



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TESIS

**ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN ENTRE EL PRODUCTO
BRUTO INTERNO Y EL ÍNDICE DE PRECIOS PROMEDIO AL
CONSUMIDOR EN EL CUSCO MEDIANTE EL TEST DE ENGLE
Y GRANGER**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
MATEMÁTICAS**

AUTOR

Br. MARCO ANTONIO ACHAHUI
FOLLANA

ASESOR:

Dra. ELEUTERIA TTITO TTICA

CODIGO ORCID:

0000-0001-7587-2979

CUSCO –PERÚ
2026



Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco

INFORME DE SIMILITUD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-321-2025-UNSAAC)

El que suscribe, el Asesor (a) Dra. Eleuteria Ttito Ttica quien aplica el software de detección de similitud al trabajo de investigación/tesis titulada: Análisis de Cointegración entre el Producto Bruto Interno y el Índice de Precios Promedio al Consumidor en el Cusco mediante el Test de Engle y Granger.

Presentado por: Br. Marco Antonio Achahui Follana DNI N° 41428783; presentado por: DNI N°: Para optar el título Profesional/Grado Académico de Maestro en Matemáticas

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 4 veces, mediante el Software de Similitud, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso del Sistema Detección de Similitud en la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 7.....%.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No sobrepasa el porcentaje aceptado de similitud.	<u>X</u>
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las subsanaciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, conforme al reglamento, quien a su vez eleva el informe al Vicerrectorado de Investigación para que tome las acciones correspondientes; Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de Asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto las primeras páginas del reporte del Sistema de Detección de Similitud.

Cusco, 25 de Agosto de 2026

Firma

Post firma Dra. Eleuteria Ttito Ttica

Nro. de DNI 23850856

ORCID del Asesor 0000-0001-7587-2979

Se adjunta:

- Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
- Enlace del Reporte Generado por el Sistema de Detección de Similitud: oid:
https://unsaac.turnitin.com/viewer/submissions/oid:27259:616560938
?locale=es-MX

ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN ENTRE EL PRODUCTO BRUTO INTERNO Y EL ÍNDICE DE PRECIOS PROMEDIO AL CONSUMI...

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:616560938

96 páginas

Fecha de entrega

23 ago 2026, 6:58 p.m. GMT-5

23.242 palabras

128.903 caracteres

Fecha de descarga

23 ago 2026, 7:18 p.m. GMT-5

Nombre del archivo

ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN ENTRE EL PRODUCTO BRUTO INTERNO Y EL ÍNDICE DE PRECIOS PR....pdf

Tamaño del archivo

1.7 MB

7% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Bibliografía
- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 20 palabras)

Exclusiones

- N.º de fuentes excluidas
- N.º de coincidencias excluidas

Fuentes principales

- 6%  Fuentes de Internet
- 4%  Publicaciones
- 4%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

INFORME DE LEVANTAMIENTO DE OBSERVACIONES A TESIS

Dr. LEONCIO SOLIS QUISPE, Director de la Escuela de Posgrado, nos dirigimos a usted en condición de integrantes del jurado evaluador de la tesis intitulada **ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN ENTRE EL PRODUCTO BRUTO INTERNO Y EL ÍNDICE DE PRECIOS PROMEDIO AL CONSUMIDOR EN EL CUSCO MEDIANTE EL TEST DE ENGLE Y GRANGER** del / de la Br. MARCO ANTONIO ACHAHUI FOLLANA. Hacemos de su conocimiento que el (la) sustentante ha cumplido con el levantamiento de las observaciones realizadas por el Jurado el día **DIECISIETE DE AGOSTO DE 2026**.

Es todo cuanto informamos a usted fin de que se prosiga con los trámites para el otorgamiento del grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS.

Cusco, 18 de Agosto de 2026

Mtro. LUIS QUISPE HUAMAN
Primer Replicante

Mtro. MIGUEL ANGEL HAQUEHUA LOYOLA
Segundo Replicante

Mtro. ADELMA VELASQUEZ JARA
Primer Dictaminante

Mtro. ARTURO ZUÑIGA BLANCO
Segundo Dictaminante

AGRADECIMIENTOS

De manera muy especial al Dr. Eleuteria Ttito Ttica por su asesoramiento, por la orientación en el desarrollo y redacción del presente trabajo de tesis, sus consejos y sugerencias que me permitieron culminar con una etapa más de mi vida y continuar el camino profesional ante la sociedad.

A mis docentes, compañeros y colegas en especial a aquellos que colaboraron con sus consejos y recomendaciones para la culminación del presente trabajo.

DEDICATORIAS

Doy infinitas gracias a Jehová Dios, por el camino que hasta hoy he recorrido y por todas las oportunidades que me ha permitido vivir. A mi esposa Soriana Alida por la paciencia, comprensión y el amor que me da cada día y a mis hijos, Miguel, Eduardo y Fabricio por ser fuente de mi fuerza, motivación, perseverancia e inspiración para superarme cada día más.

A mis Padres José y Antonia por el amor y la educación que me dieron, a mi hermana y hermanos por creer y confiar siempre en mí, apoyándome en todos los retos que me he planteado en la vida; por su comprensión, paciencia en mis esfuerzos de superación personal y profesional.

M. A. A. F.

RESUMEN

La finalidad del presente trabajo es determinar la relación de cointegración entre las series del Índice de Precios Promedio al Consumidor (IPPC) y el Producto Bruto Interno (PBI), durante el periodo de 2012 al 2020, mediante el test de Engle y Granger. Se busca establecer si existe una relación de equilibrio estable de largo plazo entre ambas variables, evitando posibles relaciones espurias derivadas de su no estacionariedad.

Se utilizó datos trimestrales del IPPC y el PBI del Cusco proporcionada por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), procesada en Eviews. En primer lugar, se evaluó la estacionariedad de ambas series confirmándose que ambas son integradas de orden uno $I(1)$. Luego, se estimó la regresión de cointegración y se aplicó el test de Engle-Granger, complementando el análisis con el modelo de corrección de errores (MCE) y la prueba de causalidad de Granger.

Los resultados evidenciaron cointegración entre las series $\text{LOG}(\text{IPPC})$ y $\text{LOG}(\text{PBI})$, confirmándose una relación de equilibrio a largo plazo entre ambas variables. Asimismo, la prueba de causalidad de Granger mostro una relación unidireccional del IPPC hacia el PBI. Esto permite concluir que, en la economía del Cusco, el nivel de precios y el producto regional mantienen un vínculo estable en el tiempo, lo cual resulta relevante para la formulación de políticas económicas orientadas a la estabilización de precios y la planificación del crecimiento local.

Palabras clave: Estacionariedad, Cointegración, Engle y Granger, Mecanismo de corrección de errores, Causalidad de Granger.

ABSTRACT

The aim of this study is to determine the cointegration relationship between the Average Consumer Price Index (IPPC) and Gross Domestic Product (GDP) series for the 2012–2020 period, using the Engle-Granger test. The objective is to establish whether a stable long-term equilibrium relationship exists between the two variables, while avoiding potential spurious relationships arising from their non-stationarity.

Quarterly data on the IPPC and Cusco's GDP, provided by the National Institute of Statistics and Informatics (INEI), were used and processed in EViews. First, the stationarity of both series was assessed, confirming that both are integrated of order one—I(1). Subsequently, the cointegration regression was estimated and the Engle-Granger test was applied, with the analysis complemented by an error correction model (ECM) and the Granger causality test.

The results demonstrated cointegration between the LOG(IPPC) and LOG(PBI) series, confirming a long-term equilibrium relationship between the two variables. Furthermore, the Granger causality test revealed a unidirectional relationship running from the IPPC to the GDP. This leads to the conclusion that, within the Cusco economy, the price level and regional output maintain a stable link over time—a finding relevant to the formulation of economic policies aimed at price stabilization and local growth planning.

Keywords: Stationarity, Cointegration, Engle and Granger, Error correction mechanism, Granger causality.

INTRODUCCIÓN

La relación entre el nivel de precios y el crecimiento económico constituye uno de los temas centrales del análisis macroeconómico, particularmente en economías regionales como la del Cusco, cuya estructura productiva se encuentra fuertemente influenciada por actividades como el turismo, el comercio y los servicios. Comprender el comportamiento conjunto de estas dos variables a lo largo del tiempo resulta fundamental para la formulación de políticas económicas y de estabilización de precios a nivel regional. Sin embargo, el análisis econométrico de series económicas presenta una dificultad recurrente, la mayoría de estas series son no estacionarias, es decir, no mantienen una media y varianza constantes en el tiempo, lo cual puede conducir a relaciones de regresión espurias si no se emplea la metodología adecuada, tal como advirtieron Granger y Newbold (1974) en su trabajo sobre este problema.

Es por ello que la metodología de cointegración desarrollada por Engle y Granger (1987) ofrece un marco metodológico robusto que permite determinar si dos o más series no estacionarias, integradas del mismo orden, mantienen una relación de equilibrio estable en el largo plazo, aun cuando en el corto plazo puedan presentar desviaciones. En este contexto, la presente tesis tiene como objetivo determinar la relación de cointegración existente entre las series del Producto Bruto Interno (PBI) y el Índice de Precios Promedio al Consumidor (IPPC) de la ciudad del Cusco, durante el periodo comprendido entre los años 2012 y 2020, aplicando el test de Engle y Granger. Para ello, se plantea previamente evaluar el orden de integración de ambas series, y posteriormente estimar la relación funcional de largo plazo que las vincula, complementando el análisis con la construcción de un modelo de corrección de errores y la prueba de causalidad de Granger.

La presente tesis se estructura en cinco capítulos. El primero expone el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos de la investigación. El segundo capítulo desarrolla el marco teórico conceptual, abordando los fundamentos matemáticos y econométricos de la cointegración, el modelo de corrección de errores y la causalidad de Granger. El tercer capítulo presenta las hipótesis y la operacionalización de las variables de estudio. El cuarto capítulo describe la metodología empleada, precisando el ámbito de estudio, el tipo de investigación y las técnicas de recolección y análisis de datos.

Finalmente, el quinto capítulo expone los resultados obtenidos mediante el software econométrico EVIEWS V.10, así como la discusión, las conclusiones y recomendaciones que se tienen del presente estudio.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	ii
Dedicatoria	iii
Resumen	iv
Abstract	v
Introducción	vi

CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. 1

1.1. Situación problemática.	1
1.2. Formulación del Problema.	3
1.2.1. Problema General.	3
1.2.2. Problemas específicos	3
1.3. Justificación de la Investigación	4
1.4. Objetivos de la Investigación.	5
1.4.1 Objetivo General.	5
1.4.2 Objetivos Específicos.	5

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL 6

2.1 Bases Teóricas	6
2.1.1 Índice de precios al consumidor.	6
2.1.2 Índice del producto bruto interno.....	7
2.1.3 Serie integrada.	9
2.1.4 Cointegración.	11
2.1.5 Series cointegradas.	12
2.1.6 Modelo de corrección de errores.	14
2.1.7 Teorema de la representación de Granger.	17
2.1.8 Estimación de sistemas cointegrados.	22
2.1.9 Pruebas de cointegración.	27
2.1.10 Contraste de Cointegración	30

2.1.11 Causalidad de Granger.	31
2.2 Marco Conceptual (palabras claves)	36
2.3 Antecedentes empíricos de la investigación	38
CAPITULO III: HIPÓTESIS Y VARIABLES	44
3.1 Hipótesis.	44
3.1.1 Hipótesis general.	44
3.1.2 Hipótesis específicas	44
3.2 Identificación de variables.	44
3.3 Operacionalización de variables.	45
CAPITULO IV: METODOLOGÍA	46
4.1 Ambiente de estudio: localización política y geográfica.	46
4.2 Tipo y nivel de investigación.	46
4.3 Unidad de análisis.	46
4.4 Población de estudio.	47
4.5 Tamaño de muestra.	47
4.6 Técnicas de recolección de datos e información.	47
4.7 Técnicas de análisis e interpretación de la información.	47
4.8 Técnicas para demostrar la verdad o falsedad de la hipótesis planteada.	48
CAPITULO V: RESULTADOS Y DISCUSIÓN	50
5.1 Procesamiento, análisis, interpretación y discusión de resultados	50
5.1.1 Índice de precios al consumidor.	50
5.1.1.1 Serie de tiempo IPPC.	50
5.1.1.2 Análisis de estacionariedad.	52
5.1.1.3 Diferencias sobre la serie IPPC	56
5.1.2 Producto bruto interno.	59
5.1.2.1 Serie de tiempo PBI.	59

5.1.2.2	Análisis de estacionariedad.	61
5.1.2.3	Diferencias sobre la serie PBI	65
5.2	Pruebas de hipótesis.	68
5.2.1	Cointegración de las series ippc trimestral del cusco y pbi trimestral..	68
5.2.2	Mecanismo de corrección de errores (MCE)	73
5.3	Presentación de Resultados.	74
5.3.1	Prueba de causalidad de Granger.	74
CONCLUSIONES.		77
RECOMENDACIONES.		78
REFERENCIA BIBLIOGRAFÍA		79

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Estadísticas de prueba (rechazo de grandes valores)	29
Tabla 2. Operacionalización de variables	45
Tabla 3. Índice de Precios Promedio al Consumidor Trimestral (IPPC) en Cusco de 2012-I a 2020-IV.	51
Tabla 4. Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie IPPC trimestral de Cusco.	55
Tabla 5. Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie D(LOG(IPPC)) trimestral de Cusco.	58
Tabla 6. Producto Bruto Interno trimestral (PBI) de 2012-I a 2020-IV (en miles de millones de soles)	60
Tabla 7. Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie PBI trimestral.	64
Tabla 8. Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie D(LOG(PBI) trimestral.	67
Tabla 9. Estimación de la regresión de cointegración entre las series IPPC trimestral del Cusco y el PBI.	68
Tabla 10. Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie de residuos.	70
Tabla 11. Test de Cointegración de las series LOG(IPPC) y LOG(PBI)	71
Tabla 12. Test de Cointegración de Engle - Granger para las series LOG(IPPC) y LOG(PBI)	72
Tabla 13. Estimación del Modelo Mecanismo de Corrección de Errores	73
Tabla 14. Prueba de causalidad de Granger para las series IPPC y PBI	75
Tabla 15. Prueba de causalidad de Granger para las series LOGIPPC y LOGPBI.	75
Tabla 16. Criterio de selección del orden del retraso	76

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Histograma de la serie IPPC trimestral del Cusco.	52
Figura 2. Gráfica de la serie IPPC trimestral del Cusco de 2012: I a 2020: IV	53
Figura 3. Correlograma de la serie IPPC trimestral del Cusco.	54
Figura 4. Gráfica de la serie $D(\text{LOG}(\text{IPPC}))$ trimestral del Cusco de 2012: I hasta 2020: IV.	56
Figura 5. Correlograma de la serie $D(\text{LOG}(\text{IPPC}))$ trimestral del Cusco	57
Figura 6. Histograma de la serie PBI trimestral.	61
Figura 7. Gráfica de la serie PBI trimestral de 2012: I hasta 2020: IV	62
Figura 8. Correlograma de la serie PBI trimestral.	63
Figura 9. Gráfica de la serie $D(\text{LOG}(\text{PBI}))$ trimestral de 2012: I hasta 2020: IV.	65
Figura 10. Correlograma de la serie $D(\text{LOG}(\text{PBI}))$ trimestral.	66
Figura 11. Gráfica de la serie de residuos.	69

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

La relación entre el nivel de precios y el crecimiento económico constituye uno de los temas centrales del análisis macroeconómico, ya que permite comprender cómo se comportan conjuntamente dos variables fundamentales de cualquier economía. Sin embargo, investigar esta relación no es un ejercicio fácil, pues la mayoría de las series económicas son no estacionarias, es decir, no mantienen una media y varianza constantes en el tiempo. Granger y Newbold (1974) advirtieron que el uso de series no estacionarias en modelos de regresión clásica puede conducir a relaciones espurias, en las que dos variables parecen estar fuertemente asociadas sin que exista en realidad un vínculo económico real entre ellas. Esta advertencia resulta central para justificar la presente investigación, pues sin un tratamiento econométrico adecuado de las series del Índice de Precios Promedio al Consumidor trimestral del Cusco (IPPC) y del Producto Bruto Interno trimestral del Cusco (PBI), cualquier conclusión sobre su relación podría carecer de sustento estadístico verídico, tal como lo describieron originalmente Fuller (1976) y posteriormente Dickey y Pantula (1987) al analizar el orden de diferenciación necesario para transformar series no estacionarias en procesos estacionarios susceptibles de un análisis seguro.

Actualmente se desconoce, en el caso específico de la economía del Cusco, que las series del IPPC y del PBI, además de ser individualmente no estacionarias, guardan entre sí una relación de equilibrio estable en el largo plazo o si, por el contrario, su aparente movimiento conjunto responde únicamente a una tendencia común sin significado económico. Determinar el orden de integración de cada serie es un paso esencial antes de establecer cualquier relación entre ellas, tal como lo plantearon Dickey y Fuller (1981) en su desarrollo de las pruebas de raíz unitaria, y como lo complementaron Phillips y Perron (1988) al proponer procedimientos que permiten obtener resultados robustos incluso en presencia de autocorrelación y heterocedasticidad en los errores, situaciones frecuentes en series macroeconómicas regionales de reducido tamaño muestral como las que presenta el Cusco.

Al no conocer con exactitud si estas series están cointegradas tiene consecuencias que van más allá del plano estrictamente estadístico. Si se asumiera erróneamente la existencia de una relación estable entre el IPPC y el PBI sin haberlas contrastado adecuadamente, se estaría incurriendo en el mismo riesgo señalado por Granger y Newbold (1974), tomar como válida una asociación que en realidad es espuria, lo cual podría inducir a error en cualquier interpretación económica derivada de dicha relación. Por el contrario, si existiendo efectivamente una relación de largo plazo esta no llegara a identificarse por un tratamiento inadecuado de las series, se perdería información valiosa sobre el comportamiento conjunto de los precios y el producto regional, información que, según Stock (1987), puede estimarse de manera consistente precisamente a través de los vectores de cointegración, y cuya omisión limita la capacidad de establecer con rigor si el sistema económico del Cusco tiende hacia un equilibrio estable o se aleja de él de manera constante, tal como puede evaluarse mediante los procedimientos de contraste de tendencias comunes propuestos por Stock y Watson (1988).

Además, se desconoce el sentido de la relación entre estas dos variables, es decir, si es el nivel de precios el que antecede y ayuda a predecir el comportamiento del producto regional, si ocurre lo contrario, o si existe una retroalimentación entre ambas. Granger (1969) estableció que una serie causa a otra, en el sentido predictivo, cuando el conocimiento de sus valores pasados mejora la capacidad de predicción de la segunda serie más allá de la información contenida en su propio pasado. No contar con evidencia sobre esta dirección de causalidad impide anticipar si las variaciones del IPPC preceden a los cambios en el PBI del Cusco o viceversa, lo cual resulta relevante en la medida en que, según explicó Granger (1981) al vincular por primera vez los modelos de corrección de errores con la cointegración, y como lo demostró posteriormente Granger (1983) al formalizar el teorema de representación correspondiente, toda relación de cointegración entre dos variables implica necesariamente un mecanismo de ajuste de corto plazo hacia el equilibrio, cuya dirección y magnitud permanecen desconocidas mientras no se estime dicho modelo.

La revisión de la literatura econométrica disponible evidencia un vacío de conocimiento específico para el caso de la economía del Cusco. Trabajos como los de Hernández y Zúñiga (2009), Montero (2013) y Mendoza y Quintana (2000) han

desarrollado y aplicado la metodología de cointegración y los modelos de corrección de errores en distintos contextos económicos, mientras que Ccopa y Rodríguez (2004) emplearon la metodología de Box-Jenkins para el análisis de series de tiempo; sin embargo, no se dispone de evidencia empírica equivalente que contraste específicamente la relación de largo plazo entre el IPPC y el PBI de la región del Cusco. Esta ausencia de estudios aplicados a nivel regional, sumada a la necesidad de emplear pruebas de estabilidad de parámetros como la propuesta por Chow (1960) y valores críticos apropiados para muestras pequeñas como los proporcionados por MacKinnon (1990), configura el problema central que la presente investigación busca abordar: establecer, mediante el test de Engle y Granger (1987), si existe una relación de cointegración entre el Producto Bruto Interno trimestral y el Índice de Precios Promedio al Consumidor trimestral de la ciudad del Cusco durante el periodo 2012 al 2020.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1 PROBLEMA GENERAL

¿Existe una relación de cointegración entre las series del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco determinada mediante el test de Engle y Granger?

1.2.2 PROBLEMAS ESPECÍFICOS

- a) ¿Son las series del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco estacionarias del mismo orden de integración?
- b) ¿Existe una relación funcional de equilibrio a largo plazo entre las series del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco?

