valor inicial expresado por las ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{sujeto a} \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad \text{sujeto}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

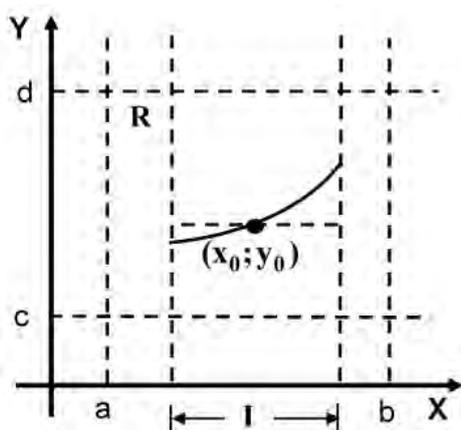


Figura 2.2.1 interpretación geométrica del teorema de la existencia y unicidad

¹ la demostración del teorema de la existencia y unicidad: se encuentra López Julio(2011) departamento de ingeniería matemática universidad de chile

CAPÍTULO III
SOLUCIÓN CLÁSICA Y A TRAVÉS DEL MÉTODO DE
DIFERENCIAS FINITAS DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL
PARCIAL DEL TIPO PARABÓLICO

En este capítulo se resuelve las ecuaciones diferenciales parciales cuyas condiciones iniciales y de contorno sean lineales en particular del tipo parabólico utilizando la solución clásica por el método de separación de variables y el método de diferencias finitas, es decir buscaremos soluciones aproximadas a la solución del problema para ciertos valores de x y de t haciendo la comparación respectiva entre ambos métodos,

3.1 SOLUCIÓN CLÁSICA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DEL TIPO PARABÓLICO

3.1.1 ECUACIÓN DE CALOR

El problema de Cauchy para la conducción de calor en una barra homogénea de longitud finita es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \dots\dots\dots(3.1.1)$$

donde la constante “ α ” es proporcional a la conductividad térmica y se llama difusividad térmica.

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x); \forall x \in [0, L] \dots\dots\dots(3.1.2)$$

las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(L, t) = 0; \forall t \geq 0 \dots\dots\dots(3.1.3)$$

y la condición

$$u_x(L, t) = -hu(L, t) \dots\dots\dots(3.1.4)$$

3.1.2 REDUCCIÓN A UN PROBLEMA DE FRONTERA UNIDIMENSIONAL

Encontremos una solución de (3.1.1) usando el método de separación de variables y busquemos la solución del problema en la forma:

$$u(x, t) = \phi(x) \varphi(t)$$

La sustitución de este valor de $u(x, t)$ en (3.1.1) nos proporciona:

$$\phi(x) \frac{d\varphi}{dt} = \alpha \varphi(t) \frac{d^2\phi}{dx^2}$$

Lo que equivale a:
$$\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\varphi(t)} = \alpha \frac{\frac{d^2\phi}{dx^2}}{\phi(x)}$$

Como el lado izquierdo es independiente de t , y el lado derecho es independiente de x ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\varphi(t)} = \alpha \frac{\frac{d^2\phi}{dx^2}}{\phi(x)} = -\lambda$$

Esto nos da las dos ecuaciones diferenciales ordinarias para $\phi(x)$ y $\varphi(t)$:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda\alpha\varphi(t) = 0$$

Las condiciones iniciales en ϕ y φ se obtienen a partir de (3.1.2) y (3.1.3), y para ϕ son como sigue:

$$\phi(0)\varphi(t) = 0$$

$$\phi(L)\varphi(t) = 0$$

de donde

$$\phi(0) = 0 \text{ y } \phi(L) = 0$$

Entonces $\phi(t) \neq 0$.

Llegamos así al siguiente problema de frontera unidimensional. Para determinar una función que satisfaga la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0 \dots\dots\dots(3.1.5)$$

$$\frac{d\phi}{dt} + \lambda\alpha\phi(t) = 0 \dots\dots\dots(3.1.6)$$

donde λ es un constante y la ecuación (3.1.5) está sujeta a la condición $\phi(0) = 0$ y $h\phi(L) + \phi'(L) = 0$

Analicemos lo diversos casos según los posibles valores de λ .

Caso I.- Si $\lambda > 0$, la solución para (3.1.6) es $\phi(t) = ce^{\lambda/\alpha t}$. De acuerdo a la interpretación física del problema, este resultado es absurdo; pues indica que la temperatura $u = \phi\phi$ crece indefinidamente cuando aumenta t , esto contradice el hecho de que el cuerpo no tiene ninguna fuente de calor y por su extremo derecho radia calor libremente a la atmosfera cuya temperatura es $u = 0$

Caso II.- Si $\lambda = 0$, entonces $\phi = c_1x + c_2$, la condición $\phi(0) = 0$ implica $c_2 = 0$, la condición $h\phi(L) + \phi'(L) = 0$ implica $c_1(hL + 1) = 0$. Como h y L son positivos, entonces $c_1 = 0$ luego ϕ es la función nula.

Caso III.- Sí $\lambda < 0$, la ecuación (3.1.5) tiene por solución $\phi = A\text{sen}\sqrt{-\lambda}x + B\text{cos}\sqrt{-\lambda}x$, la condición $\phi(0) = 0$, implica $B = 0$, la condición $h\phi(L) + \phi'(L) = 0$ implica $A(h\text{sen}\sqrt{-\lambda}L + \sqrt{-\lambda}\text{cos}\sqrt{-\lambda}L) = 0$.

Si $A = 0$, la solución sería la trivial, entonces $h\text{sen}\sqrt{-\lambda}L + \sqrt{-\lambda}\text{cos}\sqrt{-\lambda}L = 0$, esta

ultima igualdad es equivalente a: $\text{tag}\sqrt{-\lambda}L = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{h}$

3.1.3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE FRONTERA:

Consideremos la ecuación de calor unidimensional $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para

$$0 < x < 1 \text{ y } 0 < t < 0.5$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \text{ para } t = 0 \text{ y } 0 \leq x \leq 1$$

y las condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0 \text{ para } x = 0 \text{ y } 0 \leq t \leq 0.5$$

$$u(1, t) = 0 \text{ para } x = 1 \text{ y } 0 \leq t \leq 0.5$$

Usando el método de separación de variables tenemos:

$$u(x, t) = F(x)G(t) \dots\dots\dots(3.1.7)$$

Hallando sus derivadas parciales respectivas tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = F'(x)G(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Se obtiene:

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t)$$

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

y considerando la constante de separación negativa tenemos:

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = -k^2$$

De donde: $G'(t) = -k^2 G(t)$ y trasponiendo términos obtenemos:

$$G'(t) + k^2 G(t) = 0$$

Tomando la ecuación característica

$$\lambda + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -k^2$$

Se tiene que: $G(t) = c_1 e^{-k^2 t}$

Ahora consideremos el lado derecho de la ecuación: $\frac{F''(x)}{F(x)} = -k^2$

$$F''(x) = -k^2 F(x)$$

$$F''(x) + k^2 F(x) = 0$$

Usando la ecuación característica para esta ecuación diferencial se tiene:

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -k^2$$

De donde $\lambda = \sqrt{-k^2}$ luego $\lambda = \pm ki$

Por lo tanto $F(x) = c_2 \cos(kx) + c_3 \operatorname{sen}(kx)$

Reemplazando en la ecuación (3.1.7) obtenemos lo siguiente:

$$u(x, t) = \left[c_2 \cos(kx) + c_3 \operatorname{sen}(kx) \right] c_1 e^{-k^2 t}$$

Desarrollando se tiene:

$$u(x, t) = A e^{-k^2 t} \cos(kx) + B e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(kx)$$

Aplicando las condiciones de frontera tenemos:

$$u(0,t) = 0 \text{ entonces } 0 = Ae^{-k^2 t} \cos(0) + Be^{-k^2 t} \sin(0)$$

Como $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$ solo queda. $0 = Ae^{-k^2 t}$, si $e^{-k^2 t} \neq 0$ entonces $A = 0$.

En la otra condición $u(1,t) = 0$ se tiene:

$$u(1,t) = Be^{-k^2 t} \sin(k) = 0$$

Reemplazando: $0 = Be^{-k^2 t} \sin(k)$ y como $e^{-k^2 t} \neq 0$ y $B \neq 0$

Entonces: $0 = \sin k$

Calculando se obtiene: $k = \arcsin(0)$ luego $k = n\pi$

Reemplazando en: $u(x,t) = Be^{-k^2 t} \sin(kx)$ obtenemos:

$$u(x,t) = Be^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

Resolviendo se tiene la expresión: $u(x,t) = Be^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$

considerando la otra condición: $u(x,0) = \sin(\pi x)$ tenemos que:

$$\sin(\pi x) = B \sin(n\pi x)$$

De donde: $1 = B$ y $\pi x = n\pi x \Rightarrow 1 = n$ de donde $n = 1$

Reemplazando en la ecuación obtenemos: $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ que es la solución de la ecuación diferencial dada.

