

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO**

**FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA**



**TESIS**

**DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y MAPEO TOPOGRÁFICO DE UN SISTEMA  
DE DISPOSICIÓN TRIAXIAL DE BOBINAS HELMHOLTZ PARA  
GENERACIÓN DE CAMPOS MAGNÉTICOS UNIFORME EN 3D**

**PRESENTADO POR:**

Br: ANTONIO FELIX ESCOBEDO NOA

**PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL  
DE FÍSICO**

**ASESOR:**

Mg. GONZALO SUAREZ SANCHEZ

**CUSCO - PERÚ**

**2024**



# Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco

## INFORME DE SIMILITUD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-321-2025-UNSAAC)

El que suscribe, el Asesor Gonzalo Suárez Sánchez,  
quien aplica el software de detección de similitud al  
trabajo de investigación/tesis titulada: Diseño, implementación y mapeo  
topográfico de un sistema de disposición, traza de bobinas  
Helmholtz para generación de campos magnéticos uniforme en 3D

Presentado por: Antonio Felix Escobedo No2 DNI N° 23930918;  
presentado por: ..... DNI N°: .....  
Para optar el título Profesional/Grado Académico de Físico

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 2 veces, mediante el  
Software de Similitud, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso del Sistema Detección de  
Similitud en la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 6 %.

### Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No sobrepasa el porcentaje aceptado de similitud.	<input checked="" type="checkbox"/>
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las subsanaciones.	<input type="checkbox"/>
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, conforme al reglamento, quien a su vez eleva el informe al Vicerrectorado de Investigación para que tome las acciones correspondientes; Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	<input type="checkbox"/>

Por tanto, en mi condición de Asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto las primeras páginas del reporte del Sistema de Detección de Similitud.

Cusco, 20 de Enero de 2025

  
Firma

Post firma Gonzalo Suárez Sánchez

Nro. de DNI 41609852

ORCID del Asesor 0000-0003-0542-5203

### Se adjunta:

- Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
- Enlace del Reporte Generado por el Sistema de Detección de Similitud: oid: 27259:547812518

# ANTONIO ESCOBEDO NOA

## TESIS ANTONIO ESCOBEDO.pdf

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

### Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:547812518

Fecha de entrega

20 ene 2026, 9:16 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

20 ene 2026, 10:18 p.m. GMT-5

Nombre del archivo

TESIS ANTONIO ESCOBEDO.pdf

Tamaño del archivo

4.6 MB

187 páginas

30.213 palabras

130.477 caracteres




# 6% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

## Exclusiones

- N.º de coincidencias excluidas

## Fuentes principales

- 5%  Fuentes de Internet
- 1%  Publicaciones
- 5%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

## Marcas de integridad

### N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco (UNSAAC) por haberme brindado la oportunidad de una formación académica universitaria gratuita.

Quiero agradecer en forma muy especial al Mg. Gonzalo Suárez Sánchez por su valioso tiempo y sus muestras de total predisposición durante el desarrollo de este trabajo de tesis. Aprovecho la oportunidad para agradecer de manera muy extraordinaria a todos los Profesores Maestros y Doctores del Departamento Académico de Física por haber recibido sus sabias enseñanzas y consejos durante mi formación académica.

Por otra parte, quiero agradecer a todos los amigos y compañeros de aula, que de una u otra forma me auxiliaron y siempre recibí palabras de aliento durante el desarrollo de este trabajo.

Por último, quiero agradecer a mis padres Felipe y Visitación por todo su aliento y apoyo incondicional que siempre supieron brindarme, de la misma manera a mis hermanos Armando, Richard y Wilbert.

## RESUMEN

El presente trabajo se desarrolló de manera teórica y experimental, fundamentado en los principios y leyes de la electricidad y el magnetismo. El diseño tridimensional (3D) de las bobinas de Helmholtz se realizó mediante el software Solid Word, el cual permitió definir diámetros, espesores de los aros y planos constructivos de cada bobina, así como su configuración triaxial para el ensamblaje final en disposición (3D). Con esta información se procedió a la fundición y torneado de cada par de bobinas, incorporando los aros respectivos y los arrollamientos de alambre de cobre esmaltado.

Posteriormente, las tres bobinas de Helmholtz fueron implementadas sobre bases rectangulares de madera, con sus respectivas conexiones eléctricas, conservando las propiedades teóricas que caracterizan a este tipo de dispositivos. Una vez contruidos los pares de bobinas, se realizó el mapeo de la inducción magnética ( $\vec{B}$ ) mediante una sonda de efecto Hall modelo 5170/5180. Para ello se construyeron prismas rectangulares de vidrio acondicionados con papel milimetrado, los cuales sirvieron como plano de referencia para el mapeo topográfico del campo magnético.

Estos prismas se colocaron en el centro de cada par de bobinas y a la altura del radio correspondiente, permitiendo registrar puntos de medición organizados como coordenadas espaciales. Finalmente, se realizó el anidamiento espacial de los tres pares de bobinas usando una base de madera, tubos de aluminio para la bobina mediana y un soporte adicional para la bobina menor. El análisis se presentó mediante isolíneas e isosuperficies de la inducción magnética, generadas con el software Surfer.

**Palabras clave:** Bobinas de Helmholtz, Software Surfer, Sonda, Mapeo.

## ABSTRACT

The present work was developed through both theoretical and experimental approaches, based on the fundamental principles and laws of electricity and magnetism. The three-dimensional (3D) design of the Helmholtz coils was carried out using Solid Word software, which allowed the determination of diameters, ring thicknesses, and construction plans for each coil, as well as their triaxial configuration for final assembly in a 3D arrangement. Based on this design, the casting and machining of each pair of coils were performed, incorporating the corresponding rings and windings made of enameled copper wire.

Subsequently, the three Helmholtz coils were mounted on rectangular wooden bases with their respective electrical connections, preserving the theoretical properties that characterize this type of device. Once the coil pairs were completed, magnetic induction ( $\vec{B}$ ) mapping was performed using a Hall-effect probe (model 5170/5180). For this purpose, rectangular glass prisms equipped with graph paper were constructed, serving as reference planes for the topographic mapping of the magnetic field.

These glass prisms were placed at the center of each coil pair and at the height corresponding to the coil radius, enabling the recording of measurement points organized as spatial coordinates. Finally, the spatial nesting of the three coil pairs was carried out using a rectangular wooden base, aluminum tubes to support the medium-sized coil, and an additional wooden support for the smallest coil. The analysis was presented through isolines and isosurfaces of magnetic induction, generated using the Surfer software.

**Keywords:** Helmholtz coils, Surfer software, Probe, Mapping.

## ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS .....	ii
RESUMEN .....	iii
ÍNDICE GENERAL .....	v
INDICE DE FIGURAS .....	viii
ÍNDICE DE TABLAS .....	xii
INDICE DE CUADROS .....	xiii
CAPÍTULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	14
1.1. Descripción de la Situación Problemática .....	14
1. 2. Formulación del Problema .....	15
1.2.1. Problema General .....	15
1.2.2. Problemas Específicos .....	15
1.3. Áreas de Investigación .....	15
1.4. Área Geográfica de la Investigación .....	15
1.5. Objetivos de la Investigación.....	16
1.5.1. Objetivo General.....	16
1.5.2. Objetivos Específicos.....	16
1.6. Justificación.....	16
1.6.1. Justificación Teórica.....	17
1.6.2. Justificación Metodológica .....	18
1.6.3. Justificación Tecnológica .....	19
1.8. Limitaciones de la Investigación.....	23
1.9. Hipótesis .....	24
1.9.1. Hipótesis General .....	24



1.9.2. Hipótesis Específicas.....	24
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO .....	25
2.1. Bases Teóricas del Electromagnetismo .....	25
2.2. Magnetostática.....	26
2.3. Fuerza Magnética .....	33
2.4. Inducción Electromagnética .....	35
2.5. Ley de Biot-Savart.....	38
2.6. Leyes de Maxwell.....	42
2.7. Potenciales Magnéticos .....	44
2.8. Metodo de Expasion Axial.....	52
2.9. Inducción magnética ( $B$ ) debido a una corriente en un solenoide .....	54
2.10. Bobina de Helmholtz .....	56
CAPÍTULO III : MÉTODO DE INVESTIGACIÓN.....	65
3. 1. Tipo y nivel de investigación .....	65
3.1.1. Procedimiento General.....	65
Diagrama de flujo.....	66
3.2. Diseño de Investigación .....	67
3.2.1 Modelamiento Electromagnetico de la Bobina de Helmholtz .....	68
3.2.2 Intensidad del Campo Magnético Producido por una Espira o Corriente Circular en un Punto de su Eje.....	68
3.2.3. Intensidad del Campo Magnético Producido por una Bobina de Helmholtz en un Punto de la Zona Experimental.....	73
3.3. Simulación de la Bobina de Helmholtz con Comsol .....	81

3.3.1. Implementos Necesarios para la Simulación .....	81
3.3.2. Implementación del Esquema y Modelado .....	82
3.3.3 Implementación de Materiales.....	90
3.3.4. Implementación de Bobinas Múltiples y Enmallado.....	94
3.3.5. Visualización de los Resultados.....	100
3.3.6. Creando un Plano de Corte y Visualizando las Gráficas .....	105
3.3.7. Exportación y Visualización de los Resultados .....	116
3.4. Diseño de planos de las bobinas de Helmholtz .....	119
3.4.1 Planos de Diseños de Bobinas .....	119
3.5. Procedimiento para la Implementación de las Bobinas.....	126
3.5.1. Calculo del Número de Vueltas de las Bobinas de Helmholtz .....	126
3.5.2. Implementacion de las Bobinas de Helmholtz y Conexiones Eléctricas ..	129
3.5.3 Mapeo de las Bobinas de Helmholtz.....	133
CAPÍTULO IV: RESULTADOS.....	139
4.1. Resultados del diseño .....	139
Resultado de la Simulación .....	153
CONCLUSIONES.....	155
Apéndice B.....	163
Apéndice D.....	169
Bibliografía .....	185

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1 a) Un imán de herradura. b) Las líneas de inducción magnética de la tierra .....	26
Figura 2 Visualización de las líneas de fuerza y del vector tangente a estas que representa la dirección del campo magnético para un imán de barra .....	28
Figura 3 El campo magnético $B$ es tangente a las líneas de fuerza .....	30
Figura 4 El campo magnético entre los polos de un imán, son paralelas planas es casi uniforme, excepto en los bordes .....	32
Figura 5 a) Fuerza eléctrica sobre una carga que ingresa en un campo eléctrico. ....	34
Figura 6 Fuerza en un conductor por acción del campo magnético .....	35
Figura 7 a) Las líneas de inducción magnética $B$ forma un ángulo $\theta$ con el vector normal a la superficie $A$ . ....	36
Figura 8 Mediante el movimiento de los imanes se induce corriente eléctrica en el circuito .....	37
Figura 9 Cualquier corriente eléctrica sobre un conductor rectilíneo genera un campo magnético alrededor de este .....	39
Figura 10 Distribucion espacial de la corriente en un tubo .....	40
Figura 11 Corrientes que fluyen en una superficie .....	41
Figura 12 a) El vector de inducción magnética es tangente a la línea de inducción .....	42
Figura 13 El potencial vectorial magnético $P$ referido al punto $P_0$ . ....	47
Figura 14. a) Solenoide atravesado por una corriente $I$ b) Corte longitudinal del solenoide .....	55

Figura 15. Bobina de Helmholtz de eje común de simetría y separados una distancia $R$ igual al radio $R$ de las bobinas.....	57
Figura 16. Bobina de Helmholtz de radio $R$ , centro $C$ de longitud $b$ y un punto $P$ en el eje de simetría a una distancia " $z$ " del origen de coordenadas $o$ .....	59
Figura 17. Diagrama de flujo .....	66
Figura 18. Intensidad de campo magnético de una espira circular de radio $R$ utilizando el potencial escalar magnético .....	69
Figura 19. Bobina de Helmholtz ubicadas en el eje $Z$ .....	74
Figura 20 Ventana del módulo de Helmholtz.....	81
Figura 21. Ventana para iniciar con el consol.....	82
Figura 22. Ventana del asistente de Modulo y La petaña 3D .....	83
Figura 23. Ventanas emergentes de Fisica y Estudio .....	84
Figura 24 Ventana para la selección de la geometría .....	85
Figura 25. Ubicación del módulo de Helmholtz .....	86
Figura 26. Ventana para número de capas .....	87
Figura 27. Ventana de construcción .....	88
Figura 28. Estructura de la bobina .....	89
Figura 29. Ventana de elementos infinitos .....	90
Figura 30. Selección de capa .....	91
Figura 31. Ventana agregar el material de la esfera .....	92
Figura 32. Ventana para crear el devanado de cobre en la bobina .....	93
Figura 33. Ventana de embobinado multiple .....	94
Figura 34. Ventana para asignar los anillos de cobre .....	95
Figura 35. Ventana para colocar parámetros magnéticos .....	96

Figura 36. Doble-Click en “Múltiple Embobinado” luego hace Click en “Geometría de la Bobina 1” (Rojo) .....	96
Figura 37. Ventana interactiva para ver la forma geométrica .....	98
Figura 38. Ventana para visualizar las capas.....	99
Figura 39. Ventana de selección de la bobina de Helmholtz.....	100
Figura 40. Manejo de los elementos finitos .....	101
Figura 41. Habilitación de mallas .....	102
Figura 42. Ventana para calcular .....	103
Figura 43. Ventana para deshabilitar .....	104
Figura 44 conjunto de datos” luego nos dirigimos a “plano de corte”.....	105
Figura 45. Selección de planos .....	106
Figura 46. Tipos de grupos.....	107
Figura 47 Para las curvas de nivel .....	108
Figura 48. Plano de corte .....	109
Figura 49. Ajustes de curvas de nivel.....	110
Figura 50. Visualización de curvas de nivel.....	111
Figura 51. El radio de las curvas de nivel.....	112
Figura 52. Mapa topográfico de la densidad de flujo magnético .....	113
Figura 53. Para la visualización del campo de direcciones .....	114
Figura 54. Campo de dirección de la inducción magnética .....	115
Figura 55. Ventana para visualizar la densidad del flujo magnético.....	116
Figura 56. Ventana de reportes.....	117
Figura 57. Simulación final que muestran las bobinas de Helmholtz y el campo de direcciones de la inducción magnética.....	118
Figura 58 Plano de diseño bobina pequeña .....	120

Figura 59. Plano de diseño bobina mediana .....	121
Figura 61 Plano de diseno de bobina grande.....	122
Figura 62. Plano de ensablaje.....	123
Figura 63. Plano de ensablaje con vistas en distintas posiciones .....	124
Figura 64. Diseño final de las bobinas de Helmholtz en la disposición triaxial3D .....	125

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Resumen de parámetros geométricos de cada bobina.....	128
Tabla 2. D-1.....	175

**INDICE DE CUADROS**

CUADRO 1. Cuadro de datos: Bobina grande .....	134
CUADRO 2. Cuadro de datos: Bobina pequeña .....	138



## **CAPÍTULO I PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **1.1.Descripción de la Situación Problemática**

Debemos señalar que no hay dispositivos que generen campos magnéticos uniformes en 3D, en los Laboratorios de Física de la UNSAAC para fines de investigación. Esto es un problema que limita el conocimiento y las aplicaciones que pueden tener los campos magnéticos uniformes en 3D.

Los estudios de campo magnético uniforme generados por corriente continua en los Laboratorios de Física con bobinas de Helmholtz son estudiados por medio de guías de laboratorio solamente en el eje de simetría. Más no fuera del eje de simetría, es decir no existe un registro de mapeo, a través de todo el plano comprendido entre las bobinas Helmholtz mostrando así que queda una basta región del plano comprendido entre las bobinas Helmholtz sin estudiar.

Implementar las bobinas de Helmholtz para una distribución triaxial 3D no es nada sencillo en hacer co incidir espacialmente los diámetros. Pues para este problema se tubo que recurrir a la ayuda de softwares informáticos.

El mapeo topográfico de la inducción magnética se realiza mediante una sonda de efecto Hall y cuyos datos son registrados procesados por medio de un software informatico. El cual permite visualizar la uniformidad de la inducción magnetica mediante isolineas magnéticas para cada bobina de Helmholtz.

## **1. 2. Formulación del Problema**

### ***1.2.1. Problema General***

¿Es posible diseñar, implementar , mapear con bobinas de Helmholtz y luego disponerlas en 3D para la obtener campos magnéticos uniformes en disposición triaxial?

### ***1.2.2. Problemas Específicos***

1. ¿ Se podrá diseñar un sistema de bobinas de Helmholtz para generar campos uniformes con la ayuda de un software informático?
2. ¿ Es posible implementar el sistema de tres bobinas de Helmholtz independientes para la generación de campos uniformes?
3. ¿ Se podrá obtener un mapa topográfico con datos de inducción magnética tomados con un gausímetro en cada bobina de Helmholtz haciendo uso de un software informático?
4. ¿ Es posible obtener un mapa topográfico de inducción magnética simultaneo en 3D disposición triaxial con las bobinas de Helmholtz?

## **1.3. Áreas de Investigación**

a. **Área: Electromagnetismo**

b. **Sub Área: Magnetismo**

## **1.4. Área Geográfica de la Investigación**

Se circunscribe en la ciudad del Cusco, más concretamente en la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, en la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas.

## **1.5. Objetivos de la Investigación**

### ***1.5.1. Objetivo General***

Diseñar, implementar y mapear con bobinas de Helmholtz y disponerlas en 3D para obtener campos magnéticos uniformes en disposición triaxial.

### ***1.5.2. Objetivos Específicos***

1. Diseñar un sistema de tres bobinas de Helmholtz para generar campos uniformes con la ayuda del software Solidwork.
2. Implementar el sistema de tres bobinas de Helmholtz independientes para la generación de campos uniformes para luego ser dispuestas triaxialmente.
3. Medir la inducción magnética en los planos comprendidos entre las bobinas de Helmholtz independientemente y obtener el mapa topográfico con la ayuda del software Surface.
4. Obtener un mapa topográfico de la inducción magnetica en los tres planos de la disposición triaxial de las tres bobinas de Helmholtz.

## **1.6. Justificación**

En los laboratorios de Física de la Escuela Profesional de Física de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco no se registra con un dispositivo que genere campo magnético uniforme en 3D, con fines de experimentación. Puesto que los campos magnéticos uniformes son aplicados en diferentes áreas como:

Investigación científica: Se utilizan en laboratorios para estudiar el comportamiento de materiales magnéticos y para realizar experimentos en física fundamental.

Medicina: En resonancia magnética (MRI), donde se aplican campos magnéticos uniformes para crear imágenes detalladas del interior del cuerpo humano.