1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo se justifica debido a que la experiencia ha demostrado que es muy común el uso del Test de Engle y Granger para evaluar la existencia de cointegración entre dos series económicas. Si bien es cierto que la diferenciación de las series un número de veces puede generar la estacionariedad entre ellas, también involucra pérdidas de información al sacrificar una observación en cada diferencia y dificulta la interpretación económica de la relación de largo plazo. Es por eso que la metodología de cointegración permite trabajar con las series en niveles, evitando estas pérdidas y al mismo tiempo prevenir la obtención de relaciones espurias entre variables no estacionarias, tal como advirtieron Granger y Newbold (1974); de este modo, la presente investigación contribuye a validar el uso de esta técnica en el análisis de series macroeconómicas regionales de reducida longitud muestral, como las disponibles para el Cusco.

Desde el punto de vista práctico y social, la investigación se justifica porque el conocimiento de la relación de largo plazo entre el Índice de Precios Promedio al Consumidor trimestral del Cusco (IPPC) y el Producto Bruto Interno trimestral del Cusco (PBI) resulta de utilidad para las entidades encargadas de la planificación económica regional, como las Gerencias Regionales. Al tratarse de una economía fuertemente influenciada por el turismo, el comercio y los servicios, comprender como el nivel de precios y el crecimiento del producto regional se ajustan mutuamente en el tiempo y permiten anticipar desequilibrios y sustentar con mayor solidez el diseño de políticas orientadas a la estabilización de precios y a la promoción del crecimiento económico regional, evitando decisiones basadas en relaciones estadísticas aparentes que no reflejan un vínculo real entre las variables.

Desde el punto de vista teórico científico, el presente estudio se justifica porque la mayor parte de las investigaciones sobre cointegración aplicados en el Perú se han concentrado en series a nivel nacional, existiendo escasa evidencia empírica sobre la relación de largo plazo entre precios y producto para economías regionales como la del Cusco. En este sentido, la presente investigación busca llenar ese vacío, aportando evidencia cuantitativa específica para la región del Cusco y sirviendo como antecedentes para futuros trabajos que apliquen el enfoque de Engle y Granger o

metodologías complementarias como el procedimiento de Johansen, al estudio de otras economías regionales del país con estructuras productivas similares.

1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1. OBJETIVO GENERAL

Determinar la relación de cointegración entre el Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco, mediante el test de Engle y Granger.

1.4.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

- a) Determinar la estacionariedad y el orden de integración de las series Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco.
- b) Determinar la existencia de una relación funcional a largo plazo entre las series del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1 BASES TEÓRICAS

2.1.1 ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR

El Índice de Precios al Consumidor (IPC), es un número sobre el cual se acumulan a partir de un periodo base las variaciones promedio de los precios de los bienes y servicios consumidos por los hogares de un país (que en nuestro caso es a nivel del departamento del Cusco) durante un periodo de tiempo. De manera más compleja se trata del indicador de la inflación de un país más conocido y se constituye en un indicador de carácter coyuntural sobre el comportamiento de los precios minoristas de un país. (Instituto Nacional de Estadística e Informática [INEI], 2022, p. 4)

El INEI (2022) especifica que el IPC es, técnicamente, un indicador de canasta fija referenciado a un periodo base. Para su correcta estructuración, la entidad determina que se requiere el desarrollo secuencial de varios instrumentos: en primer lugar, la Encuesta Nacional de Presupuestos Familiares (ENAPREF) para definir la canasta y el sistema de ponderaciones; en segundo lugar, la identificación de los hábitos de compra de los hogares para seleccionar los puntos de venta; y, finalmente, un registro detallado de marcas y calidades que garantice que el monitoreo mensual capte variaciones puras de precios en las mismas fuentes de información.

Por tanto, la construcción del IPC demanda no solo la delimitación de una estructura de ponderaciones mediante encuestas de presupuestos familiares, sino también la estandarización rigurosa de las especificaciones de los productos y la consistencia en los canales de comercialización elegidos (INEI, 2022).

Desde una perspectiva estrictamente metodológica, el cálculo del indicador se ejecuta de forma ascendente. El INEI (2022) explica que a partir de las cotizaciones individuales recopiladas en los establecimientos se promedian y actualizan los denominados "gastos básicos". Posteriormente, los niveles superiores del índice (clases,

subclases, grupos y divisiones) se van consolidando a través de agregaciones sucesivas basadas en promedios ponderados, hasta confluir en el resultado del índice general nacional o regional.

Es fundamental remarcar una limitación metodológica del indicador: el IPC mide variaciones temporales de precios dentro de un espacio geográfico determinado y adaptado a sus particularidades de consumo, pero no funciona como un instrumento de comparación espacial absoluta. Al respecto, el INEI (2022) sostiene que resulta teóricamente incorrecto utilizar las variaciones del IPC para determinar si una ciudad es más costosa o barata que otra, puesto que los incrementos porcentuales se estiman sobre los niveles de precios iniciales inherentes a cada localidad, los cuales ya son heterogéneos entre sí.

Los procesos de cambio de año base en los índices de precios responden a criterios de actualización estadística y robustez matemática. Según el INEI (2022), estas modificaciones son necesarias principalmente por dos factores: primero, el envejecimiento de los patrones de consumo de los hogares (recopilados usualmente en intervalos de diez años), lo que resta representatividad a las ponderaciones originales; y segundo, la incorporación de mejoras logísticas, metodológicas y fórmulas de cálculo alineadas a las recomendaciones internacionales vigentes, lo cual optimiza la precisión del indicador al evitar los sesgos que ocurren cuando el índice se aleja temporalmente de su periodo base.

2.1.2 ÍNDICE DEL PRODUCTO BRUTO INTERNO

El Producto Bruto Interno (PBI) es el valor total de los bienes y servicios generados en el territorio económico durante un período de tiempo, que generalmente es un año, libre de duplicaciones. Es decir, es el Valor Bruto de Producción menos el valor de los bienes y servicios (consumo intermedio) que ingresan nuevamente al proceso productivo para ser transformado en otros bienes. (INEI, 2001, cap. 3)

El análisis del Producto Bruto Interno trasciende su definición cuantitativa de producción, albergando una estrecha relación con la retribución de los factores y su

representatividad en el sistema macroeconómico. Al respecto, el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI, 2001) describe que:

El Producto Bruto Interno, también se puede definir como el valor añadido en el proceso de producción que mide la retribución a los factores de producción que intervienen en el proceso de producción.

El Producto Bruto Interno (PBI) es considerado como el indicador más completo e importante de la economía por su capacidad de sintetizar, representar y explicar el comportamiento de la economía. La capacidad de síntesis señalada, se explica porque en el Producto Bruto Interno se concentra una gama importante de conceptos macroeconómicos que definen el desenvolvimiento o características de los diferentes componentes que constituyen el sistema económico. (INEI, 2001)

Al detallar el marco procedimental y los componentes analíticos que sustentan el cálculo periódico de la actividad económica, el INEI (2001) describe lo siguiente:

Para cuantificar el Producto Bruto Interno, existen tres métodos: Producción, Gasto e Ingreso. Tomaremos el cálculo del PBI trimestral por tipo de gasto. Además, al PBI se le considera como la medida agregada de los resultados económicos de un país considerado tanto desde el punto de vista de la producción, gasto e ingreso. De tal manera que la observación de las cifras del PBI para un período de tiempo determinado permite abordar, entender y explicar el crecimiento.

El INEI, viene calculando el PBI trimestral, tanto por el lado del gasto como por el lado la producción de la economía.

La información trimestral reportada por el INEI comprende: PBI sectorial, el cual incluye siete sectores económicos (agropecuario; pesca; minería e hidrocarburos; manufactura; construcción; comercio; servicios y otros), el PBI por el lado del gasto que considera: consumo privado, consumo público, formación bruta de capital fijo, variación de existencias, exportaciones e importaciones de bienes y servicios no financieros, el PBI por el lado del gasto es valorado a precios de comprador (INEI, 2001).

2.1.3 SERIE INTEGRADA

Una serie sin componente determinista que tiene una representación ARMA estacionaria e invertible después de diferenciar d tiempos, se dice que está integrada de orden d y es denotada por $x_t \sim I(d)$ (Engle & Granger, 1987).

En el análisis econométrico de series temporales, la fundamentación sobre los procesos de integración y diferenciación establece lo siguiente:

Si se tiene una serie no estacionaria estocástica, la manera de convertirla en una serie estacionaria es diferenciándola. Ahora, si se quiere recuperar la serie original no estacionaria a través de la serie convertida en estacionaria (la serie diferenciada), se tendría que “integrar” la serie diferenciada. Por lo tanto, a la serie original (no estacionaria) se le conoce como una serie de grado “ d ”. (Engle & Granger, 1987, p. 252)

Al comparar las propiedades estructurales entre series estacionarias e integradas, Engle & Granger (1987) señalan que:

Un punto importante es recordar que algunas veces será necesario diferenciar una serie no estacionaria más de una vez. Sin embargo, los datos que se tienen en finanzas son la mayoría de veces integrados de grado 1, es decir, que solo es necesario diferenciarlos una vez para obtener estacionariedad. Y por ello veremos las diferencias sustanciales de apariencia entre una serie que es $I(0)$ y otra que es $I(1)$, así:

- Si $x_t \sim I(0)$ con media cero, entonces:
 - i) la varianza de x_t es finita.
 - ii) un cambio sólo tiene un efecto temporal sobre el valor de x_t .
 - iii) la imagen de x_t , $f(\omega)$ tiene la propiedad $0 < f(0) < \infty$.
 - iv) la duración esperada de tiempos entre intersecciones de $x = 0$ es finita.
 - v) las autocorrelaciones ρ_k disminuyen constantemente en magnitud para k suficientemente grande, de modo que su suma es finita.

- Si $x_t \sim I(1)$ con $x_0 = 0$, entonces:
 - i) la varianza x_t va al infinito cuando t va al infinito.
 - ii) una mejoría tiene un efecto permanente sobre el valor de x_t , ya que x_t es la suma de todos los cambios anteriores.
 - iii) la imagen de x_t tiene la forma aproximada $f(\omega) \sim A\omega^{-2d}$ para ω pequeño, de modo que en particular $f(0) = \infty$.
 - iv) el tiempo esperado entre intersecciones de $x = 0$ es infinito.
 - v) las autocorrelaciones teóricas $\rho_k \rightarrow 1$ para todo k cuando $t \rightarrow \infty$.

La varianza infinita teórica para una serie $I(1)$ proviene completamente de la contribución de las frecuencias bajas, o parte de la serie a largo plazo. Por lo tanto, una serie $I(1)$ es bastante suave, con oscilaciones largas dominantes, en comparación con una serie $I(0)$. Debido a los tamaños relativos de las varianzas, siempre es cierto que la suma de un $I(0)$ y un $I(1)$ será $I(1)$. Además, si a y b son constantes, con $b \neq 0$, y si $x_t \sim I(d)$, entonces $a + bx_t$ también es $I(d)$.

Si tanto x_t como y_t son $I(d)$, entonces es generalmente cierto que la combinación lineal $z_t = x_t - ay_t$ también será $I(d)$. Sin embargo, es posible que $z_t \sim I(d-b)$, $b > 0$. Cuando esto ocurre, una restricción muy especial opera sobre los componentes a largo plazo de la serie.

Considere el caso $d = b = 1$, de modo que x_t, y_t son ambos $I(1)$ con componentes dominantes de largo plazo, pero z_t es $I(0)$ sin frecuencias bajas especialmente fuertes. Por tanto, la constante a es tal que la mayor parte de los componentes de largo plazo de x_t e y_t se cancelan.

Para $a = 1$, la vaga idea de que x_t e y_t no pueden separarse demasiado se ha traducido en la afirmación más precisa de que "su diferencia será $I(0)$ ". El uso de la

constante a simplemente sugiere que es necesario utilizar alguna escala antes de que se pueda lograr la diferencia de $I(0)$.

Con respecto a los fundamentos teóricos de la combinación lineal entre series de tiempo, Engle & Granger (1987) señalan lo siguiente:

Cabe señalar que, en general, no será cierto que haya una constante a que haga $z_t \sim I(0)$. Un caso análogo, considerando una frecuencia importante diferente, es cuando x_t e y_t son un par de series, cada una de las cuales tiene un componente estacional importante, pero existe una constante a de modo que la serie derivada z_t no tiene estacionalidad. Claramente, esto podría ocurrir, pero podría considerarse improbable. Siendo x_t , y_t y z_t tres series de tiempo, tienen las siguientes propiedades:

1. Si $x_t \sim I(0)$ y $y_t \sim I(1)$, $z_t = (x_t + y_t)$; es decir, una combinación lineal o suma de series de tiempo estacionaria y no estacionaria es no estacionaria.
2. Si $x_t \sim I(d)$, $z_t = (a + bx_t) \sim I(d)$, donde a y b son constantes. Es decir, una combinación lineal de una serie $I(d)$ es también $I(d)$. Por tanto, si $x_t \sim I(0)$, $z_t = (a + bx_t) \sim I(0)$.
3. Si $x_t \sim I(d_1)$ y $y_t \sim I(d_2)$, $z_t = (ax_t + by_t) \sim I(d_2)$, donde $d_1 < d_2$.
4. Si $x_t \sim I(d)$ y $y_t \sim I(d)$, $z_t = (ax_t + by_t) \sim I(d^*)$; d^* es por lo general igual a d , pero en algunos casos $d^* < d$. (pp. 252–253)

2.1.4 COINTEGRACIÓN

El fundamento de la cointegración "se basa en que hay una relación de largo plazo entre las variables, es decir, que existe alguna fuerza que hace que las variables tiendan a un equilibrio o a un estado estacionario en el largo plazo" (Engle & Granger, 1987, p. 251).

De acuerdo con Engle y Granger (1987), dado un conjunto de k series temporales integradas de primer orden $I(1)$, se establece la presencia de una relación de equilibrio de largo plazo (o cointegración) si existe una combinación lineal determinada por un vector de cointegración α tal que la serie resultante sea estacionaria $I(0)$.

Formalmente, este principio se expresa como: $\sum_i^k \alpha_i \times x_i \sim I(0)$

2.1.5 SERIES COINTEGRADAS

Según Engle & Granger (1987), se dice que las variables que componen un vector x_t , están cointegradas de orden d , b si existe una relación de equilibrio a largo plazo entre las variables:

$$x_{1t} = \eta + \beta x_{2t} + z_t$$

El concepto de equilibrio tiene diversos significados en Economía. En la literatura sobre cointegración, tan solo quiere decir que se observa una relación lineal entre un conjunto de variables que se ha mantenido durante un largo período de tiempo. x_{1t} y x_{2t} se mueven de manera conjunta, de forma que, aunque cada una de ellas sea integrada, su combinación lineal no es estacionaria. Además, z_t se puede interpretar como la distancia que separa al sistema del equilibrio a largo plazo.

Obsérvese la condición de que las series sean integradas del mismo orden. Uno de los objetivos perseguidos al construir un modelo econométrico es explicar las variaciones en la variable dependiente, dejando poca variación inexplicada en la perturbación. Un requerimiento mínimo es lograr un error z_t que sea $I(0)$. Para conseguirlo, si la variable dependiente es $I(1)$, las variables explicativas también han de ser $I(1)$; si éstas fuesen $I(0)$, la ecuación estaría mal especificada, lo que se reflejaría en la perturbación, que sería $I(1)$ en vez de $I(0)$ como debiera.

Intuitivamente, para explicar una serie que está creciendo, las variables explicativas deben estar también creciendo. Si no, el crecimiento permanecería inexplicado y aparecería recogido en la perturbación.

Se dice que las componentes del vector x_t están cointegradas de orden d, b , denotada por $x_t \sim CI(d, b)$, si (i) todos los componentes de x_t , son $I(d)$; (ii) existe un vector $\alpha, (\alpha \neq 0)$ de modo que $z_t = \alpha' x_t \sim I(d-b), b > 0$. El vector α es llamado vector cointegrante (Engle & Granger, 1987).

El caso más sencillo, y de mayor relevancia es $d=1, b=1$. Para simplificar aún más, limitémonos al caso en que el vector x_t se compone de sólo dos variables, x_{1t} y x_{2t} . Entonces, normalizando el primer elemento del vector de cointegración

$$z_t = \alpha' x_t = (1, -\beta) \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} = x_{1t} - \beta x_{2t}$$

Por tratarse de series no estacionarias, una combinación lineal arbitraria será en general no estacionaria. Pero, al tratarse de series cointegradas, ha de existir una combinación lineal estacionaria, dada por el vector de cointegración, en otras palabras la cointegración significaría que si los componentes de x_t fueran todos $I(1)$, entonces el error de equilibrio sería $I(0)$, y z_t raramente se desviaría lejos de cero si tiene media cero y z_t a menudo cruzará la línea cero. Dicho de otra manera, significa que el equilibrio ocurrirá ocasionalmente, al menos en una aproximación cercana, mientras que si x_t , no fue cointegrado, entonces z_t , puede caminar ampliamente y los cruces por cero serían muy raros, lo que sugiere que en este caso el concepto de equilibrio no tiene implicaciones prácticas.

La reducción en el orden de integración implica un tipo especial de relación con consecuencias interpretables y comprobables. Sin embargo, si todos los elementos de x_t , ya están estacionarios de modo que son $I(0)$, entonces el error de equilibrio z_t , no tiene propiedad distintiva si es $I(0)$. Podría ser que $z_t \sim I(-1)$, de modo que su imagen sea cero a frecuencia cero, pero si alguna de las variables tiene error de medición, esta propiedad en general no se puede observar y por lo tanto, este caso tiene poco interés realista. Al interpretar el concepto de cointegración se puede observar que en el caso $N=2, d=b=1$, Granger & Weiss (1983) muestran que una condición necesaria y suficiente para la cointegración es que la coherencia entre las dos series es uno a frecuencia cero.

Si x_t tiene N componentes, entonces puede haber más de un vector de cointegración α . Es claramente posible que varias relaciones de equilibrio gobiernen el comportamiento conjunto de las variables. En lo que sigue, se supondrá que hay vectores cointegrantes exactamente linealmente independientes, con $r \leq N-1$, que se agrupan en la $N \times r$ matriz α . Por construcción el rango de α será r , lo que se denominará "rango cointegrador" de x_t .

2.1.6 MODELO DE CORRECCIÓN DE ERRORES (MCE)

La estrecha relación entre la cointegración y los modelos de corrección de errores se desarrollará a continuación. Los mecanismos de corrección de errores se han utilizado ampliamente en economía. Las primeras versiones son Sargan (1964) y Phillips (1957). La idea es simplemente que una proporción del desequilibrio de un período se corrige en el período siguiente. Por ejemplo, el cambio en el precio en un período puede depender del grado de exceso de demanda en el período anterior.

Para un sistema de dos variables, un modelo típico de corrección de errores relacionaría el cambio en una variable con errores de equilibrio pasados, así como con cambios pasados en ambas variables. Para un sistema multivariado, podemos definir una representación de corrección de error general en términos de B , el operador de retraso, de la siguiente manera:

Una serie de tiempo vectorial x_t , tiene una representación de corrección de errores si se puede expresar como:

$$A(B)(1-B)x_t = -\gamma z_{t-1} + u_t$$

donde u_t , es una perturbación multivariante estacionaria, con $A(0)=I$, $A(1)$ tiene todos los elementos finitos, $z_t = \alpha' x_t$ y $\gamma \neq 0$ (Engle & Granger, 1987).

En esta representación, solo el desequilibrio en el período anterior es una variable explicativa. Sin embargo, al reorganizar los términos, cualquier conjunto de rezagos de la z puede escribirse de esta forma, por lo que permite cualquier tipo de ajuste gradual hacia un nuevo equilibrio. Una diferencia notable entre esta definición y la mayoría de las aplicaciones que se han producido es que se trata de una definición multivariante que no se basa en la exogeneidad de un subconjunto de las variables. La

noción de que una variable puede ser débilmente exógena en el sentido de Engle, Hendry y Richard (1983) pueden ser investigadas en un sistema de este tipo, como se analiza brevemente a continuación. Una segunda diferencia notable es que a se considera un vector de parámetros desconocido en lugar de un conjunto de constantes dadas por la teoría económica.

A continuación, se presentan las propiedades de las variables cointegradas y sus representaciones:

Suponga que cada componente de x_t , es $I(1)$ de modo que el cambio en cada componente es un proceso estocástico estacionario puramente no determinista de media cero. Cualquier componente determinista conocido se puede diferenciar antes de que comience el análisis. De ello se deduce que siempre existirá una representación Wold multivariada:

$$(1-B)x_t = C(B)\varepsilon_t \quad \dots (1)$$

entendido en el sentido de que ambos lados tendrán la misma matriz espectral. Además, $C(B)$ se definirá de forma única por las condiciones de que la función $\det[C(z)]$, $z = e^{i\omega}$, tenga todos ceros dentro o fuera del círculo unitario, y que $C(0) = I_N$, la matriz de identidad $N \times N$ (ver Hannan (1970, p. 66)), en esta representación, los ε_t son vectores de ruido blanco de media cero con

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t \varepsilon_s'] &= 0, \quad t \neq s \\ E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] &= G, \quad t = s \end{aligned}$$

de modo que solo pueden ocurrir correlaciones contemporáneas.

El polinomio de media móvil $C(B)$ siempre se puede expresar como

$$C(B) = C(1) + (1-B)C^*(B) \quad \dots (2)$$

simplemente reordenando los términos. Si $C(B)$ es de orden finito, entonces $C^*(B)$ será de orden finito. Si $C^*(1)$ es idénticamente cero, entonces se puede definir una expresión similar que involucre $(1-B)^2$.