Tomando valores para x , t y reemplazando en la solución se tiene el siguiente cuadro:

	x1 =0.1	x2=0.15	x3=0.20	x4=0.30	x5=0.40	x6=0.50	x7=0.60	x8=0.70	x9=0.80	x10=0.90	x11=1
	0.1	0.15	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1
t1=0	0.3090	0.4540	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.3090	0.0000
t2=0.025	0.2414	0.3547	0.4593	0.6321	0.7431	0.7813	0.7431	0.6321	0.4593	0.2414	0.0000
t3=0.05	0.1887	0.2772	0.3588	0.4939	0.5806	0.6105	0.5806	0.4939	0.3588	0.1887	0.0000
t4=0.10	0.1152	0.1692	0.2191	0.3015	0.3545	0.3727	0.3545	0.3015	0.2191	0.1152	0.0000
t5=0.15	0.0703	0.1033	0.1337	0.1841	0.2164	0.2275	0.2164	0.1841	0.1337	0.0703	0.0000
t6=0.20	0.0429	0.0631	0.0816	0.1124	0.1321	0.1389	0.1321	0.1124	0.0816	0.0429	0.0000
t7=0.25	0.0262	0.0385	0.0498	0.0686	0.0807	0.0848	0.0807	0.0686	0.0498	0.0262	0.0000
t8=0.30	0.0160	0.0235	0.0304	0.0419	0.0492	0.0518	0.0492	0.0419	0.0304	0.0160	0.0000
t9=0.35	0.0098	0.0143	0.0186	0.0256	0.0301	0.0316	0.0301	0.0256	0.0186	0.0098	0.0000
t10=0.40	0.0060	0.0088	0.0113	0.0156	0.0184	0.0193	0.0184	0.0156	0.0113	0.0060	0.0000
t11=0.45	0.0036	0.0053	0.0069	0.0095	0.0112	0.0118	0.0112	0.0095	0.0069	0.0036	0.0000
t12=0.50	0.0022	0.0033	0.0042	0.0058	0.0068	0.0072	0.0068	0.0058	0.0042	0.0022	0.0000

Cuadro 3.1.1: Solución por el método de separación de variables

3.2 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

El Método consiste en una aproximación de derivadas parciales por expresiones algebraicas envolviendo los valores de la variable dependiente en un limitado número de puntos seleccionados.

Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, escritas en términos de los valores de la variable dependiente en puntos seleccionados dentro de la región de solución, con sus valores en algunos puntos vecinos. En base a esto la solución por diferencias finitas básicamente involucra 3 pasos:

Desratización, Aproximación de la ecuación diferencial y Solución de las ecuaciones de diferencia.

3.2.1 DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO

Consideremos el dominio como el intervalo $\Omega = [0,1]$ este dominio es dividido en un número finito de sub dominios o subintervalos igualmente espaciados de longitud Δx el cual es un número real positivo.

DEFINICIÓN 3.2.1.- Sea Δx un número real positivo, llamado diferencia finita;

una malla en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de puntos $\tau = \{x_n\} \subset \Omega$, tal que cada x_n está en el interior o en la frontera de un subdominio y satisface.

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad \text{y} \quad x_{n-1} = x_n - \Delta x$$

Es decir se cumple $\Delta x = x_n - x_{n-1}$

Estos puntos también se llaman nodos y la forma de elección no es única, la obtención de subdominios junto con la elección de los nodos se denomina discretización del dominio Ω .

En la figura 3.2.1 se presenta al punto x_n de la malla, localizado entre los puntos x_{n-1} y x_{n+1} .

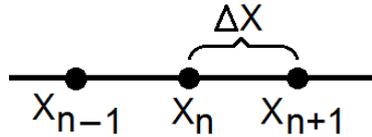


Figura 3.2.1: malla unidimensional

Una de las elecciones más comunes para los nodos son aquellos ubicados en la frontera del subdominio, es decir, sus coordenadas son de la forma:

$$x_n = n \Delta x; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

siendo N el número de subdominios, también se puede elegir en el interior del subdominio.

3.2.2 DISCRETIZACIÓN DE LA VARIABLE

DEFINICIÓN 3.2.2.- Una función discreta v , es aquella que está definida en

una malla τ , tal que a cada punto x_n le asocia un número

$$u_n.$$

OBSERVACIÓN. -

Si tenemos una función continua $u(t)$ definida en $\Omega \subset \mathbb{R}$, se asocia una función discreta, es decir u es discretizado sobre la malla, definiendo $u_n = u(x_n)$.

Cuando la subdivisión del dominio no es uniforme, se tiene una sucesión de diferencias $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ para cada n .

Supongamos que $u_n = 0$ para $|n| > N$, donde N es suficientemente grande tal que $x_n \notin \Omega$, denotando la función discreta por: $u = \{u_n\}$ y $n \in \mathbb{Z}$, es decir $u = \{u_n\} = (\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots)$.

DEFINICIÓN 3.2.3.- Sean $f = \{f_n\}$ y $g = \{g_n\}$ dos funciones discretas definidas sobre una malla τ , el producto interno de f y g se define por: $\langle f, g \rangle_h = \sum_n h f_n g_n$, donde h es un factor de escala asociado

al tamaño de la malla $h = \max_n \{x_{n+1} - x_n\}$

De la definición anterior se obtiene la L_2 - norma o norma euclidiana.

$$\|f\| = (\langle f, f \rangle_h)^{1/2} = \left(\sum_i h f_i^2 \right)^{1/2}$$

Existen otras normas para funciones discretas tales como:

La norma de la suma $\|f\| = \sum_i h |f_i|$

la norma del máximo $|f|_x = \max_i h |f_i|$

3.2.3 DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una aproximación en diferencia a una derivada acopla la información en los puntos vecinos de una malla, este acoplamiento se realiza con la serie de Taylor de una función en una vecindad del punto. Así la expansión de $u(x + \Delta x)$ alrededor del punto x es:

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \frac{du}{dx} \Delta x + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.2.1)$$

Utilizando la nomenclatura para la versión discreta, esta serie de Taylor puede ser escrita como:

$$u_{n+1} = u_n + \left(\frac{du}{dx}\right)_n \Delta x + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_n \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_n \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.2.2)$$

De la misma forma, el valor de $u(x - \Delta x)$ puede ser escrito como u_{n-1} y expandido como:

$$u_{n-1} = u_n - \left(\frac{du}{dx}\right)_n \Delta x + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_n \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_n \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (3.2.3)$$

Resolviendo para la primera derivada se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_n &= \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} - \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_n \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_n \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \\ &= \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} + O(\Delta x) \dots \dots \dots (3.2.4) \end{aligned}$$

Donde $O(\Delta x)$ denota el término que contiene la primera y las potencias mayores de (Δx) y si esta serie es truncada después del primer término tenemos una diferencia finita que aproxima la primera derivada en el punto n , esto es:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_n \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} \dots \dots \dots (3.2.5)$$

El error de truncamiento que resulta de esta aproximación se dice que es de orden de Δx , por que (Δx) aparece en el primer término de la serie truncada.

Por lo tanto el error de truncación en la ecuación (3.2.3) se dice que es de primer orden es decir es exacta de primer orden, la precedente aproximación se realiza en el punto n y utiliza el punto $n + 1$ por lo que se llama una aproximación de diferencia hacia adelante.

De la misma manera, podemos derivar la aproximación de la diferencia hacia atrás de la ecuación (3.2.5) como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_n &= \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x} + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_n \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_n \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \\ &= \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ \left(\frac{du}{dx}\right)_n &\approx \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x} \end{aligned}$$

La cual es también exacta de primer orden.

Una aproximación de diferencia más precisa que la de primer orden, es la obtenida substrayendo la ecuación (3.2.3) de la ecuación (3.2.2) y du/dx , entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_n &= \frac{u_{n+1} - u_n}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \\ &\approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} \end{aligned}$$

Esta aproximación es llamada diferencia central porque está centrada en el punto n . Las diferencias hacia adelante y hacia atrás también pueden ser diferencias centrales, pero no centradas en el punto n sino en los puntos $(n+1/2)$ y en $(n-1/2)$ respectivamente.

Para obtener una aproximación de diferencia finita de la segunda derivada, las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.2) son sumadas, y el resultado es resuelta para d^2u/dx^2 , generando

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

El primer término del lado derecho es usado para una aproximación de diferencia finita para la segunda derivada, es decir;

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_n \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2}$$

Esta aproximación de la segunda derivada se llama diferencia central segunda, siendo el error de truncamiento de segundo orden.

3.2.4 PROPIEDADES DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

1. $\Delta(u_k + u_1) = \Delta u_k + \Delta u_1$
2. $\Delta(u_k - u_1) = \Delta u_k - \Delta u_1$
3. $\Delta(\alpha u_k) = \alpha \Delta u_k, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\Delta^n u_k = \Delta(\Delta^{n-1} u_k)$
5. $\Delta^n (\Delta^m u_k) = \Delta^{n+m} u_k$

3.3 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

3.3.1 ECUACIÓN DE CALOR UNIDIMENSIONAL DEL TIPO PARABOLICO

Consideremos la ecuación de calor unidimensional:

$$u_t(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t) \text{ para } 0 \leq x < a \text{ y } 0 < t < b \dots\dots\dots(3.3.1)$$

con la condición inicial

$$u(x,0) = f(x) \text{ para } t = 0 \text{ y } 0 \leq x \leq a$$

y con las condiciones de contorno

$$u(0,t) = g_1(t) \cong c_1 \text{ para } x = 0 \text{ y } 0 \leq t \leq b$$

$$u(a,t) = g_2(t) \cong c_2 \text{ para } x = a \text{ y } 0 \leq t \leq b$$

La ecuación de calor modela la distribución de temperaturas en un alambre aislado, cuyos extremos se mantienen a temperaturas constantes c_1 y c_2 , a partir de una distribución inicial de temperaturas a lo largo del alambre $f(x)$.