Tecnología de la información: En la fabricación de dispositivos de almacenamiento magnético, como discos duros y cintas magnéticas.

Industria: En la fabricación y control de calidad de materiales ferromagnéticos, así como en la separación magnética de materiales en la industria minera y de reciclaje.

Transporte: En sistemas de levitación magnética, como los utilizados en trenes de levitación magnética para lograr velocidades muy altas con mínima fricción.

Energía: En generadores eléctricos, transformadores y otros dispositivos eléctricos y electrónicos que hacen uso de campos magnéticos para su funcionamiento.

Por lo tanto podemos afirmar que se justifica el estudio de generación de campos magnéticos uniformes y que mejor en 3D, tal como es la finalidad de este presente trabajo.

#### ***1.6.1. Justificación Teórica***

En 1853 Von Helmholtz inventa la bobina de Helmholtz. Una bobina de Helmholtz es un dispositivo para la producción de campo magnético casi uniforme en una determinada región. Se compone de dos bobinas idénticas circulares magnéticas que se colocan simétricamente, uno a cada lado de la zona experimental a lo largo de un eje común, y separados por una distancia ( $h$ ) igual al radio ( $R$ ) de la bobina. Cada bobina lleva una corriente eléctrica igual que fluye en

la misma dirección. Existe una serie de variaciones, incluyendo el uso de bobinas rectangulares, y el número de bobinas de otras de dos.

Las bobinas de Helmholtz son un arreglo de dos bobinas circulares colocadas simétricamente a ambos lados de un eje común con el mismo radio y separación entre ellas. Su diseño se basa en los principios de la ley de Ampère y la ley de Biot-Savart del electromagnetismo.

La justificación teórica de las bobinas de Helmholtz radica en su capacidad para producir campos magnéticos uniformes en una región entre las bobinas. Esto se logra cuando la separación entre las bobinas es igual al radio de las mismas y cuando la corriente que las atraviesa es constante.

El campo magnético en el centro entre las bobinas se puede calcular utilizando la ley de Biot-Savart, y debido a la configuración simétrica, las contribuciones magnéticas de cada bobina se suman de manera constructiva, produciendo un campo magnético neto uniforme en esa región.

Estas bobinas son útiles en diversas aplicaciones, como la calibración de instrumentos de medición, la generación de campos magnéticos estables para experimentos científicos y la resonancia magnética nuclear, entre otros. Su diseño y justificación teórica las hacen una herramienta invaluable en el campo de la electromagnetismo y la física experimental.

### ***1.6.2. Justificación Metodológica***

El campo magnético uniforme generado por una bobina de Helmholtz se basa en la configuración geométrica y el principio de superposición de campos magnéticos. La metodología se base en:

La configuración geométrica: Una bobina de Helmholtz consiste en dos bobinas circulares idénticas colocadas simétricamente a una distancia específica

entre sí, con sus ejes alineados. Esta disposición permite que los campos magnéticos generados por cada bobina se sumen de manera constructiva en la región entre ellas, creando un campo magnético uniforme en esa región.

En el principio de superposición de campos magnéticos: Según este principio, cuando dos o más campos magnéticos están presentes en una región del espacio, el campo resultante es la suma vectorial de los campos individuales en cada punto. En el caso de la bobina de Helmholtz, debido a la simetría y orientación de las bobinas, los campos magnéticos generados por cada bobina se superponen de manera que el campo resultante en el centro entre las bobinas es uniforme y de intensidad constante.

En el control de variables: Para garantizar la uniformidad del campo magnético, es crucial controlar variables como la distancia entre las bobinas, el radio de las bobinas y la corriente que las atraviesa. Estos parámetros deben ajustarse cuidadosamente de acuerdo con las ecuaciones que describen el campo magnético generado por una bobina de Helmholtz para garantizar un campo magnético uniforme dentro de la región de interés.

En resumen, la justificación metodológica del campo magnético uniforme de una bobina de Helmholtz se basa en la configuración geométrica específica de las bobinas, el principio de superposición de campos magnéticos y el control preciso de variables relevantes para garantizar la uniformidad del campo magnético en la región de interés.

### ***1.6.3. Justificación Tecnológica***

Las bobinas de Helmholtz son dispositivos utilizados en física experimental, particularmente en campos como el electromagnetismo. Su justificación tecnológica radica en su capacidad para producir campos magnéticos uniformes y

controlables en un área específica, lo que es fundamental para una variedad de aplicaciones. Estas bobinas consisten en dos bobinas circulares idénticas, colocadas simétricamente a ambos lados de un punto central, con sus ejes alineados. Al pasar corriente eléctrica a través de estas bobinas, se genera un campo magnético entre ellas que es uniforme y estable en un área definida entre las bobinas. Esto es crucial en experimentos donde se requiere un campo magnético homogéneo para estudiar fenómenos físicos con precisión, como en la calibración de instrumentos de medición, investigación biomédica, resonancia magnética nuclear, entre otros. La justificación tecnológica de las bobinas de Helmholtz radica en su capacidad para proporcionar un entorno controlado y estable para llevar a cabo una amplia gama de experimentos y aplicaciones científicas y tecnológicas.

Los campos magnéticos uniformes tienen respaldo teórico y experimental en la teoría de la Magnetostática. Las bobina de Helmholtz se construyen bajo normas de calidad como la norma ASTM (American Society for Testing and Materials). La medida de la inducción magnética se realiza con un magnetómetro o también denominado Gausímetro.

### **1.7. Estado del Arte**

Las bobinas de Helmholtz son dispositivos utilizados en física para generar campos magnéticos uniformes en un área específica. Este diseño crea un campo magnético uniforme entre las bobinas. Se utilizan en una variedad de aplicaciones, como pruebas de susceptibilidad magnética, calibración de instrumentos, experimentos de física y resonancia magnética nuclear. Su diseño y optimización

continúan siendo áreas de investigación para mejorar la uniformidad del campo magnético y su eficiencia energética.

Los primeros antecedentes en nuestra casa de estudios([UNSAAC](#)), son los trabajos de seminario curricular, realizados para una bobina de Helmholtz en su eje de simetría, por el estudiante de pregrado de la escuela Profesional de Física: Nilton Olivera, en este trabajo de nombre: **“DISEÑO Y CONTRUCCION DE LA BOBINA DE HELMHOLTZ”**, es destacable mencionar. El acomodo de las vueltas del cable conductor por capas y seguidamente plantea una reformulación para la ecuación de las bobinas de Helmholtz. Cabe señalar que este trabajo tiene un desarrollado a nivel teorico.

También la tesis denominada: **“DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN MAGNETÓMETRO CON SENSOR GMR”** relizados por los tesistas Isidro Ccamac y Eulogio Montalvo. En este trabajo de tesis se construye una bobina de Helmholtz mediana con la finalidad de calibrar y validar dicho magnetómetro.

Actualmente en el Perú se vienen desarrollando diversos trabajos de la aplicación de los campos magnéticos lo más resaltante son los trabajos de sensores magnéticos para detectar terremotos desarrollados en la Pontificia Universidad Católica del Perú PUCP.

Perú – Magneto.- Dedicado al estudio de los fenómenos electromagnéticos vinculados a eventos sísmicos. El proyecto contempla el uso de magnetómetros que midan la actividad del campo magnético local a través de sensores magnéticos, es decir bobinas enterradas en el suelo.

Por otra parte los Profesores Fano W. G. Alonso y Quintana G. de la universidad de Buenos Aires, publicaron . en agosto del 2017el siguiente trabajo de nombre **“CAMPO MAGNÉTICO GENERADO POR LAS BOBINAS DE**



**HELMHOLTZ Y SU APLICACIÓN A LA CALIBRACIÓN DE SONDAS**". Este trabajo se dedica a calcular y medir el campo magnético generado por las bobinas de Helmholtz y determinar la uniformidad y exactitud del campo magnético respecto al centro de simetría.

Los campos magnéticos se han investigado y seguirán investigándose para comprender completamente su naturaleza y su interacción con la materia y sus futuras aplicaciones.

Zhang y Li diseñaron un sistema triaxial de bobinas de Helmholtz específicamente para la calibración de sensores magnéticos vectoriales, analizando la relación entre corriente y magnitud del campo, así como el tamaño de la zona homogénea. Este trabajo demuestra la utilidad de un sistema triaxial en la calibración precisa de sensores multicomponente, (Zhang, 2025)

Estudios han demostrado que imperfecciones prácticas como desalineaciones y desajustes de fabricación afectan la uniformidad del campo magnético en sistemas triaxiales. En uno de estos trabajos, se construyó y midió un sistema triaxial real, confirmando que las imperfecciones reducen la uniformidad especialmente fuera del centro del volumen de campo, (Beiranvand, 2014)

Además de las bobinas circulares, se han desarrollado sistemas de bobinas cuadradas triaxiales (también llamados "Helmholtz cages"), usados principalmente para la calibración de magnetómetros de alta precisión en observatorios geofísicos y centros de investigación. Estos sistemas permiten generar un campo homogéneo tridimensional con precisión de nano tesla en volúmenes experimentales relativamente grandes (Brewer, 2018)

En el ámbito industrial y aplicado, existen sistemas comerciales de bobinas de Helmholtz 3D con diámetro igual en los tres ejes, diseñados para producir

campos magnéticos uniformes en configuraciones tridimensionales para calibración, pruebas industriales y experimentación científica avanzada, (Cryomagtech, 2025)

La literatura reciente también presenta diseños optimizados de bobinas con múltiples pares y estructuras cuadradas generados mediante algoritmos inteligentes. Estos mejoran la uniformidad y extienden el volumen homogéneo del campo magnético, constituyendo un avance relevante para configuraciones triaxiales.

Aunque no directamente triaxiales, informes técnicos clásicos (Vrbancich, 1991) y herramientas de visualización de campo magnético aportan modelos teóricos y simulaciones útiles para la comprensión profunda del comportamiento del campo en arreglos complejos de bobinas.

### **1.8. Limitaciones de la Investigación**

Las limitaciones fueron del tipo mecánicas ya que no se pudieron torneear bobinas más grandes, por encima del diámetro mayor (53.5cm) de la bobina más grande. Debido a las limitaciones mecánicas que presentan los tornos de nuestra región Cusco. El otro inconveniente es encontrar aluminio reciclado de alta pureza esto para el proceso de fundición, es más este aluminio tiene que ser de alta pureza para evitar la magnetización de los aros. Y por otro lado es el acceso a softwares informáticos que vienen hacer herramientas de valiosa ayuda en el diseño e implementación. De la misma manera el acceso a bibliografía de autores más especializados en electromagnetismo.

## **1.9. Hipótesis**

### ***1.9.1. Hipótesis General***

Es posible diseñar, implementar, mapear bobinas de Helmholtz al disponerlas en disposición triaxial 3D y obtener la topografía del campo magnético uniforme en los tres planos que forma la disposición triaxial.

### ***1.9.2. Hipótesis Específicas***

1. Es posible diseñar la disposición triaxial de tres bobinas de Helmholtz con la ayuda del software Solid Work.
2. Es posible implementar tres pares de bobinas de Helmholtz independientemente para luego ser dispuestas en disposición triaxial.
3. Cómo es la topografía de la inducción magnética en el plano formado entre las bobinas de Helmholtz independientemente al recolectar los datos de inducción magnetica.
4. Es posible obtener campo magnético uniforme en 3D con las bobinas de Helmholtz en disposición triaxial.

## **CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO**

### **2.1. Bases Teóricas del Electromagnetismo**

#### **Electromagnetismo**

Es una rama de la Física que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en una sola teoría. El electromagnetismo describe cómo las cargas eléctricas crean campos eléctricos y cómo los campos magnéticos se generan a partir de cargas eléctricas en movimiento.

#### **Campo Físico**

Representa la distribución espacial de una magnitud física que muestra cierta variación en una región del espacio. Es decir, es una región del espacio que tiene una propiedad física en cada punto. Estas propiedades pueden incluir campos eléctricos, campos magnéticos, campos gravitatorios, campos de temperatura, campos de presión, etc.

El campo físico se describe matemáticamente como una función que asigna un valor a cada punto del espacio. La forma en que un campo físico cambia en el espacio y el tiempo está regida por las leyes de la física que rigen ese campo. Por ejemplo, el campo electromagnético está descrito por las cuatro leyes conocidas como ecuaciones de Maxwell.

Los campos físicos son fundamentales para entender el comportamiento de los objetos en el universo. La interacción de los campos físicos con los objetos en el espacio puede causar cambios en la posición, el movimiento o las propiedades de los objetos. Por ejemplo, la interacción de un campo eléctrico con una carga eléctrica puede hacer que la carga se mueva. (Jiles, 2016)

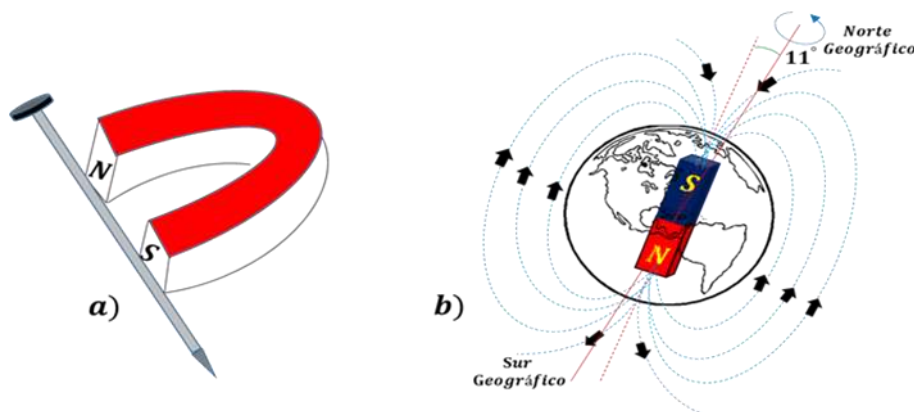
## 2.2. Magnetostática

### Magnetismo

Es un fenómeno por el que los materiales interactúan con fuerzas de atracción o repulsión sobre otros materiales. Hay algunos materiales conocidos que presentan propiedades magnéticas detectables fácilmente como el níquel, hierro y sus aleaciones que comúnmente se llaman imanes. Sin embargo todos los materiales son influenciados, de mayor o menor forma, por la presencia de un campo magnético. “El magnetismo es una manifestación de la carga eléctrica en movimiento”. (Jiles, 2016)

Figura 1

*a) Un imán de herradura. b) Las líneas de inducción magnética de la tierra*



*Fuente:* Elaboración propia

### Campo magnético

Es una de las formas de la materia que estudia la física a la par que la sustancia y una de las formas de campo electromagnético. El espacio que rodea a

los conductores recorridos por una corriente eléctrica se le denomina campo magnético, al igual al espacio que rodean a las partículas cargadas de electricidad en movimiento y a los cuerpos magnetizados. Otra forma de generar campo magnético es a partir de un campo eléctrico alterno. Actúa solamente sobre las partículas y cuerpos en movimiento con carga eléctrica y sobre los cuerpos magnetizados. (Jiles, 2016)

### **Campo de fuerza magnético**

La peculiaridad más importante de los campos de fuerzas es la de que con su ayuda se efectúan las interacciones de diversos tipos. Los campos poseen propiedades muy importantes que caracterizan su materialidad, en primer lugar energía, entre el campo y la substancia no existe límites infranqueables se puede transformar el uno en la otra y viceversa. (Finn, 1967)

### **Inducción magnética ( $\vec{B}$ )**

Es una magnitud vectorial, determina la característica fundamental de la intensidad del campo magnético en un punto. La unidad de la inducción magnética en el sistema internacional es el Tesla.

$$\text{Tesla} = \frac{\text{newton}}{\text{Amperio. metro}}$$

$$T = \text{Kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Para fines de investigaciones en el laboratorio es muy utilizado el Gauss (G) que es una unidad de campo magnético del Sistema Cexagesimal de Unidades (CGS). Un gauss es equivalente a  $10^{-4}$  Tesla.

$$1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$$

### Principio de superposición

La inducción magnética  $\vec{B}$ , creado por varias cargas en movimiento o corrientes es igual a la suma vectorial de las inducciones magnéticas  $\vec{B}_i$  que engendra las cargas o corrientes por separado. (Matveev, 1988)

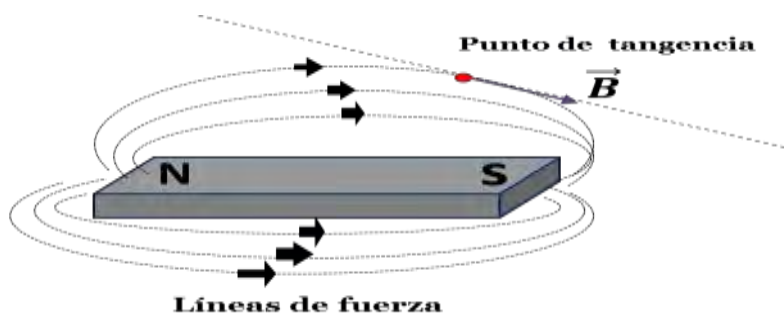
$$\vec{B} = \sum \vec{B}_i \quad (2.1)$$

### Líneas de fuerza de campo magnético

Conocidas también como líneas de flujo o líneas de fuerza de inducción magnética, son líneas imaginarias y sirven para describir como varía el campo magnético en una región del espacio. La tangente a una de las líneas de fuerza proporciona la dirección del campo magnético o inducción magnética. (Hewitt, 2007)

Figura 2

*Visualización de las líneas de fuerza y del vector tangente a estas que representa la dirección del campo magnético para un imán de barra*



*Fuente:* Elaboración propia

### Características de las líneas de fuerza

- Las líneas de fuerza de inducción magnética siempre salen del polo norte e ingresan al polo sur. Son líneas cerradas
- Las líneas de fuerza de inducción magnética son siempre cerradas
- Las líneas de fuerza de inducción magnética nunca se cortan porque si así fuera se anularía el campo magnético en dicho punto.
- Las líneas de fuerza de inducción magnética convergen donde la fuerza magnética es mayor y se separan donde es más débil.
- A mayor densidad de las líneas de fuerza de inducción mayor es la intensidad del campo magnético.

### Trazado de las líneas de fuerza de campo magnético

Para representar el campo de fuerza magnético usamos las líneas de fuerza.

Las líneas de fuerza pueden trazarse en base a la ley de Biot – Savart.