La relación entre los modelos de corrección de errores y la cointegración fueron señalados por primera vez en Granger (1981). Un teorema que muestra precisamente

que las series cointegradas pueden ser representadas por modelos de corrección de errores fue originalmente establecido y comprobada en Granger (1983).

Granger (1983) prueba que si un conjunto de variables están cointegradas $CI(1,1)$, pueden ser representadas mediante un Modelo de Corrección del Error (MCE):

$$\Delta x_{1t} = \theta_0 + \theta_1 z_{t-1} + \sum_{i=1} \theta_{2i} \Delta x_{2,t-i} + \sum_{i=1} \theta_{3i} \Delta x_{1,t-i} + \varepsilon_t$$

dicha parametrización resulta muy atractiva para las variables cointegradas.

El término z_{t-1} (término de corrección de errores) recoge la desviación respecto al equilibrio en el período $t-1$. La cuantía del desequilibrio afectará al comportamiento de x_1 en el período t , de forma que, aunque a corto plazo sean posibles las desviaciones del equilibrio, existen mecanismos estabilizadores (automáticos o discrecionales) que tienden a restaurarlo.

Así, el MCE retiene la información sobre las relaciones a largo plazo entre las variables en niveles, recogida en el término de corrección de errores, a la vez que permite flexibilidad en la especificación de sus relaciones a corto plazo, recogidas mediante el resto de los parámetros. Además, en él sólo aparecen variables estacionarias (z porque x_1 y x_2 , están cointegradas, el resto por aparecer diferenciadas) con lo que se puede aplicar la teoría econométrica convencional. Por el contrario, si se optase por modelizar tan solo en términos de variables diferenciadas, desaparecería la información sobre el largo plazo.

El Teorema también demuestra que si el Proceso Generador de Datos (PGD) es un Modelo de Corrección de Error (MCE), generará un conjunto de variables que estén cointegradas. La relación entre el MCE y el concepto de cointegración es, por tanto, biunívoca.

Estimar directamente el MCE no es fácil, por tratarse de un sistema de ecuaciones sujeto a una restricción no lineal. Engle & Granger (1987) proponen un método mucho más sencillo que permite obtener estimadores consistentes.

2.1.7 TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE GRANGER

Según Engle & Granger (1987), si el x_t vector $N \times 1$ está cointegrado con $d = 1, b = 1$ y con cointegración de rango r , entonces se puede afirmar que.

1. $C(1)$ es de rango $N \times r$
2. Existe una representación ARMA vectorial

$$A(B)x_t = d(B)\varepsilon_t$$

con las propiedades de que $A(1)$ tiene rango r y $d(B)$ es un polinomio de rezago escalar con $d(1)$ finito, y $A(0) = I_N$. Cuando $d(B)=1$, este es un vector de autoregresión.

3. Existen matrices $N \times r$, α, γ , de rango r tales que

$$\alpha' C(1) = 0$$

$$C(1)\gamma = 0$$

$$A(1) = \gamma\alpha'$$

4. Existe una representación de corrección de errores con $z_t = \alpha' x_t$, un vector $r \times 1$ de variables aleatorias estacionarias:

$$A^*(B)(1-B)x_t = -\gamma z_{t-1} + d(B)\varepsilon_t$$

$$\text{con } A^*(0) = I_N$$

5. El vector z_t , viene dado por:

$$z_t = K(B)\varepsilon_t$$

$$(1-B)z_t = -\alpha'\gamma z_{t-1} + J(B)\varepsilon_t$$

donde $K(B)$ es una matriz $r \times N$ de polinomios rezagados dados por $\alpha' C^*(B)$ con todos los elementos de $K(1)$ finitos con rango r y $\det(\alpha'\gamma) > 0$.

6. Si una representación autorregresiva vectorial finita es aceptable, tendrá la forma dado por arriba con $d(B)=1$ y a la vez $A(B)$ y $A^*(B)$ como matrices de polinomios finitos.

Es necesario para probar el teorema, definir el siguiente lema sobre determinantes y adjuntos de polinomios de matriz singular.

LEMA:

Según Engle & Granger (1987), si $G(\lambda)$ es una matriz polinomial $N \times N$ de valor finito en $\lambda \in [0,1]$, con rango $G(0) = N - r$ para $0 \leq r \leq N$, y si $G^*(0) \neq 0$ en $G(\lambda) = G(0) + \lambda G^*(\lambda)$, entonces

- i) $\det(G(\lambda)) = \lambda' g(\lambda) I_N$ con $g(0)$ finito
- ii) $Adj(G(\lambda)) = \lambda^{r-1} H(\lambda)$, donde I_N es la matriz identidad $N \times N$, $1 \leq \text{ran}(H(0)) \leq r$, y $H(0)$ es finito.

Prueba:

El determinante de G se puede expresar en una serie de potencias en λ cómo

$$\det(G(\lambda)) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \lambda^i.$$

Cada δ_i es una suma de un número finito de productos de elementos de $G(\lambda)$ y, por lo tanto, tiene un valor finito en sí mismo. Cada uno tiene algunos términos de $G(0)$ y algunos de $\lambda G^*(\lambda)$. Cualquier producto con más de $N - r$ términos de $G(0)$ será cero porque será el determinante de una submatriz de orden mayor que el rango de $G(0)$. Los únicos términos distintos de cero posibles tendrán r o más términos de $\lambda G^*(\lambda)$ y por lo tanto se asociará con potencias de λ de r o más. El primer posible distinto de cero δ_i , es δ_r .

Definiendo $\det(G(\lambda)) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \lambda^i$ establece la primera parte del lema ya que δ_r ,

debe ser finito.

Para establecer la segunda parte del lema, exprese la matriz adjunta de G en

una serie de potencias de λ : $Adj(G(\lambda)) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i H_i$, dado que el adjunto es una matriz

compuesta de elementos que son determinantes de orden $N - 1$, el argumento anterior establece que las primeras $r - 1$ condiciones son idénticamente cero. Por lo tanto,

$$Adj(G(\lambda)) = \lambda^{r-1} \sum_{i=r-1}^{\infty} \lambda^{i-r+1} H_i = \lambda^{r-1} H(\lambda)$$

Porque los elementos de H_{r-1} son productos de un número finito de números finitos, $H(0)$ debe ser finito.

El producto de una matriz y su adjunto siempre dará el determinante así:

$$\lambda^r g(\lambda) I_N = (G(0) + \lambda G^*(\lambda)) H(\lambda) = G(0) H(\lambda) \lambda^{r-1} + h(\lambda) G^*(\lambda) \lambda^r .$$

Al igualar las potencias de λ obtenemos $G(0) H(0) = 0$.

Por lo tanto, el rango de $H(0)$ debe ser menor o igual que r , ya que se encuentra completamente en el espacio nulo de la columna de la matriz $G(0)$ de rango $N-r$. Si $r=1$, el primer término en la expresión para el adjunto será simplemente el adjunto de $G(0)$ que tendrá el rango 1 ya que $G(0)$ tiene rango $N-1$. $\square$

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE WOLD MULTIVARIADO

Según Hannan (1970), todo proceso estacionario multivariado puede representarse como un promedio móvil infinito: $y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \cdot \varepsilon_{t-i}$

donde: $\psi_0 = I$

$$\sum |\psi_i| < \infty$$

Esto implica que un $VAR(p)$ es una aproximación finita de esta representación.

Prueba del Teorema de Representación de Granger

Las condiciones del teorema suponen la existencia de una representación de Wold como en (1) para un vector N de variables aleatorias x_t que están cointegradas (Engle & Granger, 1987). Suponga que el vector cointegrante es α de modo que

$$z_t = \alpha' x_t ,$$

Es una serie de tiempo puramente no determinista estacionaria r-dimensional con representación de media móvil invertible. Multiplicando α por la representación de la media móvil en (1) se tiene:

$$(1-B)z_t = (\alpha' C(1) + (1-B)\alpha' C^*(B)) \varepsilon_t ,$$

Para que z_t sea $I(0)$, $\alpha' C(1)$ debe ser igual a 0. Cualquier vector con esta propiedad será un vector cointegrante; por lo tanto, $C(1)$ debe tener rango $N-r$ con un espacio nulo que contenga todos los vectores cointegrantes. También se deduce que $\alpha' C^*(B)$ debe ser una representación de media móvil invertible y en particular $\alpha' C^*(1) \neq 0$. De lo contrario, la cointegración sería con $b=2$ o más.

La afirmación 2. del teorema se establece mediante el Lema, dejando que $\lambda = (1-B)$, $G(\lambda) = C(B)$, $H(\lambda) = A(B)$ y $g(\lambda) = d(B)$. Dado que $C(B)$ tiene rango completo y es igual a I_N en $B=0$, su inverso es $A(0)$ que también es I_N .

La afirmación 3. del teorema se deriva del reconocimiento de que $A(1)$ tiene un rango entre 1 y r y se encuentra en el espacio nulo de $C(1)$. Dado que α abarca este espacio nulo, $A(1)$ se puede escribir como combinaciones lineales de los vectores de cointegración $A(1) = \gamma \alpha'$.

La afirmación 4. del teorema sigue por la manipulación de la estructura autorregresiva. Los términos de rango posterior en (1) dan:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{A}(B) + A(1) \right] (1-B)x_t &= -A(1)x_{t-1} + d(B)\varepsilon_t \\ A^*(B)(1-B)x_t &= -\gamma z \varepsilon_{t-1} + d(B)\varepsilon_t \\ A^*(0) &= A(0) = I_N \end{aligned}$$

La afirmación 5. del teorema se deriva de la sustitución directa en la representación de Wold. La definición de cointegración implica que esta media móvil sea estacionaria e invertible. Reescribiendo la representación de corrección de errores con $A^*(B) = I + A^{**}(B)$, donde $A^{**}(0) = 0$, y premultiplicando por α' :

$$\begin{aligned} (1-B)z_t &= -\alpha' \gamma z_{t-1} + \left[\alpha' d(B) + \alpha' A^{**}(B) C(B) \right] \varepsilon_t \\ &= -\alpha' \gamma z_{t-1} + J(B) \varepsilon_t \end{aligned}$$

Para que esto sea equivalente a la representación estacionaria de la media móvil la autoregresión debe ser invertible. Esto requiere que $\det(\alpha' \gamma) > 0$. Si el determinante fuera cero, entonces habría al menos una raíz unitaria, y si el determinante fuera negativo, entonces para algún valor de ω entre cero y uno, $\det(I_r - (I_r - \alpha' \gamma)\omega) = 0$, lo que implica una raíz dentro del círculo unitario.

La afirmación 6. sigue repitiendo los pasos anteriores, estableciendo $\det(B) = 1$. $\square$

Las representaciones autorregresivas y de corrección de errores dadas que están estrechamente relacionadas con los modelos vectoriales autorregresivos tan comúnmente usados en econometría, particularmente en el caso en que $d(B)$ puede razonablemente tomarse como 1. Sin embargo, cada uno difiere de manera importante de las aplicaciones típicas de VAR.

En la representación autorregresiva $A(B)x_t = \varepsilon_t$, la cointegración de las variables x_t genera una restricción que convierte a $A(1)$ en singular. Para $r=1$, esta matriz solo tendrá rango 1. El análisis de tales sistemas desde el punto de vista de la cuenta de la innovación es traicionero ya que algunos enfoques numéricos para calcular la representación de la media móvil son altamente inestables.

La representación de corrección de errores $A^*(B)(1-B)x_t = -\gamma\alpha'x_{t-1} + \varepsilon_t$, se parece más a una autoregresión vectorial estándar en las diferencias de los datos. Aquí la cointegración está implícita por la presencia de los niveles de las variables, por lo que un VAR puro en diferencias estará mal especificado si las variables están cointegradas. Por lo tanto, las autoregresiones vectoriales estimadas con datos cointegrados estarán mal especificadas si los datos son diferenciados y habrán omitido restricciones importantes si los datos se utilizan en niveles. Por supuesto, estas restricciones se satisfarán de forma asintótica, pero se pueden lograr ganancias de eficiencia y mejores pronósticos de varios pasos imponiéndolos.

Como $x_t \sim I(1)$, $z_t \sim I(0)$, debe tenerse en cuenta que todos los términos en los modelos de corrección de errores son $I(0)$. Lo contrario también es válido; si $x_t \sim I(1)$ son generados por un modelo de corrección de errores, entonces x_t , está necesariamente cointegrado. También cabe señalar que si $x_t \sim I(0)$, el proceso de generación siempre se puede escribir en el formulario de corrección de errores y, por lo tanto, en este caso, el concepto de equilibrio no tiene impacto.

Por ejemplo, un sistema cointegrado bivariado debe tener un orden causal en al menos una dirección. Debido a que las z deben incluir ambas variables y no puede ser idénticamente cero, deben ingresar en una o ambas ecuaciones. Si el término de corrección de errores entra en ambas ecuaciones, ninguna variable puede ser débilmente

exógena para los parámetros de la otra ecuación debido a la restricción de la ecuación cruzada. La noción de cointegración puede en principio extenderse a series con tendencias o raíces autorregresivas explosivas. En estos casos, el vector cointegrante aún sería necesario para reducir la serie a estacionariedad. Por tanto, las tendencias tendrían que ser proporcionales y las raíces explosivas tendrían que ser idénticas para todas las series. No consideramos estos casos pues pueden complicar los problemas de estimación y prueba.

2.1.8 ESTIMACIÓN DE SISTEMAS COINTEGRADOS

Al definir diferentes formas de sistemas cointegrados, se han discutido implícitamente varios procedimientos de estimación. Lo más conveniente es la forma de corrección de errores (especialmente si se puede suponer que no existe un término de promedio móvil). Quedan ecuaciones cruzadas que involucran los parámetros de los vectores cointegrantes; por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud, bajo supuestos gaussianos, requiere un procedimiento iterativo (Engle & Granger, 1987).

Se propondrá otro estimador que es de dos pasos. En el primer paso se estiman los parámetros del vector cointegrante y en el segundo estos se utilizan en la forma de corrección de errores. Ambos pasos requieren solo una ecuación de mínimos cuadrados y se mostrará que el resultado es consistente para todos los parámetros. El procedimiento es conveniente porque no es necesario especificar la dinámica hasta que se haya estimado la estructura de corrección de errores (Engle & Granger, 1987).

Como subproducto, obtenemos algunas estadísticas de prueba útiles para probar la cointegración. Así, de la afirmación 5. del teorema de representación de Granger se puede expresar directamente la matriz de momentos muestral de los datos.

Sea la matriz de momentos dividida por T denotada por:

$$M_T = \frac{1}{T^2} \sum_t x_t x_t'$$

y recordando que $z_t = \alpha' x_t$, implica que:

$$\alpha' M_T = \frac{\sum_t [K(B)\varepsilon_t] x_t'}{T^2}$$

Siguiendo el argumento de Dickey y Fuller (1979) o Stock (1984), se puede demostrar que para satisfacer el proceso (1):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E(M_T) = M \quad \dots (3)$$

$$\text{y } \alpha' M = 0, \text{ o } (\text{vec } \alpha)'(I \otimes M) = 0 \quad \dots (4)$$

Aunque la matriz de momentos de los datos de un proceso cointegrado no sea singular para cualquier muestra, en el límite, tendrá el rango $N-r$. Esto concuerda bien con la observación común de que los datos de las series de tiempo económicas son altamente colineales, de modo que las matrices de momentos pueden ser casi singulares incluso cuando las muestras son grandes. La cointegración aparece como una hipótesis creíble desde un punto de vista analítico de datos (Engle & Granger, 1987).

Las ecuaciones (4) no definen de forma única los vectores cointegrantes a menos que se impongan normalizaciones arbitrarias. Sean q y Q matrices que incorporan estas normalizaciones reparametrizando α en θ , una matriz $j \times 1$ de parámetros desconocidos que se encuentran en un subconjunto compacto de R^j :

$$\text{vec } \alpha = q + Q\theta \quad \dots (5)$$

Normalmente, q y Q serán todos ceros y unos, definiendo así un coeficiente en cada columna de α como unidad y definiendo rotaciones si $r > 1$. Se dice que los parámetros θ están "identificados" si hay una solución única. Esta solución viene dada por

$$(I \otimes M)Q\theta = -(I \otimes M)q \quad \dots (6)$$

Donde por el supuesto de identificación, $(I \otimes M)Q$ tiene una inversa izquierda, aunque M no tenga.

Como la matriz de momentos M_T tendrá rango completo para muestras finitas, un enfoque razonable para la estimación es minimizar la suma de las desviaciones del equilibrio al cuadrado. En el caso de un solo vector cointegrante, α minimizará $\alpha' M_T \alpha$ sujeto a restricciones y el resultado será simplemente de mínimos cuadrados ordinarios. Para múltiples vectores cointegrantes, defina α como el minimizador de la traza $(\alpha' M_T \alpha)$. El problema de estimación se convierte en:

$$\text{Min } \text{tr}(\alpha' M_T \alpha) = \text{Min } \text{vec } \alpha' (I \otimes M_T) \text{vec } \alpha = \text{Min}_{\theta} (q + Q\theta)' (I \otimes M_T) (q + Q\theta)$$

lo que implica la solución

$$\hat{\theta} = -(Q'(I \otimes M_T)Q)^{-1}(q + Q\theta)'(Q'(I \otimes M_T)q), \quad \text{vec } \hat{\alpha} = q + Q\hat{\theta} \quad \dots (7)$$

Este enfoque de estimación debería proporcionar una muy buena aproximación al vector cointegrante verdadero porque busca vectores con varianza residual mínima y asintóticamente todas las combinaciones lineales de x tendrán varianza infinita excepto aquellas que es de los vectores de cointegración.

Cuando $r=1$ este estimador se obtiene simplemente regresando la variable normalizada para tener un coeficiente unitario sobre las otras variables. Esta regresión se denominará "regresión de cointegración", ya que intenta ajustar la relación de equilibrio o de largo plazo sin preocuparse por la dinámica. Se mostrará para proporcionar una estimación de los elementos del vector cointegrante. Granger & Newbold (1974) han llamado despectivamente una regresión "espuria" principalmente porque los errores estándar son muy engañosos. Estaban particularmente preocupados por el caso no cointegrado en el que no había relación, pero la raíz unitaria en el proceso de error conducía a un Durbin Watson bajo, un R^2 alto y una significancia aparentemente alta de los coeficientes. Aquí solo buscamos estimaciones de coeficientes para usar en la segunda etapa y para las pruebas de la relación de equilibrio. La distribución de los coeficientes estimados se investiga en Stock (1984).

Cuando $N=2$, hay dos posibles regresiones dependiendo de la normalización elegida. La falta de singularidad de la estimación deriva del hecho bien conocido de que el ajuste de mínimos cuadrados de una regresión inversa no dará el recíproco del coeficiente en la regresión directa. En este caso, sin embargo, la normalización importa muy poco. A medida que la matriz de momentos se acerca a la singularidad, R^2 se acerca a 1, que es el producto de los coeficientes de regresión directa e inversa. Esto sería exactamente cierto si solo hubiera dos puntos de datos que, por supuesto, define una matriz singular. Para las variables que tienen una tendencia conjunta, la correlación se acerca a uno a medida que cada varianza se acerca al infinito. La línea de regresión pasa casi a través de los puntos extremos casi como si solo hubiera dos observaciones.

PROPOSICIÓN

Según Engle & Granger (1987), suponga que x_t , satisface (1) con $C^*(B)$ absolutamente sumable, que las perturbancias tienen hasta el cuarto momento absoluto finito y que x_t , está cointegrada (1,1) con r vectores cointegrantes que satisfacen (5). Luego, definiendo $\hat{\theta}$ por (7), se tiene:

$$T^{1-\delta}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{p} 0 \text{ con } \delta > 0 \quad \dots (8)$$

La proposición establece que los parámetros estimados convergen muy rápidamente a sus límites de probabilidad. También establece que las estimaciones son consistentes con un sesgo muestral finito de orden $\frac{1}{T}$.

El estimador de dos pasos propuesto para este sistema cointegrado utiliza la estimación de α de (7) como un parámetro conocido para estimar la forma de corrección de errores del sistema de ecuaciones. Esto simplifica sustancialmente el procedimiento de estimación al imponer restricciones entre ecuaciones y permite la especificación de los patrones dinámicos de las ecuaciones individuales por separado. Observe que no fue necesario especificar la dinámica para estimar α . Sorprendentemente, este estimador de dos pasos tiene excelentes propiedades como se muestra en el teorema siguiente, es tan eficiente como el estimador de máxima verosimilitud basado en el valor conocido de α .

TEOREMA

Según Engle & Granger (1987), el estimador de dos pasos de una sola ecuación de un sistema de corrección de errores, obtenido tomando α de (7) como el valor verdadero, tendrá la misma distribución límite que el estimador de máxima verosimilitud usando el valor verdadero de α . Los errores estándar de mínimos cuadrados serán estimaciones consistentes de los verdaderos errores estándar.