3.3.2 DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR UNIDIMENSIONAL DEL TIPO PARABÓLICO

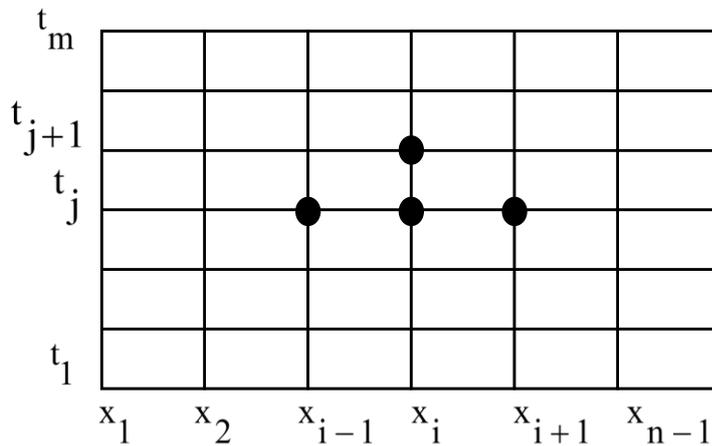


Figura 3.3.1 malla para resolver $u_t(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t)$ en la región R .

Dividimos el rectángulo $R = \{(x,t) : 0 \leq x \leq a; 0 \leq t \leq b\}$ en $n-1$ por $m-1$ rectángulos de lados $\Delta x = h$ y $\Delta t = k$, como se muestra en la Figura 3.3.1 empezando en la fila de más abajo, donde $t = t_1 = 0$ y la solución es $u(x_i, t_j) = f(x_i)$, desarrollamos un método para calcular las aproximaciones a los valores exactos $u(x,t)$ en los puntos de la malla $\{u_{i,j} \approx u(x_i, t_j) : i = 1, 2, \dots, n\}$, para $j = 2, 3, \dots, m$.

Como la malla rectangular está compuesta por líneas verticales separadas entre si en h unidades y líneas horizontales con separación entre si de k unidades entonces seleccionamos dos enteros positivos n y m para definir: $h = \frac{a}{n}$ y $k = \frac{b}{m}$ donde las líneas verticales y horizontales de la retícula estarán definidas mediante: $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ y $t_j = jk$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

Usando la fórmula de diferencia finitas para la primera derivada y segunda derivada respectivamente se tiene:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$u_t(x, t) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + O(k) \dots \dots \dots (3.3.2)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + O(h^2) \dots \dots \dots (3.3.3)$$

Teniendo en cuenta que el tamaño de los rectángulos de la malla es uniforme en cada fila: $x_{i+1} = x_i + h$ y $x_{i-1} = x_i - h$ y en cada columna: $t_{j+1} = t_j + k$, despreciando los términos $O(k)$ y $O(h^2)$, usando la aproximación u_i^j en vez de $u(x_i, t_j)$ en las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3) y sustituyendo lo que se obtiene en la ecuación de calor (3.3.1) queda como:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \alpha \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \alpha \frac{k}{h^2} \left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j \right)$$

Despejando u_i^{j+1} finalmente tenemos:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \lambda \left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j \right), \text{ donde } \lambda = \alpha \frac{k}{h^2}$$

que es la fórmula para la ecuación de calor donde se necesita los valores de:

$$u_{i-1}^j, u_i^j \text{ y } u_{i+1}^j.$$

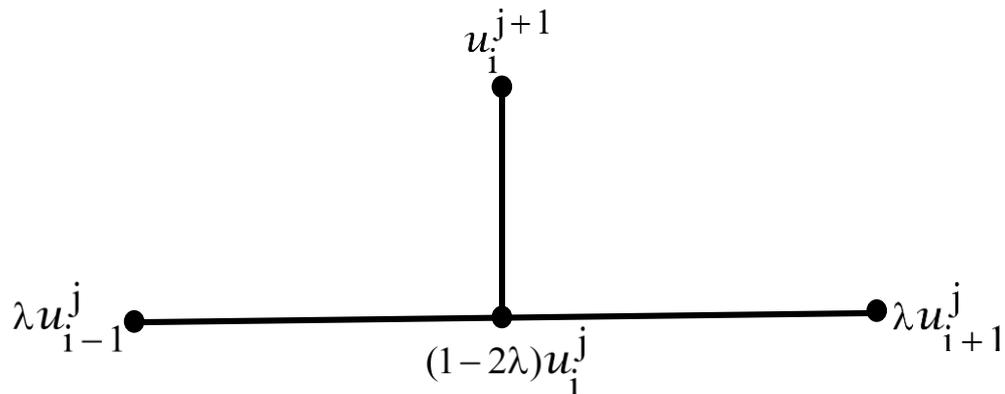
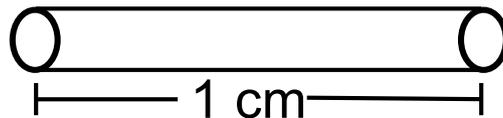


Figura 3.3.2: Esquema de la ecuación en diferencias para la ecuación de calor

Consideremos una varilla de 1 cm. de longitud, como se muestra en el gráfico y con una temperatura inicial de 0° C.



Identifiquemos primero los datos: la constante $\alpha = 1 \text{ cm}^2 / \text{s}$, $a = 1$ y $t = 0.5$,

seleccionemos $n = 5$ y $m = 50$, entonces $h = \frac{a}{n} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ cm}$;

$$k = \frac{b}{m} = \frac{0.5}{50} = 0.01 \text{ s},$$

luego calculemos el valor de λ : $\lambda = \alpha \frac{k}{h^2} = 1 \frac{0.01}{(0.2)^2} = 0.25$

Reemplazando en la fórmula de discretización:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \lambda \left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j \right)$$