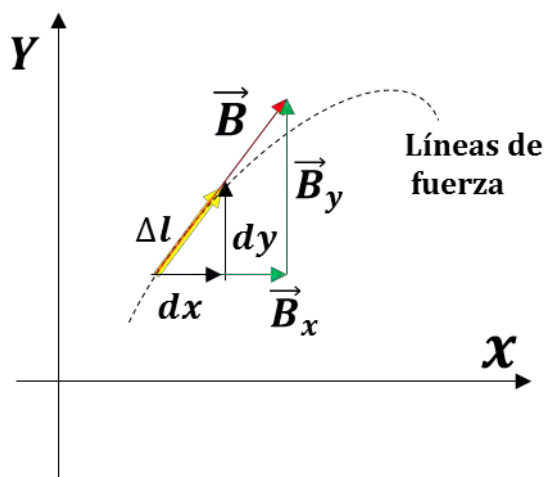
Para trazar las líneas de fuerza de campo magnético se siguen los pasos:

1. Se selecciona un punto de partida en la línea de fuerza.
2. Se calcula  $B_x$  y  $B_y$  en ese punto mediante la ley de Biot – Savart
3. Se avanza una corta distancia a lo largo de la línea de fuerza hacia un nuevo punto en el plano (Sadiku, 2003). Como se observa en la figura, un movimiento  $\Delta l$  a lo largo de la línea de fuerza implica un desplazamiento en  $\Delta x$  y  $\Delta y$  a lo largo de las direcciones  $x$  e  $y$ .



Figura 3

*El campo magnético ( $\vec{B}$ ) es tangente a las líneas de fuerza*



*Fuente:* Elaboración propia

Como el campo es tangente a las líneas de fuerza, entonces también se puede escribir una relación matemática de los campos y sus diferenciales.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} \quad (2.2)$$

### **Permeabilidad magnética ( $\mu$ )**

La permeabilidad es la capacidad que tiene una sustancia para atraer y dejar pasar las líneas de fuerza magnética. Es la capacidad que tienen los conductores de afectar y ser afectados por los campos magnéticos. Está dada por la relación entre la inducción magnética ( $B$ ) existente y la intensidad de campo magnético ( $H$ ) que aparece en el interior de dicho material. (Jiles, 2016)

$$\mu = \frac{B}{H} \quad (2.3)$$

La permeabilidad de manera diferencial se define:

$$\mu = \frac{dB}{dH} \quad (2.4)$$

La permeabilidad relativa, denotada por el símbolo  $\mu_r$ , es la relación entre la permeabilidad de un medio específico y la permeabilidad del espacio libre  $\mu_o$ :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} \quad (2.5)$$

Donde  $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m es la permeabilidad magnética del vacío.

Los materiales se pueden clasificar según su permeabilidad magnética relativa en:

- Ferromagnéticos, cuyo valor de permeabilidad magnética relativa es muy superior a 1 ( $\mu_r > 1$ ).
- Paramagnéticos o no magnéticos, cuya permeabilidad relativa es aproximadamente 1 se comportan como el vacío ( $\mu_r \approx 1$ ).
- Diamagnéticos, de permeabilidad magnética relativa inferior a 1 ( $\mu_r < 1$ ).

### **Intensidad de campo magnético ( $\vec{H}$ )**

Es una magnitud auxiliar análoga a las características del desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  del campo eléctrico. Los campos magnéticos generados por las corrientes y que se calculan por la ley de Ampere o la ley de Biot-Savart, se

caracterizan por el campo magnetico  $\vec{B}$  medido en Teslas. Pero cuando los campos generados pasan a través de materiales magnéticos que por sí mismo contribuyen con sus campos magnéticos internos, surgen ambigüedades sobre que parte del campo proviene de las corrientes externas, y que parte la proporciona el material en sí. (Jiles, 2016) como práctica común se ha definido otra cantidad de campo magnético, llamada usualmente "intensidad de campo magnético", designada por la letra  $\vec{H}$ . Se define por la relación:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_m} \quad (2.6)$$

$$\mu_m = K_m \mu_0$$

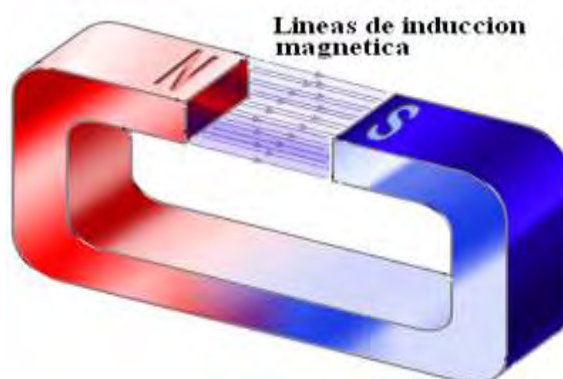
siendo  $\mu_0$  la permeabilidad magnética del vacío y  $K_m$  la permeabilidad relativa del material. Si el material no responde al campo magnético externo, no produciendo ninguna magnetización, entonces  $K_m = 1$ . Otra cantidad magnética comunmente usada es la susceptibilidad magnética, la cual especifica en cuanto difiere de 1, la permeabilidad relativa.

### **Campo magnético uniforme**

El campo magnético es uniforme u homogéneo si el vector  $\vec{B}$  no cambia en magnitud ni dirección de un punto a otro es decir permanece constante en todos sus puntos. (Alvarenga, 2008)

Figura 4

*El campo magnético entre los polos de un imán, son paralelas planas es casi uniforme, excepto en los bordes*



*Fuente: Wikipedia*

### 2.3. Fuerza Magnética

Fuerza magnética sobre una carga eléctrica en movimiento

Cuando una partícula cargada, con carga( $q$ ) se mueve con velocidad( $v$ ), a través de un campo magnético uniforme( $\vec{B}$ ), se ejerce una fuerza( $\vec{F}$ ) sobre dicha carga y estará dado por el producto cruz: (Hayt, 2006)

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.7)$$

### Fuerza de Lorentz generalizada

Es la fuerza ejercida por el campo electromagnético (campo eléctrico y magnético) sobre una partícula cargada móvil o una corriente eléctrica. La fuerza

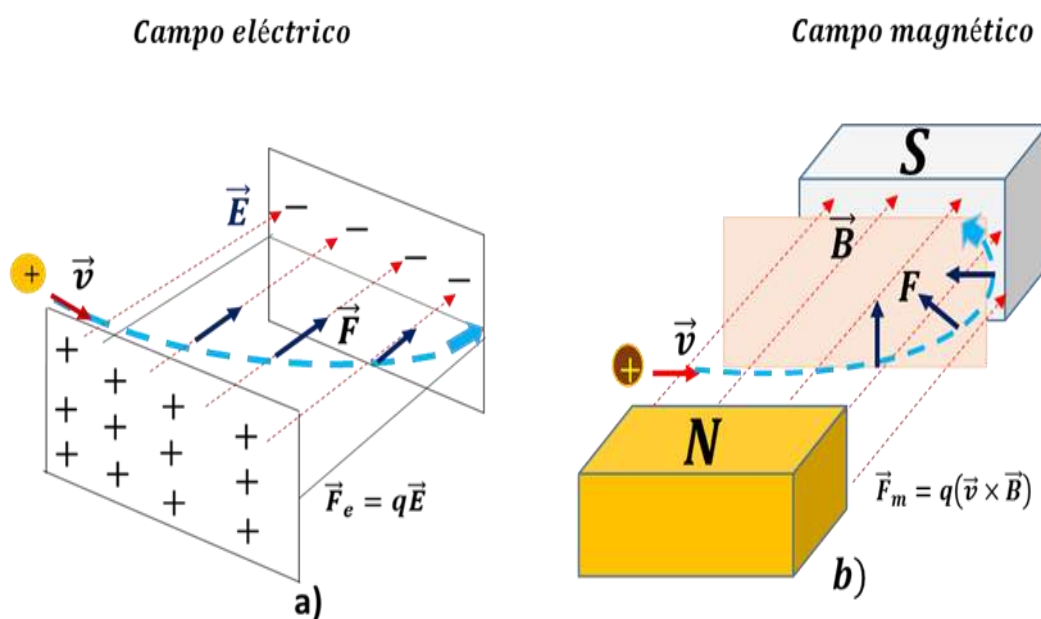
resultante  $F$  es igual a la suma vectorial de la fuerza eléctrica y magnética. (Hayt, 2006)

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) + q\vec{E} \quad (2.8)$$

Figura 5

a) Fuerza eléctrica sobre una carga que ingresa en un campo eléctrico.

b) Fuerza magnética sobre una carga que ingresa en un campo magnético



Fuente: Elaboración propia

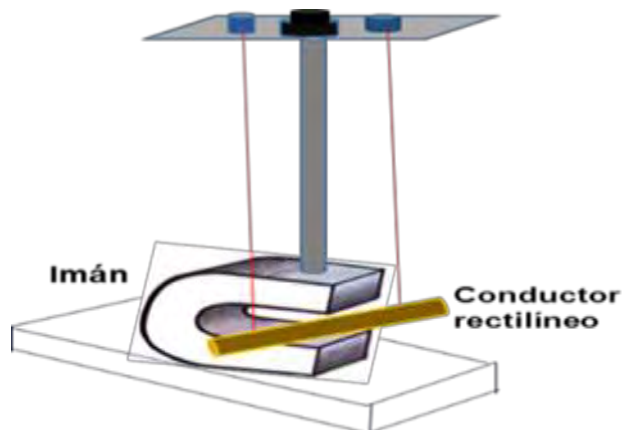
### Fuerza magnética sobre una corriente eléctrica rectilínea

Un conductor si se encuentra dentro de un campo magnético, cada una de las cargas que él conduce experimentan fuerzas cuya resultante será normal al plano que formen el conductor y el campo magnético: (Kovetz A. , 2000)

$$\vec{F} = i(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (2.9)$$

Figura 6

*Fuerza en un conductor por acción del campo magnético*



*Fuente:* Elaboración propia

En la figura 6, cuando por el conductor atraviesa una corriente eléctrica el columpio se desvía de su posición de reposo, demostrando que cuando fluye la electricidad por un conductor dentro de un campo magnético, se genera una fuerza.

## 2.4. Inducción Electromagnética

Cuando un circuito cerrado se encuentra en un campo magnético alterno, se crea una fuerza electromotriz de inducción ( $\mathcal{E}$ ) en dicho circuito surge una corriente eléctrica, denominada corriente de inducción. (Sadiku, 2003)

### Flujo Magnético

Es una magnitud escalar que indica el número de líneas de fuerza de campo magnético que atraviesa una superficie (A). En el sistema internacional su unidad es el Weber ( $Wb = T \cdot m^2$ ).

$$\phi = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \quad (2.10)$$

Donde:

$\theta$  : Es el ángulo que forma la dirección del campo y la normal a la superficie.

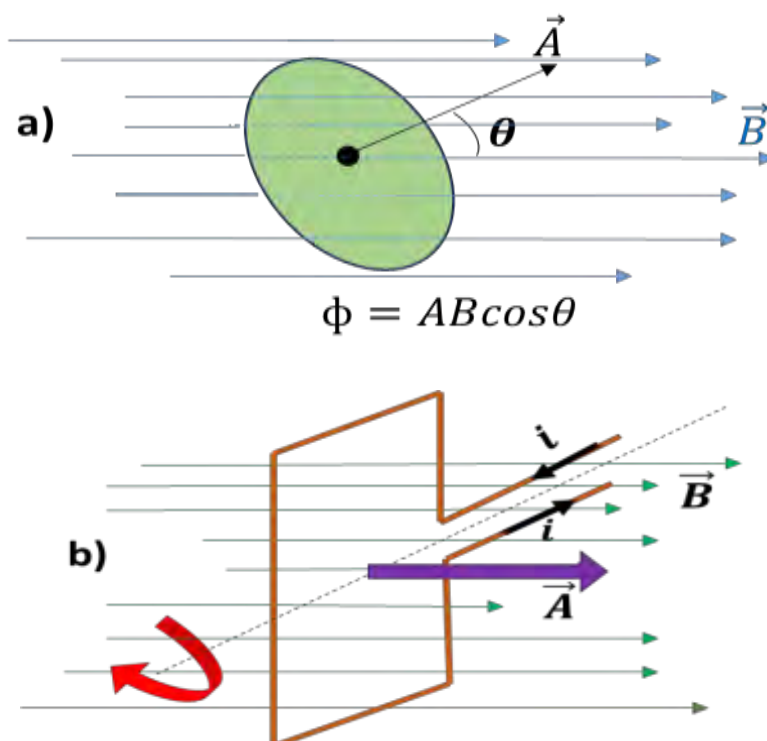
$\vec{A}$ : Es el vector normal a la superficie.

$\vec{B}$ : La inducción magnética.

Figura 7

a) Las líneas de inducción magnética  $\vec{B}$  forma un ángulo  $\theta$  con el vector normal a la superficie  $\vec{A}$ .

b) Las líneas de inducción magnética  $\vec{B}$  son paralelas al vector normal a la superficie  $\vec{A}$ .



Fuente: Elaboración propia

Podemos generalizar para un diferencial superficie irregular atravesada por un campo magnético heterogéneo por la expresión.

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.11)$$

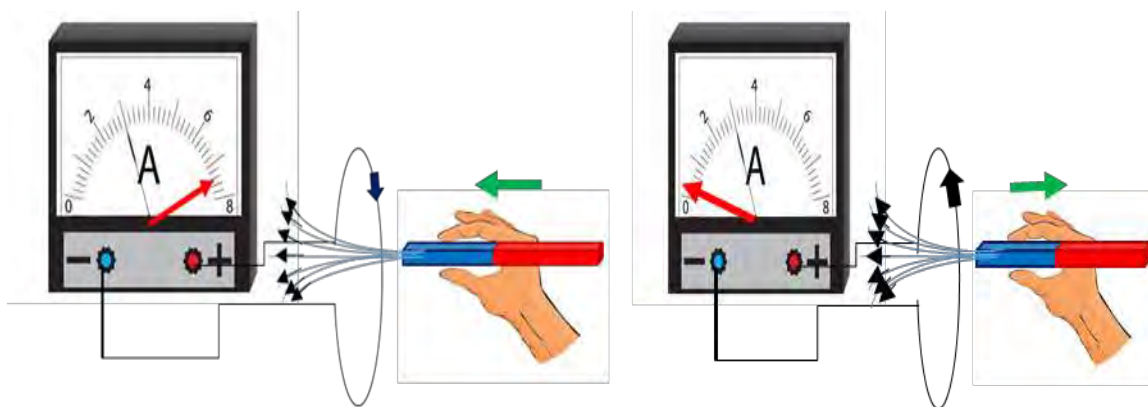
### Ley de Faraday

La f.e.m. de inducción electromagnética  $\varepsilon$  de un circuito cerrado es igual numéricamente, pero de signo contrario, al cambio de flujo en el tiempo a través del área del circuito cerrado. (Zahn M. , 1991)

$$\varepsilon = -N \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (2.12)$$

Figura 8

*Mediante el movimiento de los imanes se induce corriente eléctrica en el circuito*



*Fuente:* Elaboración propia



## 2.5. Ley de Biot-Savart

Es la expresión general para determinar el campo magnético o inducción magnética  $\vec{B}$  en un punto cualquiera producido por una corriente cerrada de cualquier forma. La inducción se mide en Teslas (T). (Jackson, 1980)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2.13)$$

Donde:

$\mu_0$ : permeabilidad magnética del vacío ( $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ).

$i$ : corriente eléctrica.

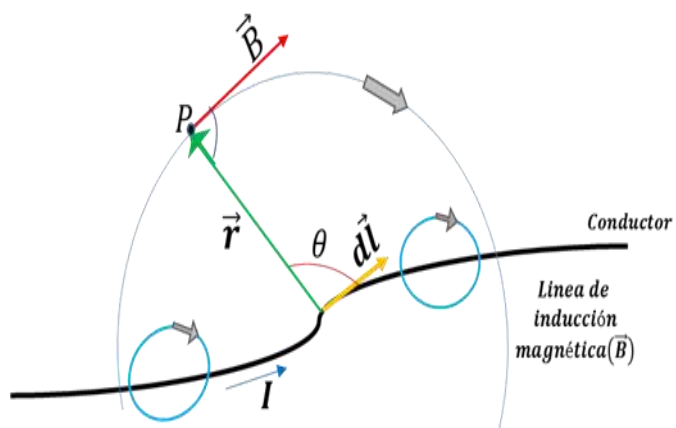
$\vec{r}$ : es el radio vector trazado desde el elemento del conductor  $d\vec{l}$  hasta el punto "P" donde se desea calcular el campo magnético.

$d\vec{l}$ : es el vector de la longitud elemental del conductor que es tangente al conductor.

$r$ : es el modulo del radio vector  $\vec{r}$ .