Prueba

Reescribiendo la primera ecuación del sistema de corrección de la afirmación 4. del teorema de representación de Granger, se tiene:

$$\begin{aligned}
y_t &= \gamma \hat{z}_{t-1} + W_t \beta + \varepsilon_t + \gamma(z_{t-1} - \hat{z}_{t-1}) \\
z_t &= X_t \alpha \\
\hat{z}_t &= X_t \hat{\alpha}
\end{aligned}$$

dónde $X_t = x_t'$, W es una matriz con elementos seleccionados de Δx_{t-i} y γ es un elemento de Δx_t , por lo que todos los regresores son $I(0)$. Luego, dejando que las mismas variables sin subíndices denoten matrices de datos,

$$\sqrt{T} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} = \left[\frac{(\hat{z}, W)' (\hat{z}, W)}{T} \right]^{-1} \left[\frac{(\hat{z}, W)' (\varepsilon + \gamma)(z - \hat{z})}{\sqrt{T}} \right]$$

Esta expresión se simplifica porque $\hat{z}'(z - \hat{z}) = 0$.

De Fuller (1976) o Stock (1984), $\frac{X'X}{T^2}$ y $\frac{X'W}{T}$ son ambos de orden 1.

rescribiendo

$$\frac{W'(z - \hat{z})}{\sqrt{T}} = \left[\frac{W'X}{T} \right] [T(\alpha - \hat{\alpha})] \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \right]$$

y por lo tanto el primer y segundo factor a la derecha del signo igual son de orden 1 y el tercero va a cero de modo que toda la expresión se desvanece asintóticamente.

Debido a que los términos en $\frac{(z - \hat{z})}{\sqrt{T}}$ se desvanecen asintóticamente, los errores estándar de mínimos cuadrados serán consistentes.

Siendo: $S = p \lim \left[\frac{(\hat{z}, W)' (\hat{z}, W)}{T} \right]$, $\sqrt{T} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} \xrightarrow{A} D(0, \sigma^2 S^{-1})$, donde D

representa la distribución límite. Bajo supuestos adicionales, pero estándares, se podría garantizar que esto sea normal.

Para establecer que el estimador que usa el valor verdadero de α tiene la misma distribución límite, es suficiente mostrar que el límite de probabilidad $\left[\frac{(z, W)' (z, W)}{T} \right]$

también es S y que $\frac{z' \varepsilon}{\sqrt{T}}$ tiene la misma distribución límite que $\frac{\hat{z}' \varepsilon}{\sqrt{T}}$. Examinando

primero los términos fuera de la diagonal de S ,

$$\frac{\hat{z}'W}{T} - \frac{z'W}{T} = T(\hat{\alpha} - \alpha)' \left[\frac{W'X}{T} \right] \left(\frac{1}{T} \right)$$

Los primeros y segundos factores son de orden 1 y el tercero es $\frac{1}{T}$, por lo que toda la expresión se desvanece asintóticamente:

$$\begin{aligned} \frac{(\hat{z} - z)'(\hat{z} - z)}{T} &= \frac{z'z}{T} - \frac{\hat{z}'\hat{z}}{T} \\ &= T(\hat{\alpha} - \alpha)' \left[\frac{X'X}{T^2} \right] T(\hat{\alpha} - \alpha) \left(\frac{1}{T} \right) \end{aligned}$$

Nuevamente, los primeros tres factores son de orden 1 y el último es $\frac{1}{T}$, por lo que, aunque la diferencia entre estas matrices de covarianza es definida positiva, se desvanecerá asintóticamente.

Finalmente,

$$\frac{(\hat{z} - z)'\varepsilon}{\sqrt{T}} = T(\hat{\alpha} - \alpha)' \left[\frac{X'\varepsilon}{T} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right)$$

que nuevamente se desvanece asintóticamente.

En condiciones estándar, el estimador que utiliza el conocimiento de α será asintóticamente normal y, por lo tanto, el estimador de dos pasos también será asintóticamente normal en estas condiciones. $\square$

2.1.9 PRUEBAS DE COINTEGRACIÓN

Con frecuencia es de interés probar si un conjunto de variables están cointegradas. Esto puede ser cierto debido a las implicaciones económicas tales como si algún sistema está en equilibrio a largo plazo, o puede ser sensato probar tales hipótesis antes de estimar un modelo dinámico multivariante (Engle & Granger, 1987).

Desafortunadamente, la configuración no es estándar y no puede verse simplemente como una aplicación de las pruebas de Wold, razón de verosimilitud o multiplicador de Lagrange. El problema de las pruebas está estrechamente relacionado con las pruebas de raíces unitarias en series observadas. También está relacionado con el problema de las pruebas cuando algunos parámetros no se identifican bajo el valor nulo, como lo discutieron Davies (1977) y Watson & Engle (1982).

Ahora se propone un conjunto de siete estadísticas de prueba para probar el nulo de no cointegración frente a la alternativa de cointegración. Se sostiene que el verdadero sistema es una autorregresión vectorial lineal bivariada con errores gaussianos donde cada una de las series es individualmente $I(1)$. Como la hipótesis nula es compuesta, se buscarán pruebas similares para que la probabilidad de rechazo sea constante sobre el conjunto de parámetros incluido en la nula.

Pueden distinguirse dos casos:

En el primero, se sabe que el sistema es de primer orden y, por lo tanto, el nulo está definido por

$$\begin{matrix} \Delta y_t = \varepsilon_{1t} \\ \Delta x_t = \varepsilon_{2t} \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \sim N(0, \Omega)$$

A continuación, se mostrará que todos los estadísticos de prueba son similares con respecto a la matriz Ω , por lo que, sin pérdida de generalidad, tomamos $\Omega = I$.

En el segundo caso, se supone que el sistema es simplemente un sistema lineal estacionario en los cambios. En consecuencia, el nulo se define sobre un conjunto completo de coeficientes de media móvil y autorregresivos estacionarios, así como Ω .

En el caso más complicado pero realista de que el sistema es de orden infinito, pero puede aproximarse mediante una autoregresión de orden ρ , las estadísticas solo serán asintóticamente similares. Aunque la similitud se logra en el modelo de regresor fijo de Gauss, esto no es posible en los modelos de series de tiempo donde no se puede condicionar sobre los regresores; los resultados de similitud son solo asintóticos. Si bien la suposición de que el sistema es de orden ρ permite que los residuos sean de orden infinito, es de suponer que existe un modelo autorregresivo finito, posiblemente de orden menor que ρ , que será una buena aproximación. Por lo tanto, se podría sugerir algo de experimentación para encontrar el valor apropiado de ρ en cualquier caso. Una estrategia alternativa sería dejar que ρ sea una función no estocástica de T que aumenta lentamente, que está estrechamente relacionada con la prueba propuesta por Phillips (1985) y Phillips & Durlauf (1985). Solo una experimentación de simulación sustancial determinará si es preferible utilizar una selección basada en datos de ρ para este procedimiento de prueba, aunque la evidencia presentada a

continuación muestra que la estimación de parámetros extraños disminuirá la potencia de las pruebas.

Tabla 1

Estadísticas de prueba (rechazo de grandes valores)

1. La regresión cointegrante de Durbin-Watson

$$y_t = \alpha x_t + c + u_t$$

$$\varepsilon_1 = DW, \text{ el nulo es } DW = 0$$

2. Regresión de Dickey-Fuller

$$\Delta u_t = -\phi u_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_2 = \tau_\phi, \text{ el estadístico } t \text{ para } \phi$$

3. Regresión Dickey-Fuller aumentada

$$\Delta u_t = -\phi u_{t-1} + b_1 \Delta u_{t-1} + \dots + b_l \Delta u_t - p + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_3 = \tau_\phi$$

4. VAR restringido

$$\Delta y_t = \beta_1 u_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad \Delta x_t = \beta_2 u_{t-1} + \gamma \Delta y_t + \varepsilon_{2t}$$

$$\varepsilon_4 = \tau_{\beta_1}^2 + \tau_{\beta_2}^2$$

5. VAR restringido aumentado

Igual a la (4) pero con p rezagos de Δy_t y Δx_t en cada ecuación

$$\varepsilon_5 = \tau_{\beta_1}^2 + \tau_{\beta_2}^2$$

6. VAR sin restricciones

$$\Delta y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_{t-1} + c_1 + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta x_t = \beta_3 u_{t-1} + \beta_4 x_{t-1} + \gamma \Delta y_t + c_2 + \varepsilon_{2t}$$

$\varepsilon_6 = 2[F_1 + F_2]$, donde F_1 es el estadístico F para probar β_1 y β_2 ambos iguales a cero en la primera ecuación, y F_2 es el estadístico comparable en la segunda ecuación.

7. VAR no restringido aumentado

Igual a la (6) excepto por los p rezagos de Δx_t y Δy_t , en cada ecuación.

$$\varepsilon_7 = 2[F_1 + F_2]$$

En la tabla 1, las siete estadísticas de prueba se establecen formalmente, x_t y y_t son los conjuntos de datos originales y u_t son los residuos de la regresión de cointegración.

Así mismo los valores críticos y las potencias de las pruebas se consideran cuando el sistema es de primer orden. En este caso, se esperaría que las pruebas aumentadas fueran menos potentes porque estiman parámetros que son realmente cero tanto en el caso nulo como en el alternativo. Las otras cuatro pruebas no estiman parámetros extraños y están correctamente especificadas para este experimento.

De la tabla 1 se puede realizar una prueba del 5 por ciento de la hipótesis de no cointegración con la prueba de regresión cointegrante de Durbin-Watson, simplemente.

2.1.10 CONTRASTE DE COINTEGRACIÓN

Según Engle & Granger (1987), los residuos de la regresión efectuada en la primera etapa se pueden utilizar para realizar contrastes de la existencia de cointegración entre las variables. Si están cointegradas, los errores han de ser estacionarios. Se puede comprobar si es así o no aplicando los contrastes de raíces unitarias descritos al comienzo de este trabajo (DF, ADF, DW ...) a dichos residuos. La hipótesis nula es que los residuos son $I(1)$, es decir, no hay cointegración. La hipótesis alternativa, que los residuos son $I(0)$, que existe cointegración.

No obstante, es preciso tener en cuenta que, al usar los contrastes DF o ADF para comprobar si estos residuos son no estacionarios, surge una complicación que no

se daba cuando se les aplicaba a series temporales originales, directamente observadas en vez de construidas. Esto se debe a que la estimación mediante mínimos cuadrados ordinarios elige los estimadores que provoquen la menor varianza muestral en los residuos. Por eso, incluso si las variables no están cointegradas, la estimación por mínimos cuadrados ordinarios hará que los residuos parezcan lo más estacionarios que sea posible. Por tanto, al usar los contrastes DF y ADF sobre estos residuos, tenderán a rechazar la hipótesis nula de no estacionariedad con demasiada frecuencia. Para corregir este sesgo, los valores críticos se han de elevar ligeramente (además los valores críticos de este tipo de contraste dependen del número de variables que aparecen en la regresión de cointegración). Engle & Granger (1987), Engle & Yoo (1987) y MacKinnon (1990) proporcionan tablas generadas por métodos de Monte Carlo para distintos casos.

2.1.11 CAUSALIDAD DE GRANGER

Sea $(\Omega, F, P(.))$ el espacio de probabilidad que soporta el vector de N variables aleatorias reales w_t , donde solo consideramos procesos de tiempo discreto. En cada momento $t \in \tau$, la densidad conjunta $D_{w_t}(w_t / F_{t-1})$ de w_t caracteriza la economía bajo análisis, con el espacio muestral Ω y el espacio de eventos F_{t-1} . Suponemos que existe esta densidad, pero el análisis podría realizarse al nivel de la distribución (acumulativa) $P(.)$ (Granger, 1969). Asumimos también que este DGP puede ser representado como un proceso estocástico vectorial, con suficiente continuidad para que sea significativo postular d parámetros $\delta \in D^d \subseteq \mathbb{R}^d$ que no dependen de F_{t-1} , en cualquier t . No restringimos los parámetros para que sean constantes a lo largo del tiempo, ni excluir parámetros transitorios. Dado el uso predominante generador de números aleatorios congruentes en la simulación de procesos estocásticos, con son procesos caóticos deterministas de ligeras dimensiones, dudamos que suponer que $\{w\}$ sea un proceso estocástico sea demasiado restrictivo.

La finalidad es arrojar luz sobre las relaciones entre ciertas clases de modelos econométricos que involucran retroalimentación y las funciones que surgen en el análisis espectral, particularmente el espectro cruzado y el espectro cruzado parcial. La

causalidad y la retroalimentación se definen aquí de una manera explícita y comprobable. Se muestra que, en el caso de dos variables, el mecanismo de retroalimentación se puede dividir en dos relaciones causales y que el espectro cruzado puede considerarse como la suma de dos espectros cruzados, cada uno de los cuales está estrechamente relacionado con una de las causas. Las siguientes tres secciones del artículo presentan brevemente los aspectos de los métodos espectrales, la construcción de modelos y la causalidad que se requieren más adelante.

Según Granger (1969), las definiciones iniciales de causalidad, retroalimentación, etc., serán de naturaleza muy general. Los formularios comprobables se introducirán más adelante. Sea U_t toda la información en el universo acumulada desde el tiempo $t-1$ y sea $U_t - Y_t$, toda esta información aparte de la serie especificada Y_t , entonces tenemos las siguientes definiciones:

Definición 1: Causalidad.

Si $\sigma^2(X/U) < \sigma^2(X, \overline{U-Y})$, decimos que Y está causando X , denotado por $Y_t \Rightarrow X_t$. Decimos que Y_t está causando X_t , si somos más capaces de predecir X_t , usando toda la información disponible que si se hubiera usado la información aparte de Y_t ha sido usada (Granger, 1969).

Definición 2: Retroalimentación.

Si $\begin{cases} \sigma^2(X/\overline{U}) < \sigma^2(X, \overline{U-Y}) \\ \sigma^2(Y/\overline{U}) < \sigma^2(Y, \overline{U-X}) \end{cases}$, decimos que se está produciendo retroalimentación.

que se denota $Y_t \Leftrightarrow X_t$, es decir, se dice que la retroalimentación ocurre cuando X_t , está causando Y_t , y también Y_t , está causando X_t (Granger, 1969).

Definición 3: Causalidad instantánea.

Si $\sigma^2(X/\overline{U}, \overline{\overline{Y}}) < \sigma^2(X, \overline{U})$, decimos que se está produciendo una causalidad instantánea $Y_t \Rightarrow X_t$. En otras palabras, el valor actual de X_t se "predice" mejor si el valor actual de Y_t se incluye en la "predicción" que si no lo está (Granger, 1969).

Definición 4: Retraso de causalidad.

Si $Y_t \Rightarrow X_t$, definimos el retardo de causalidad (entero) m como el valor mínimo de k tal que $\sigma^2(X/U - Y(k)) < \sigma^2(X/Y(k+1))$. Por lo tanto, conocer los valores $Y_{t-j}, j = 0, 1, \dots, m-1$, no será de ayuda para mejorar la predicción de X_t (Granger, 1969).

Las definiciones han asumido que solo están involucradas series estacionarias. En el caso no estacionario, $\sigma(X/\bar{U})$, etc. dependerá del tiempo t , en general, la existencia de causalidad puede alterarse con el tiempo. Las definiciones pueden generalizarse inicialmente para que sean operativas durante un tiempo especificado t , entonces se podría hablar de causalidad existente en este momento. Sin embargo, considerar las series no estacionarias nos aleja aún más de las definiciones comprobables y esta táctica no se discutirá más (Granger, 1969).

El único aspecto completamente irreal de las definiciones anteriores es el uso de la serie U_t que representa todos los elementos disponibles. La gran mayoría de la información en el universo será bastante irrelevante, es decir, no tendrá ninguna consecuencia causal. Supongamos que toda la información relevante es de naturaleza numérica y pertenece al conjunto de vectores de series de tiempo $Y_t^D = \{Y_t^i, i \in D\}$, para algunos conjuntos de enteros D . Denotemos el conjunto $\{i \in D, i \neq j\}$ por $D(j)$ y $\{Y_t^i, i \in D(j)\}$ por $Y_t^{D(j)}$, etc. el conjunto completo de información relevante excepto una serie en particular. Del mismo modo, podríamos omitir más de una serie con la notación obvia. Las definiciones anteriores ahora se pueden usar, pero con U_t , reemplazada por Y_t , y $U_t - Y_t$ por $Y^{D(j)}$. Así, por ejemplo, suponga que el conjunto de vectores consta solo de dos series, X_t e Y_t , y que toda la otra información es irrelevante. Entonces, $\sigma^2(X/\bar{X})$ representa la varianza mínima del error predictivo de X_t , utilizando solo X_t pasado, y $\sigma^2(X/\bar{X}, \bar{Y})$ representa esta varianza mínima si tanto el pasado X_t como el pasado Y_t se utilizan para predecir X_t . Entonces se dice que Y_t causa X_t , si $\sigma^2(X/\bar{X}) > \sigma^2(X/\bar{X}, \bar{Y})$.

La definición de causalidad ahora es relativa al conjunto D . Si no se han incluido datos relevantes en este conjunto, entonces podría surgir una causalidad espuria. Por ejemplo, si se considerara que el conjunto D constaba únicamente de las dos series X_t , e Y_t , pero de hecho había una tercera serie Z_t , lo que provocaba que ambas dentro del conjunto ampliado $D' = (X_t, Y_t, Z_t)$, entonces para el conjunto original D , se puede encontrar una causalidad espuria entre X_t e Y_t . Esto es similar a la correlación espuria y la correlación parcial entre conjuntos de datos que surgen cuando no se ha incluido alguna otra variable estadística de importancia (Granger, 1969).

En la práctica, normalmente no será posible utilizar predictores completamente óptimos, a menos que se suponga que todos los conjuntos de series están distribuidos normalmente, ya que dichos predictores óptimos pueden ser no lineales de formas complicadas. Parece natural usar solo predictores lineales y las definiciones anteriores pueden usarse nuevamente bajo este supuesto de linealidad.

Se puede argumentar que la varianza no es el criterio adecuado para medir la cercanía de un predictor P al valor verdadero X_t . Ciertamente, si se usaran otros criterios, sería posible llegar a conclusiones diferentes sobre si una serie está causando otra. La varianza parece ser un criterio natural para usar en relación con los predictores lineales, ya que es matemáticamente fácil de manejar e interpretar. Si se usa este criterio, un mejor nombre podría ser "causalidad en la media". La definición original de causalidad se ha restringido ahora para alcanzar una forma que pueda ser probada. Siempre que se utilice la palabra causalidad en secciones posteriores, se entenderá que significa "causalidad lineal en la media con respecto a un conjunto D especificado". Es posible extender las definiciones al caso donde se considera que un subconjunto de la serie D^* de D causa X_t . Este sería el caso si $\sigma^2(X / Y^D) < \sigma^2(X / Y^{D-D^*})$ y luego $Y^{D^*} \Rightarrow X_t$. Por lo tanto, uno podría preguntarse si el pasado X_t , está causando el presente X_t , debido a que son necesarios nuevos conceptos en la consideración de tales problemas, no se discutirán aquí en detalle.

Ya se ha señalado [3] que la realidad instantánea, en cuyo conocimiento del valor actual de una serie ayuda a predecir el valor actual de una segunda serie, puede

surgir ocasionalmente de manera falsa en ciertos casos. Suponga que $Y_t \Rightarrow X_t$, con un retraso de una unidad, pero que las series se muestrean cada dos unidades de tiempo. Entonces, aunque no hay una causalidad instantánea real, las definiciones parecerán sugerir que tal causalidad está ocurriendo. Esto se debe a que no se ha utilizado cierta información relevante, las lecturas que faltan en los datos. Debido a este efecto, se podría sugerir que en muchas situaciones económicas una aparente causalidad instantánea desaparecería si las variables económicas se registraran en intervalos de tiempo más frecuentes.

La definición de causalidad utilizada anteriormente se basa completamente en la previsibilidad de algunas series, digamos X_t . Si alguna otra serie Y_t , contiene información en términos pasados que ayuda en la predicción de X_t , y si esta información no está contenida en ninguna otra serie utilizada en el predictor, entonces se dice que Y_t causa X_t (Granger, 1969). El flujo del tiempo juega claramente un papel central en estas definiciones. En opinión del autor, es poco útil en la práctica intentar discutir la causalidad sin introducir el tiempo, aunque los filósofos lo han intentado. También se deduce de las definiciones que una serie puramente determinista, es decir, una serie que puede predecirse exactamente a partir de sus términos pasados, como una serie no estocástica, no puede decirse que tenga ninguna influencia causal distinta de su propio pasado. Esto puede parecer contrario al sentido común en ciertos casos especiales, pero es difícil encontrar una definición alternativa comprobable que pueda incluir la situación determinista. Parece que no hay forma de decidir si Y es un factor causal de X o no. En algunos casos, se puede aplicar la notación de la "regla más simple" o también la experiencia no indica que uno deba esperar que las leyes económicas sean de naturaleza simple.

2.2 MARCO CONCEPTUAL (PALABRAS CLAVES)

2.2.1 SERIE DE TIEMPO

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones de una variable, ordenadas cronológicamente y registradas a intervalos regulares (Gujarati & Porter, 2010). Su análisis busca identificar patrones de comportamiento tendencia, estacionalidad y ciclos que permitan describir, explicar o predecir la evolución futura de la variable estudiada.