$$u_2^2 = 0.3090 + 0.25(0.5878 - 2(0.3090) + 0) = 0.3015$$

$$u_3^2 = 0.5878 + 0.25(0.8090 - 2(0.5878) + 0.3090) = 0.5734$$

$$u_4^2 = 0.8090 + 0.25(0.9511 - 2(0.8090) + 0.5878) = 0.7892$$

$$u_5^2 = 0.9511 + 0.25(1 - 2(0.9511) + 0.8090) = 0.9278$$

$$u_6^2 = 1 + 0.25(0.9511 - 2(1) + 0.9755) = 0.9755$$

$$u_7^2 = 0.9511 + 0.25(0.8090 - 2(0.9511) + 1) = 0.9278$$

$$u_8^2 = 0.8090 + 0.25(1 - 2(0.9511) + 0.8090) = 0.7892$$

$$u_9^2 = 0.5878 + 0.25(0.3090 - 2(0.5878) + 0.8090) = 0.5734$$

$$u_{10}^2 = 0.3090 + 0.25(0 - 2(0.3090) + 0.5878) = 0.3015$$

$$u_2^3 = 0.3015 + 0.25(0.5734 - 2(0.3015) + 0) = 0.2941$$

$$u_3^3 = 0.5734 + 0.25(0.7892 - 2(0.3015) + 0.3015) = 0.5594$$

$$u_4^3 = 0.7892 + 0.25(0.9278 - 2(0.9511) + 0.8090) = 0.7892$$

$$u_5^3 = 0.9278 + 0.25(0.9755 - 2(0.9278) + 0.7892) = 0.9051$$

$$u_6^3 = 0.9755 + 0.25(0.9278 - 2(0.9755) + 0.9278) = 0.9517$$

$$u_7^3 = 0.9278 + 0.25(0.7892 - 2(0.9278) + 0.9755) = 0.9051$$

$$u_8^3 = 0.7892 + 0.25(0.5734 - 2(0.7892) + 0.9278) = 0.7699$$

$$u_9^3 = 0.5734 + 0.25(0.3015 - 2(0.5734) + 0.7892) = 0.5594$$

$$u_{10}^3 = 0.3015 + 0.25(0.0773 - 2(0.3015) + 0.5734) = 0.3134$$

$$u_2^4 = 0.2941 + 0.25(0.5594 - 2(0.2941) + 0) = 0.2869$$

$$u_3^4 = 0.5594 + 0.25(0.7699 - 2(0.5594) + 0.2941) = 0.5457$$

$$u_4^4 = 0.7699 + 0.25(0.9051 - 2(0.7699) + 0.5594) = 0.7511$$

$$u_5^4 = 0.9051 + 0.25(0.9517 - 2(0.9051) + 0.7699) = 0.8829$$

$$u_6^4 = 0.9517 + 0.25(0.9051 - 2(0.9517) + 0.9051) = 0.9284$$

$$u_7^4 = 0.9051 + 0.25(0.7699 - 2(0.9051) + 0.9517) = 0.8829$$

$$u_8^4 = 0.7699 + 0.25(0.5594 - 2(0.7699) + 0.9051) = 0.7511$$

$$u_9^4 = 0.5594 + 0.25(0.3134 - 2(0.5594) + 0.7699) = 0.5505$$

$$u_{10}^4 = 0.3134 + 0.25(0.1140 - 2(0.3134) + 0.5594) = 0.3250$$

$$u_2^5 = 0.2869 + 0.25(0.5457 - 2(0.2869) + 0) = 0.2799$$

$$u_3^5 = 0.5457 + 0.25(0.7511 - 2(0.5457) + 0.2869) = 0.5323$$

$$u_4^5 = 0.7511 + 0.25(0.8829 - 2(0.7511) + 0.5457) = 0.7327$$

$$u_5^5 = 0.8829 + 0.25(0.9284 - 2(0.8829) + 0.7511) = 0.8613$$

$$u_6^5 = 0.9284 + 0.25(0.8829 - 2(0.9284) + 0.8829) = 0.9056$$

$$u_7^5 = 0.8829 + 0.25(0.7511 - 2(0.8829) + 0.9284) = 0.8613$$

$$u_8^5 = 0.7511 + 0.25(0.5505 - 2(0.7511) + 0.8829) = 0.7339$$

$$u_9^5 = 0.5505 + 0.25(0.3250 - 2(0.5505) + 0.7511) = 0.5443$$

$$u_{10}^5 = 0.3250 + 0.25(0.1353 - 2(0.3250) + 0.5505) = 0.3340$$

Se tiene el siguiente cuadro:

		x1 =0	x2=0.1	x3=0.2	x4=0.3	x5=0.4	x6=0.5	x7=0.6	x8=0.7	x9=0.8	x10=0.9	x11=1
		0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
t1=0	0.00	0.00	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1.0000	0.9511	0.8090	0.5878	0.3090	0.0000
t2=1	0.10	0.00	0.3015	0.5734	0.7892	0.9278	0.9755	0.9278	0.7892	0.5734	0.3015	0.0773
t3=2	0.20	0.00	0.2941	0.5594	0.7699	0.9051	0.9517	0.9051	0.7699	0.5594	0.3134	0.1140
t4=3	0.30	0.00	0.2869	0.5457	0.7511	0.8829	0.9284	0.8829	0.7511	0.5505	0.3250	0.1353
t5=4	0.40	0.00	0.2799	0.5323	0.7327	0.8613	0.9056	0.8613	0.7339	0.5443	0.3340	0.1489
t6=5	0.50	0.00	0.2730	0.5193	0.7148	0.8402	0.8835	0.8405	0.7183	0.5391	0.3403	0.1580
t7=6	0.60	0.00	0.2663	0.5066	0.6973	0.8197	0.8619	0.8207	0.7041	0.5342	0.3444	0.1641
t8=7	0.70	0.00	0.2598	0.4942	0.6802	0.7996	0.8411	0.8019	0.6908	0.5292	0.3468	0.1681
t9=8	0.80	0.00	0.2535	0.4821	0.6636	0.7801	0.8209	0.7839	0.6782	0.5240	0.3477	0.1708
t10=9	0.90	0.00	0.2473	0.4703	0.6473	0.7612	0.8015	0.7667	0.6661	0.5185	0.3476	0.1723

Cuadro 3.3.3: Discretización de la ecuación de calor

Utilizando el cuadro 3.1.1 y comparando con el cuadro 3.3.3 tenemos una muestra de los valores con sus aproximaciones respectivas correspondientes.

Exacta	Aproximación
$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \text{sen}(\pi x)$	$u_i^{j+1} = u_i^j + \lambda \left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j \right)$
$u(0.3;0.10) = 0.3015$	$u_{10}^2 = 0.3015$
$u(0.1;0.025) = 0.2414$	$u_2^{10} = 0.2412$
$u(0.25;0.025) = 0.5525$	$u_9^3 = 0.5505$
$u(0.25;0.10) = 0.2635$	$u_2^6 = 0.2663$
$u(0.30;0.025) = 0.6321$	$u_4^{10} = 0.6315$
$u(0.35;0.025) = 0.6962$	$u_4^6 = 0.6973$
$u(0.40;0.025) = 0.7431$	$u_5^{10} = 0.7428$
$u(0.35;0.050) = 0.5440$	$u_9^5 = 0.5443$
$u(0.5;0.025) = 0.7813$	$u_5^9 = 0.7801$

Cuadro 3.3.4: comparación de soluciones de ambos métodos

3.3.3 ORDEN DE APROXIMACIÓN $O(h^n)$

DEFINICIÓN 3.3.1.- Se dice que una función $f(h)$ es de orden $g(h)$ cuando

$$h \rightarrow 0, \text{ y se denota por } f(h) = O(g(h)), \text{ si existen}$$

constantes C y c tales que:

$$|f(h)| \leq C|g(h)| \text{ siempre que } |h| \leq c$$

DEFINICIÓN 3.3.2.- Sea la función $p(h)$ que aproxima a la función $f(h)$ y que

existen una constante real $M > 0$ y un número natural n

tales que $\frac{|f(h) - p(h)|}{|h^n|} \leq M$ para h suficientemente pequeño, entonces se dice

que $p(h)$ aproxima a $f(h)$ con orden de aproximación $O(h^n)$, y escribe

$$f(h) = p(h) + O(h^n).$$

Escribiendo la relación $\frac{|f(h) - p(h)|}{|h^n|} \leq M$ como $|f(h) - p(h)| \leq M|h^n|$, vemos que

$O(h^n)$ es el lugar de la cota del error $M|h^n|$.

DEFINICIÓN 3.3.3.- Sean las funciones $f(h) = p(h) + O(h^n)$, $g(h) = q(h) + O(h^m)$ y sea $r = \min\{m, n\}$, entonces se cumple:

- i) $f(h) + g(h) = p(h) + q(h) + O(h^r)$
- ii) $f(h)g(h) = p(h)q(h) + O(h^r)$
- iii) $\frac{f(h)}{g(h)} = \frac{p(h)}{q(h)} + O(h^r)$, con $g(h) \neq 0$ y $q(h) \neq 0$

DEFINICIÓN 3.3.4.- Sea la función $f \in C^{n+1}[a, b]$, si x_0 y $x = x_0 + h$ están en

$$[a, b], \text{ entonces } f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + O(h^{n+1}).$$

PROPIEDADES ORDEN DE APROXIMACIÓN

- i) $O(h^p) + O(h^p) = O(h^p)$
- ii) $O(h^p) + O(h^q) = O(h^r)$, siendo $r = \min\{p, q\}$
- iii) $O(h^p)O(h^q) = O(h^s)$, siendo $s = p + q$

3.3.4 CONSISTENCIA, ORDEN DE PRECISION, ESTABILIDAD Y

CONVERGENCIA

DEFINICIÓN 3.3.5.- Dada la condición inicial $u_0(x)$, para la cual existe una solución $u(x, t)$ de la ecuación diferencial parcial. Un

esquema de diferencias finitas de un solo paso que aproxima la ecuación diferencial parcial se dice que es un esquema convergente si todas las soluciones u_j^n , dadas por el esquema de diferencias finitas tal que u_j^0 converge

a $u_0(x)$ cuando $j h \rightarrow x$; se cumple $u_j^n \rightarrow u(x, t)$ siempre que $(j h, n k) \rightarrow (x, t)$ cuando $h, k \rightarrow 0$.

DEFINICIÓN 3.3.6.- Dada una ecuación diferencial parcial $P(\partial_t, \partial_x)u = f(x, t)$ y un esquema de diferencias finitas $P_{h,k}u = f$; decimos que el esquema de diferencias finitas es consistente con la ecuación diferencial parcial, si para cualquier función suave $\Phi(x, t)$ se cumple $P\Phi - P_{h,k}\Phi \rightarrow 0$ cuando $h, k \rightarrow 0$ donde la convergencia es puntual, en cada punto de la malla.

OBSERVACIONES

- 1.- En algunos esquemas se necesita precisar la forma en que h y k tienden a cero a fin de obtener la consistencia.
- 2.- Cuando nos referimos a una curva suave, se entiende que es una función suficientemente diferenciable.
- 3.- En el esquema de diferencias finitas, el operador de diferencias $P_{h,k}$ es el que caracteriza tal esquema, el cual puede estar definido en función de los operadores discretos conocidos.

DEFINICIÓN 3.3.7.- $P_{h,k}$ es consistente con P hasta un tiempo T en una

$$\text{norma } \|\cdot\|, \text{ si y solo si } \left\| P_{h,k}\Phi - P\Phi \right\| = \|k\tau(h)\|; \text{ y } \tau(h) \rightarrow 0$$

cuando $k \rightarrow 0$.

$\tau(h)$ es el error de truncamiento local en tiempo n_k .