Figura 9

*Cualquier corriente eléctrica sobre un conductor rectilíneo genera un campo magnético alrededor de este*



*Fuente:* Elaboración propia

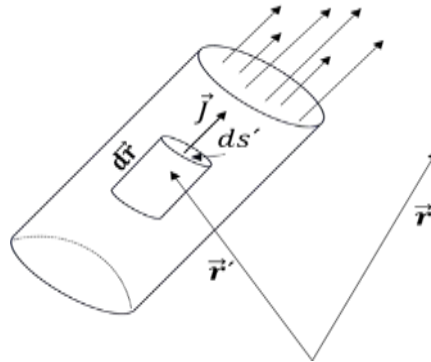
### Distribución espacial de corriente

Para el caso de una corriente distribuida espacialmente en un tubo de volumen ( $V$ ) La ecuación (2.13) debe ser adaptada. Sea  $J = J(\vec{r}')$  la densidad de corriente, la corriente que fluye a través de la sección ( $ds$ ) del elemento de volumen  $dV' = drds$ , es  $dI = Jds$ , tal como se muestra en la figura:(2.)luego.

$$dI dr = J ds d\vec{r} = \vec{J} ds dr = \vec{J} dV'$$

Figura 10

*Distribucion espacial de la corriente en un tubo*



*Fuente:* Elaboración propia

Luego la expresión se convierte para este caso en la siguiente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R} dV'}{R^3} \quad (2.14)$$

### **Distribución superficial de corriente**

Cuando se trata de corrientes que fluyen en una superficie (por ejemplo en las superficies conductoras), se define la densidad superficial de corriente como se muestra gráficamente en la figura:2.11. entonces la densidad de corriente es

$\vec{J}_s = \vec{J}_s(\vec{r}')$  medido en  $A/m$ . Para este caso la expresión (2.11) se modifica en la forma siguiente la corriente que fluye en el diferencial de superficie  $ds'$  es

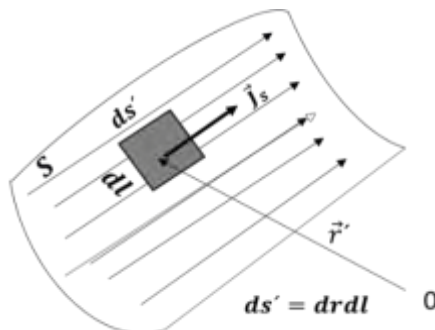
$$dI = J_s dl$$

Luego

$$dI dr' = J_s dl dr' = \vec{J}_s ds'$$

Figura 11

*Corrientes que fluyen en una superficie*



*Fuente:* Elaboración propia

Por lo tanto la expresión queda escrita en la forma:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R} ds'}{R^3} \quad (2.15)$$

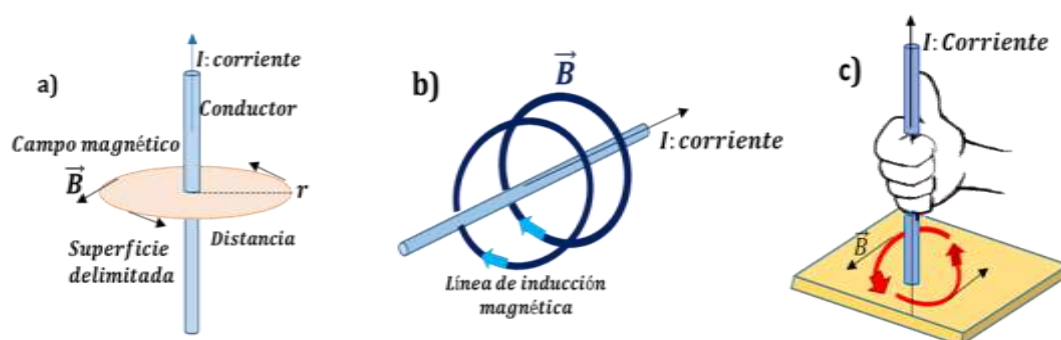
### **Campo magnético de una corriente eléctrica rectilínea**

A partir de la ley de Biot y Savart se demuestra que toda corriente que transporta un conductor “infinitamente largo” genera un campo magnético cuya intensidad es directamente proporcional con la corriente ( $i$ ), pero inversamente proporcional a la distancia ( $d$ ) al conductor. Utilizando la ley de Biot y Savart se determina que el campo magnético para un conductor “infinitamente largo”, (Reitz & Milford, 1969) es:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \quad (2.16)$$

Figura 12

- a) El vector de inducción magnética es tangente a la línea de inducción
- b) Las líneas de inducción magnética forman círculos concéntricos en torno al conductor
- c) El sentido circular de las líneas de inducción magnética se determina por la regla de la mano derecha el pulgar indica el sentido de la corriente y los demás dedos el sentido del campo magnético



Fuente: Elaboración propia

## 2.6. Leyes de Maxwell

En la teoría unificada del electromagnetismo, James C. Maxwell demostró que las ondas electromagnéticas son una consecuencia natural de las leyes fundamentales expresadas en las siguientes cuatro ecuaciones:

- a) Primera ecuación de Maxwell: El campo magnético ( $\vec{B}$ ) variable en el tiempo crea en cualquier punto del espacio un campo eléctrico rotacional.

Forma diferencial	Forma integral
$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_s \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$

- b)** Segunda ecuación de Maxwell: Afirma que el campo magnético lo crean las cargas eléctricas en movimiento ordenado, es decir corrientes de conducción y de convección. El campo eléctrico ( $\vec{E}$ ) variable en el tiempo, cuya acción magnética viene caracterizada por la corriente de desplazamiento, es también origen del campo magnético rotacional.

Forma diferencial	Forma integral
$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left( \mu_o I + \mu_o \epsilon_o \int_s \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \right)$

- c)** Tercera ecuación de Maxwell: Conocida como la ley de Gauss, se aplica para evaluar el campo eléctrico, si la distribución de carga es suficientemente simétrica

Forma diferencial	Forma integral
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$	$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_o}$

- d)** Cuarta ecuación de Maxwell: Expresa que no existe cargas magnéticas libres.

Forma diferencial	Forma integral
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

## 2.7. Potenciales Magnéticos

Los potenciales magnéticos son magnitudes que se utilizan en la descripción del campo magnético. Los potenciales magnéticos son el potencial escalar magnético y el potencial vector magnético.

Un campo magnetostático puede ser descrito no solo por los vectores  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  sino también por los dos potenciales magnéticos. Además, en una región libre de corriente, un campo magnetostático también puede describirse por una cantidad escalar denominada potencial escalar magnético  $\varphi$ . (Jefimenko, 1989)

Las cuatro magnitudes están íntimamente relacionadas entre sí y pueden derivarse unas de otras. Sin embargo, los potenciales magnéticos  $\vec{A}$  y  $\varphi$  son frecuentemente más prácticos en determinar la intensidad del campo magnético es decir los vectores  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$ . Por lo tanto, con frecuencia es más conveniente usar uno de estos potenciales magnéticos en lugar de un vector de campo magnético para describir el comportamiento de un campo magnetostático. (Jefimenko, 1989)

### Potencial vector magnético

También conocido como el vector potencial, es una cantidad vectorial utilizada en la descripción del campo magnético. Se define como la integral de línea del campo magnético sobre una curva cerrada.

El carácter rotacional y divergente del campo magnético, expresado con el formalismo matemático  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  y  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  respectivamente conocidas como ecuaciones de Maxwell. Ponen en evidencia las diferencias esenciales que existen con el campo electrostático, no obstante las analogías formales y metodológicas entre los mismos. (Kuong Jo, 1985)

Una de las consecuencias de la 2<sup>da</sup> ecuación de Maxwell.  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , es que no es posible definir con toda generalidad un potencial escalar magnético, pero la ecuación

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$  permite definir un potencial vectorial  $\vec{A}(\vec{r})$  tal que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , puesto que siempre se cumple

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0.$$

Podemos determinar el potencial vectorial  $\vec{A}$ , partiendo de la ecuación de Biot y Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV'$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Se puede escribir.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \vec{J} dV'$$

Empleando la identidad vectorial tenemos

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{J}}{r} \right) = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \vec{J} - \frac{\nabla \times \vec{J}}{r} = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \vec{J}$$

Que substituyendo resulta

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left( \frac{\vec{J}}{r} \right) dV'$$



Como la integral está definida para variables primadas, el operador nabla puede salir del signo integral.

$$\vec{B} = \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} dV' \right) = \nabla \times \vec{A}$$

En la que  $\vec{A}$  es el potencial vectorial definido por la integral

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} dV' \quad (2.17)$$

Partiendo de las expresiones

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{F}_m = I \oint d\vec{r} \times \vec{B}$$

Para distribuciones unifilares y superficiales de corrientes siguiendo un procedimiento similar, como el anterior se tiene las expresiones correspondientes.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{r} d\vec{l}'$$

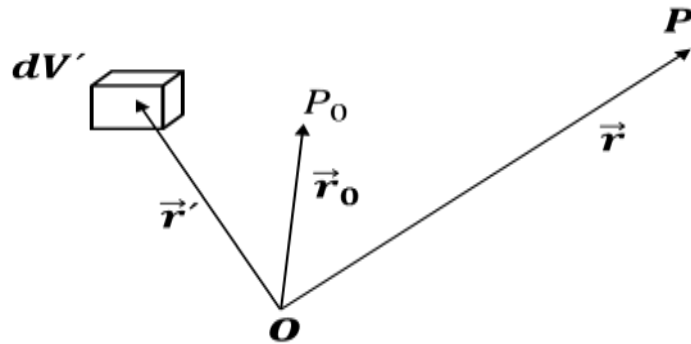
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} ds'$$

Téngase presente que no se ha establecido ninguna restricción para definir el potencial vectorial, y la semejanza con las expresiones correspondientes al potencial electrostático.

Cuando la distribuciones de corriente que genera el campo se extiende hasta el infinito, el potencial vectorial resulta infinito (lo mismo sucede con el potencial electrostático cuando la distribución de carga se extiende hasta el infinito), en este caso debemos calcular el potencial vectorial referido a un punto conveniente elegido.

Figura 13

*El potencial vectorial magnético  $P$  referido al punto  $P_0$*



*Fuente:* Elaboración propia

Sea  $P$  el punto cuyo potencial se quiere calcular, y  $P_0$  el punto de referencia elegido,  $\vec{r}$  el vector posición de  $P$ ,  $\vec{r}_0$  de  $P_0$  y  $\vec{r}'$  de un  $dV'$ , luego el potencial vectorial  $P$  de referido al punto  $P_0$  esta dado por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{R_0} dV'$$

Donde  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$  y  $R_0 = |\vec{r}_0 - \vec{r}'|$ , finalmente tenemos

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}$$

## Potencial escalar magnético

El potencial escalar magnético es una función escalar, es decir, que solo tiene una magnitud numérica en cada punto del espacio, y no tiene dirección. Esta función matemática está relacionada con la densidad de corriente magnética y con la permeabilidad del material en el que se encuentra el campo magnético.

El potencial escalar magnético se utiliza en la formulación de las leyes de la física que rigen el comportamiento del campo magnético, como las ecuaciones de Maxwell. A partir de la descripción del potencial escalar magnético, se pueden calcular las propiedades del campo magnético en un punto dado del espacio, como la intensidad del campo magnético y la dirección del flujo magnético.

El rotacional de un gradiente es siempre cero. El rotacional del campo magnetostático  $\vec{H}$  de una corriente ( $\vec{J} = 0$ ) en el espacio libre también es siempre cero.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

Por lo tanto, debería ser posible expresar el campo magnetostático en un espacio libre de corriente mediante la ecuación.

$$\vec{H} = -\nabla\varphi \quad (2.18)$$

Siempre que la ecuación sea compatible con la cuarta ecuación de Maxwell y la ley que relaciona la inducción magnética  $\vec{B}$  con la intensidad magnética  $\vec{H}$ , dadas por:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Podemos también escribir.

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \varphi$$

Utilizando la cuarta ecuación de maxwell tenemos

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 = \nabla \cdot \mu_0 \vec{H} = -\mu_0 \nabla \cdot \nabla \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.19)$$

Por lo tanto, la ecuación.  $\vec{H} = -\nabla \varphi$  es compatible con la cuarta ecuación de Maxwell. Si el potencial escalar magnético  $\varphi$  satisface la ecuación de Laplace.

Siempre es posible expresar la intensidad magnética  $\vec{H}$  en un espacio libre. Donde  $\varphi$  es una función armónica. A esta función se le denomina potencial escalar magnético.

En el caso particular de un campo magnetostático producido por un filamento de corriente en puntos fuera de la corriente,  $\varphi$  se puede expresar directamente en términos de la corriente, utilizando la definición de potencial vectorial magnético.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}'}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{s}' \times \nabla' \frac{1}{r}$$

De donde usamos el operador  $\nabla'$  hay una ambigüedad en la transformación

$$\vec{H} = \frac{I}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \frac{I^2}{4\pi} \nabla \times \int d\vec{s}' \times \nabla' \frac{1}{r}$$

Dado que la última integral debe evaluarse con respecto a la coordenada prima únicamente, y dado que el operador nabla  $\nabla$  sin prima no opera sobre estas coordenadas, nabla  $\nabla$  puede colocarse bajo el signo integral entonces tenemos:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \nabla \times \left( d\vec{s}' \times \nabla' \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{Pero: } \nabla' \left( \frac{1}{r} \right) = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right)$$

podemos escribir.

$$\vec{H} = -\frac{I}{4\pi} \int \nabla \times \left( d\vec{s}' \times \nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{I}{4\pi} \int \nabla \times \left( \nabla \frac{1}{r} \times d\vec{s}' \right)$$

Usando identidad vectorial tenemos:

$$\nabla \times \left( \nabla \frac{1}{r} \times d\vec{s}' \right) = (d\vec{s}' \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} + \nabla \frac{1}{r} (\nabla \cdot d\vec{s}') - \left( \nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla \right) d\vec{s}' - d\vec{s}' \left( \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} \right)$$

$$\nabla \times \left( \nabla \frac{1}{r} \times d\vec{s}' \right) = (d\vec{s}' \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} - d\vec{s}' \left( \nabla^2 \frac{1}{r} \right)$$

Donde el Laplaciano es  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0$

$$\nabla \times \left( \nabla \frac{1}{r} \times d\vec{s}' \right) = (d\vec{s}' \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r}$$

La integral se transforma

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int (d\vec{s}' \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r}$$

$$\nabla \left( \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s}' \right) = \left( \nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla \right) d\vec{s}' + \nabla \frac{1}{r} (\nabla \times d\vec{s}') + (d\vec{s}' \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} + d\vec{s}' \times \left( \nabla \times \nabla \frac{1}{r} \right)$$

Dado que  $\nabla \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = 0$

$$\nabla \left( \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s}' \right) = (d\vec{s}' \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r}$$

Reemplazamos esta expresión en la ecuación  $\vec{H}$  tenemos

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \nabla \left( \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s}' \right)$$

Factorizando  $\nabla$  del signo de la integral. Finalmente obtenemos

$$\vec{H} = \nabla \left( \frac{I}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s}' \right)$$

Comparando esta ecuación con

$$\vec{H} = -\nabla \varphi$$

Tendremos que la expresión entre paréntesis es el potencial escalar magnético.

$$\varphi = -\frac{I}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s}' \quad (2.20)$$

La expresión

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Tendremos

$$\varphi = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s}'$$

La expresión de la integral corresponde a la definición del ángulo sólido como podemos ver en el apéndice B.

$$\Omega = \int \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s}'$$

Donde  $\Omega$  el ángulo sólido, entonces el potencial escalar magnético en términos del ángulo sólido es:

$$\varphi = \frac{I}{4\pi} \Omega \quad (2.21)$$

El ángulo sólido  $\Omega$  se considera positivo si la dirección de la corriente en el filamento vista desde el punto de observación es en sentido antihorario.

## 2.8. Metodo de Expasion Axial

El método de expansión axial se usa para determinar el potencial electrostático externo de distribuciones de carga axialmente simétricas para puntos que no están en el eje de simetría cuando se conoce el potencial en el eje. También es utilizado para determinar la inducción magnética o la intensidad magnética conociendo el potencial magnético. (Jefimenko, 1989)

Si una distribución de carga no tiene variación de densidad de carga alrededor de un eje de simetría, el potencial externo de la distribución puede ser representado por armónicos esféricos

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) [C_n P_n(\cos\theta) + D_n Q_n(\cos\theta) + C']$$

Donde  $C_n = 1$ ;  $D_n = 0$  y  $C' = 0$

Los polinomios de Legendre de segunda especie  $Q_n(\cos\theta)$  son infinitos para  $\cos\theta = \pm 1$  y por lo tanto, no están permitidos, cuando la región considerada incluye el eje de simetría.

Tendremos:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

Donde  $\theta$  se mide con respecto al eje de simetría. Ya que en el eje el valor de

$\theta = 0$  de manera que  $P_n = 1$  para todo  $n$  el potencial se reduce en el eje en la siguiente expresion.

$$\varphi_{axis} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n z^n + \frac{B_n}{z^{n+1}} \right)$$

Donde  $z$  es la distancia desde el origen a lo largo del eje. Supongamos ahora que el potencial en el eje es conocido y se expresa como una serie de potencia en  $z$  ("expansión axial")

$$\varphi_{axis(ahora)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n z^n + \frac{b_n}{z^{n+1}} \right)$$

Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de esta serie deben entonces ser iguales a los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  y por lo tanto a los de la ecuacion.

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \quad (2.22)$$



Por lo tanto,  $a_n$  y  $b_n$  pueden ser sustituidos en esta última ecuación y así, a partir del potencial en el eje, se puede obtener el potencial externo de la distribución de carga para otros puntos del espacio.

## 2.9. Inducción magnética ( $\vec{B}$ ) debido a una corriente en un solenoide

Un solenoide o bobina es un alambre enrollado en forma de una hélice con espiras muy próximas entre sí. El solenoide se usa para producir campo magnético intenso y uniforme en la región rodeada por sus espiras.

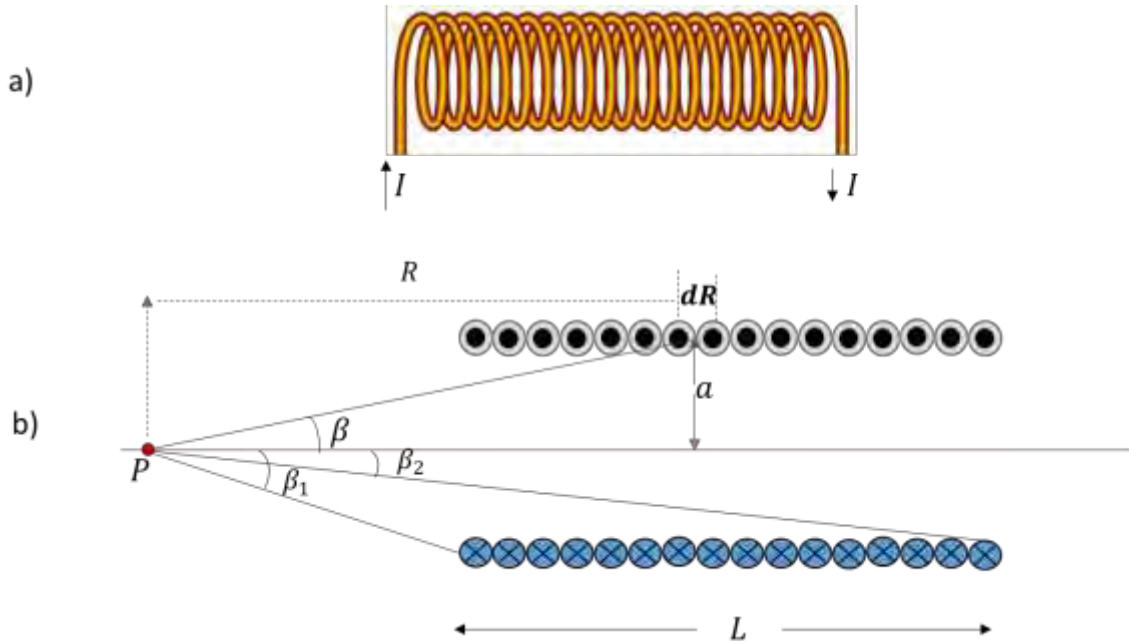
Las líneas de campo magnético que generará un solenoide de una serie de  $N$  espiras idénticas son aproximadamente paralelas al eje de simetría de la bobina, están espaciadas uniformemente indicando la existencia de un campo magnético uniforme e intenso.

Fuera del solenoide las líneas de campo son mucho menos densas. Divergen de un extremo y convergen en el otro. Comparando estas características de campo de un solenoide vemos que las líneas de campo de un solenoide, tanto en el interior como en el exterior, coinciden con las de una barra imantada.