2.2.2 ESTACIONARIEDAD

Se dice que una serie de tiempo es estacionaria cuando su media, varianza y covarianzas permanecen constantes en el tiempo, es decir, cuando dichos momentos no dependen del periodo en que son calculados (Gujarati & Porter, 2010). La verificación de esta propiedad constituye un paso previo indispensable antes de estimar cualquier relación de largo plazo entre variables económicas.

2.2.3 SERIE INTEGRADA (ORDEN DE INTEGRACIÓN)

Una serie que no es estacionaria en niveles, pero que se convierte en estacionaria después de ser diferenciada d veces, se denomina integrada de orden d y se denota como $I(d)$ (Engle & Granger, 1987). En la práctica, la mayor parte de las series macroeconómicas resulta integrada de orden uno, $I(1)$, lo que implica que basta con una diferenciación para alcanzar la estacionariedad.

2.2.4 COINTEGRACIÓN

Dos o más series económicas se encuentran cointegradas cuando, siendo individualmente no estacionarias, existe una combinación lineal entre ellas que sí resulta estacionaria, lo cual evidencia una relación de equilibrio de largo plazo entre las variables (Engle & Granger, 1987). Este concepto permite conciliar el análisis de series no estacionarias con la existencia de relaciones económicas estables y sistemáticas entre variables.

2.2.5 VECTOR DE COINTEGRACIÓN

Es el conjunto de coeficientes que define la combinación lineal estacionaria entre variables cointegradas; su estimación permite identificar el número de relaciones de equilibrio de largo plazo presentes en un sistema de variables (Johansen, 1988). El procedimiento propuesto por Johansen (1988) posibilita estimar dicho vector mediante máxima verosimilitud en un contexto multivariado.

2.2.6 MODELO DE CORRECCIÓN DE ERRORES (MCE)

El MCE es una especificación que combina la dinámica de corto plazo entre las variables con su relación de equilibrio de largo plazo, incorporando un término de corrección que mide la velocidad a la que las desviaciones respecto al equilibrio se corrigen en cada periodo (Engle & Granger, 1987). Su formulación se sustenta en el teorema de representación de Granger, según el cual todo conjunto de variables cointegradas admite una representación de este tipo.

2.2.7 TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE GRANGER

Este teorema establece que, si dos o más variables están cointegradas, entonces existe una representación de corrección de errores válida entre ellas, y viceversa (Engle & Granger, 1987). Constituye el fundamento teórico que vincula el concepto de cointegración con los modelos de corrección de errores utilizados en el análisis empírico.

2.2.8 PRUEBA DE RAÍZ UNITARIA

Es un procedimiento estadístico empleado para determinar si una serie de tiempo es estacionaria, contrastando la hipótesis de la presencia de una raíz unitaria en el proceso generador de los datos (Dickey & Fuller, 1979). El rechazo de dicha hipótesis nula indica que la serie es estacionaria, mientras que su no rechazo sugiere la necesidad de diferenciarla.

2.2.9 CAUSALIDAD DE GRANGER

Se dice que una variable causa, en el sentido de Granger, a otra cuando los valores pasados de la primera contribuyen a explicar significativamente los valores

presentes de la segunda, más allá de lo que ya explican los valores pasados de esta última (Granger, 1969). Esta noción de causalidad es de naturaleza predictiva y no implica necesariamente una relación causal en sentido estructural o económico.

2.3 ANTECEDENTES EMPÍRICOS DE LA INVESTIGACIÓN

2.3.1 ANTECEDENTES INTERNACIONALES

Risso y Sánchez Carrera (2010) estimaron las relaciones de largo plazo y los efectos umbral entre la inflación y el crecimiento económico en México para el periodo 1970–2007. Mediante un vector cointegrado entre el logaritmo del PIB real y la tasa de inflación medida a través del Índice Nacional de Precios al Consumidor encontraron una elasticidad de largo plazo significativamente negativa entre ambas variables. Al aplicar una prueba de causalidad más robusta que la de Granger, no hallaron evidencia de causalidad en ninguna dirección entre las series; adicionalmente, la estimación de un modelo de valores umbral sugirió que una inflación superior al 9% afecta negativamente el crecimiento económico mexicano. Este antecedente resulta relevante porque valida metodológicamente el uso de la cointegración para estudiar la relación entre precios y producto, aun cuando concluye en ausencia de causalidad.

Por su parte, Salinas-Arroba et al. (2025) analizaron la relación de cointegración entre el Índice de Precios al Consumidor y los salarios nominales en Ecuador. Sus resultados evidenciaron que ambas variables se encuentran cointegradas, es decir, que existe una relación de equilibrio de largo plazo entre ellas, aunque con una velocidad de corrección moderada ante desviaciones de dicho equilibrio. Este estudio confirma la pertinencia de la metodología de Engle y Granger para variables macroeconómicas de frecuencia distinta al PBI, y respalda la expectativa de que el nivel de precios mantenga relaciones sistemáticas de largo plazo con otras variables de la economía real.

Moraes, J. (2009), “A relação entre retornos de mercado e retornos contábeis: um estudo de caso do setor bancário brasileiro, Universidad Federal do Ceará – Brasil”, en este trabajo se investiga la relación entre la rentabilidad del mercado y rentabilidad contable trimestral de las empresas más grandes del sector bancario a través de la prueba

econométrico de causalidad de Granger, así como examina el comportamiento de precios de las acciones de los bancos antes y después de las publicaciones financieras. La muestra utilizada es de los cuatro mayores bancos brasileños que negocian en la bolsa de valores de Sao Paulo durante el tercer trimestre del 1997 al segundo trimestre del 2008. El objetivo del estudio es identificar la existencia de causalidad entre las dos series de retornos para cada empresa de la muestra, y analizar el comportamiento de sus precios de las acciones antes y después de las publicaciones trimestrales del balance, también examinar la existencia de la causalidad. Los resultados muestran que hay evidencia marginal de que las publicaciones financieras de estos bancos causan, en sentido de Granger, la rentabilidad del mercado no se aplica en sentido opuesta, ya no parecen estados financieros trimestrales para causar rendimiento de las acciones antes y después de su liberación, porque no hay cambios significativos en su comportamiento.

Montero, R. (2013). “Variables no estacionarias y cointegración”, la econometría de series temporales se encuentra con un problema al medir las relaciones entre aquellas variables que tienen una tendencia temporal. Este problema puede llegar a que se consideren significativas relaciones completamente espurias. Cuando, en lugar de series estacionarias, se utilizan datos de panel el problema también puede surgir. Las variables que tienen una tendencia temporal definida se denominan “no estacionarias”. Las estimaciones de regresiones con variables no estacionarias son espurias salvo que estas estén cointegradas. Dos variables no estacionarias cointegradas son aquellas cuyos residuos son estacionarios. Si los residuos son estacionarios las estimaciones de variables no estacionarias son superconsistentes.

Mendoza, M. & Quintana, L. (2000), “Cointegración y modelos de corrección de error”, en este libro se encontrara una vía práctica para mejorar su comprensión de la econometría, al utilizar aplicaciones a su realidad social, emplear las fuentes de información disponibles en el país y disponer de un formato tecnológico en el que pueden aplicar los conocimientos adquiridos, poner en práctica propuestas propias y realizar trabajo de investigación por su cuenta haciendo uso de medios tecnológicos de uso masivo. Los capítulos de este libro de texto tienen como eje común la aceptación de que en los últimos veinte años se ha dado una revolución en las técnicas

econométricas y en sus aplicaciones. En buena parte estos cambios provienen del reconocimiento de que el paradigma clásico, que actualmente aún predomina en la mayoría de los libros de texto, fue sustentado en supuestos muy discutibles. Los cuestionamientos a la metodología econométrica clásica se desprenden del trabajo de Box y Jenkins (1970) en series de tiempo; Davidson, Hendry, Srba y Yeo (1978) que desarrollaron la idea de modelos de corrección de error (MCE) y que actualmente su propuesta se reconoce como metodología LSE (London School of Economics) o DHDY (por las iniciales de sus autores); los numerosos trabajos de Engle y Granger a partir de los años ochenta en donde se vincula el concepto de cointegración a los MCE; el trabajo del mismo Engle (1982) que dio lugar a los modelos ARCH (heterocedasticidad condicional autorregresiva), los cuales han tenido un gran impacto en el análisis econométrico aplicado al mundo de las finanzas; Los desarrollos de finales de los años noventa en el campo de la Econometría Espacial impulsados por Anselin (1988) y; un sin número de artículos que inspirados en estos trabajos pioneros han cambiado la forma de pensar y hacer econometría en la actualidad.

Navarro, F. (2011), “Ecuaciones en diferencias de Volterra y aproximación numérica para ecuaciones integrales”, el objetivo de este trabajo es hacer un estudio de las propiedades cualitativas de cierta clase de ecuaciones en diferencias de Volterra, se muestran algunos criterios de estabilidad, acotación y periodicidad para las soluciones, una de las principales formas a través del cual haremos tal análisis es mediante el uso de funciones auxiliares apropiadas, las cuales son conocidas como funciones de Lyapunov. También se muestran algunos métodos de aproximación numérica para las soluciones de ecuaciones integrales de Volterra y se estudia el error al aplicar el método de cuadratura de Newton-Cotes, que nos conduce a una ecuación en diferencias de Volterra para el error, también se muestran algunos otros métodos como aproximación con polinomios ortogonales, polinomios de Bernstein y splines lineales y la simulación numérica correspondiente usando Matlab.

Anchuelo, A. (1992). “Series integradas y cointegradas: Una Introducción”, el uso de contrastes de raíces unitarias y cointegración se está generalizando de tal modo entre los investigadores que trabajan con series temporales que su conocimiento

resultará pronto imprescindible. Sin embargo, tanto los resúmenes existentes de esta literatura como los artículos originales se caracterizan por su complejidad. Este trabajo pretende servir de introducción relativamente sencilla a dichos métodos econométricos al economista que, sin estar especializado en este campo, desee conocer sus principales rasgos. Para ello, se define el concepto de serie integrada. Se estudian las técnicas más frecuentemente utilizadas en la investigación aplicada para determinar el orden de integrabilidad de una serie temporal (contrastos DF, ADF, Phillips-Perron, DW). Se define el concepto de cointegración y su relación con los Modelos de Corrección de Errores, establecida por el Teorema de Representación de Granger. Por último, se comentan los métodos propuestos por Engle, Granger y Johansen para el tratamiento de series cointegradas.

2.3.2 ANTECEDENTES NACIONALES

Lavanda y Rodríguez (2011) realizaron la descomposición histórica de la inflación peruana para el periodo 1997:1–2009:2, distinguiendo entre choques de demanda y choques de oferta agregada mediante un modelo de Vectores Autorregresivos Estructurales (SVAR) con restricciones de largo plazo. Entre los métodos empleados en su investigación se incluyó un análisis de cointegración a través de la estimación de un modelo de corrección de errores vectorial (VECM), bajo el supuesto de un modelo teórico simple del proceso inflacionario. Sus resultados mostraron que los choques de demanda agregada explicaron alrededor del 70% del comportamiento de la inflación peruana, tanto en el corto como en el largo plazo. Este antecedente resulta relevante porque constituye una de las aplicaciones más citadas del enfoque de cointegración y corrección de errores al análisis del nivel de precios en el Perú.

Asimismo, Chung-Alva (2018) determinó la existencia de una relación de cointegración entre el Producto Bruto Interno del Perú y el Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL) para el periodo 2000-2016, utilizando un estudio longitudinal de tipo no experimental. Los resultados de la prueba de cointegración de Johansen evidenciaron que ambas series están cointegradas, por lo que existe una relación de equilibrio de largo plazo entre ellas; a partir de dicha relación, el autor

estimó un modelo vectorial de corrección de errores que permitió establecer que los cambios en el PBI son significativos para predecir los movimientos del índice bursátil. Este antecedente resulta pertinente porque aplica al PBI peruano el mismo procedimiento metodológico cointegración de Engle y Granger y corrección de errores empleado en la presente investigación, aunque contrastado con una variable financiera y no con el nivel de precios.

2.3.3 ANTECEDENTES LOCALES

En el ámbito regional, Barazorda Velásquez (2024) estudió la incidencia de la intermediación financiera realizada por las Cajas Municipales sobre el crecimiento económico de la región Cusco durante el periodo 2001-2019, empleando un análisis econométrico de series de tiempo. La investigación aporta evidencia sobre el comportamiento de largo plazo de variables económicas regionales cusqueñas y sobre la aplicabilidad de metodologías de series de tiempo a la realidad económica del departamento, aunque se centra en el sistema financiero regional y no en la relación entre precios y producto.

De modo similar, Huañahui Castillo y Checya Velasque (2024) analizaron la relación entre la inversión pública ejecutada por el Gobierno Regional del Cusco y el crecimiento económico de la región durante el periodo 2005-2022, evaluando el comportamiento conjunto de ambas variables a lo largo del tiempo. Este antecedente confirma el interés académico reciente por explicar el comportamiento del Producto Bruto Interno regional del Cusco a partir de otras variables económicas, línea de investigación en la cual se inserta la presente tesis.

Ccopa, A. & Rodríguez, J. (2004), “Metodología de Box-Jenkins y su Aplicación”, los cuales determinaron las predicciones mensuales en KWH realizadas de la serie de ventas de energía eléctrica hasta diciembre de 2005.

De la revisión de la literatura local, si bien existen estudios sobre el crecimiento económico de la región Cusco y sobre el comportamiento de sus determinantes financieros y de inversión pública, no se han identificado investigaciones previas que

apliquen específicamente la metodología de cointegración de Engle y Granger para determinar la relación de largo plazo entre el Índice de Precios Promedio al Consumidor y el Producto Bruto Interno del departamento del Cusco. Ello evidencia el vacío de conocimiento que la presente investigación pretende cubrir.

CAPÍTULO III

HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. HIPÓTESIS

3.1.1. HIPÓTESIS GENERAL

Existe una relación de cointegración entre las series del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco según el test de Engle y Granger desde el año 2012 al año 2020.

3.1.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

- a) Las series del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco cointegradas son estacionarias.
- b) Existe una relación funcional a largo plazo entre las series del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco.

3.2. IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES

Para la evaluación de cointegración de series de tiempo se utilizará las siguientes variables:

Producto Bruto Interno

Índice Promedio de Precios al Consumidor del Cusco.

3.3. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

Tabla 2
Operacionalización de variables

Variable	Definición	Indicadores	Fuentes	Escala de Medición	Unidad de Medida
Producto Bruto Interno (PBI)	Mide el valor de las diferentes utilizaciones finales de la producción en la Economía, restándose el valor de las importaciones de los bienes y servicios	Valor monetario del PBI trimestral o anual del Cusco	Base de datos del INEI o BCRP	Escala de razón	Miles de millones de soles constantes
Índice de Precios Promedio al Consumidor (IPPC)	Mide la evolución temporal y las variaciones promedio en los precios de una canasta fija de bienes y servicios representativos del gasto de consumo final de los hogares	Valor del índice mensual o trimestral	Reportes del INEI – Cusco	Escala de razón	Índice base 100

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1. ÁMBITO DE ESTUDIO: LOCALIZACIÓN POLÍTICA Y GEOGRÁFICA

La investigación se desarrolló en la ciudad del Cusco, capital de la Región Cusco, ubicada en el sur del Perú. Esta región se encuentra geográficamente entre los $13^{\circ}31'45''$ de latitud sur y los $71^{\circ}58'05''$ de longitud oeste. El Cusco, al ser un importante centro turístico, comercial y cultural, presenta una estructura económica particular que puede afectar el comportamiento de los precios promedio al consumidor y el producto regional.

4.2. TIPO Y NIVEL DE INVESTIGACIÓN.

El presente trabajo de investigación es de tipo no experimental, de corte longitudinal retrospectivo y es descriptivo puesto que se aplicará los procedimientos propuestos al Producto Bruto Interno (PBI) e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco (IPPC) para obtener los resultados requeridos por el test de cointegración de Engle y Granger y así se encontró la relación funcional a largo plazo de estas dos series.

El nivel de investigación es descriptivo – correlacional, puesto que se aplicó los procedimientos econométricos de cointegración a las dos series.

4.3. UNIDAD DE ANÁLISIS

Es por trimestre, pues las series económicas del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco son información recogida de los boletines del Instituto Nacional de Estadística e Informática.

4.4. POBLACIÓN DE ESTUDIO

La población en estudio fueron los datos utilizados del Producto Bruto Interno (PBI) e Índice de Precios Promedios al Consumidor (IPPC) trimestral del Cusco con año base de 2009.

4.5. TAMAÑO DE MUESTRA

La muestra estuvo conformada por dos series de tiempo trimestrales desde el 1° trimestre de 2012 hasta el 4° trimestre de 2020, lo que proporciona una muestra de 36 observaciones. El método de muestreo es no probabilístico, basado en criterios de disponibilidad y relevancia estadística. Este tamaño de muestra permitió aplicar modelos de cointegración y series de tiempo con un nivel adecuado de precisión.

4.6. TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS E INFORMACIÓN

La información fue obtenida de los registros de datos de los Boletines del PBI e IPC del Cusco en el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI).

4.7. TÉCNICAS DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para el análisis e interpretación de la información, se emplearon técnicas econométricas propias del análisis de series de tiempo. En primer lugar, se realizó una evaluación de la estacionariedad de las series del Producto Bruto Interno (PBI) y del Índice de Precios Promedio al Consumidor (IPPC) mediante pruebas estadísticas. Estas pruebas permitieron determinar el orden de integración de cada serie y se verificó si ambas son integradas del mismo orden, condición necesaria para aplicar el test de cointegración.

Posteriormente, se procedió al análisis de cointegración mediante el enfoque de Engle y Granger (1987), que consistió en dos etapas. En la primera etapa, se estimó una regresión de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) entre las dos series económicas. En la segunda etapa, se aplicó el test ADF sobre los residuos de dicha regresión para

verificar la presencia de una relación de largo plazo. En este caso se detectó cointegración, se complementó el análisis con el modelo de corrección de errores (ECM), que permitió estudiar la dinámica de corto plazo y el proceso de ajuste hacia el equilibrio.

El procesamiento de las series del Producto Bruto Interno e Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco se hizo con el paquete econométrico EVIEWS V.10, ya que el cálculo analítico de la estimación de las series de tiempo es complicado, utilizando un análisis cuantitativo para obtener los resultados requeridos para la cointegración de las dos series y encontrar el vector de cointegración.

Los resultados fueron interpretados en función de la significancia estadística de los coeficientes, los valores críticos de las pruebas de hipótesis, y el comportamiento dinámico entre las series. Se utilizó las herramientas computacionales del paquete econométrico mencionado para la ejecución del análisis estadístico y la representación gráfica de los resultados.

4.8. TÉCNICAS PARA DEMOSTRAR LA VERDAD O FALSEDAD DE LA HIPÓTESIS PLANTEADA

La hipótesis planteada fue contrastada utilizando el procedimiento de cointegración de Engle y Granger, el cual permitió verificar si existe una relación de equilibrio de largo plazo entre el Producto Bruto Interno (PBI) y el Índice de Precios Promedio al Consumidor (IPPC) en el contexto de la economía del Cusco.

Para ello, se utilizó la prueba estadística aplicada a los residuos obtenidos de la regresión de largo plazo entre las dos variables. Los residuos resultaron ser estacionarios (es decir, se rechazó la hipótesis nula de raíz unitaria), se aceptó la hipótesis de cointegración, lo cual confirmó la existencia de una relación estable entre las variables económicas en el largo plazo.

En caso contrario, si los residuos presentaran una raíz unitaria (no estacionarios), se rechaza la hipótesis de cointegración, y por tanto, se asume que no existe una relación de equilibrio entre las series. Esta evidencia fue clave para aceptar o rechazar la hipótesis general del estudio, en función de los resultados obtenidos a través de pruebas estadísticas formales y la significancia de los coeficientes estimados.

CAPÍTULO V

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1 PROCESAMIENTO, ANÁLISIS, INTERPRETACIÓN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1.1 ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR

El Índice de Precios al Consumidor (IPC) es un indicador estadístico coyuntural elaborado por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), cuyo propósito central es medir la evolución temporal y las variaciones promedio en los precios de una canasta fija de bienes y servicios representativos del gasto de consumo final de los hogares en un periodo determinado (INEI, 2019, 2021). Asimismo, este índice constituye la medida macroeconómica oficial de la inflación en el país, estructurándose a partir de un sistema de ponderaciones e información continua sobre hábitos de consumo para reflejar la dinámica del nivel general de precios a escala nacional y regional (INEI, 2021).

La serie que en el presente trabajo utilizamos es el Índice de Precios Promedio al Consumidor Trimestral (IPPC) en la ciudad del Cusco (con año base de 2011).

5.1.1.1 SERIE DE TIEMPO INDICE DE PRECIOS PROMEDIO AL CONSUMIDOR

El Índice de Precios Promedio al Consumidor Trimestral de la ciudad del Cusco se obtuvo a través del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), teniendo como año base 2011, a la cual aplicaremos pruebas para verificar si la serie es estacionaria.