DEFINICIÓN 3.3.8.- un esquema de diferencias finitas es convergente en la

$$\text{norma } \|\cdot\|, \text{ si y solo si } \left\| u_i^j - v_i^j \right\| \rightarrow 0 \text{ cuando } h, k \rightarrow 0.$$

es convergente de orden (p, q) en la norma $\|\cdot\|$ si y solo si

$$\left\| u_i^j - v_i^j \right\| = O(h^p) + O(k^q)$$

3.3.5 ESTABILIDAD

DEFINICIÓN 3.3.9.- Un problema de valor inicial se dice que está bien definido en una norma $\|\cdot\|$ si y solamente si existe solución, es única y depende continuamente de los datos iniciales, es decir existe una constante C y α tal que

$$\|u(x,t)\| \leq Ce^{\alpha t} \|u_0(x)\| \dots\dots\dots(3.3.4)$$

DEFINICIÓN 3.3.10.- El método de diferencias finitas para la ecuación de calor unidimensional se dice que es estable si $\lambda \leq 0.5$; es decir, siempre que $2c^2 k \leq h^2$.

Si tomamos $h = 0.01$ y $c = 10$, debemos tomar $k \leq 5 \cdot 10^{-5}$ que puede resultar demasiado pequeño si no queremos que se prolongue el número de operaciones que debemos realizar.

DEFINICIÓN 3.3.11.- Un esquema de diferencias finitas $P_{h,k} u_i^j = 0$ es estable si y solamente si existen constantes K, β y alguna norma $\|\cdot\|$ tal que $\|u^n\| \leq Ke^{\beta t} \|u^0\|$, $t = nk$, K, β independiente de h, k

DEFINICIÓN 3.3.12.- Un esquema de diferencias finitas es cualquier esquema que puede escribirse en la forma: $u_i^{j+1} = Qu_i^j$, donde Q es operador de diferencias lineal.

En general, cuando el esquema es de múltiple paso, se puede escribir:

$$u_i^{j+1} = \sum_{\sigma=0}^n Q_{\sigma} u_i^{j-\sigma}, \quad \sigma \leq n$$

3.3.6 ESTABILIDAD DE VON NEWMANN

3.3.6.1 CONDICIÓN DE ESTABILIDAD DE VON NEWMANN

El factor de amplificación $g(\theta, k, h)$ se dice que satisface la condición de Von Neumann, si existe una constante $C > 0$ (independientes de θ, k, h) tal que $|g(\theta, k, h)| \leq 1 + Ck$, k es el paso del tiempo.

TEOREMA 3.3.1.- Un esquema de diferencias finitas es estable en la norma L^2 si y solo si satisface la condición de Von Neumann.

si $g(\theta, k, h) = g(\theta)$ entonces la condición de Von Neumann se puede sustituir por:

$$|g(\theta)| \leq 1.$$

TEOREMA 3.3.2 (teorema de Lax).- Sea un esquema de diferencias finitas

estable y consistente con orden de precisión (p, q) . Entonces el esquema es convergente de orden (p, q) .

DEMOSTRACIÓN

Un esquema lineal, de un solo paso, con coeficientes constantes se escribe en la siguiente forma:

$$u_j^{n+1} = Qu_j^n, \quad n \geq 0 \dots\dots\dots(3.3.4)$$

donde $Q = Q_{h,k}$, de acuerdo a esto se tiene:

$$\begin{aligned} u^n &= Qu^{n-1} = Q(Qu^{n-2}) \\ &= \dots Q^{n-1}(Qu^0) = Q^n u^0 \end{aligned}$$

donde Q^n es el operador de diferencias finitas Q aplicado n veces.

desde que el esquema es estable. Para todo $T > 0$, existe $C_T > 0$ tal que

$$\|u^n\|_h^2 \leq C_T \|u^0\|_h^2$$

Usando (3.3.4), tenemos que

$$\|Qu^{n-1}\|_h^2 \leq C_T \|u^0\|_h^2 \leftrightarrow \|Q^n u^0\|_h^2 \leq C_T \|u^0\|_h^2$$

Sea $u(x,t)$ una solución de la ecuación $Pu=0$. Como el esquema es consistente con orden de precisión (p,q) se cumple, con

$$P_{h,k} u = (Iu^{n+1} - Qu^n)$$

$$P_{h,k} u = P_{h,k} u - Pu = O(h^p) + O(k^q)$$

Es decir $u^n = Q^{n-1}u + O(h^p) + O(k^q)$

Sea $W^n = u^n - v^n$ el error en el n -ésimo paso, con $W^0 = u^0 - v^0 = 0$, entonces, se cumple

$$\begin{aligned} W^n &= QW^{n-1} + O(h^p) + O(k^q) \\ &= Q^2W^{n-2} + Q(O(h^p) + O(k^q)) + O(h^p) + O(k^q) \end{aligned}$$

sucesivamente

$$\begin{aligned} &= Q^n W^0 + \sum_{j=0}^{n-1} Q^j (O(h^p) + O(k^q)) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} Q^j (O(h^p) + O(k^q)) \end{aligned}$$

de esto se obtiene

$$\|W^n\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|Q^j\| (O(h^p) + O(k^q))$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} C_{T_j} (O(h^p) + O(k^q)), \quad T_j \sim t_j = jk$$

$$= O(h^p) + O(k^q)$$

Por tanto el método es convergente de orden (p, q) .

TEOREMA 3.3.3.- Si un esquema de diferencias finitas es estable y consistente con orden de precisión $(1;2)$, entonces este esquema es convergente de orden $(1;2)$.

DEMOSTRACIÓN

a) Primero demostraremos la estabilidad del esquema utilizando el criterio de Von Newman, consideremos el siguiente esquema expresada en la forma:

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \lambda \left(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} \right); \quad \lambda > 0$$

despejando u_i^j tenemos:

$$u_i^j = (1 + 2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda u_{i+1}^{j+1} - \lambda u_{i-1}^{j+1}$$

sustituyendo u_i^j por $g^j e^{ic\theta}$, $(c = \sqrt{-1})$ tenemos:

$$g^j e^{ic\theta} = (1 + 2\lambda)g^{j+1} e^{ic\theta} - \lambda \left(g^{j+1} e^{(i+1)c\theta} - g^{j+1} e^{(i-1)c\theta} \right)$$

dividiendo por g^j tenemos:

$$e^{ic\theta} = (1 + 2\lambda)g e^{ic\theta} - \lambda \left(g e^{ic\theta} e^{c\theta} - g e^{ic\theta} e^{-c\theta} \right)$$

Multiplicando por $e^{-ic\theta}$ tenemos:

$$1 = (1 + 2\lambda)g - \lambda \left(g e^{c\theta} + g e^{-c\theta} \right)$$

Simplificando tenemos:

$$1 = g \left[1 - \lambda \left(e^{c\theta} - 2 + e^{-c\theta} \right) \right]$$

así tenemos el factor de amplificación de la forma:

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{1}{1 - \lambda(e^{c\theta} - 2 + e^{-c\theta})} \\
 &= \frac{1}{1 - \lambda \left(e^{\frac{c\theta}{2}} - e^{-\frac{c\theta}{2}} \right)^2}; \text{ como } e^{\frac{c\theta}{2}} - e^{-\frac{c\theta}{2}} = 2c \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{1 - \lambda(2c)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{1}{1 + 4\lambda \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}
 \end{aligned}$$

observemos que $|g| = g \geq 0$, por otro lado tenemos que $0 \leq \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \leq 1$ entonces

$$1 \leq 1 + 4\lambda \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \leq 1 + 4\lambda$$

de esto se tiene la desigualdad

$$0 < \frac{1}{1 + 4\lambda} \leq \frac{1}{1 + 4\lambda \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \leq 1$$

es decir

$$0 < g \leq 1 < 1 + k\theta$$

esta última desigualdad es la condición de Von Neumann, por consiguiente, el esquema es estable.

b) Demostremos ahora la consistencia y el orden de precisión utilizando la serie de Taylor.