Consideremos un solenoide de radio  $a$ , de longitud  $L$ , formado por  $N$  vueltas (espiras) del cable conductor y que transporta una corriente de intensidad  $I$ . También elegimos como eje del solenoide a la recta simétrica que contiene al punto P, como muestra la figura 14 parte b).

**Figura 14**

**a) Solenoide atravesado por una corriente  $I$  b) Corte longitudinal del solenoide**



*Fuente:* Elaboración propia

Tomando como muestra un corte longitudinal del solenoide. Como  $L$  es la longitud y  $N$  el número de espiras, el número de espiras por unidad de longitud es  $N/L$  y el número de espiras en una sección de longitud  $dR$ , es  $\left(\frac{N}{L}\right) dR$ . Entonces el campo o la inducción magnética debido a las espiras contenidas en la sección  $dR$ , en el punto  $P$  sobre el eje de simetría del solenoide es:

$$dB_p = \left[ \frac{\mu_0 a^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}} \right] \frac{N}{L} dR = \frac{\mu_0 IN}{2L} \frac{a^2 dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \quad (2.23)$$

De la figura 14 parte b) se tiene que  $\tan\beta = \frac{a}{R}$ ,  $R = a \cot\beta$ , entonces  $dR = -a \csc^2\beta d\beta$ , y  $\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , de aquí  $a^2 + b^2 = a^2 \csc^2\beta$ . Reemplazando en la ecuación (2.23), se tiene.

$$dB_p = \frac{\mu_0 IN}{2L} \frac{a^2(-a) \csc^2 \beta d\beta}{(a^2 \csc^2 \beta)^{3/2}} = \frac{\mu_0 IN}{2L} \frac{(-1)}{\csc \beta} d\beta = \frac{\mu_0 IN}{2L} (-\sen \beta) d\beta$$

$$B_p = \frac{\mu_0 IN}{2L} \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\sen \beta d\beta = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos \beta)_{\beta_1}^{\beta_2}$$

$$B_p = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (2.24)$$

Si el solenoide es muy largo con respecto al radio, tenemos para puntos cerca del centro que  $\beta_1 \approx \pi$  y  $\beta_2 \approx 0$ , de donde:

$$B_p = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 IN}{L}$$

Para un punto en uno de sus extremos,  $\beta_1 \approx \pi/2$  y  $\beta_2 \approx 0$  ó  $\beta_1 \approx \pi$  y  $\beta_2 \approx \pi/2$ . En cualquiera de los dos casos

$$B_p = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos 0 - \cos \pi/2) = \frac{\mu_0 IN}{2L}$$

Ó

$$B_p = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos \pi/2 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 IN}{2L}$$

Lo cual dice que el campo o la inducción magnética en los extremos del solenoide, es la mitad del valor que posee en el centro del solenoide.

## 2.10. Bobina de Helmholtz

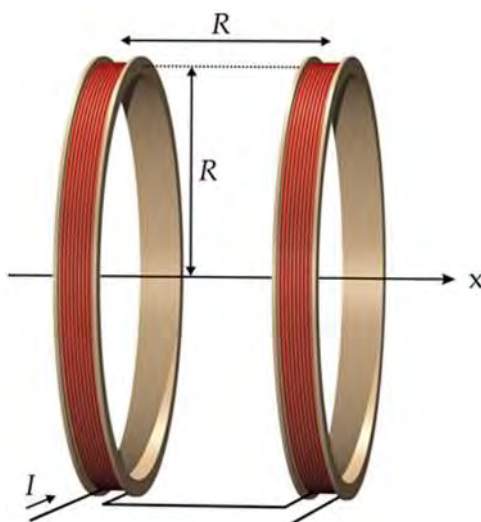
Es un dispositivo para generar campo magnético uniforme en una pequeña región, muy utilizada en los laboratorios de experimentación. Fue nombrada así en

honor al físico alemán Hermann von Helmholtz. Consiste de dos electroimanes con el mismo eje. (Olivera, 2003)

Las bobinas de Helmholtz consisten en dos bobinas circulares planas, cada una de las bobinas tienen  $N$  espiras y con la misma corriente fluyendo en el mismo sentido como se puede observar en la figura 15. La separación entre estas bobinas es igual al radio  $R$  común entre ambas. (Murano, 2006)

Figura 15.

*Bobina de Helmholtz de eje común de simetría y separados una distancia  $R$  igual al radio  $R$  de las bobinas*



*Fuente:* Whikipedia

Los científicos utilizan bobinas de Helmholtz para generar campos magnéticos uniformes para estudiar el electromagnetismo y sus características. Estos dispositivos se utilizan en IRM, espectroscopia, mediciones de magnetorresistencia y calibraciones de equipos. Además de crear campos magnéticos, las bobinas de Helmholtz se utilizan también en dispositivos científicos para cancelar campos magnéticos externos, tales como el campo magnético terrestre. (Rudd, 1983)

Para el estudio de las interacciones en un campo magnético, es necesario producir campos magnéticos uniformes en un volumen adecuado para cada estudio.

Las bobinas de Helmholtz es una solución para los estudios donde es necesario colocar dispositivos que van interactuar con el campo magnético y poder visualizar el resultado de las interacciones.

Las características de las bobinas de Helmholtz son: El espacio mayor donde el campo magnético es uniforme, es cuando la distancia de las bobinas es igual al radio de ella. (Frederic, 1964)

Una bobina de Helmholtz consiste en dos bobinas magnéticas circulares idénticas, que se ubican de manera simétrica a lo largo de un eje común, una a cada lado de un área experimental, y separadas por una distancia  $h$  igual al  $R$  radio de la bobina. Cada bobina transporta una cantidad igual de corriente eléctrica en la misma dirección. (Cacak, 1969).

Si las separaciones entre las bobinas es igual al radio de la bobina, la magnitud del campo magnético es independiente de la posición a lo largo de su eje común (excepto en los puntos cerca de las bobinas) (1) bobinas que cumplan esta condición, bobinas de Helmholtz, se utilizan con frecuencia para la exposición de los sistemas biológicos tales como células de seres humanos, bajo el supuesto de que el campo en la región ocupada por el sistema biológico es realmente uniforme. (Bell, 1989).

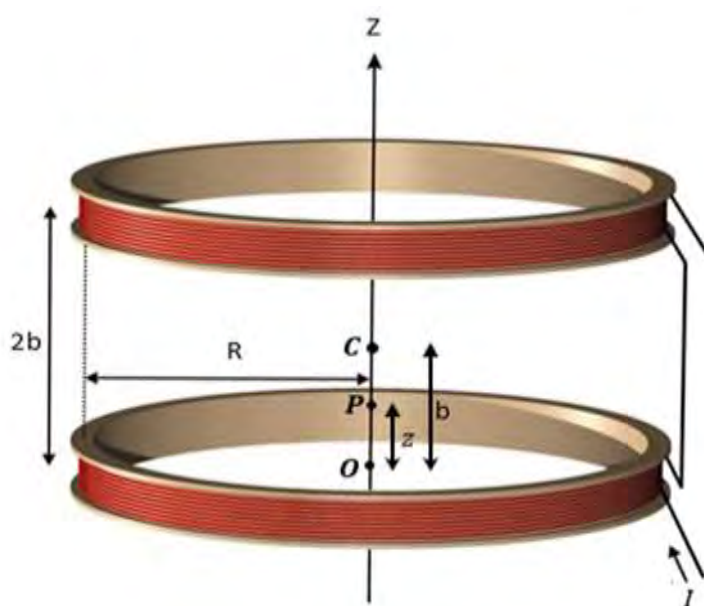
**Método por coordenadas cartesianas para determinar la inducción magnética en cualquier punto del eje de la bobina de Helmholtz.**

Tomando en cuenta que el eje de simetría de la bobina de Helmholtz de radio " $R$ ", coincide con el eje " $z$ " de las coordenadas cartesianas, la distancia de

separación entre las bobinas es igual a una longitud de " $2b$ ", " $c$ " el punto medio entre las bobinas sobre el eje " $z$ " de longitud " $b$ " y sea " $P$ " un punto sobre el eje " $z$ " a una distancia " $z$ " del origen de coordenadas que coincide geoméricamente con un aro de la bobina de Helmholtz. Como indica la figura mostrada.

**Figura 16.**

*Bobina de Helmholtz de radio  $R$ , centro  $C$  de longitud  $b$  y un punto  $P$  en el eje de simetría a una distancia  $z$  del origen de coordenadas  $O$*



*Fuente:* Wiquipedia

Teniendo presente que  $\vec{B}$  producido por una espira(vuelta) de radio " $R$ ", a una distancia " $z$ " de su eje vertical está dado por la siguiente formula.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad (2.26)$$

Por lo tanto para los dos aros de la figura anterior de igual número de vueltas " $N$ ", de igual intensidad de corriente eléctrica " $I$ " y en el mismo sentido de las corrientes, se puede escribir que  $\vec{B}$ , en el punto " $p$ " del eje " $z$ " es:

$$B_p = \frac{\mu_0 I N R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I N R^2}{2[R^2 + (2b - z)^2]^{3/2}}$$

Entonces sacando los terminos constantes se tiene.

$$B_p = \frac{\mu_0 I N R^2}{2} \left[ \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (2b - z)^2]^{3/2}} \right]$$

a) Derivando por primera vez esta ecuación se tiene:

$$\frac{dB_p}{dz} = \frac{\mu_0 I N R^2}{2} \left[ -\frac{3}{2} \frac{2z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3}{2} \frac{2(2b - z)(-1)}{[R^2 + (2b - z)^2]^{5/2}} \right]$$

$$\frac{dB_p}{dz} = -\frac{3}{2} \mu_0 I N R^2 \left[ \frac{z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{(2b - z)}{[R^2 + (2b - z)^2]^{5/2}} \right]$$

Se nota que para para  $z = b$ , resulta que:  $\frac{dB_p}{dz} = 0$

Derivando nuevamente  $\frac{dB_p}{dz}$ , es decir  $\frac{d^2 B_p}{dz^2}$  resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B_p}{dz^2} = -\left(\frac{3\mu_0 N I R^2}{2}\right) & \left\{ \frac{1}{(z^2 + R^2)^{5/2}} - \frac{5z^2}{(z^2 + R^2)^{7/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + R^2]^{5/2}} \right. \\ & \left. - \frac{5(2b - z)^2}{[(2b - z)^2 + R^2]^{7/2}} \right\} \end{aligned}$$

De la misma manera reemplazando en  $\frac{d^2 B_p}{dz^2}$  con  $z = b$ , resulta:

$$\frac{d^2 B_p}{dz^2} = -\frac{3}{2} \mu_0 I N R^2 \left[ \frac{2}{(R^2 + b^2)^{5/2}} - \frac{10b^2}{[R^2 + (b)^2]^{7/2}} \right]$$

$$\frac{d^2 B_p}{dz^2} = -\frac{3}{2} \mu_0 I N R^2 \left[ \frac{2(R^2 + b^2)}{(R^2 + b^2)^{7/2}} - \frac{10b^2}{[R^2 + (b)^2]^{7/2}} \right]$$

Haciendo  $\frac{d^2 B_p}{dz^2} = 0$ , se obtiene:

$$[2(R^2 + b^2) - 10b^2] = 0$$

De lo cual se implica que para:  $z = b = R/2$ ,  $\frac{d^2 B_p}{dz^2} = 0$

Entonces para una bobina de Helmholtz sustituyendo resulta que  $\vec{B}_p$  es:

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 IN R^2}{2} \left[ \frac{2}{(R^2 + R^2/4)^{3/2}} \right]$$

Y haciendo las respectivas simplificaciones resulta:

$$|\vec{B}_p| = \frac{\mu_0 IN}{R} \frac{8}{5^{3/2}} \text{ weber/m}^2$$

Nota:

- $|\vec{B}_p|$ , es el módulo de la inducción magnética en el punto "c" . Punto medio del eje de las bobinas de Helmholtz.
- $1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \frac{\text{weber}}{\text{m}^2} = 10^{-4} \text{ T}$

Como las espiras de una bobina están apretadas, entonces la contribución al campo de cada una de estas será la misma. Además como el sentido de circulación de la corriente en las bobinas es igual, los campos de estas se suman. El campo total en el punto "P" será. (Milford, 2001)y (Kovetz A. , 2000)

$$B(Z) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + R^2]^{3/2}} \right\} \quad (2.27)$$

A lo largo del eje "z".

En (2.26) se tiene la ecuación del campo para una sola espira sobre su eje.

b) Derivando la ecuación (2.27), cuatro veces. Se obtiene:

$$\frac{dB}{dz} = - \left( \frac{3\mu_0 N I R^2}{2} \right) \left\{ \frac{z}{(z^2 + R^2)^{5/2}} - \frac{(2b - z)}{[(2b - z)^2 + R^2]^{5/2}} \right\} \quad (2.28)$$



$$\frac{d^2 B}{dz^2} = -\left(\frac{3\mu_0 NiR^2}{2}\right) \left\{ \frac{1}{(z^2 + R^2)^{5/2}} - \frac{5z^2}{(z^2 + R^2)^{7/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + R^2]^{5/2}} - \frac{5(2b - z)^2}{[(2b - z)^2 + R^2]^{7/2}} \right\} \quad (2.29)$$

$$\frac{d^3 B}{dz^3} = \left(\frac{15\mu_0 NiR^2}{2}\right) \left\{ \frac{3z}{(z^2 + R^2)^{7/2}} - \frac{7z^3}{(z^2 + R^2)^{9/2}} - \frac{3(2b - z)}{[(2b - z)^2 + R^2]^{7/2}} + \frac{7(2b - z)^3}{[(2b - z)^2 + R^2]^{9/2}} \right\} \quad (2.30)$$

$$\frac{d^4 B}{dz^4} = \left(\frac{45\mu_0 NiR^2}{2}\right) \left\{ \frac{1}{(z^2 + R^2)^{7/2}} - \frac{14z^2}{(z^2 + R^2)^{9/2}} + \frac{21z^4}{(z^2 + R^2)^{11/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + R^2]^{7/2}} - \frac{14(2b - z)^2}{[(2b - z)^2 + R^2]^{9/2}} + \frac{21(2b - z)^4}{[(2b - z)^2 + R^2]^{11/2}} \right\} \quad (2.31)$$

(c) Observe que la primera y la tercera derivada se anulan en  $z = b$  (punto central entre las bobinas).

En cambio la segunda y la cuarta toman los valores:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = -(3\mu_0 NiR^2) \frac{(R^2 - 4b^2)}{(b^2 + R^2)^{7/2}} \quad (2.32)$$

$$\frac{d^4 B}{dz^4} = (45\mu_0 NiR^2) \left\{ \frac{1}{(b^2 + R^2)^{7/2}} - \frac{14b^2}{(b^2 + R^2)^{9/2}} + \frac{21b^4}{(b^2 + R^2)^{11/2}} \right\} \quad (2.33)$$

De (2.32) se ve que la condición para que se anule la segunda derivada en el punto central será.

$$R^2 - 4b^2 = 0 \quad (2.34)$$

$$2b = R \quad (2.34')$$

$$b = \frac{R}{2} \text{ (condición geométrica)}$$

Lo que muestra que la separación entre bobinas está relacionado con el radio de estas.

Reemplazando (2.34') en (2.27) y (2.33)

$$B(R/2) = \left(\frac{8}{5^{3/2}}\right) \left(\frac{\mu_0 Ni}{R}\right) \quad (2.35)$$

$$\frac{d^4 B}{dz^4} = -\left(\frac{216 \times 128}{125}\right) \left(\frac{\mu_0 Ni}{R^5 5^{3/2}}\right) \quad (2.36)$$

$$\frac{d^4 B}{dz^4} = -\left(\frac{3456}{125}\right) \left(\frac{B(R/2)}{R^4}\right) \quad (2.36')$$

(d) El sistema de bobinas sometidas a la condición (c) , tiene la característica, de que el campo magnético en puntos cercanos al centro entre ellas es esencialmente uniforme.