Por lo tanto, el Índice de Precios Promedio al Consumidor Trimestrales en Cusco, abreviadamente lo denotaremos como IPPC, comprendiéndose entre los periodos del 1° trimestre de 2012 hasta el 4° trimestre de 2020 haciéndose un total de 36 observaciones trimestrales; entonces, nuestra serie de tiempo es:

$$\{y_t, t \in T\} \quad t = 1, 2, \dots, 36 \quad (5.1)$$

donde:

y_1 : Es el índice de precios promedio al consumidor de 2012: I trimestre

y_2 : Es el índice de precios promedio al consumidor de 2012: II trimestre

$\vdots$

y_{36} : Es el índice de precios promedio al consumidor de 2020: IV trimestre

Con estos datos podemos construir la gráfica de la serie de tiempo, y luego serán usados, analizados, estudiados y seleccionados por diferentes etapas y pasos a seguir para el análisis de cointegración con la serie del PBI.

Utilizaremos el programa estadístico econométrico EVIEWS V.10 para el procesamiento de la información.

Tabla 3

Índice de Precios Promedio al Consumidor Trimestral (IPPC) en Cusco de 2012-I a 2020-IV

AÑO	TRIMESTRE			
	I	II	III	IV
2012	100.44	101.53	102.16	102.56
2013	103.02	104.01	105.24	105.67
2014	106.64	107.90	108.54	109.13
2015	109.88	111.29	112.45	113.26
2016	114.54	115.23	115.92	117.11
2017	118.56	119.21	119.62	119.25
2018	119.92	120.45	121.44	122.02
2019	122.70	123.63	124.01	124.39
2020	124.94	125.95	126.72	127.03

Fuente. Elaboración propia, con base en datos del INEI - Dirección Técnica de Indicadores Económicos - Dirección Ejecutiva de Índices.

Se realizará un análisis exploratorio de los datos para ver el comportamiento el cual se presenta en la figura 1, se utilizará el estadístico de Jarque-Bera para probar si

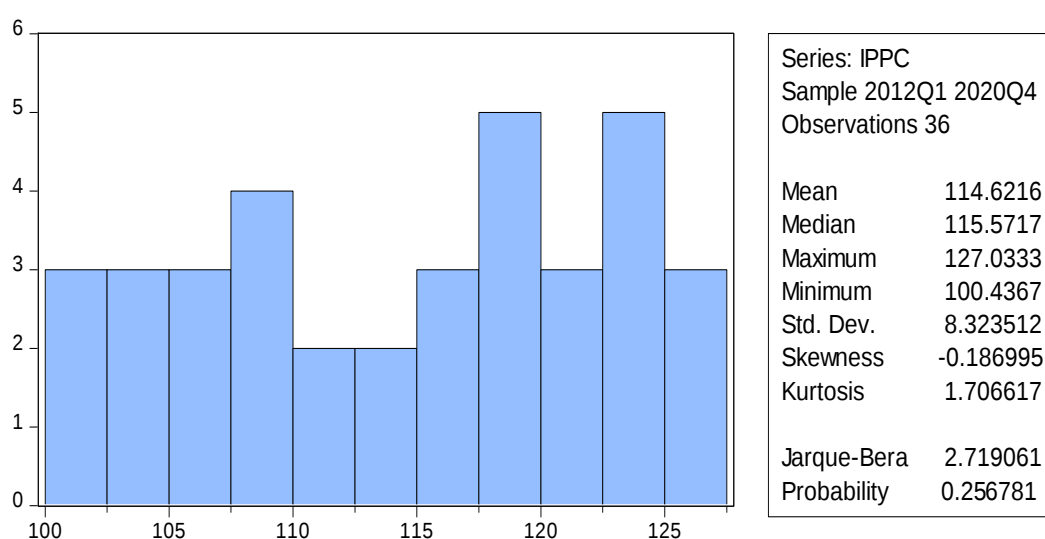
los datos provienen de una población con distribución normal, se plantea la hipótesis siguiente:

H_0 : La serie del Índice de Precios Promedio al Consumidor trimestral del Cusco proviene de una población con distribución normal.

H_1 : La serie del Índice de Precios Promedio al Consumidor trimestral del Cusco no proviene de una población con distribución normal.

Figura 1

Histograma de la serie IPPC trimestral del Cusco



Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

De la figura 1 se observa que el estadístico de Jarque-Bera tiene un valor JB = 2.719061 y su p-valor es de 0.256781 el cual es mayor a 0.05, lo que nos permite afirmar que la serie IPPC de Cusco se distribuye según una distribución normal, aceptando la hipótesis nula.

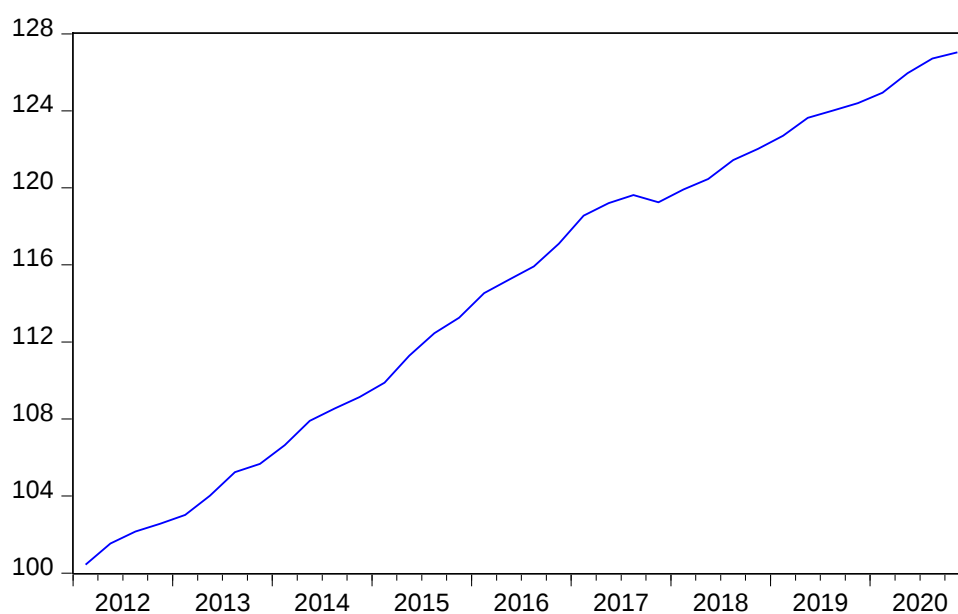
5.1.1.2 ANALISIS DE ESTACIONARIEDAD

Ahora se hará una evaluación de estacionariedad a la serie IPPC trimestral de Cusco, para lo cual veremos el análisis gráfico, el análisis de un correlograma y por último aplicaremos una prueba de raíz unitaria.

Para evaluar la estacionariedad de la serie IPPC trimestral del Cusco por forma gráfica se tiene la figura 2.

Figura 2

Gráfica de la serie IPPC trimestral del Cusco de 2012: I a 2020: IV



Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En donde se observa que la serie IPPC trimestral del Cusco tiene un claro comportamiento tendencial creciente lineal con media y varianza inestables, lo cual permite afirmar que la serie no es estacionaria en media, lo que descarta el valor de $d = 0$ y se tendrá que escoger los valores apropiados del orden de diferencias ordinarias y estacionales si fuera necesario.

Figura 3

Correlograma de la serie IPPC trimestral del Cusco

Sample: 2012Q1 2020Q4

Included observations: 36

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.922	0.922	33.197	0.000	
		2	0.843	-0.044	61.766	0.000	
		3	0.764	-0.043	85.939	0.000	
		4	0.685	-0.045	105.98	0.000	
		5	0.603	-0.063	122.03	0.000	
		6	0.522	-0.050	134.46	0.000	
		7	0.443	-0.040	143.70	0.000	
		8	0.363	-0.056	150.15	0.000	
		9	0.286	-0.044	154.29	0.000	
		10	0.213	-0.031	156.68	0.000	
		11	0.143	-0.040	157.81	0.000	
		12	0.074	-0.059	158.12	0.000	
		13	0.006	-0.052	158.12	0.000	
		14	-0.061	-0.066	158.35	0.000	
		15	-0.125	-0.049	159.36	0.000	
		16	-0.185	-0.053	161.70	0.000	

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

Se puede observar en la figura 3 que las autocorrelaciones muestrales y su correspondiente gráfico decrecen muy lentamente y que una gran parte de ellos se encuentran fuera de su intervalo de confianza, con ello se puede afirmar que la serie IPPC no es estacionaria en media, las autocorrelaciones parciales lo ratifican a medida que la autocorrelación parcial de primer orden que tiene un valor de 0.922 es muy alto, cercano a la unidad y significativamente grande en comparación con las otras autocorrelaciones parciales indicativo de la no estacionariedad en media.

Con el fin de verificar la estacionariedad de la serie IPPC trimestral del Cusco. se realizó la prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller aumentada (DFA) visto en la tabla 4 con las siguientes hipótesis:

H_0 : La serie de precios promedio al consumidor trimestral del Cusco tiene raíz unitaria, equivale a decir que la serie no es estacionaria.

H_1 : La serie del índice de precios promedio al consumidor trimestral del Cusco no tiene raíz unitaria, equivale a decir que la serie es estacionaria.

Tabla 4

Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie IPPC trimestral de Cusco

Null Hypothesis: IPPC has a unit root				
Exogenous: Constant				
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=9)				
	t-Statistic	Prob.*		
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.521752	0.5110		
Test critical values:	1% level	-3.632900		
	5% level	-2.948404		
	10% level	-2.612874		
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
Dependent Variable: D(IPPC)				
Method: Least Squares				
Date: 10/31/25 Time: 12:23				
Sample (adjusted): 2012Q2 2020Q4				
Included observations: 35 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
IPPC(-1)	-0.011755	0.007725	-1.521752	0.1376
C	2.103134	0.884872	2.376766	0.0234
R-squared	0.065572	Mean dependent var		0.759905
Adjusted R-squared	0.037256	S.D. dependent var		0.374797
S.E. of regression	0.367749	Akaike info criterion		0.892613
Sum squared resid	4.462900	Schwarz criterion		0.981490
Log likelihood	-13.62074	Hannan-Quinn criter.		0.923294
F-statistic	2.315728	Durbin-Watson stat		1.590675
Prob(F-statistic)	0.137597			

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

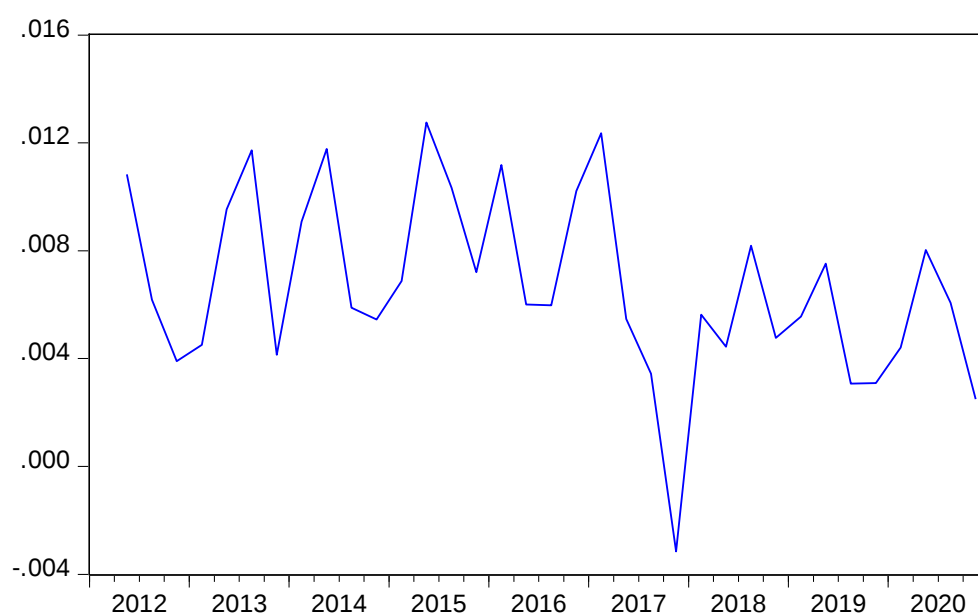
En este caso según la tabla 4, tau es -1.521752 con p-valor de 0.5110, indicando que no se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 5%, por lo tanto la serie del índice de precios promedio al consumidor trimestral del Cusco no es estacionaria, en este caso el valor de tau es negativo y comparando su valor absoluto con los valores absolutos críticos de MacKinnon este valor absoluto de tau es menor, lo cual ratifica el no rechazo de la hipótesis nula, descartando que la serie en otras palabras es integrada de orden cero.

5.1.1.3 DIFERENCIAS SOBRE LA SERIE IPPC

Se genera la serie que contenga las primeras diferencias logarítmicas del Índice de Precios Promedio al Consumidor (IPPC) trimestral del Cusco, la cual se ve en la figura 4.

Figura 4

Gráfica de la serie $D(\text{LOG}(\text{IPPC}))$ trimestral del Cusco de 2012: I hasta 2020: IV



Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

La figura 4 muestra la no presencia de componente estacional en la serie de las primeras diferencias logarítmicas del IPPC trimestral del Cusco, todos los valores fluctúan alrededor del valor medio, puede aceptarse que es estacionaria en media, por otro lado, la dispersión de estos valores no parece aumentar o disminuir con el transcurso del tiempo, por lo cual también parece que puede aceptarse la estacionariedad en varianza, no debemos ya diferenciar más.

A continuación, se tiene el correlograma de la serie en primeras diferencias logarítmicas del IPPC trimestral.

Figura 5

Correlograma de la serie $D(\text{LOG}(\text{IPPC}))$ trimestral del Cusco

Sample: 2012Q1 2020Q4

Included observations: 35

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.253	0.253	2.4358	0.119
		2	-0.073	-0.146	2.6431	0.267
		3	-0.026	0.035	2.6698	0.445
		4	0.190	0.194	4.1760	0.383
		5	0.142	0.038	5.0443	0.410
		6	0.005	-0.009	5.0455	0.538
		7	0.233	0.299	7.5653	0.372
		8	0.188	0.021	9.2603	0.321
		9	-0.161	-0.261	10.549	0.308
		10	-0.143	0.022	11.613	0.312
		11	-0.022	-0.101	11.640	0.391
		12	0.058	-0.088	11.832	0.459
		13	0.047	0.144	11.960	0.531
		14	-0.077	-0.122	12.326	0.580
		15	-0.115	-0.171	13.184	0.588
		16	-0.173	0.012	15.216	0.509

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

Se puede observar en la figura 5 que las autocorrelaciones muestrales y autocorrelaciones parciales muestrales y sus correspondientes gráficos se encuentran dentro del intervalo de confianza, con ello se puede afirmar que la serie en primeras diferencias logarítmicas del IPPC es estacionaria en media.

Aplicando la prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada (DFA) visto en la tabla 5, para detectar estacionariedad en la serie del IPPC Trimestral del Cusco en primeras diferencias logarítmicas y para lo cual se plantea la hipótesis siguiente:

H_0 : La serie del índice de precios promedio al consumidor trimestral del Cusco no es estacionaria en sus primeras diferencias logarítmicas.

H_1 : La serie del índice de precios promedio al consumidor trimestral del Cusco es estacionaria en sus primeras diferencias logarítmicas.

Tabla 5

Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie D(LOG(IPPC)) trimestral de Cusco

Null Hypothesis: D(LOG(IPPC)) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=9)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4.299317	0.0018
Test critical values: 1% level	-3.639407	
5% level	-2.951125	
10% level	-2.614300	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LOG(IPPC),2)
Method: Least Squares
Date: 09/16/21 Time: 19:05
Sample (adjusted): 2012Q3 2020Q4
Included observations: 34 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LOG(IPPC(-1)))	-0.733429	0.170592	-4.299317	0.0002
C	0.004769	0.001297	3.677684	0.0009
R-squared	0.366137	Mean dependent var		-0.000245
Adjusted R-squared	0.346329	S.D. dependent var		0.004089
S.E. of regression	0.003306	Akaike info criterion		-8.529387
Sum squared resid	0.000350	Schwarz criterion		-8.439601
Log likelihood	146.9996	Hannan-Quinn criter.		-8.498768
F-statistic	18.48412	Durbin-Watson stat		1.832807
Prob(F-statistic)	0.000150			

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En este caso según la tabla 5, tau es -4.299317 con p-valor de 0.0018, indicando que se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 5%, por lo tanto, la serie del índice de precios promedio al consumidor trimestral del Cusco es estacionaria en sus primeras diferencias logarítmicas, quiere decir que la serie es integrada de orden uno.

5.1.2 PRODUCTO BRUTO INTERNO

Desde el punto de vista del Gasto o destino de la producción, el PBI mide el valor de las diferentes utilizaciones finales de la producción en la Economía, restándose el valor de las importaciones de los bienes y servicios (producción no generada en el territorio interior) (INEI, 2019).

La medición del PBI desde el punto de vista del gasto considera: consumo privado, consumo público, formación bruta de capital fijo, variación de existencias, exportaciones e importaciones de bienes y servicios no financieros y se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$PBI = GCH + GCG + FBKF + VE + X - M$$

donde los diferentes usos finales a los cuales se hace referencia la ecuación son: (INEI, 2019, p. 56).

Siendo: GCH los gastos de consumo final de los hogares y las instituciones privadas sin fines de lucro que sirven a los hogares, GCG son los gastos de consumo del gobierno, FBKF es la formación bruta de capital fijo (Inversión Bruta Fija), VE es la variación de existencias, X son las exportaciones de bienes y servicios y M son las importaciones de bienes y servicios.

La serie que en el presente trabajo utilizamos es el Índice del Producto Bruto Interno Trimestral (PBI) en la ciudad del Cusco (con año base de 2009).

5.1.2.1 SERIE DE TIEMPO PRODUCTO BRUTO INTERNO

El Producto Bruto Interno trimestral se obtuvo a través del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), teniendo como año base 2009, a la cual aplicaremos pruebas para verificar si la serie es estacionaria y luego se trabajará la cointegración con la serie del Índice de Precios Promedio al Consumidor trimestral del Cusco.

En consecuencia, el Producto Bruto Interno trimestral, abreviadamente lo denotaremos como PBI, comprendiéndose entre los periodos del 1° trimestre de 2012 hasta el 4° trimestre de 2020 haciéndose un total de 36 observaciones trimestrales; entonces, nuestra serie de tiempo es:

$$\{x_t, t \in T\} \quad t = 1, 2, \dots, 36 \quad (5.2)$$

donde:

x_1 : Es el producto bruto interno de 2012: I trimestre

x_2 : Es el producto bruto interno de 2012: II trimestre

$\vdots$

x_{36} : Es el producto bruto interno de 2020: IV trimestre

Con estos datos podemos construir la gráfica de la serie de tiempo, y luego serán usados, analizados, estudiados y seleccionados por diferentes etapas y pasos a seguir para la cointegración con la otra serie.

Utilizaremos también el programa estadístico econométrico Eviews-10 para el procesamiento de la información.

Tabla 6

Producto Bruto Interno trimestral (PBI) de 2012-I a 2020-IV (en miles de millones de soles)

AÑO	TRIMESTRE			
	I	II	III	IV
2012	120.260	128.160	128.175	131.536
2013	126.746	137.218	136.725	142.967
2014	134.634	144.392	142.421	148.594
2015	140.065	153.446	150.346	160.559
2016	152.487	161.670	162.174	171.337
2017	160.549	172.898	172.871	181.672
2018	171.012	187.695	179.835	192.972
2019	177.999	193.536	190.190	200.751
2020	174.360	139.265	182.049	210.346

Fuente. Elaboración propia, con base en datos del INEI - Dirección Técnica de Indicadores Económicos - Dirección Ejecutiva de Índices

Se realizó también un análisis exploratorio de los datos para analizar su comportamiento el cual se muestra en la figura 6, utilizando el estadístico de Jarque-

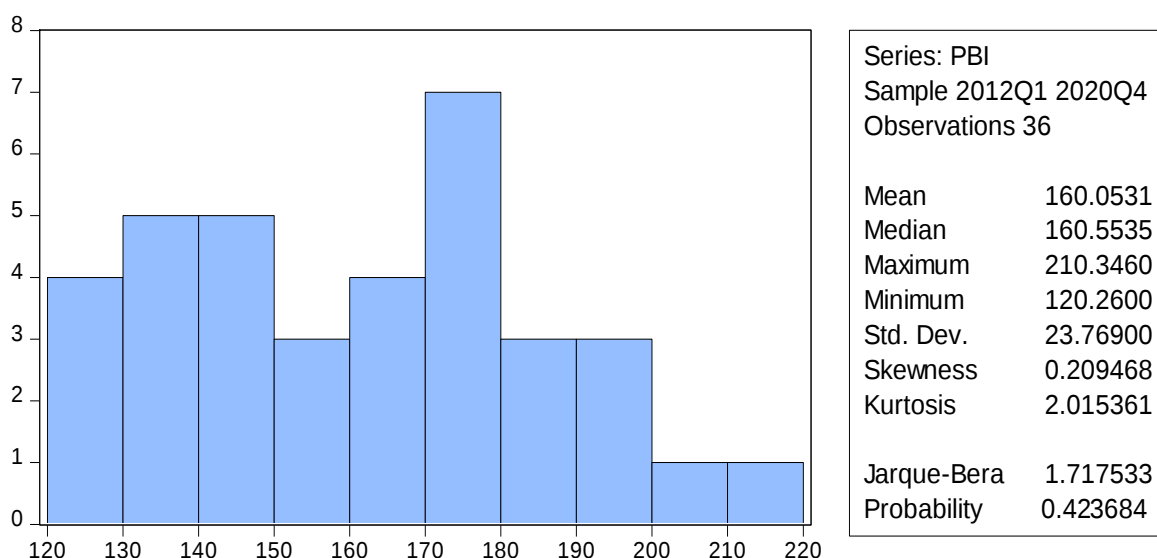
Bera para probar si los datos tienen una distribución normal, para luego poder utilizarlo en la aplicación del presente trabajo de investigación, entonces se plantea la hipótesis siguiente:

H_0 : La serie del producto bruto interno trimestral tiene distribución normal.