Sea el operador diferencial continuo P dado por:

$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

el mismo que aplicado a una función suave ϕ se tiene

$$P\phi = \phi_t - \alpha \phi_{xx} \dots \dots \dots (3.3.5)$$

en tanto que el operador discreto $P_{k,h}$ aplicado a una variable discreta es el siguiente:

$$P_{k,h} u_i^j = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} - \alpha \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \dots\dots\dots(3.3.6)$$

Utilizando la función suave ϕ y desarrollando por la serie de Taylor en el punto (x_i, t_j) las expresiones: $\phi_i^{j-1} = \phi(x_i, t_j - k)$, $\phi_{i+1}^j = \phi(x_i + h, t_j)$ y

$\phi_{i-1}^j = \phi(x_i - h, t_j)$ tenemos:

para $\phi(x_i, t_j - k)$ en $\phi(x_i, t_j)$ es: $\phi(x_i, t_j - k) = \phi(x_i, t_j) - k\phi_t(x_i, t_j) + O(k^2)$,

en la notación de índices, tenemos:

$$\phi_i^{j-1} = \phi_i^j - k\phi_t + O(k^2) \dots\dots\dots(3.3.7)$$

para $\phi(x_i - h, t_j)$ en (x_i, t_j) es:

$\phi(x_i - h, t_j) = \phi(x_i, t_j) - \frac{1}{1!}h\phi_x(x_i, t_j) + \frac{1}{2!}h^2\phi_{xx}(x_i, t_j) - \frac{1}{3!}h^3\phi_{xxx}(x_i, t_j) + O(h^4)$ en

notación de índices se tiene:

$$\phi_{i-1}^j = \phi_i^j - h\phi_x + \frac{1}{2!}h^2\phi_{xx} - \frac{1}{3!}h^3\phi_{xxx} + O(h^4) \dots\dots\dots(3.3.8)$$

de manera similar para $\phi(x_i + h, t_j)$ en (x_i, t_j) , obtenemos:

$$\phi_{i+1}^j = \phi_i^j + h\phi_x + \frac{1}{2!}h^2\phi_{xx} + \frac{1}{3!}h^3\phi_{xxx} + O(h^4) \dots\dots\dots(3.3.9)$$

Las derivadas $\phi_t, \phi_x, \phi_{xx}, \phi_{xxx}$ son evaluadas en el punto $(x_i, t_j) = (ih, jk)$.

Sustituyendo las series (3.3.7), (3.3.8) y (3.3.9) en el operador discretizado

$P_{k,h} \phi_j^n$ dado en (3.3.6), obtenemos:

$$P_{k,h}\phi = \frac{1}{k} \left[\phi_i^j - \phi_i^j + k\phi_t + O(k^2) \right] - \frac{\alpha}{h^2} \left[\phi_i^j + h\phi_x + \frac{1}{2!}h^2\phi_{xx} + \frac{1}{3!}h^3\phi_{xxx} + O(h^4) - 2\phi_i^j + \phi_i^j - h\phi_x + \frac{1}{2!}h^2\phi_{xx} - \frac{1}{3!}h^3\phi_{xxx} + O(h^4) \right]$$

Simplificando se escribe como:

$$P_{k,h}\phi = \frac{1}{k} \left[k\phi_t + O(k^2) \right] - \frac{\alpha}{h^2} \left[h^2\phi_{xx} + O(h^4) + O(h^4) \right]$$

$$P_{k,h}\phi = (\phi_t + O(k)) - (\alpha\phi_{xx} + O(h^2) + O(h^2))$$

Simplificando y teniendo en cuenta la notación del operador diferencial P y por propiedad $O(h^2) + O(h^2) = O(h^2)$, tenemos:

$$\begin{aligned} P_{k,h}\phi &= \phi_t - \alpha\phi_{xx} + O(k) + O(h^2) \\ &= P\phi + O(k) + O(h^2) \end{aligned}$$

de donde tenemos la forma:

$$P\phi - P_{k,h}\phi = O(k) + O(h^2) \dots\dots\dots(3.3.10)$$

observando que

$$P\phi - P_{k,h}\phi \rightarrow 0, \text{ cuando } h, k \rightarrow 0$$

Luego el esquema de diferencias finitas es consistente para la ecuación diferencial parcial $u_t = \alpha u_{xx}$.

De la ecuación (3.3.10) vemos que el orden de precisión es (1,2), 1 en el tiempo y 2 en el espacio.

Por consiguiente, de a) y b) y por el teorema (3.3.2), el esquema es convergente.

CAPÍTULO IV
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS
A LA DESVIACIÓN DE UNA VIGA

Sea una viga de longitud L homogénea que tiene sección transversal uniforme en toda su longitud. Cuando no recibe carga alguna, incluyendo su propio peso, la curva que une los centroides de sus secciones transversales es una recta que se llama eje de simetría. Si a una viga se le aplica una carga en un plano vertical que contenga al eje de simetría, sufre una distorsión y la curva que une los centroides de las secciones transversales se llama curva de desviación, curva elástica o simplemente elástica. La elástica aproxima la forma de la viga. Supongamos que el eje x coincide con el eje de simetría y que la desviación $y(x)$ medida desde el eje, es positiva si es abajo. En teoría de la elasticidad se demuestra que el momento flexionante $M(x)$ en un punto x a lo largo de la viga, se relaciona con la carga por unidad de longitud $w(x)$ mediante la ecuación:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x) \dots\dots\dots(4.1)$$

Además, el momento flexionante $M(x)$ es proporcional a la curvatura k , de la elástica:

$$M(x) = EI k \dots\dots\dots(4.2)$$

Donde E e I son constantes, E es el módulo de Young de elasticidad del material de la viga e I es el momento de inercia de la sección transversal de ésta respecto de un eje llamado neutro y el producto EI se denomina rigidez a la flexión de la viga.

Según el cálculo diferencial, la curvatura es $k = \frac{y''}{\left[1 + y'^2\right]^{3/2}}$. Cuando la

desviación $y(x)$ es pequeña, la pendiente $y' \approx 0$, de modo que $\left[1 + y'^2\right]^{3/2} \approx 1$.

si $k = y''$, la ecuación (4.2) se transforma en $M(x) = EI y''$. La segunda derivada de esta ecuación es:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^2}{dx^2} y'' = EI \frac{d^4y}{dx^4} \dots\dots\dots(4.3)$$

Aplicamos el resultado de la ecuación (4.1) para reemplazar

$\frac{d^2M}{dx^2}$ en la ecuación (4.3) y vemos que la desviación $y(x)$ satisface la ecuación diferencial de cuarto orden:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = w(x) \dots\dots\dots(4.4)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w(x)}{EI} \dots\dots\dots(4.5)$$

Las condiciones en la frontera asociadas a esta ecuación dependen de la forma en que están sostenidos los extremos de la viga, una viga en voladizo esta empotrada en ambos extremos.

Para una viga en voladizo, la desviación $y(x)$ debe satisfacer las dos condiciones siguientes en el extremo empotrado en $x=0$:

$y(0) = 0$ porque no hay desviación en ese lugar, y $y'(0) = 0$ porque la curva de desviación es tangente al eje x , la pendiente de la curva de desviación es cero en ese punto.

Cuando $x = L$ las condiciones del extremo libre son:

$y''(L) = 0$ porque el momento flexionante es cero.

$y'''(L) = 0$ porque la fuerza cortante es cero.

La función $F(x) = \frac{dM}{dx} = EI \frac{d^3y}{dx^3}$ se llama fuerza cortante. Si un extremo de una

viga esta simplemente apoyado, se debe cumplir que $y(0) = 0$ y $y''(0) = 0$ en ese extremo. La tabla siguiente es un resumen de las condiciones en la frontera asociadas con la ecuación (4.5).

EXTREMOS DE LA VIGA	CONDICIONES EN LA FRONTERA
Empotrado	$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
Libre	$y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
Simplemente apoyado	$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0$

4.1.- MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS. -

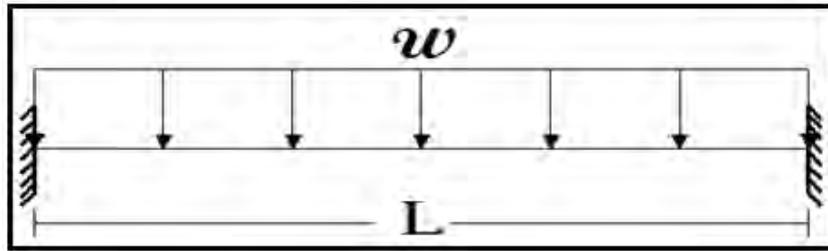


Figura 4.1.- Modelo de viga empotrada-empotrada

Se ilustra el cálculo de los desplazamientos de una viga empotrada-empotrada sometida a la carga rectangular indicada en la figura 4.1 para ello se debe resolver la siguiente ecuación diferencial por el proceso de discretización.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w_0}{EI} \dots \dots \dots (4.8)$$

La ecuación (4.8) se cumple en todos los puntos de la viga, cuando se resuelve con diferencias finitas, se discretiza el dominio, como se muestra en la figura 4.1 y la ecuación diferencial se escribe en forma de operadores; con esto la ecuación es exacta en los puntos discretos y aproximada en los tramos de los puntos.

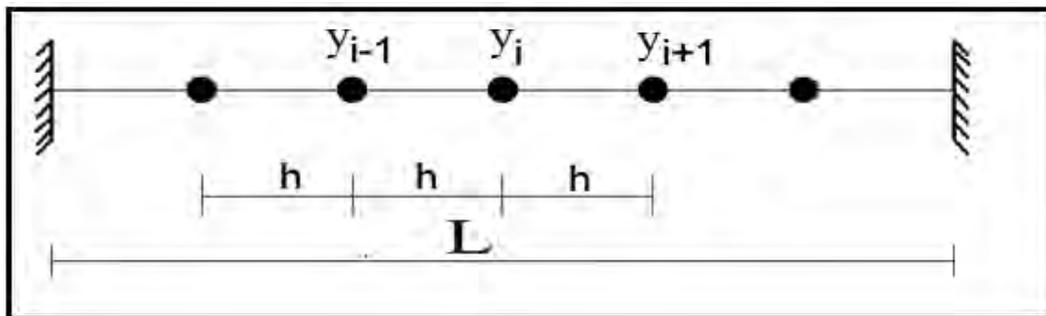


Figura 4.2.- Discretización del dominio para una viga empotrada-empotrada

El paso h es igual a la longitud del elemento dividido para el número de divisiones N. En la figura 4.2 se ha notado con y_i a un punto cualquiera, el que está a la derecha será el punto y_{i+1} y el que está a la izquierda será y_{i-1} .