Para ver esto desarrollamos en la serie de Taylor el campo  $B(z)$  en las inmediaciones del punto central  $z = \frac{R}{2}$

$$\begin{aligned} B(z) = B(R/2) + (z - R/2) \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_{z=R/2} + \frac{1}{2!} (z - R/2)^2 \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right)_{z=R/2} \\ + \frac{1}{3!} (z - R/2)^3 \left(\frac{\partial^3 B}{\partial z^3}\right)_{z=R/2} + \frac{1}{4!} (z - R/2)^4 \left(\frac{\partial^4 B}{\partial z^4}\right)_{z=R/2} + \dots \end{aligned}$$

Que de acuerdo a los resultados anteriores se reduce a:

$$B(z) = B(R/2) + \frac{1}{24} (z - R/2)^4 \left( \frac{\partial^4 B}{\partial z^4} \right)_{z=R/2} + \dots$$

$$B(z) = B(R/2) \left\{ 1 + \frac{1}{24} \frac{(z - R/2)^4}{B(R/2)} \left( \frac{\partial^4 B}{\partial z^4} \right)_{z=R/2} \right\} + \dots$$

$$B(z) = B(R/2) \left\{ 1 - \frac{144}{125} \left( \frac{z - R/2}{R} \right)^4 \right\}$$

Se observa por ejemplo, que para la región en que  $|z - b| < \frac{b}{5}$  ó  $|z - R/2| < \frac{R}{10}$ ,  $B(z)$  se desvía de  $B(R/2)$  en menos de una parte y media en diez mil. Esta ecuación nos dice que la inducción magnética es prácticamente constante alrededor del centro del eje de simetría de la bobina. (Zahn M. , 1991)

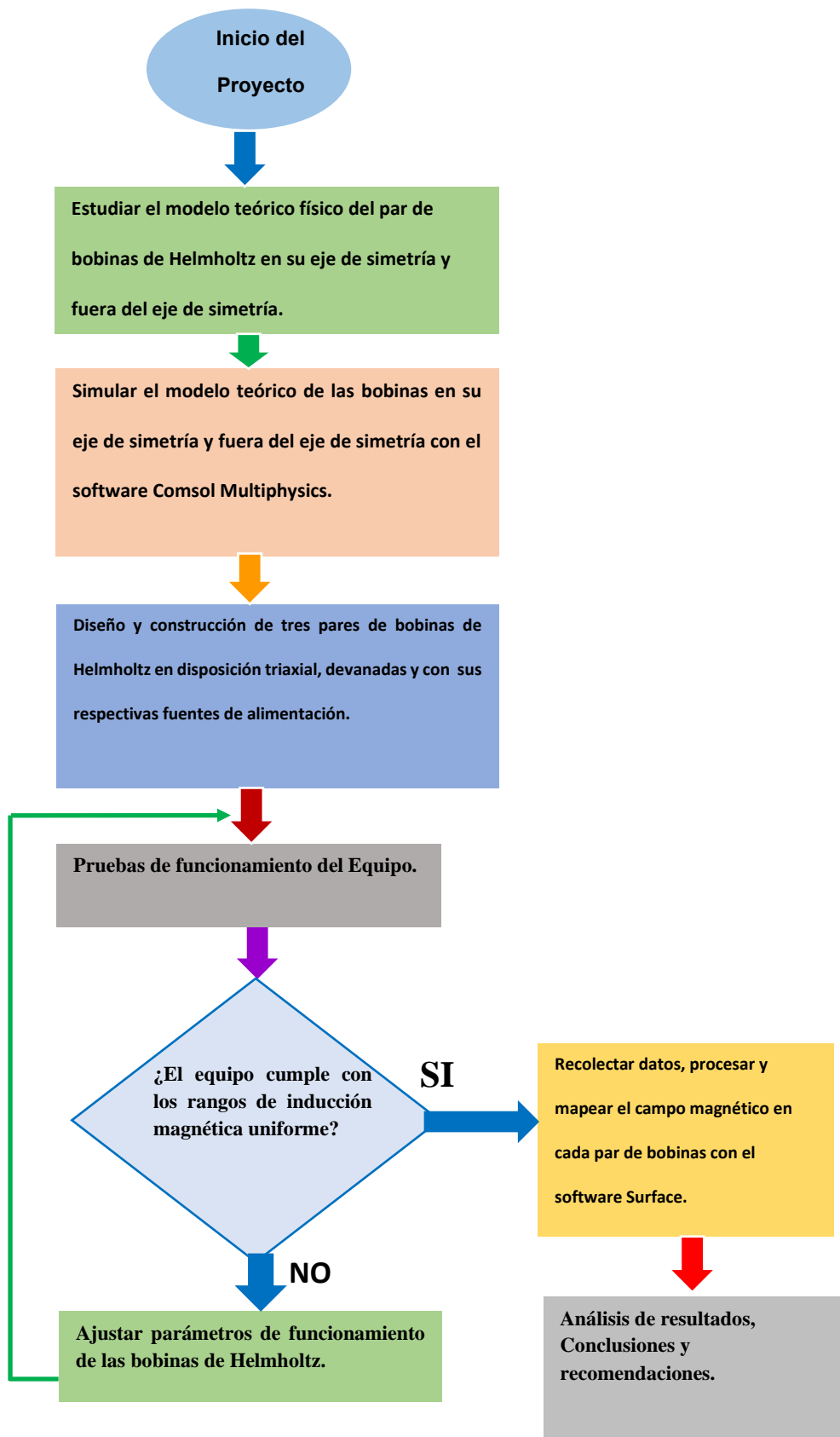
## CAPÍTULO III : MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

### 3. 1. Tipo y nivel de investigación

La experimentación fue del tipo teorico y experimental, ya que se desarrollo primero el modelo teorico fisico del comportamiento magnético de las bobinas de Helmholtz, segundo se registro la inducción magnetica con el sensor de efecto Hall en la zona experimental de las tres bobinas de Helmholtz y finalmente se dispuso de manera triaxial las tres bobinas de Helmholtz.

#### ***3.1.1. Procedimiento General***

El procedimiento para llevar a cabo nuestra investigación siguió los siguientes pasos primero estudiamos el modelo teórico físico del comportamiento magnético de las bobinas de Helmholtz en su eje y en la zona experimental siguiendo el método deductivo, segundo se realizó la simulación con el software Comsol para observar el comportamiento de la inducción magnética en el plano de experimentación de las bobinas de Helmholtz, mediante el método inductivo se observa el cambio del vector inducción magnética en la zona experimental, tercero se diseño y se construyo las tres bobinas de Helmholtz, cuarto se ejecuto las pruebas de funcionamiento del equipo, quinto recolectamos y procesamos los datos con el software Surface para obtener la topografía de la inducción magnética en la zona experimental. Finalmente realizamos el analisis y las respectivas conclusiones y recomendaciones. Estos procedimiento se detallan en este capitulo siguiendo las reglas teóricas del electromagnetismo, la simulación en un software confiable como es el Comsol, la experimentación siguiendo las reglas del método inductivo. Para alcanzar los objetivos propuestos y seguir con el normal curso de las actividades de tesis se desarrolló un diagrama de flujo que se muestra.

**Figura 17****Diagrama de flujo**

### 3.2. Diseño de Investigación

#### Primero determinar la intensidad magnetica ( $\vec{H}$ ) en una bobina de Helmholtz

Con el potencial escalar magnético ( $\varphi$ ) determinamos la intensidad magnetica  $\vec{H}$  producido en el eje de simetría de una espira circular que trasporta corriente eléctrica, luego sumamos el potencial escalar magnético de una segunda espira para lograr la configuración de Helmholtz. para determinar el potencial escalar magnético primero determinamos el angulo solido puesto que el potencial escalar magnético esta en terminos del angulo solido finalmente para determinar la intensidad magnetica  $\vec{H}$  solo se tiene que determinar el gradiente del potencial escalar magnético. Ahora para determinar en un punto fuera del eje de simetría expresamos el potencial escalar magnético en terminos de los polinomios de Legendre. En el caso de la bobina de Helmholtz realizamos para dos espiras circulares y sumamos el potencial escalar magnético luego desarrollamos con una serie de Maclaurin para luego colocar cada termino de esta serie como un polinomio de Legendre obteniendo la expansion axial para cualquier punto fuera del eje de simetría, finalmente determinamos el gradiente del potencial escalar magnético para obtener la intensidad magnetica  $\vec{H}$  en cualquier punto de la zona experimental de la bobina de Helmholtz.

#### Segundo simulación con el Comsol

Con la finalidad de conocer la topografía de una bobina de Helmholtz se simulo en el simulador de fisica Comsol para observa el comportamiento de la inducción magnetica y seguir el camino correcto del desarrollo de la tesis. Primero se instalo el software luego se vio el enmallado, luego la geometría de la bobina, luego se agrego el numero de espiras y finalmente los parámetros físicos como son

corriente eléctrica, resistencia eléctrica, etc. Debemos señalar que la simulación no se realizó con los datos experimentales tomados en los tres pares de bobinas, la simulación se realiza con la finalidad de observar como es el comportamiento topográfico de una bobina de Helmholtz en la zona experimental.

A continuación mostramos el proceso teórico del modelamiento electromagnético de la bobina de Helmholtz que se requiere para ejecutar una simulación.

### ***3.2.1 Modelamiento Electromagnetico de la Bobina de Helmholtz***

Para el estudio del campo magnético en la zona experimental de la bobina de Helmholtz primero estudiamos la intensidad del campo magnético de una espira en un punto de su eje a partir del potencial escalar magnético para luego estudiar la intensidad de campo magnético en toda la zona experimental.

#### ***3.2.2 Intensidad del Campo Magnético Producido por una Espira o***

#### ***Corriente Circular en un Punto de su Eje***

Como vimos el potencial escalar magnético se define por:

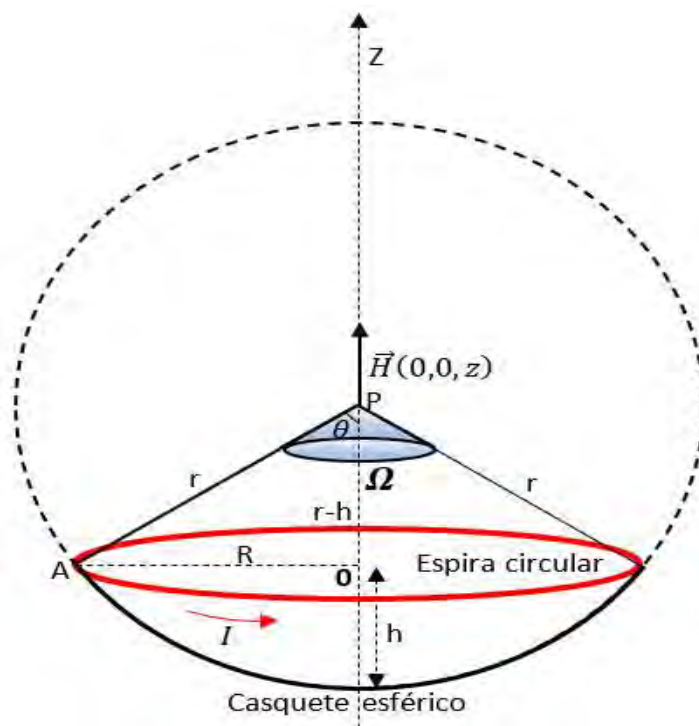
$$\varphi = \frac{I}{4\pi} \Omega$$

Donde el ángulo sólido se considera positivo si la dirección de la corriente en el filamento vista desde el punto de observación es en sentido antihorario.

Primero encontraremos la intensidad del campo magnético  $H$  a partir del potencial escalar magnético  $\varphi$  de una sola espira:

**Figura 18**

*Intensidad de campo magnético de una espira circular de radio  $R$  utilizando el potencial escalar magnético*



*Fuente:* Elaboración Propia

El área de un casquete esférico es:

$$A = 2\pi r h$$

En la figura 3.1, determinamos el coseno del ángulo  $\theta$  del triángulo rectángulo AOP:

$$\cos\theta = \frac{r-h}{r}$$

Donde la altura del casquete esférico es:

$$h = r(1 - \cos\theta)$$

Reemplazando en la ecuación del área del casquete esférico:

$$A = 2\pi r^2(1 - \cos\theta)$$



Por ultimo tendremos que el ángulo solido será:

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{S}{r^2} = \frac{2\pi r^2(1 - \cos\theta)}{r^2} = 2\pi(1 - \cos\theta)$$

$$\Omega = \frac{A}{r^2} = \frac{S}{r^2} = \frac{2\pi r^2(1 - \cos\theta)}{r^2} = 2\pi(1 - \cos\theta) \quad (3.1)$$

También del triángulo rectángulo AOP tendremos que:

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Entonces el ángulo solido es:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

Remplazamos esta expresión en el potencial escalar.

$$\varphi = \frac{I}{4\pi} \Omega$$

$$\varphi = \frac{I}{4\pi} 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

Entonces el valor del potencial escalar magnético de una espira circular de radio R que transporta una corriente I en todos los puntos del eje simétrico de la espira, es:

$$\varphi = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) \quad (3.2)$$

Por lo tanto la intensidad de campo magnético.

$$\vec{H} = -\nabla\varphi$$

$$\vec{H} = -\nabla\left\{\frac{I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\right\} = -\frac{I}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\right\}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2}\left[\frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{k}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(R^2 + z^2 - z^2)\hat{k}$$

Donde:

$$\vec{H} = \frac{IR^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \quad (3.3)$$

Del potencial escalar magnético de una espira circular de radio  $R$ :

$$\varphi_{axial} = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

Donde  $z$  es la distancia al centro del aro.

$$\varphi_{axial} = \frac{I}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2}}\right)$$

Cambiamos de variable:  $x = \left(\frac{R}{z}\right)^2$

La serie de Maclaurin es:  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} \rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}} \rightarrow f''(0) = \frac{1}{2} \frac{3}{2}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \frac{3}{4}x^2 + \dots \dots \dots$$

$$x = \left(\frac{R}{z}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \left(\frac{R}{z}\right)^4 - \dots$$

$$\varphi_{eje} = \frac{I}{2} \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \left(\frac{R}{z}\right)^4 + \dots \right]$$

$$\varphi_{eje} = \frac{IR^2}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{R^2}{z^4} + \dots \right]$$

$$= \frac{I}{2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{R^4}{z^4} - \dots \right) \right)$$

$$= \frac{IR^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{R^2}{z^4} + \dots \right)$$

Desarrollamos la expresión  $\frac{1}{z^n}$  en función de los polinomios de Legendre.

$$\frac{1}{z^n} = \frac{P_{n-1}(\cos\theta)}{r^n}$$

Remplazamos en la ecuación del potencial escalar magnético tenemos:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{IR^2}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{P_3(\cos\theta)}{r^4} + \dots \right) \quad (3.4)$$

Donde  $r$  es la distancia del centro de la espira y  $\theta$  es el ángulo entre  $r$  y el eje  $z$ .

Similarmemente para  $z < R$  tenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_{axial} &= \frac{I}{2} \left( 1 - \frac{z}{R \sqrt{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2}} \right) \\
&= \frac{I}{2} \left( 1 - \frac{z}{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{R^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{R^4} - \dots \right) \right) \\
&= \frac{I}{2} \left( 1 - \frac{z}{R} + \frac{1}{2} \frac{z^3}{R^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^5}{R^5} + \dots \right)
\end{aligned}$$

Desarrollamos la expresión  $z^n$  en función de los polinomios de Legendre.

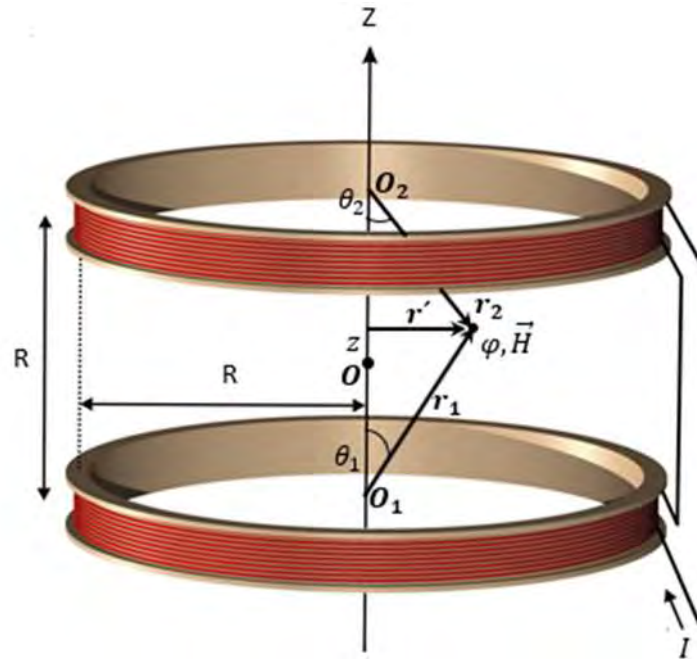
$$z^n = r^n P_n(\cos\theta)$$

Y reemplazamos en el potencial escalar magnético y obtenemos:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{I}{2} \left( 1 - \frac{r}{R} P_1(\cos\theta) + \frac{1}{2} \frac{r^3}{R^3} P_3(\cos\theta) + \dots \right) \quad (3.5)$$

### ***3.2.3. Intensidad del Campo Magnético Producido por una Bobina de Helmholtz en un Punto de la Zona Experimental***

Las bobinas de Helmholtz son dos bobinas paralelas de radio  $R$  están separadas por una distancia  $R$ . Las bobinas tienen  $n$  vueltas, cada bobina transporta la misma corriente  $I$  y en el mismo sentido, las dimensiones del área de la sección transversal de las bobinas son pequeñas. Las bobinas de acuerdo a la figura se encuentran en el plano  $z = \frac{R}{2}$  y la otra en el plano  $z = -\frac{R}{2}$ .

**Figura 19****Bobina de Helmholtz ubicadas en el eje Z**

Fuente: Wuiquipedia

El campo magnético en la región central entre las bobinas lo determinaremos por el Potencial escalar magnético en la región central de las bobinas en un punto cuyas coordenadas cilíndricas son  $z$  y  $r' = 0$  es decir en el eje de simetría y el potencial sera:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{nI}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{R}{2} + z \right) \left[ R^2 + \left( \frac{R}{2} + z \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ - \frac{nI}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{R}{2} - z \right) \left[ R^2 + \left( \frac{R}{2} - z \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Cambiamos de variable de  $z = Rx$

$$\varphi = \frac{nI}{2} \left\{ 1 - \frac{R(1/2 + x)}{R\sqrt{1 + (1/2 + x)^2}} \right\} - \frac{nI}{2} \left\{ 1 - \frac{R(1/2 - x)}{R\sqrt{1 + (1/2 - x)^2}} \right\}$$

Reemplazamos  $k = 1/2$

$$\varphi = \frac{nI}{2} \left\{ 1 - \frac{(k+x)}{\sqrt{1+(k+x)^2}} \right\} - \frac{nI}{2} \left\{ 1 - \frac{(k-x)}{\sqrt{1+(k-x)^2}} \right\}$$

Ordenamos, simplificamos y tenemos:

$$\varphi = \frac{nI}{2} \left\{ \frac{(k-x)}{\sqrt{1+(k-x)^2}} \right\} - \frac{nI}{2} \left\{ \frac{(k+x)}{\sqrt{1+(k+x)^2}} \right\} \quad (3.7)$$

Podemos entonces escribir:

$$\varphi(k-x) = \frac{nI}{2} \left\{ \frac{(k-x)}{\sqrt{1+(k-x)^2}} \right\}$$

$$\varphi(k+x) = \frac{nI}{2} \left\{ \frac{(k+x)}{\sqrt{1+(k+x)^2}} \right\}$$

Podemos escribir el potencial de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = \varphi(k-x) - \varphi(k+x) \quad (3.8)$$

Desarrollando la ecuación (3.2.3) en una serie de Maclaurin hasta el sexto termino.