H_1 : La serie del producto bruto interno trimestral no tiene distribución normal.

Figura 6

Histograma de la serie PBI trimestral



Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

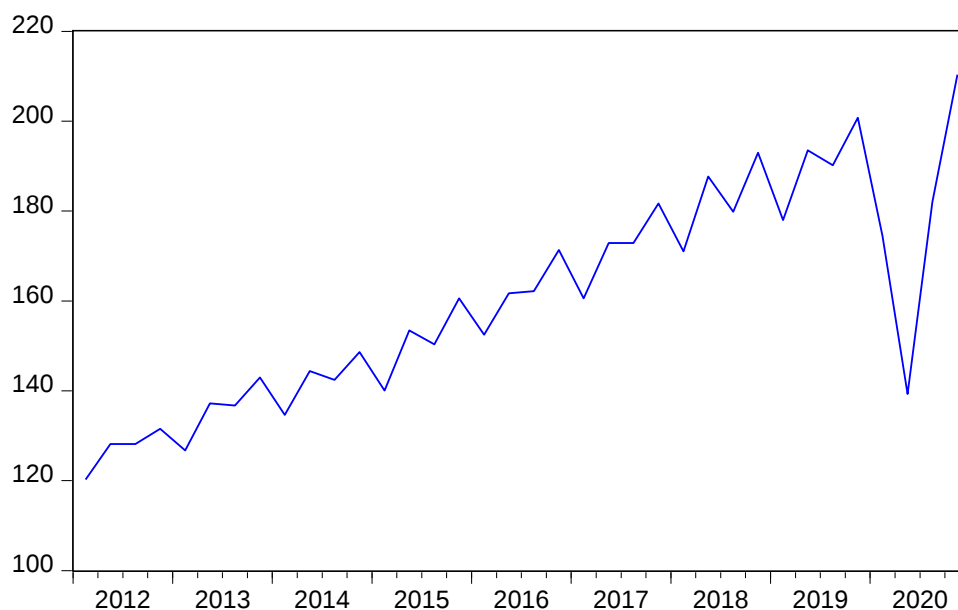
De la figura 6 se observa que el estadístico de Jarque-Bera tiene un valor JB = 1.717533 y su p-valor es de 0.423684 el cual es mayor a 0.05, lo que nos permite afirmar que la serie PBI trimestral se distribuye según una normal, aceptando la hipótesis nula.

5.1.2.2 ANALISIS DE ESTACIONARIEDAD

Ahora se hará una evaluación de estacionariedad en la serie del Producto Bruto Interno trimestral (PBI), para lo cual veremos el análisis gráfico, el análisis de un correlograma y por último aplicaremos una prueba de raíz unitaria.

Figura 7

Gráfica de la serie PBI trimestral de 2012: I hasta 2020: IV



Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En la figura 7 se observa que la serie PBI trimestral del Cusco tiene un comportamiento tendencial creciente con oscilaciones que permiten afirmar que tiene media y varianza inestables, además se observa un decrecimiento en los primeros trimestres del año 2020 por efectos de la pandemia y luego deja de decrecer, finalmente permite afirmar que la serie no es estacionaria en media, lo que descarta el valor de $d = 0$ y se tendrá que escoger los valores apropiados del orden de diferencias ordinarias y estacionales si fuera necesario.

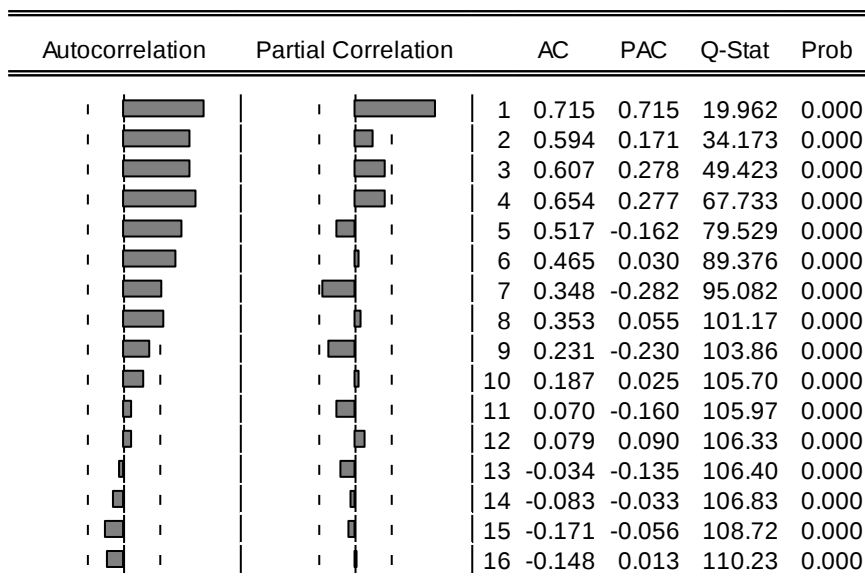
Ahora analizaremos el correlograma de la serie PBI trimestral en la figura 8 para detectar estacionariedad.

Figura 8

Correlograma de la serie PBI trimestral

Sample: 2012Q1 2020Q4

Included observations: 36



Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En la figura 8 se observó que las autocorrelaciones muestrales y sus correspondientes gráficos decrecen muy lentamente y que una gran parte de ellos se encuentran fuera de su intervalo de confianza, con ello se puede afirmar que la serie PBI trimestral no es estacionaria en media, las autocorrelaciones parciales lo ratifican a medida que la autocorrelación parcial de primer orden que tiene un valor de 0.715 es muy alto y significativamente grande en comparación con las otras autocorrelaciones parciales indicativo de la no estacionariedad en media.

De la prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller aumentada (DFA) visto en la tabla 7 para detectar estacionariedad en la serie PBI trimestral, para lo cual se plantea la hipótesis siguiente:

H_0 : La serie del producto bruto interno trimestral tiene raíz unitaria, equivale a decir que la serie no es estacionaria.

H_1 : La serie del producto bruto interno trimestral no tiene raíz unitaria, equivale a decir la serie es estacionaria.

Tabla 7

Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie PBI trimestral

Null Hypothesis: PBI has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 3 (Automatic - based on SIC, maxlag=9)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.540949	0.5004
Test critical values: 1% level	-3.653730	
5% level	-2.957110	
10% level	-2.617434	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(PBI)

Method: Least Squares

Date: 06/24/26 Time: 10:06

Sample (adjusted): 2013Q1 2020Q4

Included observations: 32 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PBI(-1)	-0.147431	0.095676	-1.540949	0.1350
D(PBI(-1))	-0.435228	0.165373	-2.631793	0.0139
D(PBI(-2))	-0.682367	0.196842	-3.466581	0.0018
D(PBI(-3))	-0.967404	0.198430	-4.875301	0.0000
C	28.91013	15.49980	1.865194	0.0731
R-squared	0.562633	Mean dependent var		2.462813
Adjusted R-squared	0.497838	S.D. dependent var		14.92360
S.E. of regression	10.57538	Akaike info criterion		7.697535
Sum squared resid	3019.642	Schwarz criterion		7.926556
Log likelihood	-118.1606	Hannan-Quinn criter.		7.773449
F-statistic	8.683253	Durbin-Watson stat		2.017733
Prob(F-statistic)	0.000122			

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

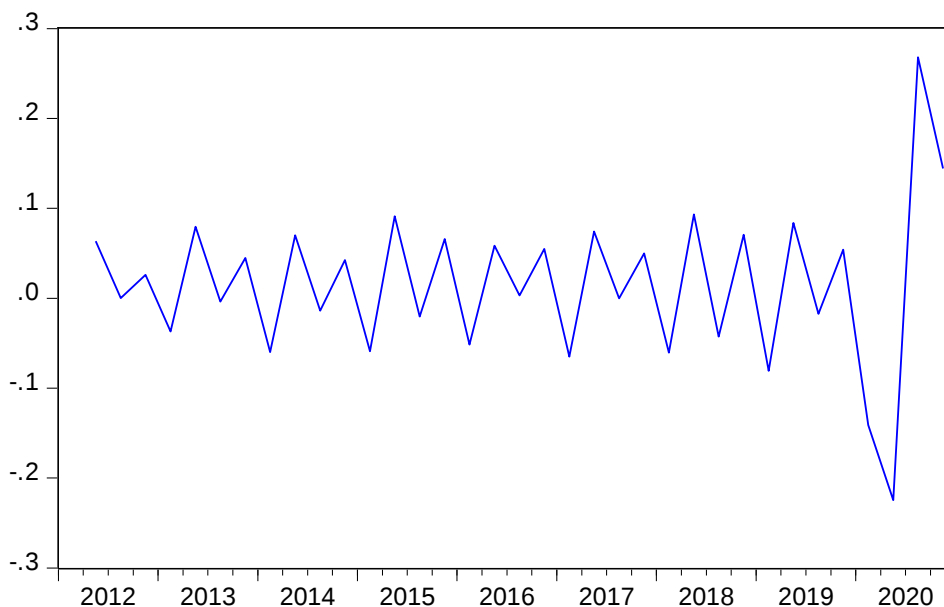
En este caso según la tabla 7, tau es -1.540949 con p-valor de 0.5004, indicando que no se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 5%, por lo tanto, la serie del producto bruto interno trimestral no es estacionaria, descartando que la serie es integrada de orden cero.

5.1.2.3 DIFERENCIAS SOBRE LA SERIE PBI

Se genera la serie que contenga la primera diferencia logarítmica del Producto Bruto Interno trimestral, la cual se ve en la figura 9.

Figura 9

Gráfica de la serie $D(\text{LOG}(\text{PBI}))$ trimestral de 2012: I hasta 2020: IV



Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En la figura 9 se muestra la no presencia de componente estacional, todos los valores fluctúan alrededor del valor medio, puede aceptarse que es estacionaria en media, por otro lado, la dispersión de estos valores no parece aumentar o disminuir con el transcurso del tiempo a excepción de los primeros trimestres del 2020, por lo cual también parece que puede aceptarse la estacionariedad en varianza, no debemos ya diferenciar más.

A continuación, se tiene el correlograma de la serie en primeras diferencias logarítmicas del PBI trimestral

Figura 10

Correlograma de la serie $D(\text{LOG}(\text{PBI}))$ trimestral

Sample: 2012Q1 2020Q4

Included observations: 35

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.285	-0.285	3.1032	0.078
		2 -0.043	-0.135	3.1746	0.204
		3 -0.334	-0.428	7.6853	0.053
		4 0.278	0.022	10.909	0.028
		5 -0.136	-0.182	11.711	0.039
		6 0.129	-0.051	12.450	0.053
		7 -0.218	-0.175	14.645	0.041
		8 0.183	-0.031	16.257	0.039
		9 -0.098	-0.070	16.739	0.053
		10 0.112	-0.047	17.392	0.066
		11 -0.223	-0.178	20.079	0.044
		12 0.197	-0.002	22.255	0.035
		13 -0.060	-0.022	22.468	0.049
		14 0.066	-0.085	22.734	0.065
		15 -0.180	-0.103	24.842	0.052
		16 0.169	0.000	26.784	0.044

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

Observando en la figura 10 las autocorrelaciones muestrales y autocorrelaciones parciales muestrales y sus correspondientes gráficos se encuentran en casi su totalidad dentro del intervalo de confianza, con ello se puede afirmar que la serie en primeras diferencias logarítmicas del PBI trimestral es estacionaria en media.

Finalmente aplicaremos la prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada (DFA) visto en la tabla 8, para detectar estacionariedad en la serie del PBI, para lo cual se plantea la hipótesis siguiente:

H_0 : La serie del producto bruto interno trimestral no es estacionaria en su primera diferencia logarítmica.

H_1 : La serie del producto bruto interno trimestral es estacionaria en su primera diferencia logarítmica.

Tabla 8

Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie D(LOG(PBI) trimestral

Null Hypothesis: D(LOGPBI) has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=9)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-7.241203	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.653730	
5% level	-2.957110	
10% level	-2.617434	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(LOGPBI,2)

Method: Least Squares

Date: 11/01/25 Time: 21:14

Sample (adjusted): 2013Q1 2020Q4

Included observations: 32 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LOGPBI(-1))	-3.123069	0.431291	-7.241203	0.0000
D(LOGPBI(-1),2)	1.588207	0.340857	4.659456	0.0001
D(LOGPBI(-2),2)	0.917887	0.211463	4.340659	0.0002
C	0.032932	0.012377	2.660759	0.0128
R-squared	0.798155	Mean dependent var		0.003706
Adjusted R-squared	0.776529	S.D. dependent var		0.142077
S.E. of regression	0.067164	Akaike info criterion		-2.446903
Sum squared resid	0.126306	Schwarz criterion		-2.263686
Log likelihood	43.15046	Hannan-Quinn criter.		-2.386172
F-statistic	36.90684	Durbin-Watson stat		1.978915
Prob(F-statistic)	0.000000			

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En este caso según la tabla 8, tau es -7.241203 con p-valor de 0.0000, indicando que se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 5%, por lo tanto, la serie del producto bruto interno trimestral es estacionaria en su primera diferencia logarítmica, quiere decir que es integrado de orden uno.

5.2 PRUEBAS DE HIPÓTESIS

5.2.1 COINTEGRACIÓN DE LAS SERIES IPPC TRIMESTRAL DEL CUSCO Y PBI TRIMESTRAL.

Dado que las series del Índice de Precios Promedio al Consumidor del Cusco y Producto Bruto Interno son ambas integrables de orden $I(1)$, a continuación, se estimará la relación funcional de equilibrio a largo plazo entre las dos series.

Tabla 9

Estimación de la regresión de cointegración entre las series IPPC trimestral del Cusco y el PBI

Dependent Variable: IPPC				
Method: Least Squares				
Date: 06/27/26 Time: 22:18				
Sample: 2012Q1 2020Q4				
Included observations: 36				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	65.05074	4.533447	14.34907	0.0000
PBI	0.309715	0.028026	11.05107	0.0000
R-squared	0.782228	Mean dependent var		114.6216
Adjusted R-squared	0.775822	S.D. dependent var		8.323512
S.E. of regression	3.940966	Akaike info criterion		5.634681
Sum squared resid	528.0612	Schwarz criterion		5.722655
Log likelihood	-99.42426	Hannan-Quinn criter.		5.665386
F-statistic	122.1262	Durbin-Watson stat		1.302185
Prob(F-statistic)	0.000000			

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

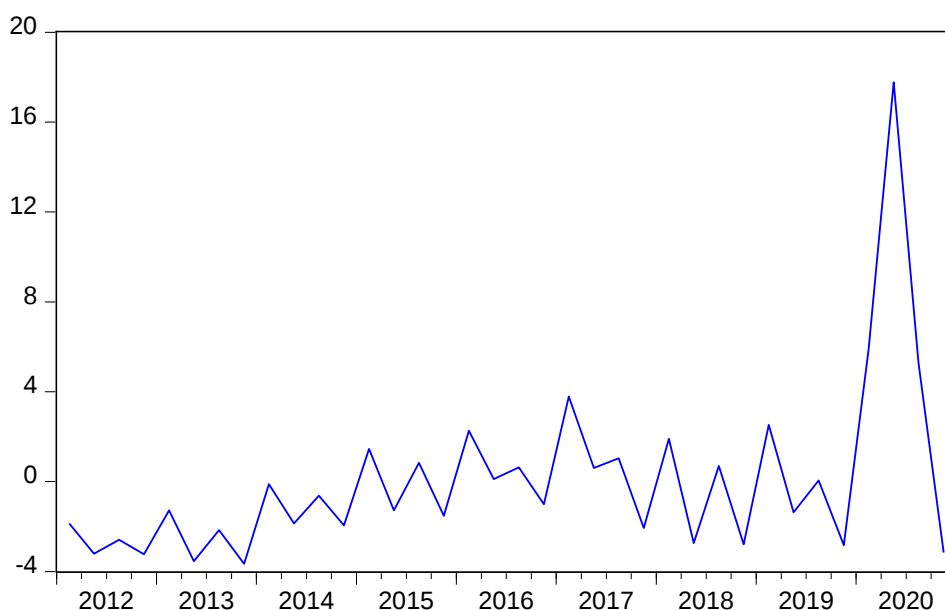
Por lo que según la tabla 9 la relación estimada a largo plazo es:

$$\hat{IPPC} = 65.05074 + 0.309715 * PBI + e_t \quad (5.3)$$

Las series están cointegradas si existe una combinación lineal de ambas variables que sea $I(0)$, es por ello que al haber generado la ecuación 5.3 de regresión entre las variables, se genera una serie de residuos de mínimos cuadrados para analizar si la serie es estacionaria o no, la cual se ve en la figura 11.

Figura 11

Gráfica de la serie de residuos



Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En la figura 11 se ve que gran parte de la serie muestra un comportamiento estacionario alrededor de la media, puede aceptarse que la serie es estacionaria en media, es decir que la serie es integrable de orden $I(0)$.

Además, aplicando la prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada (DFA) visto en la tabla 10, para ratificar la detección de estacionariedad en la serie de residuos, para lo cual se plantea la hipótesis siguiente:

H_0 : La serie de residuos tiene raíz unitaria, es decir que la serie es no estacionaria.

H_1 : La serie de residuos no tiene raíz unitaria, es decir que la serie es estacionaria.

Tabla 10

Prueba de raíz unitaria Dickey-Fuller aumentada para la serie de residuos

Null Hypothesis: RESID01 has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=9)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.990826	0.0040
Test critical values: 1% level	-3.632900	
5% level	-2.948404	
10% level	-2.612874	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(RESID01)

Method: Least Squares

Date: 06/27/26 Time: 22:26

Sample (adjusted): 2012Q2 2020Q4

Included observations: 35 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESID01(-1)	-0.657490	0.164750	-3.990826	0.0003
C	0.022184	0.633835	0.035000	0.9723
R-squared	0.325522	Mean dependent var		-0.037266
Adjusted R-squared	0.305083	S.D. dependent var		4.497008
S.E. of regression	3.748782	Akaike info criterion		5.536184
Sum squared resid	463.7611	Schwarz criterion		5.625061
Log likelihood	-94.88322	Hannan-Quinn criter.		5.566865
F-statistic	15.92669	Durbin-Watson stat		1.883587
Prob(F-statistic)	0.000345			

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

Se puede ver en la tabla 10 que tau es -3.990826 indicando que se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 5%, por lo tanto, la serie de residuos es estacionaria, quiere decir que es integrable de orden cero, además el valor de test de Durbin- Watson es 1.883587, lo cual ratifica que no existe evidencia de auto correlación de primer orden en los residuos de la regresión.

Por consiguiente el tests de Dickey-Fuller ratifica el supuesto de que las series del IPPC trimestral del Cusco y la serie del PBI trimestral están cointegradas, siendo ambas series del mismo orden de integración $I(1)$, y que existe una combinación lineal

de ambas variables de orden $I(0)$, sin embargo, Engle y Granger demostraron que este test no era del todo confiable por lo cual desarrollaremos un test para averiguar si existe o no una cointegración entre estas series, veamos a continuación la tabla 11.

Tabla 11

Test de Cointegración de las series LOG(IPPC) y LOG(PBI)

Dependent Variable: LOG(IPPC)				
Method: Fully Modified Least Squares (FMOLS)				
Date: 06/27/26 Time: 23:46				
Sample (adjusted): 2012Q2 2020Q4				
Included observations: 35 after adjustments				
Cointegrating equation deterministics: C				
Long-run covariance estimate (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 4.0000)				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOG(PBI)	0.532442	0.047601	11.18559	0.0000
C	2.044241	0.241554	8.462863	0.0000
R-squared	0.745499	Mean dependent var		4.742739
Adjusted R-squared	0.737786	S.D. dependent var		0.070933
S.E. of regression	0.036323	Sum squared resid		0.043538
Long-run variance	0.001576			

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

Según la tabla 11, la relación estimada a largo plazo es:

$$\hat{LOG(IPPC)} = 2.044241 + 0.532442 * LOG(PBI) + e_t \quad (5.4)$$

Ahora aplicaremos el test de cointegración de Engle - Granger visto en la siguiente tabla que nos da un método para determinar el número de rezagos para corregir autocorrelación que es el criterio de Schwarz, para lo cual se plantea la siguiente hipótesis:

H_0 : Las series del LOG(IPPC) trimestral del Cusco y del LOG(PBI) no están cointegradas.