La ecuación diferencial (4.8) que va a resolver se puede escribir de la siguiente forma:

$$y_{xxxx} = \frac{w_0}{EI} \dots \dots \dots (4.9)$$

donde w_0 en este ejemplo de viga continua siempre va ser constante sea cual sea el punto donde se quiera analizar la deflexión.

Utilizando la propiedad 3 de (3.2.4) para la cuarta derivada, tenemos:

$$y_{xxxx} = \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{h^4} \dots \dots \dots (4.10)$$

Al reemplazar la ecuación (4.10) en (4.9) obtenemos:

$$\frac{EI}{h^4} (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) = W_0 \dots \dots \dots (4.11)$$

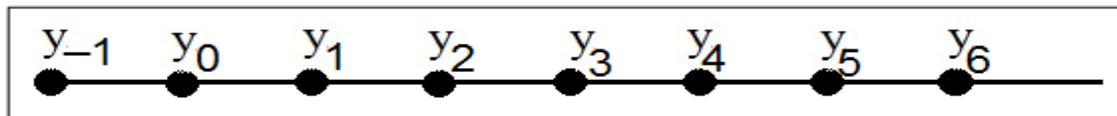


Figura 4.3. Identificación de varios puntos discretos cercanos al nudo inicial

El primer punto discreto de un elemento en el nudo inicial se le identifica como y_0 y el último punto en el nudo final se le identifica con y_n .

La ecuación (4.10) se aplica desde el punto y_1 hasta el punto y_{n-1} , ya que los desplazamientos en el empotramiento valen cero, entonces serían puntos conocidos.

El procedimiento para encontrar el desplazamiento en el punto y_1 es aplicar la ecuación 4.10 y pivotar en el mismo es decir $y_i = y_1$, y nos damos cuenta que se necesita un punto auxiliar que no existe a la izquierda del nudo inicial, el mismo que se identifica en la Figura 4.5 como y_{-1} . Al igual que cuando vamos a encontrar el desplazamiento en el punto y_{n-1} , vamos a necesitar otro punto auxiliar a la derecha del nudo final, el cual identificamos como y_{n+1} . Estos puntos auxiliares se deben expresar en función de los puntos reales, para ello a continuación se hace la demostración.

Conocemos el giro en punto 0, que es igual cero debido al empotramiento. Entonces, para demostración partimos de este dato, pues el giro es la primera derivada del desplazamiento con respecto a x .

$$\theta = \frac{dy}{dx} = y_x \dots \dots \dots (4.12)$$

Entonces el sistema (4.13) quedaría

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & & & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & & \\ & & & & & & 1 & -4 & & & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_o \\ P_o \\ P_o \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_o \\ P_o \end{bmatrix}$$

Una vez que ya tengamos resuelto el sistema obtendremos los valores de los desplazamientos en cada punto discreto. Teniendo los desplazamientos se podría decir que está resuelta la viga empotrada-empotrada, ya que el momento es la segunda derivada del desplazamiento y el los cortes con la tercera derivada, que junto con diferencias finitas tendremos los valores de los mismos. Para el momento

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$M = \frac{EI}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \dots \dots \dots (4.15)$$

Para el cortante

$$y = -EI \frac{d^3 u}{dx^3}$$

$$y = -\frac{EI}{2h^3} (-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}) \dots \dots \dots (4.16)$$

Convención de signos

El desplazamiento vertical es positivo si se dirige hacia abajo.

4.2.- RESULTADOS:

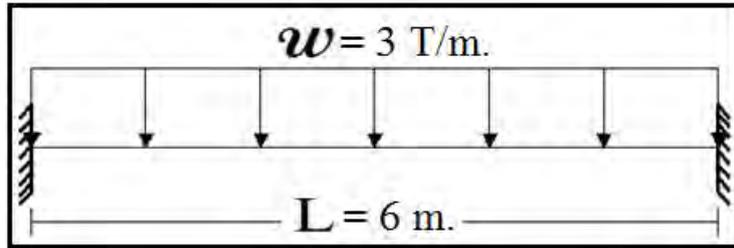


Figura 4.4.- Modelo de viga empotrada - empotrada con datos

Datos

$L = 6 \text{ m.}$; Longitud de la viga

$W = 3 \text{ T / m.}$; carga uniformemente distribuida

$E = 21000000 \text{ T / m}^2$; Módulo de elasticidad

$a = 0.3 \text{ m}$; ancho de la viga

$d = 0.45 \text{ m}$; alto de la viga

$n = 15$; Número de puntos discretos al interior de la viga

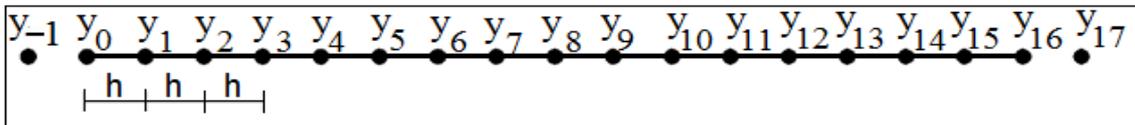


Figura 4.5.- Discretización de la viga

Este problema se resuelve utilizando el programa computacional Matlab para al modelo de viga empotrada - empotrada, el cual calcula el vector desplazamiento y las reacciones del empotramientos en los dos nudos.

$l = 0.0023$

$EI = 4.7841\text{e}+04$

Matriz S multiplicada por EI/h^4

EI = 1.0e+07*

$$S = \begin{bmatrix} 1.6934 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 & 0.2419 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.4515 & -0.9677 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2419 & -0.9677 & 1.6934 \end{bmatrix}$$

MOMENTOS

El momento de empotramiento en el nudo inicial es: $M_a = 8.9648$

El momento de empotramiento en el nudo final es: $M_b = -8.9648$

La reacción vertical en el nudo inicial es: $R_a = 7.3125$

La reacción vertical en el nudo final es: $R_b = 7.3125$

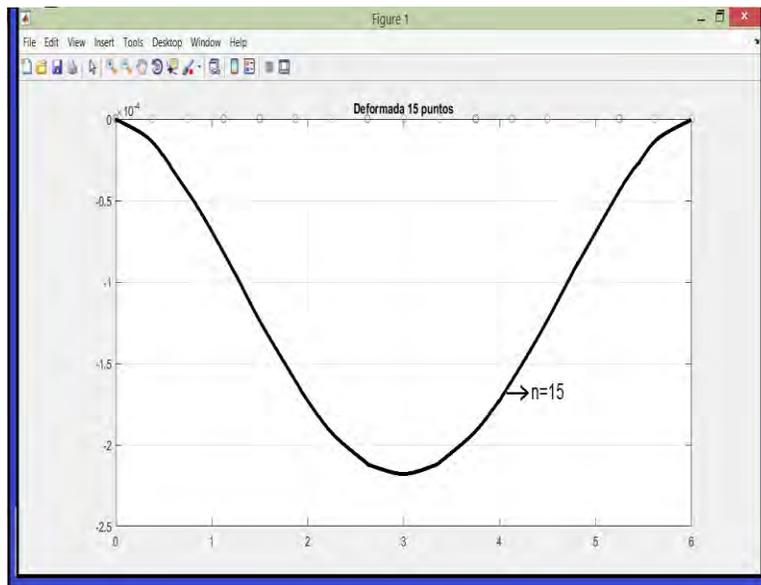


Figura 4.6.- Resultado

CONCLUSIONES

A continuación, se tiene las conclusiones a las que se ha llegado con el presente trabajo de investigación:

- El método de diferencias finitas nos permite determinar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico utilizando la discretización de la ecuación diferencial.
- La solución de las ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico determinada mediante el método clásico de separación de variables y el de diferencias finitas son semejantes y muy aproximadas, como se muestra en el cuadro 3.4.4 siendo el método de diferencias finitas el mas optimo.
- Debido al avance tecnológico es posible encontrar la solución a una aplicación de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas utilizando el programa computacional Matlab que nos permite acelerar los procesos y a visualizar geoméricamente nuestros resultados

SUGERENCIAS

- Continuar con el estudio sobre Ecuaciones Diferenciales Parciales y sus aplicaciones en las diferentes áreas de Ciencia e Ingeniería como el estudio de estructuras compuestas por barras, estructuras masivas tales como muros, silos, tanques, presas, etc.
- Utilizar como guía para los estudiantes de la Escuela Profesional de Matemáticas y carreras afines, donde se desarrolle el tema de Ecuaciones diferenciales Parciales del tipo Parabólicas por diferencias finitas.
- Recomendar el uso del software matemático Matlab como soporte para la solución numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales del tipo Parabólico mediante el método de diferencias finitas.
- utilizar otros métodos que permita encontrar una mejor aproximación a la solución numérica con diferencias finitas.
- Continuar con la aplicación del método de diferencias finitas para la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales del tipo elíptico e hiperbólico.