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 + \frac{\varphi^{IV}(0)}{4!}x^4 + \frac{\varphi^V(0)}{5!}x^5$$

Para el primer termino de la serie de Maclaurin tenemos:

$$\varphi(0) = \varphi(k-0) - \varphi(k+0) = \varphi(k) - \varphi(k) = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \quad (3.9)$$

Para el segundo termino tenemos:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\varphi'(k-x) - \varphi'(k+x)$$

$$\varphi'(x) = -\varphi'(k-x) - \varphi'(k+x)$$

$$\varphi'(0) = -\varphi'(k) - \varphi'(k) = -2\varphi'(k) \quad (3.10)$$

Para el tercer termino tenemos:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi''(k-x) - \varphi''(k+x)$$

$$\varphi''(x) = \varphi''(k-x) - \varphi''(k+x)$$

$$\varphi''(0) = \varphi''(k) - \varphi''(k) = 0 \quad (3.11)$$

Para el cuarto termino tenemos:

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} = -\varphi'''(k-x) - \varphi'''(k+x)$$

$$\varphi'''(x) = -\varphi'''(k-x) - \varphi'''(k+x)$$

$$\varphi'''(0) = -\varphi'''(k) - \varphi'''(k) = -2\varphi'''(k) \quad (3.12)$$

Para el quinto termino tenemos:

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} = \varphi^{iv}(k-x) - \varphi^{iv}(k+x)$$

$$\varphi^{iv}(x) = \varphi^{iv}(k-x) - \varphi^{iv}(k+x)$$

$$\varphi^{iv}(0) = \varphi^{iv}(k) - \varphi^{iv}(k) = 0 \quad (3.13)$$

Para el sexto termino tenemos:

$$\frac{d^5\varphi}{dx^5} = -\varphi^v(k-x) - \varphi^v(k+x)$$

$$\varphi^v(x) = -\varphi^v(k-x) - \varphi^v(k+x)$$

$$\varphi^v(0) = -\varphi^v(k) - \varphi^v(k) = -2\varphi^v(k) \quad (3.14)$$

Remplazamos las ecuaciones desde (3.2.4) hasta (3.2.8) en la serie de Maclaurin

$$\varphi(x) = 0 + (-2\varphi'(k))x + 0x^2 + \frac{(-2\varphi'''(k))}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{(-2\varphi^v(k))}{5!}x^5$$

$$\varphi(x) = -2\varphi'(k)x - 2\varphi'''(k)\frac{x^3}{3!} - 2\varphi^v(k)\frac{x^5}{5!} \quad (3.15)$$

Evaluamos los terminos de la ecuación (3.2.9) para esto podemos usar cualquiera de las ecuaciones :

$$\varphi(k-x) = \frac{nI}{2} \left\{ \frac{(k-x)}{\sqrt{1+(k-x)^2}} \right\} \quad y \quad \varphi(k+x) = \frac{nI}{2} \left\{ \frac{(k+x)}{\sqrt{1+(k+x)^2}} \right\}$$

Usaremos:

$$\varphi(k+x) = \frac{nI}{2} \frac{(k+x)}{\sqrt{1+(k+x)^2}}$$

Derivamos esta ultima ecuación  $\varphi(k+x)$

$$\varphi'(k+x) = \frac{nI}{2} \left[ \frac{(1+(k+x)^2)^{1/2} - (k+x)^2(1+(k+x)^2)^{-1/2}}{1+(k+x)^2} \right]$$

$$\varphi'(k+x) = \frac{nI}{2} \frac{1}{(1+(k+x)^2)^{3/2}}$$

$$\text{Haciendo: } k = \frac{1}{2} \quad y \quad x = 0$$

$$\varphi'(k+0) = \frac{1}{(1+(1/2+0)^2)^{3/2}} \left( \frac{nI}{2} \right) = \frac{1}{(1+(1/2)^2)^{3/2}} \left( \frac{nI}{2} \right)$$

$$\varphi'(k) = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left( \frac{nI}{2} \right) \quad (3.16)$$

Derivando:  $\varphi'(k+x)$

$$\varphi''(k+x) = \frac{-3(k+x)}{(1+(k+x)^2)^{5/2}} \left( \frac{nI}{2} \right)$$

Derivamos una vez más

$$\varphi'''(k+x) = [-3(1+(k+x)^2)^{-5/2} + 15(k+x)^2(1+(k+x)^2)^{-7/2}] \left( \frac{nI}{2} \right)$$



Haciendo:  $k = \frac{1}{2}$  y  $x = 0$

$$\varphi'''(k+0) = \varphi''' \left( \frac{1}{2} + 0 \right) = 0 \quad (3.17)$$

Derivando:  $\varphi'''(k+x)$

$$\varphi^{iv}(k+x) = [45(k+x)(1+(k+x)^2)^{-7/2} - 105(k+x)^3(1+(k+x)^2)^{-9/2}] \left( \frac{nI}{2} \right)$$

Derivando una vez más

$$\begin{aligned} \varphi^v(k+x) = [45(1+(k+x)^2)^{-7/2} - 630(k+x)^2(1+(k+x)^2)^{-9/2} \\ + 945(k+x)^4(1+(k+x)^2)^{-11/2}] \left( \frac{nI}{2} \right) \end{aligned}$$

Evalúamos

$$\varphi^v(k+0) = \varphi^v \left( \frac{1}{2} + 0 \right) = -\frac{1080(128)}{3125\sqrt{5}} \left( \frac{nI}{2} \right) \quad (3.18)$$

Reemplazamos: (3.2.10) , (3.2.11) y (3.2.12) en (3.2.9)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -2\varphi'(k)x - 2\varphi'''(k) \frac{x^3}{3!} - 2\varphi^v(k) \frac{x^5}{5!} \\ \varphi(x) &= \left[ -2 \left( \frac{8}{5\sqrt{5}} \right) x - 2(0) \frac{x^3}{3!} - 2 \left( -\frac{1080(128)}{3125\sqrt{5}} \right) \frac{x^5}{5!} \right] \left( \frac{nI}{2} \right) \\ \varphi(x) &= -\frac{nI8}{5\sqrt{5}} \left( x - \frac{1080(16)}{625} \frac{x^5}{5!} \right) \end{aligned}$$

$$z = Rx \rightarrow x = \frac{z}{R}$$

$$\varphi \left( \frac{z}{R} \right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}} \left( \frac{z}{R} - \frac{1080(16)}{625(5!)} \frac{z^5}{R^5} + \dots \right) \quad (3.19)$$

Desarrollamos la expresión  $z^n$  en función de los polinomios de Legendre.

$$z^n = r^n P_n(\cos\theta)$$

Y reemplazamos en el potencial escalar magnético y obtenemos:

$$\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}}\left(\frac{z}{R} - \frac{144}{625}\frac{z^5}{R^5} + \dots\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}}\left(\frac{rP_1(\cos\theta)}{R} - \frac{144}{625}\frac{r^5P_5(\cos\theta)}{R^5} + \dots\right)$$

Donde,  $r$  es la distancia desde el origen hasta el punto donde se determina el potencial escalar  $\varphi$  y  $\theta$  es el ángulo entre  $r$  y el eje  $z$ . Sustituimos los dos polinomios de Legendre.

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \text{ y } P_5(\cos\theta) = \left(\frac{1}{8}\right)(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$$

$$\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}}\left(\frac{r\cos\theta}{R} - \frac{144}{625}\frac{r^5P_5(\cos\theta)}{R^5} + \dots\right)$$

$$\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}R}\left(z - \frac{144}{625}\frac{r^5}{R^4}\frac{1}{8}(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta) + \dots\right)$$

$$\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}R}\left(z - \frac{144}{625}\left(\frac{r^5}{R^4}\frac{63}{8}\cos^5\theta\right) + \frac{144}{625}\left(\frac{70}{8}\frac{r^5}{R^4}\cos^3\theta\right) - \frac{144}{625}\left(\frac{15}{8}\frac{r^5}{R^4}\cos\theta\right) + \dots\right)$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}R}\left(z - \frac{144}{625}\frac{63}{8}\frac{1}{R^4}z^5 + \frac{144}{625}\frac{70}{8}\frac{r^2}{R^4}z^3 - \frac{144}{625}\frac{15}{8}\frac{r^4}{R^4}z + \dots\right)$$

Reemplazando:  $r^2 = r'^2 + z^2$

$$\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}R}z\left(1 - \frac{144}{625}\frac{z^4}{R^4} + \frac{144}{125}\frac{z^2r'^2}{R^4} - \frac{54}{125}\frac{r'^4}{R^4} + \dots\right) \quad (3.20)$$

Calculamos el gradiente de este potencial para obtener la intensidad del campo magnético fuera del eje de la bobina de Helmholtz.

$$\vec{H} = -\nabla\varphi$$

$$\vec{H} = -\left(\frac{\partial}{\partial r'}; \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial \phi}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(z, r')$$

$$H_{r'} = -\frac{\partial \varphi(z, r')}{\partial r'}$$

$$H_z = -\frac{\partial \varphi(z, r')}{\partial z}$$

$$H_\phi = -\frac{1}{r'} \frac{\partial \varphi(z, r')}{\partial \phi} = 0$$

$$H_{r'} = -\frac{\partial}{\partial r'} \left( -\frac{nI8}{5\sqrt{5}R} z \left( 1 - \frac{144}{625} \frac{z^4}{R^4} + \frac{144}{125} \frac{z^2 r'^2}{R^4} - \frac{54}{125} \frac{r'^4}{R^4} \right) \right)$$

$$H_{r'} = \frac{nI8}{5\sqrt{5}R} z \left( \frac{144}{125} \frac{2z^2 r'}{R^4} - \frac{54}{125} \frac{4r'^3}{R^4} + \dots \right) = \frac{nI8}{5\sqrt{5}R} z \left( \frac{4z^2 r' - 3r'^3}{125R^4} + \dots \right)$$

$$H_{r'} = \frac{nI8}{5\sqrt{5}R} \frac{72zr'(4z^2 - 3r'^2 + \dots)}{125R^4} \quad (3.21)$$

$$H_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{nI8}{5\sqrt{5}} \left( \frac{z}{R} - \frac{144}{625} \frac{z^5}{R^5} + \frac{144}{125} \frac{z^3 r'^2}{R^5} - \frac{54}{125} \frac{z r'^4}{R^5} + \dots \right) \right]$$

$$H_z = \frac{nI8}{5\sqrt{5}} \left( \frac{1}{R} - \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^5} + \frac{432}{125} \frac{z^2 r'^2}{R^5} - \frac{54}{125} \frac{r'^4}{R^5} + \dots \right)$$

$$H_z = \frac{nI8}{5\sqrt{5}R} \left( 1 - \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} + \frac{432}{125} \frac{z^2 r'^2}{R^4} - \frac{54}{125} \frac{r'^4}{R^4} + \dots \right) \quad (3.22)$$

Finalmente obtenemos las componentes de la Intensidad Magnética( $H$ ) por el método de Expansión Axial:

$$\therefore H_{r'} = \frac{nI8}{5\sqrt{5}R} \frac{72zr'(4z^2 - 3r'^2 + \dots)}{125R^4}$$

$$\therefore H_z = \frac{nI8}{5\sqrt{5}R} \left( 1 - \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} + \frac{432}{125} \frac{z^2 r^2}{R^4} - \frac{54}{125} \frac{r^4}{R^4} + \dots \right)$$

### 3.3. Simulación de la Bobina de Helmholtz con Comsol

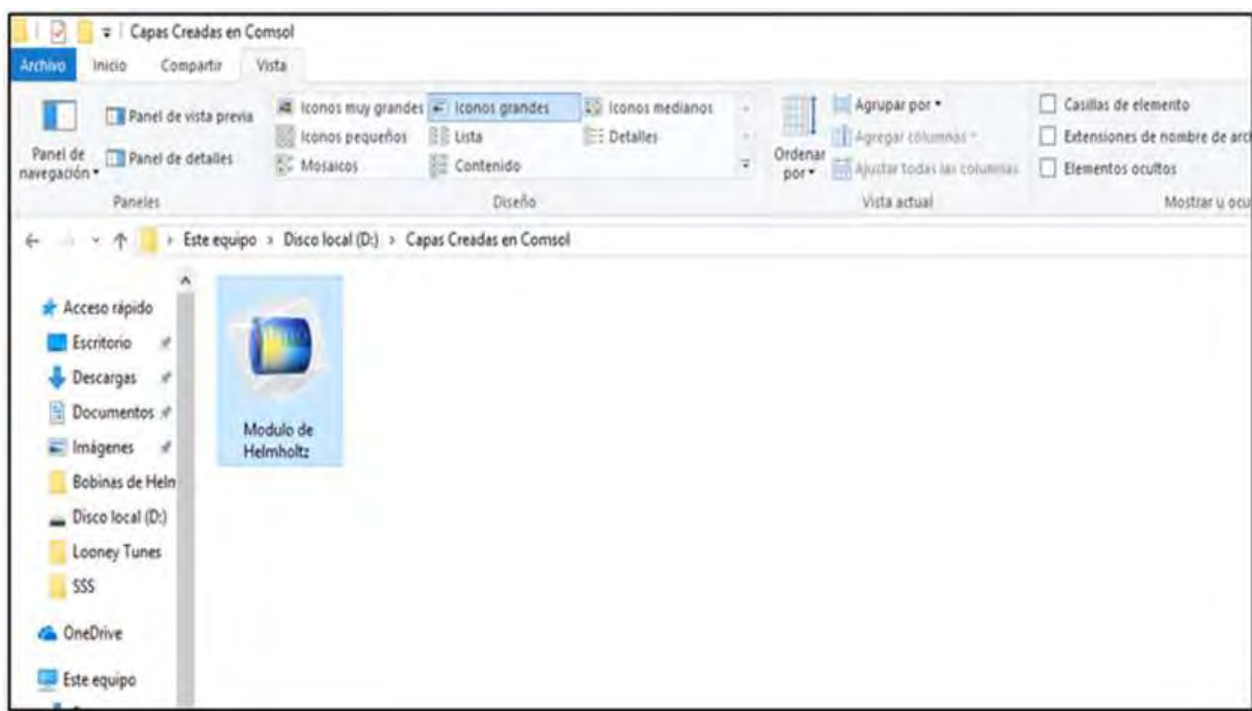
#### 3.3.1. Implementos Necesarios para la Simulación

Antes de comenzar con la simulación necesitaremos lo siguiente:

- Comsol Multiphysics 5.2
- Módulo de Helmholtz.mph

Figura 20

Ventana del módulo de Helmholtz



Fuente: Comsol

Este módulo se adjuntará conjuntamente con todos los archivos necesarios para la simulación.

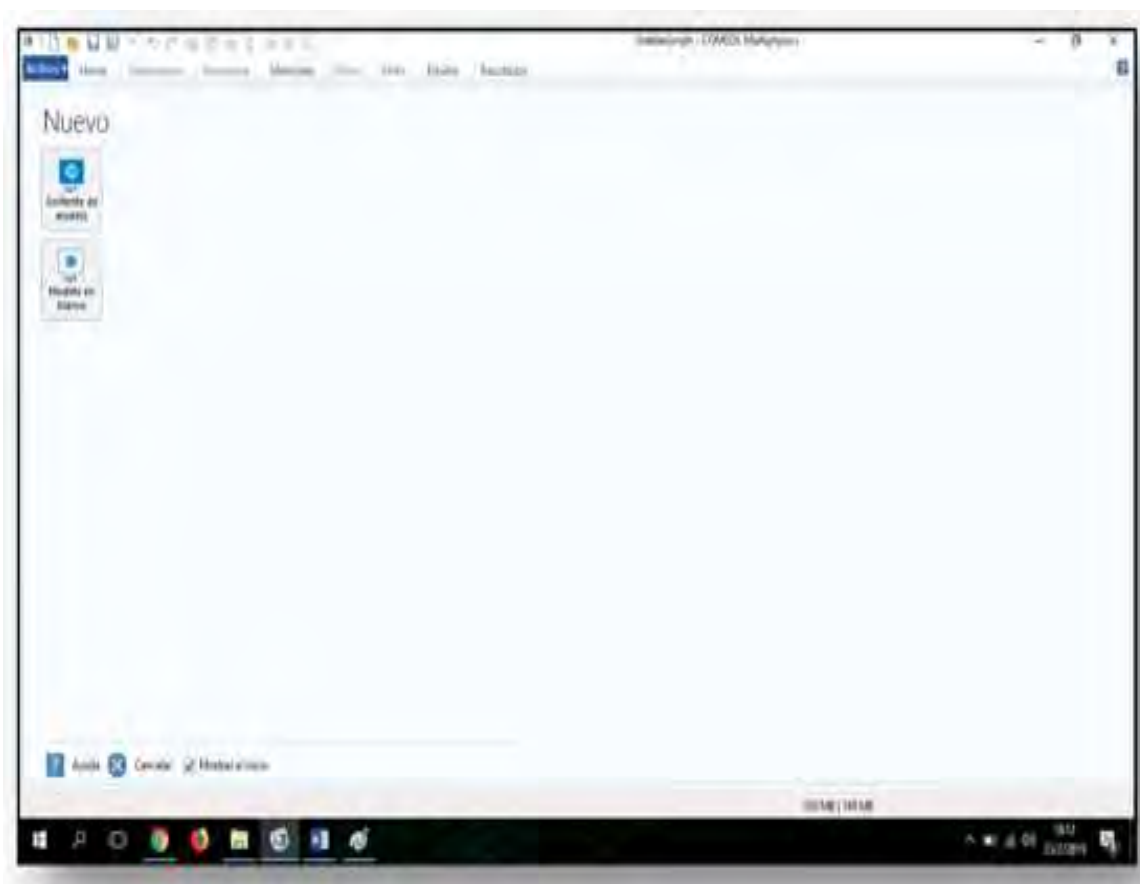
### ***3.3.2. Implementación del Esquema y Modelado***

#### **Paso 1.**

Abrir el Comsol Multiphysics 5.2. En el acceso directo que se encuentran en el escritorio o en el lugar donde se encuentran el programa.

***Figura 21***

***Ventana para iniciar con el comsol***



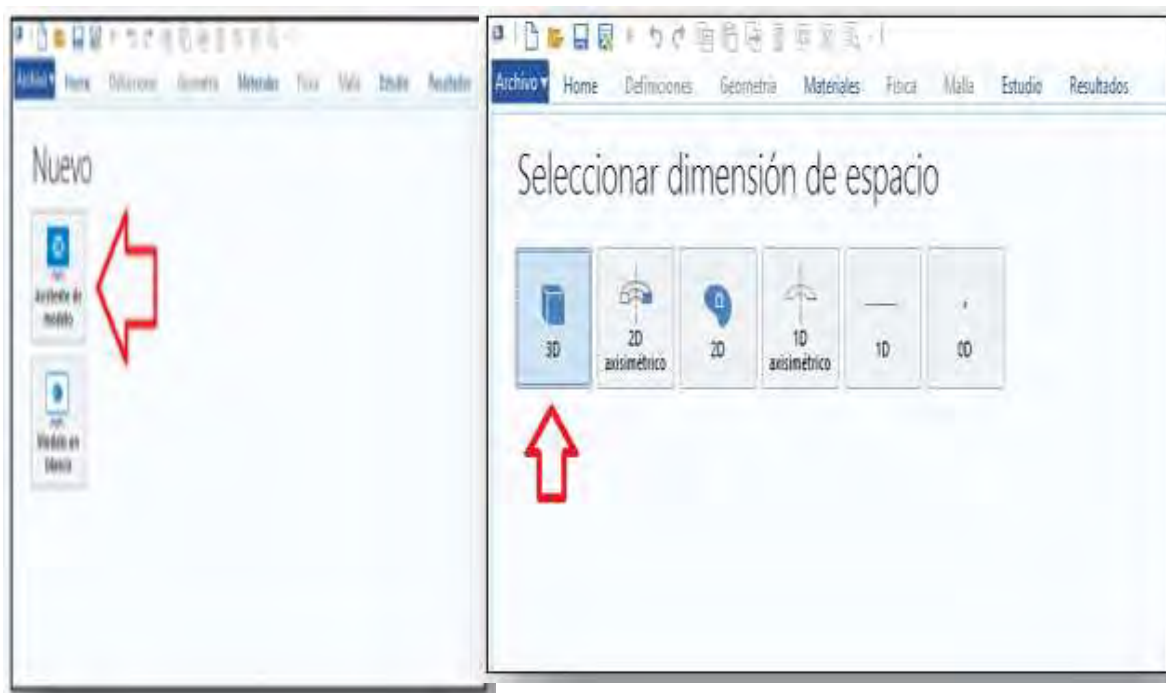
***Fuente:*** Comsol

#### **Paso 2.**

Hacer Click en “Asistente de Modelo” y seleccionamos “Modelo 3D”. como se muestra en la figura 3.5. a continuación.