H_1 : Las series del LOG(IPPC) trimestral del Cusco y del LOG(PBI) están cointegradas.

Tabla 12

Test de Cointegración de Engle - Granger para las series LOG(IPPC) y LOG(PBI)

Cointegration Test - Engle-Granger
 Date: 06/27/26 Time: 23:56
 Equation: UNTITLED
 Specification: LOG(IPPC) LOG(PBI) C
 Cointegrating equation deterministics: C
 Null hypothesis: Series are not cointegrated
 Automatic lag specification (lag=0 based on Schwarz Info Criterion,
 maxlag=8)

	Value	Prob.*
Engle-Granger tau-statistic	-4.175083	0.0113
Engle-Granger z-statistic	-23.88469	0.0069

*MacKinnon (1996) p-values.

Intermediate Results:

Rho - 1	-0.682420
Rho S.E.	0.163451
Residual variance	0.000985
Long-run residual variance	0.000985
Number of lags	0
Number of observations	35
Number of stochastic trends**	2

**Number of stochastic trends in asymptotic distribution.

Engle-Granger Test Equation:
 Dependent Variable: D(RESID)
 Method: Least Squares
 Date: 06/27/26 Time: 23:56
 Sample (adjusted): 2012Q2 2020Q4
 Included observations: 35 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESID(-1)	-0.682420	0.163451	-4.175083	0.0002
R-squared	0.338869	Mean dependent var		-0.000346
Adjusted R-squared	0.338869	S.D. dependent var		0.038607
S.E. of regression	0.031391	Akaike info criterion		-4.056408
Sum squared resid	0.033504	Schwarz criterion		-4.011969
Log likelihood	71.98714	Hannan-Quinn criter.		-4.041068
Durbin-Watson stat	1.924060			

Nota. Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

De la tabla 12, el valor de tau es -4.175083 y el p-valor es 0.0113, el cual es menor a 0.05, con ello podemos rechazar la hipótesis nula, quiere decir que las series LOG(IPPC) y LOG(PBI) están cointegradas al 5% de significancia y que mantienen una relación de equilibrio de largo plazo, por otro lado hay cero rezagos utilizando el

criterio de Schwarz con lo cual no fue necesario incluir diferencias rezagadas adicionales para eliminar auto correlación en la prueba, al observar el estadístico de Durbin-Watson este no es cercano a 0, ello nos indica que no existe evidencia importante de auto correlación de primer grado en los residuos de la ecuación.

5.2.2 MECANISMO DE CORRECCIÓN DE ERRORES (MCE)

Este modelo nos servirá para conciliar el comportamiento a corto plazo de las variables del IPPC trimestral del Cusco y PBI trimestral con el comportamiento a largo plazo de las mismas.

Dado que las series del Índice Promedio de Precios al Consumidor trimestral del Cusco y el Producto Bruto Interno trimestral son cointegradas, implica que hay una relación de equilibrio a largo plazo entre ellas; no obstante, en el corto plazo puede haber desequilibrio. El termino error e_t en la regresión de cointegración se interpreta como el error de equilibrio y es este, precisamente, el que sirve para atar la conducta a corto plazo de la variable IPPC con su valor a largo plazo.

A continuación, veremos la estimación del modelo MCE según la tabla 13.

Tabla 13

Estimación del Modelo Mecanismo de Corrección de Errores

Dependent Variable: DIPPC				
Method: Least Squares				
Date: 11/02/25 Time: 00:59				
Sample (adjusted): 2012Q2 2020Q4				
Included observations: 35 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.762083	0.065477	11.63895	0.0000
DPBI	-0.001211	0.005511	-0.219759	0.8275
RESID01	0.017661	0.020045	0.881043	0.3849
R-squared	0.046116	Mean dependent var		0.759905
Adjusted R-squared	-0.013502	S.D. dependent var		0.374797
S.E. of regression	0.377319	Akaike info criterion		0.970364
Sum squared resid	4.555825	Schwarz criterion		1.103680
Log likelihood	-13.98137	Hannan-Quinn criter.		1.016385
F-statistic	0.773524	Durbin-Watson stat		1.394946
Prob(F-statistic)	0.469819			

Nota: Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

Según la tabla 13 se tiene la función estimada:

$$D(\hat{IPPC}) = 0.762083 - 0.001211 * D(PBI) + 0.017661 * \hat{u}_{t-1} \quad (5.5)$$

Ecuación estimada en primeras diferencias:

$$\Delta IPPC = 0.762083 - 0.001211 * \Delta PBI + 0.017661 * U_{t-1} \quad (5.6)$$

El término $0.017661 * U_{t-1}$ es el coeficiente de ajuste del mecanismo de corrección de errores (MCE). Sin embargo, este coeficiente presenta signo positivo lo cual contradice el signo negativo esperado teóricamente para que exista una corrección efectiva hacia el equilibrio de largo plazo. Además, el coeficiente no resulta estadísticamente significativo (el estadístico resulto ser 0.881043 con probabilidad mucho mayor a 0.05), por lo que no existe evidencia suficiente para afirmar que las desviaciones del equilibrio de largo plazo entre el Índice de Precios Promedio al Consumidor trimestral y el Producto Bruto Interno trimestral del Cusco se corrigen a través de ajustes en el Índice de Precios Promedio al Consumidor.

5.3 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

5.3.1 PRUEBA DE CAUSALIDAD DE GRANGER

Esta prueba se usará para determinar si las observaciones pasadas de la variable Índice Promedio de Precios al Consumidor trimestral del Cusco pronostica a la variable Producto Bruto Interno trimestral (o viceversa), en otras palabras, trataremos de establecer si existe causalidad en el sentido de Granger, la cual determina si los valores pasados de una serie de tiempo son útiles para pronosticar los valores futuros de la otra.

Para tal prueba consideraremos el modelo restringido, el cual no tiene en cuenta los rezagos de la variable IPPC trimestral del Cusco que es la de interés, al mismo tiempo se consideraran los rezagos de la variable dependiente PBI trimestral.

$$Y_t = \alpha + \beta_i x_i + \sum_{i=1}^p \gamma_i Y_{t-1} + e_i \quad (5.7)$$

Estimaremos la ecuación (5.7) por el método de mínimos cuadrados ordinarios y obtendremos la suma de cuadrados del error del modelo restringido (SCE_R), luego aplicaremos la prueba de causalidad de Granger visto en el cuadro 14, para lo cual se plantea la siguiente hipótesis:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_r = 0$, es decir que el IPPC no causa a el PBI

$H_1: \beta_j \neq 0$, es decir que el IPPC causa a el PBI

Tabla 14

Prueba de causalidad de Granger para las series IPPC y PBI

Pairwise Granger Causality Tests			
Date: 09/21/21 Time: 13:28			
Sample: 2012Q1 2020Q4			
Lags: 3			
Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
PBI does not Granger Cause IPPC	33	0.53397	0.6631
IPPC does not Granger Cause PBI		8.05920	0.0006

Nota: Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

Según la tabla 14 se puede ver en la primera fila que el p-valor es 0.6631, el cual es mayor a 0.05, es decir que el PBI no causa al IPPC en el sentido de Granger, en otras palabras los valores rezagados del PBI no son útiles para predecir los valores futuros del IPPC; en la segunda fila se ve que el p-valor es 0.0006, el cual es menor a 0.05, es decir, que se rechaza la hipótesis nula por lo cual se acepta la hipótesis alterna, que establece que el IPPC si causa al PBI en el sentido de Granger con 3 rezagos, con ello existe una causalidad unidireccional que permite al IPPC darle el poder predictivo sobre el PBI.

De manera similar se tiene la tabla 15 en donde se hace el test de causalidad de Granger para las series LOGIPPC y LOGPBI.

Tabla 15

Prueba de causalidad de Granger para las series LOGIPPC Y LOGPBI

Pairwise Granger Causality Tests			
Date: 09/21/21 Time: 13:12			
Sample: 2012Q1 2020Q4			
Lags: 3			
Null Hypothesis:	Obs	F-Statistic	Prob.
LOGPBI does not Granger Cause LOGIPC	33	0.69881	0.5613
LOGIPC does not Granger Cause LOGPBI		7.03932	0.0013

Nota: Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En esta tabla 15 se puede ver que el p-valor de 0.0013 es menor a 0.05, lo cual reafirma la causalidad en un sentido de Granger, es decir que el IPPC tiene el poder predictivo significativo sobre los valores futuros del PBI en sus series logaritmadas.

Respecto a la estimación del vector de autoregresión tenemos la siguiente tabla 16.

Tabla 16

Criterio de selección del orden del retraso

VAR Lag Order Selection Criteria
 Endogenous variables: D(LOGIPC) D(LOGPBI)
 Exogenous variables: C
 Date: 09/21/21 Time: 13:04
 Sample: 2012Q1 2020Q4
 Included observations: 28

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	146.5565	NA	1.12e-07	-10.32546	-10.23030*	-10.29637
1	151.4318	8.705859	1.06e-07	-10.38798	-10.10251	-10.30071
2	152.6345	1.975971	1.30e-07	-10.18818	-9.712392	-10.04273
3	161.1680	12.80028*	9.53e-08*	-10.51200*	-9.845900	-10.30837*
4	161.5512	0.520072	1.27e-07	-10.25366	-9.397243	-9.991845
5	164.8836	4.046452	1.38e-07	-10.20597	-9.159240	-9.885976
6	165.2944	0.440126	1.91e-07	-9.949600	-8.712553	-9.571422
7	168.6924	3.155299	2.19e-07	-9.906601	-8.479239	-9.470242

* indicates lag order selected by the criterion

LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)

FPE: Final prediction error

AIC: Akaike information criterion

SC: Schwarz information criterion

HQ: Hannan-Quinn information criterion

Nota: Elaboración propia y procesado en EVIEWS V.10

En la tabla 16 se determinó a la longitud optima de rezagos ($p=3$) a utilizar en un modelo de vector autoregresivo, la mayoría de los criterios sugieren utilizar 3 rezagos (el * indica el orden del rezago).

CONCLUSIONES

1. Se determinó que existe una relación de cointegración entre el Índice de Precios Promedio al Consumidor (IPPC) trimestral y el Producto Bruto Interno (PBI) trimestral del Cusco para el periodo 2012-2020, según el test de Engle y Granger. El estadístico usado confirmó la existencia de una relación a largo plazo entre las dos series económicas.
2. Se describió y comprobó que ambas series son integradas de orden uno, es decir no estacionarias en niveles, pero estacionarias al aplicar la primera diferencia logarítmica. Esta condición de mismo orden de integración era el requisito necesario para que la existencia de cointegración entre ambas series tuviera sentido metodológico, cumpliéndose así la primera hipótesis específica.
3. Se determinó la existencia de una relación funcional de equilibrio a largo plazo entre ambas variables, expresada mediante la ecuación de cointegración:

$$\hat{LOG(IPPC)} = 2.044241 + 0.532442 * LOG(PBI) + e_t$$

Este resultado indica que, en la relación funcional a largo plazo, un incremento de 1% en el PBI trimestral del Cusco se asocia a un incremento aproximado de 0.53% en el IPPC, cumpliéndose la segunda hipótesis específica.

RECOMENDACIONES

Se recomienda ampliar el periodo muestral utilizado en el estudio, incorporando datos posteriores a el 2020, con la finalidad de contar con un numero de observaciones que permita fortalecer y vuelva más robusta las pruebas de cointegración de las series, el año base usado por el INEI debe de actualizarse y de ser posible publicar datos de la serie con periodos más pequeños. Así mismo, serie conveniente incluir en futuros trabajos una variable dicotómica que capture el efecto de la pandemia del COVID-19 sobre las series del IPPC y le PBI trimestral del Cusco, dado que se observó un quiebre estructural evidente en los primeros trimestres de 2020, el cual pudo haber afectado la estabilidad de los parámetros estimados y en consecuencia, la capacidad predictiva del modelo de corrección de errores.

Se sugiere complementar el análisis de cointegración bivariado de Engle y Granger con el enfoque multivariado de Johansen, especialmente si en investigaciones futuras se desea incorporar más variables macroeconómicas relacionadas, ya que este método permite detectar más de un vector de cointegración y evita las limitaciones propias del procedimiento de dos etapas empelado con esta metodología de Engle y Granger.

Finalmente, se recomienda a las instituciones públicas vinculadas a la planificación económica regional, como la Gerencia Regional de planeamiento del Cusco o el Instituto Nacional de Estadística e Informática a tomar en consideración la relación de largo plazo encontrado entre estas dos series económicas y diseñar políticas de estabilización de precios o de promoción del crecimiento económico local, dado que las variaciones del IPPC parecen anticipar movimientos futuros en el PBI de la región. Del mismo modo, se sugiere a futuros investigadores replicar esta metodología en otras regiones del Perú con estructuras económicas similares a fin de contrastar si se tiene un patrón generalizado.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Anchuelo, A. (1992). Series integradas y cointegradas. *Revista de Economía Aplicada*. Recuperado de revecap.com
- Anchuelo Crego, A. (1992). Sostenibilidad a largo plazo de los déficits fiscales y por cuenta corriente de la balanza de pagos en los países miembros de la C.E.E. [Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid].
- Barazorda Velásquez, R. (2024). *Intermediación financiera de las cajas municipales y su incidencia en el crecimiento económico de la región Cusco, periodo 2001–2019* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco]. Repositorio Institucional UNSAAC. <https://repositorio.unsaac.edu.pe/>
- Bhargava, A. (1986). On the theory of testing for unit roots in observed time series. *The Review of Economic Studies*, 53(3), 369–384. <https://doi.org/10.2307/2297634>
- Batchelor, R. (2000). *Cointegration and error correction*. City University London. <http://www.staff.city.ac.uk/r.a.batchelor/Eviews2.pdf>
- Ccopa, A., & Rodríguez, J. (2004). *Metodología de Box-Jenkins y su aplicación*.
- Chow, G. C. (1960). Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions. *Econometrica*, 28(3), 591–605. <https://doi.org/10.2307/1910133>
- Chung-Alva, V. M. (2018). Análisis de cointegración entre el índice general de la bolsa de valores de Lima y el producto bruto interno del Perú. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, 19(1), 35–44. <https://doi.org/10.24310/recta.19.1.2018.19904>
- Davies, R. B. (1977). Hypothesis testing when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Biometrika*, 64(2), 247–254. <https://doi.org/10.1093/biomet/64.2.247>
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366a), 427–431. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10482531>

- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49(4), 1057–1072.
<https://www.jstor.org/stable/1912517>
- Dickey, D. A., & Pantula, S. G. (1987). Determining the order of differencing in autoregressive processes. *Journal of Business & Economic Statistics*, 5(4), 455–461.
- Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55(2), 251–276.
<https://doi.org/10.2307/1913236>
- Engle, R. F., & Yoo, B. S. (1987). Forecasting and testing in co-integrated systems. *Journal of Econometrics*, 35(1), 143–159.
[https://doi.org/10.1016/0304-4076\(87\)90085-6](https://doi.org/10.1016/0304-4076(87)90085-6)
- Engle, R. F., & Yoo, B. S. (1991). Cointegrated economic time series: An overview with new results. En R. F. Engle & C. W. J. Granger (Eds.), *Long-run economic relationships: Readings in cointegration* (pp. 237–266). Oxford University Press.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to statistical time series*. Wiley.
- Godfrey, L. G., & Tremayne, A. R. (1988). *On the finite sample performance of tests for unit roots* (Discussion Paper No. 88-03). Department of Econometrics, University of Sydney.
- Granger, C. W. J. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, 37(3), 424–438.
<https://doi.org/10.2307/1912791>
- Granger, C. W. J. (1981). Some properties of time series data and their use in econometric model specification. *Journal of Econometrics*, 16(1), 121–130.
[https://doi.org/10.1016/0304-4076\(81\)90079-8](https://doi.org/10.1016/0304-4076(81)90079-8)
- Granger, C. W. J. (1983). *Co-integrated variables and error-correcting models* (Discussion Paper No. 83-13). University of California, San Diego, Department of Economics.
- Granger, C. W. J. (2003). Análisis de series temporales, cointegración y aplicaciones. *Revista Asturiana de Economía*, (30).

- Granger, C. W. J., & Newbold, P. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics*, 2(2), 111–120.
- Granger, C. W. J., & Weiss, A. A. (1983). Time series analysis of error-correction models. En S. Karlin, T. Amemiya, & L. A. Goodman (Eds.), *Studies in econometrics, time series, and multivariate statistics: In honor of T. W. Anderson* (pp. 255–278). Academic Press.
- <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-398750-1.50018-8>
- Gujarati, D. N., & Porter, D. C. (2010). *Econometría* (5.a ed.). McGraw-Hill.
- Handa, J., & Ma, B. K. (1989). Four tests for the random walk hypothesis: Power versus robustness. *Economics Letters*, 29(2), 141–145.
- Hannan, E. J. (1970). Multiple time series. Wiley.
- <https://doi.org/10.1002/9780470316429>
- Hernández, J., & Zúñiga, J. (2009). *Modelos econométricos para el análisis económico*. Esic Editorial.
- Huañahui Castillo, A. Z., & Checya Velasque, Z. (2024). *Crecimiento económico e inversión pública en la región del Cusco, caso Gobierno Regional del Cusco, periodo 2005–2022* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco]. Repositorio Institucional UNSAAC.
- <https://repositorio.unsaac.edu.pe/>
- Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2019). *Comportamiento de la economía peruana en el trimestre de 2019* (Informe técnico).
- <https://www.inei.gob.pe>
- Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2021). *Metodología de cálculo del Índice de Precios al Consumidor a nivel nacional – Base diciembre 2021*.
- https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/metodologias/metodologia_ipcnac_dic_2021.pdf

- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2–3), 231–254. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(88\)90041-3](https://doi.org/10.1016/0165-1889(88)90041-3)
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegrating vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2–3), 231–254.
- Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. *Econometrica*, 59(6), 1551–1580. <https://www.jstor.org/stable/2938278>
- Johansen, S. (1995). *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. Oxford University Press.
- Lavanda, G., & Rodríguez, G. (2011). Descomposición histórica de la inflación en Perú: distinguiendo entre choques de demanda y choques de oferta. *Economía*, 34(67), 126–162.
- MacKinnon, J. G. (1990). *Critical values for cointegration tests* (Discussion Paper No. 90-4). University of California, San Diego.
- Mendoza, M., & Quintana, L. (2000). *Cointegración y modelos de corrección de error*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Montero, R. (2013). *Variables no estacionarias y cointegración*. Universidad de Granada.
- Moraes, J. (2009). *A relação entre retornos de mercado e retornos contábeis: Um estudo de caso do setor bancário brasileiro* [Tesis, Universidade Federal do Ceará]. Repositorio UFC. <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/5586>
- Navarro, F. (2011). *Ecuaciones en diferencias de Volterra y aproximación numérica para ecuaciones integrales* [Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. Cybertesis UNMSM.
- Phillips, A. W. (1957). Stabilisation policy and the time-forms of lagged responses. *The Economic Journal*, 67(266), 265–277. <https://doi.org/10.2307/2227788>

- Phillips, P. C. B. (1985). *Time series regression with a unit root* (Cowles Foundation Discussion Paper No. 740R). Yale University, Cowles Foundation for Research in Economics.
- Phillips, P. C. B., & Ouliaris, S. (1990). Asymptotic properties of residual based tests for cointegration. *Econometrica*, 58(1), 165–193.
- Phillips, P. C. B., & Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75(2), 335–346.
- Phillips, P. C. B., & Durlauf, S. N. (1985). *Multiple time series regression with integrated processes* (Cowles Foundation Discussion Paper No. 768). Yale University, Cowles Foundation for Research in Economics.
- Risso, W. A., & Sánchez Carrera, E. J. (2010). Análisis de cointegración y valores umbrales entre la inflación y el crecimiento económico en México: 1970–2007. *Ensayos Revista de Economía*, 29(2), 77–98.
- Salinas-Arroba, J. M., Preciado-Ramírez, J. D., & Guerrero-Freire, E. I. (2025). Análisis de cointegración del índice de precios al consumidor y los salarios nominales en Ecuador. *Journal of Economic and Social Science Research*, 5(2), 205–222. <https://doi.org/10.55813/gaea/jessr/v5/n2/198>
- Sargan, J. D. (1964). Wages and prices in the United Kingdom: A study in econometric methodology. En P. E. Hart, G. Mills, & J. K. Whitaker (Eds.), *Econometric analysis for national economic planning* (pp. 25–63). Butterworths.
- Sargan, J. D., & Bhargava, A. (1983). Testing residuals from least squares regression for being generated by the Gaussian random walk. *Econometrica*, 51(1), 153–174.
- Stock, J. H. (1987). Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors. *Econometrica*, 55(5), 1035–1056.
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (1988). Testing for common trends. *Journal of the American Statistical Association*, 83(404), 1097–1107.

Watson, M. W., & Engle, R. F. (1985). Testing for regression coefficient stability with a stationary AR(1) alternative. *The Review of Economics and Statistics*, 67(2), 341–346.

<https://doi.org/10.2307/1924737>