ANEXO

PROGRAMA MATLAB

```
% Programa para calcular los desplazamientos de una viga
% empotrada-empotrada y las reacciones utilizando el método de diferencias
finitas
format short
%Datos del Problema
clc;clear all
L=6; % longitud de la viga (m)
W=3; %carga distribuida uniforme (T/m)
E=21000000; %módulo de elasticidad (T/m^2)
a=0.30; %ancho de la viga (m)
d=0.45; %alto de viga (m)
I=a*(d^3)/12; %momento de inercia de la viga (m^4)
EI=E*I %característico de la viga (T*m^2)
n=15; %punto de divisiones interiores de la viga
%Vxxxx=W/EI
h=L/(n+1); %distancia entre punto de división
S=zeros(n); %matriz generalizada
%Uxxxx=(1/h^4)*(1)-(-4)-((6))-(-4)-(1)
%cuarta derivada DF simétricas ordinarias por factores
%aplicando diferencias finitas las fórmulas simétricas ordinarias
%procedemos calcular la matriz generalizada cuadrada de orden n
S(1,1)=7; %posición 1x1
S(n,n)=7; %posición nxn
for i=2:n-1
    S(i,i)=6; % valores de la diagonal principal
end
for i=2:n
```

```

    S(i,i-1)=-4; %valores por debajo de la diagonal principal
end
for i=1:n-1
    S(i,i+1)=-4; % valores por encima de la diagonal principal
end
for i=3:n
    S(i,i-2)=1; %valores por debajo de la diagonal principal
end
for i=1:n-2
    S(i,i+2)=1; %valores por encima de la diagonal principal
end
S %matriz generalizada con sus respectivos valores
S=S*EI/h^4; %matriz de diferencia finitas
S %matriz final
Q=zeros(n,1); %vector solución
for i=1:n
    Q(i,1)=W; %valores del vector igualado a la carga distribuida constante
end
Q
%Solucion del sistema de ecuaciones por el Método Ax=b Gauss-Jordan
n=length(Q);
S=[S,Q]; %matriz ampliada
for e=1:n
    S(e,e:n+1)=S(e,e:n+1)/S(e,e);
    for i=1:n
        if i~=e
            S(i,e:n+1)=S(i,e:n+1)-S(i,e)*S(e,e:n+1);
        end
    end
end
end
V=S(1:n,n+1);

```

```

disp('El vector de desplazamientos en los puntos asignados es: ')
V% vector de desplazamientos
disp('El momento de empotramiento en el nudo inicial es: ')
Ma=EI*(2*V(1,1))/h^2 %momento nudo inicial
disp('El momento de empotramiento en el nudo final es: ')
Mb=-EI*((2*V(n,1))/h^2) %momento nudo final
%Regresión progresiva 3era derivada
disp('La reacción vertical en el nudo inicial es: ')
Ra=-EI*(1/h^3*(3*V(1,1)-3*V(2,1)+V(3,1))) %Reacción vertical nudo inicial
%Regresión regresiva 3era derivada
disp('La reacción vertical en el nudo final es: ')
Rb=EI/h^3*(-3*V(n,1)+3*V(n-1,1)-1*V(n-2,1)) %Reacción vertical nudo final
%grafica de la deformada
for i=1:n
    u(i)=h*i;
end
x=0:h:L;
y=0;
plot(x,y,'o')
hold on
i=[0 h];
r=[0 -V(1)];
f1=[L-h L];
f2=[-V(n) 0];
title('Deformada 15 puntos')
text(4,-0.000168,' \rightarrow n=15')
plot(u,-V,'c',i,r,'c',f1,f2,'c'); grid on
axis([0 L -0.00025 0]);
x=0:h:L;
y=0;
plot(x,y,'o').

```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Boyce-di prima. ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. limusa
- [2] Braun. ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. interamericana
- [3] Churchill. series de fourier y problemas de contorno. mcgraw-hill
- [4] E. Elsgoltz. Ecuaciones diferenciales y calculo variacional. Ed. Mir Moscu, 1975.5
- [5] Farlow, Stanley J., Partial Differential Equations for Scientist and Engineers, Jhon Wiley & Sons, New York, 1982.
- [6] Haberman. ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con series de fourier y problemas de contorno. prentice hall.
- [7] M. Inc. On numerical solutions of partial differential equations by the decomposition method. Kragujevac Journal of Mathematics, 2004.
- [8] Myint-u. partial diffrential equations of mathematical physics. elsevier
- [9] Obidio Rubio Mercedes Método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales Parciales, Sociedad Matematica Peruana, 2001
- [10] Simmons. ecuaciones diferenciales (con aplicaciones y notas históricas). mcgraw-hill
- [11] Stephenson. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. reverté
- [12] Strange, G. Introduction a to Applied Mathematics, Wellesley - Cambridge Press, Massachusetts, 1990.
- [13] Strauss. partial differential equations. an introduction. Wiley weimberger. ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. reverté

- [14] Strikwerda, Q. Numerical Methods for Partial Differential Equations, Edit. New York, 1994.
- [15] Tijonov, A.N. y Samarsky A. A. Ecuaciones de la física Matemática. Edit. MIR, Moscu, 1983.
- [16] Trench, W. *Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera*. Mexico: Tompson Learning. (2002).
- [17] Valeria Iorio de M, EDP un curso de graduación, IMPA 1999.
- [18] Valeria de M Iorio, Equacoes diferenciáis parciais: uma introducao, IMPA 1988.
- [19] Weinberger, Hans F. ecuaciones Diferenciales en derivadas parciales Edit. Reverté, S. A. Barcelona, traducido por Véles C., F. y Linés E., E. de partial differential Equations, Edit. Blaisdel, 1965.
- [20] ZILL, Dennis G., cullen, Michael R. Ecuaciones diferenciales con problemas de frontera. 5ed. Boston: Thomson Learning, 2002. 631p.

LINKOGRAFÍA

1. www.u-cursos.cl/ingenieria/2012/1/CC3501/2/material_docente/bajar?id
2. www.scielo.org.co/pdf/cide/v6n2/v6n2a12.pdf
3. www.upv.es/mattel/asig/numerico2/edps/edp.ppt
4. cua.uam.mx/pdfs/conoce/.../Notas_Ecuaciones_Diferenciales_Parciales.pdf
5. www.esaez.mat.utfsm.cl/edpcl.pdf
6. web.cua.uam.mx/files/Notas-Ecuaciones_Diferenciales_Parciales.pdf
7. <http://www.youtube.com/watch?v=bgGskM3K75g>
8. http://www.youtube.com/watch?v=_IJvGzJ8hKM
9. www.caminos.upm.es/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_0/MAI_C.pdf
10. <https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0314/descargar.php?secc=0&id=F0314>
11. https://www.math.cinvestav.mx/sites/default/files/finite_differences.pdf
12. <https://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0314/descargar.php?secc=0&id=F0314>
13. <http://www.dmae.upct.es/~jose/metodos/numer4.pdf>

MATRIZ DE CONSISTENCIA

TITULO: “ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DEL TIPO PARABÓLICO MEDIANTE EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS”

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES
<p>PROBLEMA GENERAL</p> <p>¿Es posible encontrar la solución de una ecuación diferencial parcial mediante el método de diferencias finitas?.</p> <p>PROBLEMAS ESPECÍFICOS</p> <p>¿Será posible utilizar el proceso de discretización en la solución de una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas?.</p> <p>¿Se podrá obtener los mismos resultados en forma analítica, mediante los métodos de separación</p>	<p>OBJETIVO GENERAL</p> <p>Aplicar el método de diferencias finitas para encontrar la solución de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico.</p> <p>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Determinar la solución de una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico utilizando el método de diferencias finitas mediante la discretización del dominio, de la variable y de la ecuación diferencial. ➤ Comparar las soluciones obtenidas mediante los métodos clásicos y el método de las diferencias finitas. ➤ Será posible encontrar la solución a una aplicación de la 	<p>HIPÓTESIS GENERAL</p> <p>Existe solución de ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de diferencias finitas</p> <p>HIPÓTESIS ESPECÍFICOS</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Utilizando la serie de Taylor, para la aproximación de las derivadas, obtenemos el esquema de discretización en diferencias finitas del cual obtenemos una ecuación algebraica que hallara soluciones aproximadas para la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico. ➤ Con el desarrollo del algoritmo en el programa Matlab permitirá la visualización de la solución aproximada a una aplicación de la 	<p>VARIABLE INDEPENDIENTE</p> <p>Método de diferencias finitas.</p> <p>VARIABLE DEPENDIENTE</p> <p>Solución de la ecuación diferencial parcial del tipo parabólico.</p>

de variables y el de diferencias finitas?	ecuación diferencial parcial del tipo parabólico mediante el método de diferencias finitas utilizando el programa computacional Matlab.	ecuación diferencial parcial del tipo parabólico.	
---	---	---	--