**Figura 22.**

*Ventana del asistente de Modulo y La pestaña 3D*



*Fuente: Comsol*

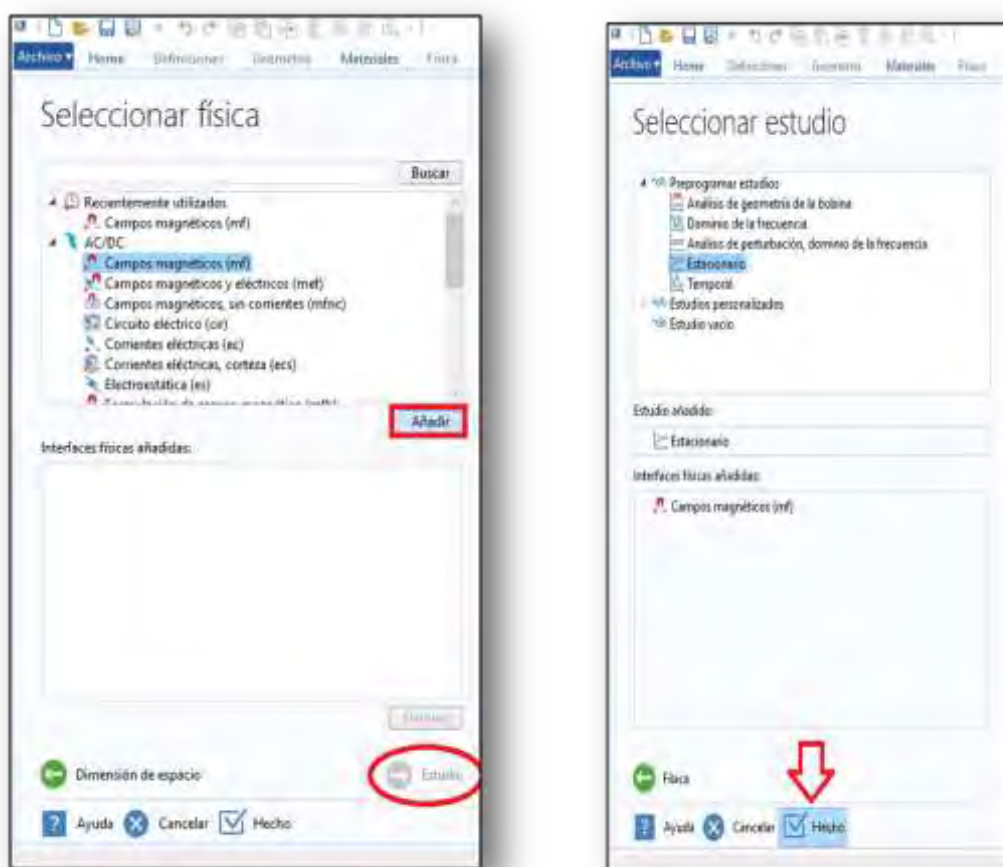
### Paso 3.

Hacemos Click en AC/DC y seleccionamos “Campos Magnéticos (mf)” luego pulsamos en Añadir en la ventana de seleccionar física .

Una vez añadido vamos a la ventana estudio, una vez ahí seleccionamo en la pestaña “Estacionario” y pulsamos en “HECHO” finalmente.

### Figura 23.

*Ventanas emergentes de Física y Estudio*



Fuente: Comsol

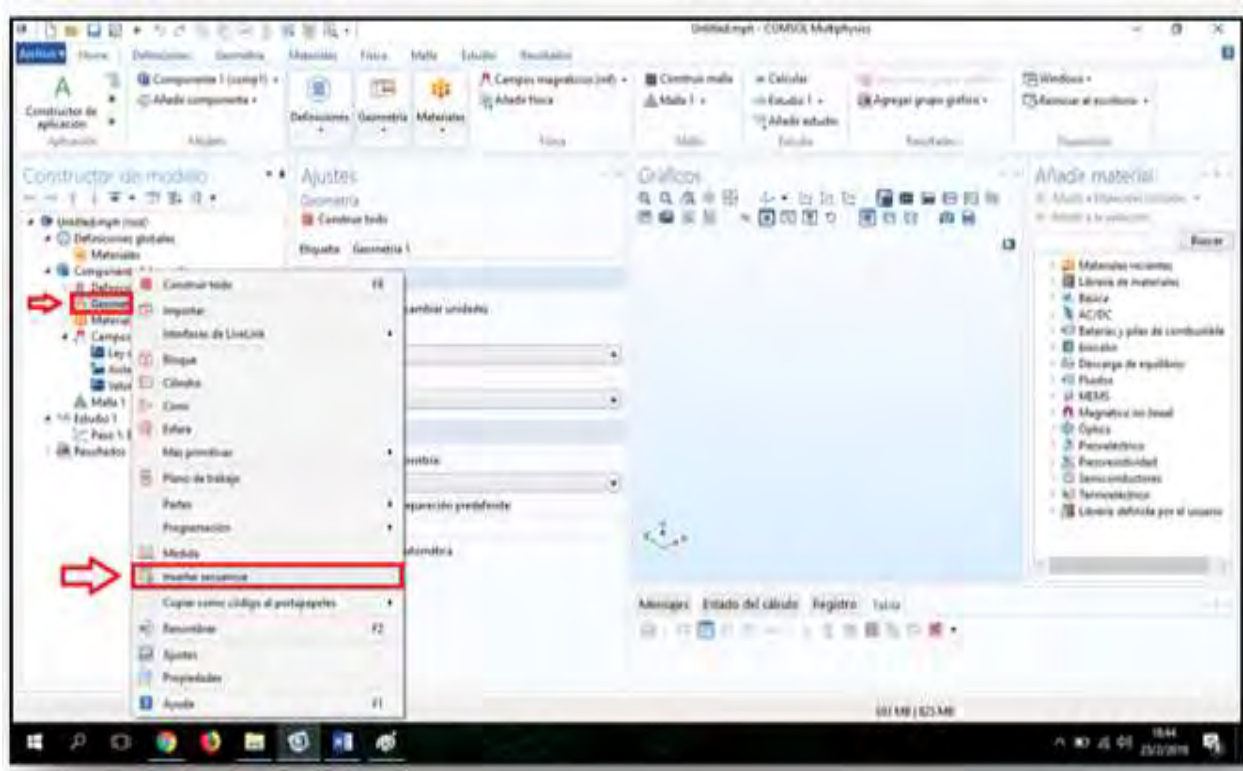
#### Paso 4.

Hacemos Anti-Click en “Geometría 1” luego pulsamos en “Insertar Secuencia”.

Con la finalidad de conseguir la geometría de la bobina.

**Figura 24**

*Ventana para la selección de la geometría*



Fuente. Consol



### Paso 5.

Buscamos la Ubicación del Módulo ya antes mencionado “Módulo de Helmholtz.mph” y hacemos click consecuentemente en Abrir.

**Figura 25.** Ubicación del módulo de Helmholtz



Fuente: Comsol

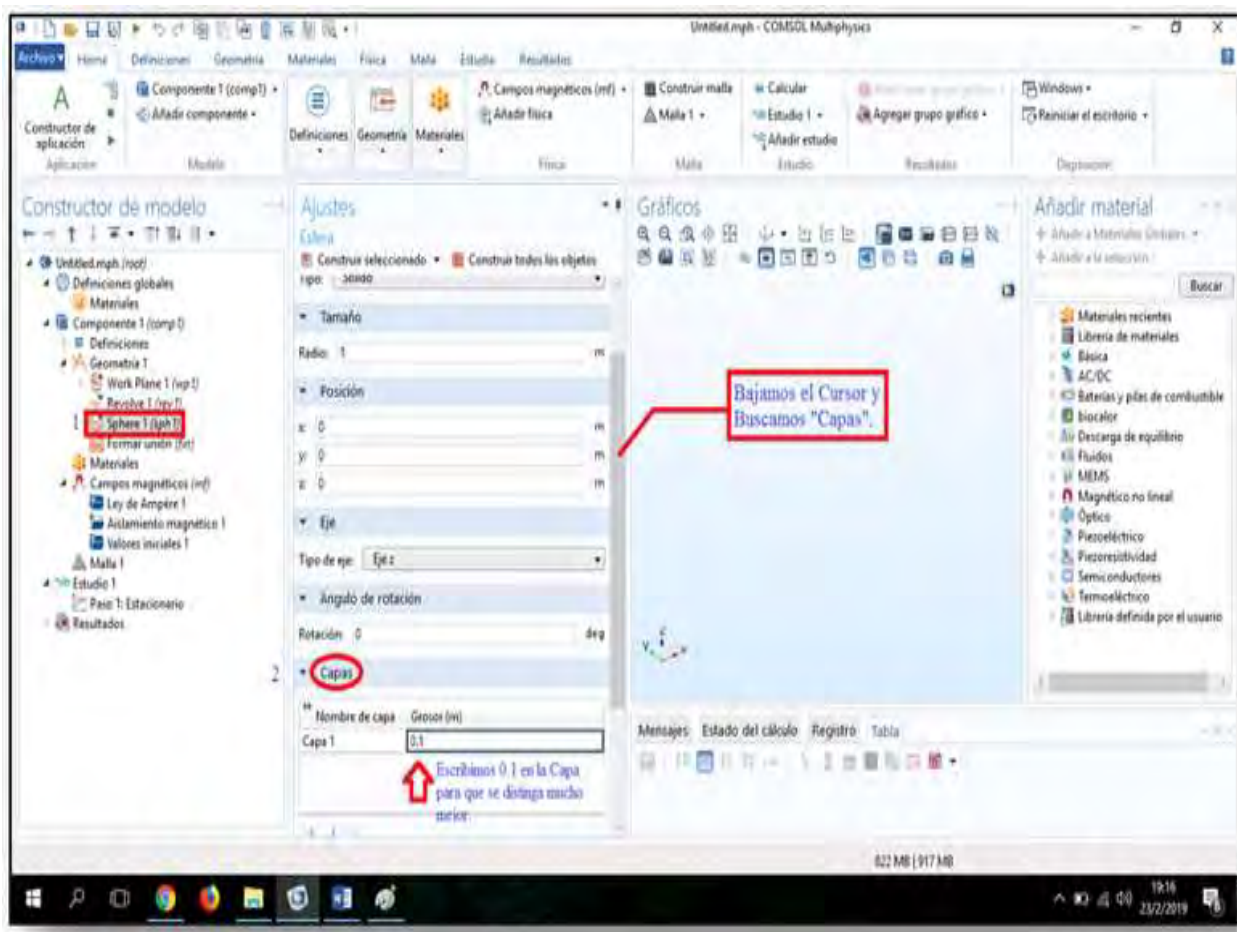
## Paso 6.

1. Vamos a Sphere (Esfera).

2. Luego nos dirigimos a capas y escribimos (0.1) y así creamos una capa estructurada.

**Figura 26.**

*Ventana para número de capas*



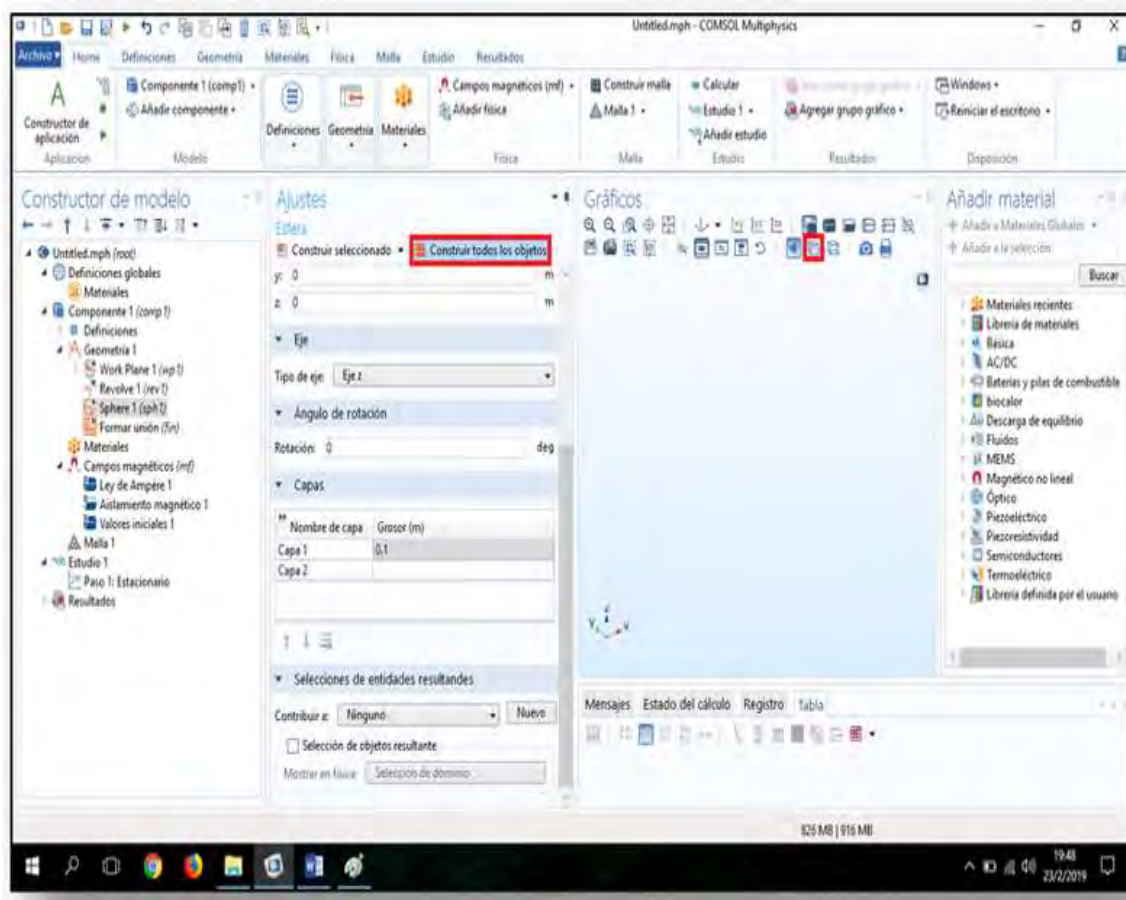
Fuente: Comsol

## Paso 7.

Ya en Aquí damos Click en “Construir Todos Los Objetos” y en seguida damos Click en “Transparencia” para poder visualizar mucho mejor los datos.

**Figura 27.**

*Ventana de construcción*



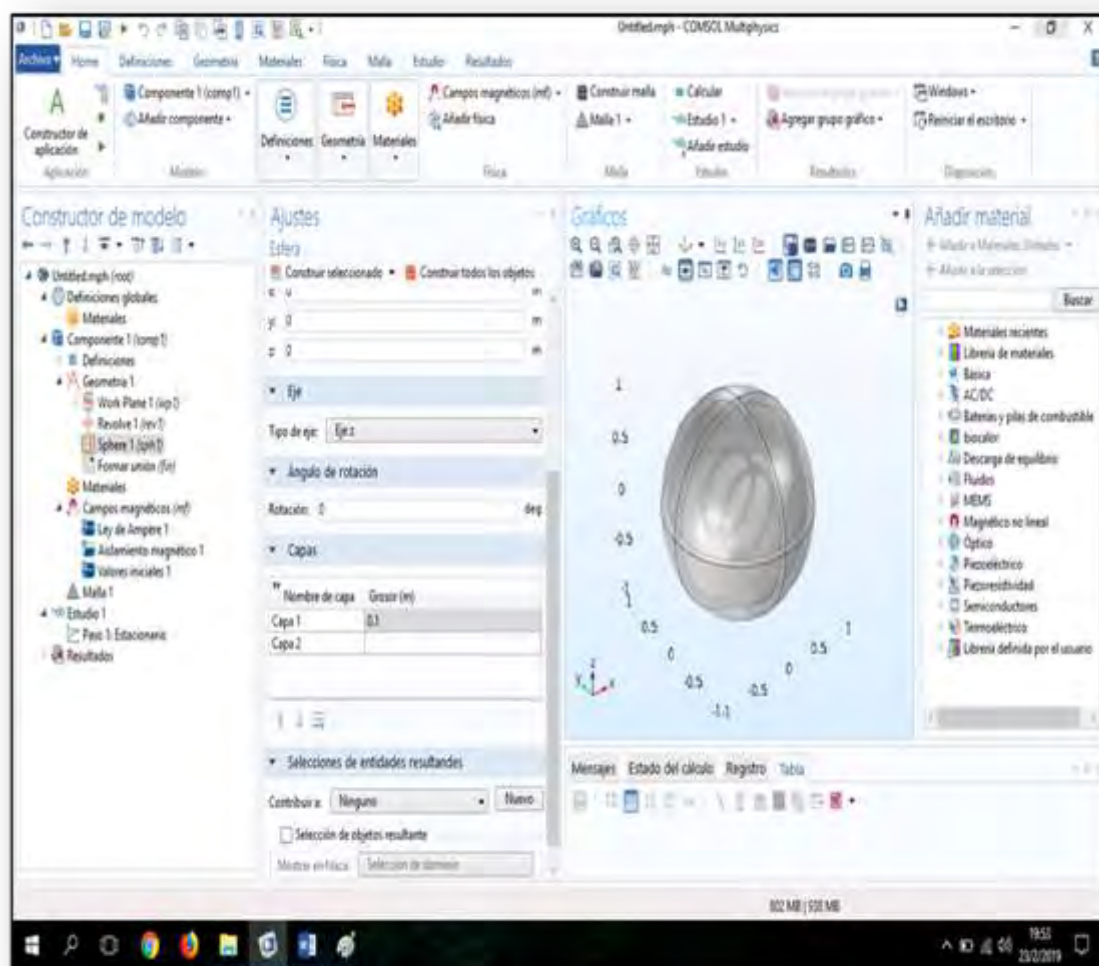
*Fuente: Comsol*

## Paso 8.

Observaremos como nos estaría quedando el esquema importado.

**Figura 28.**

*Estructura de la bobina*



Fuente: Comsol

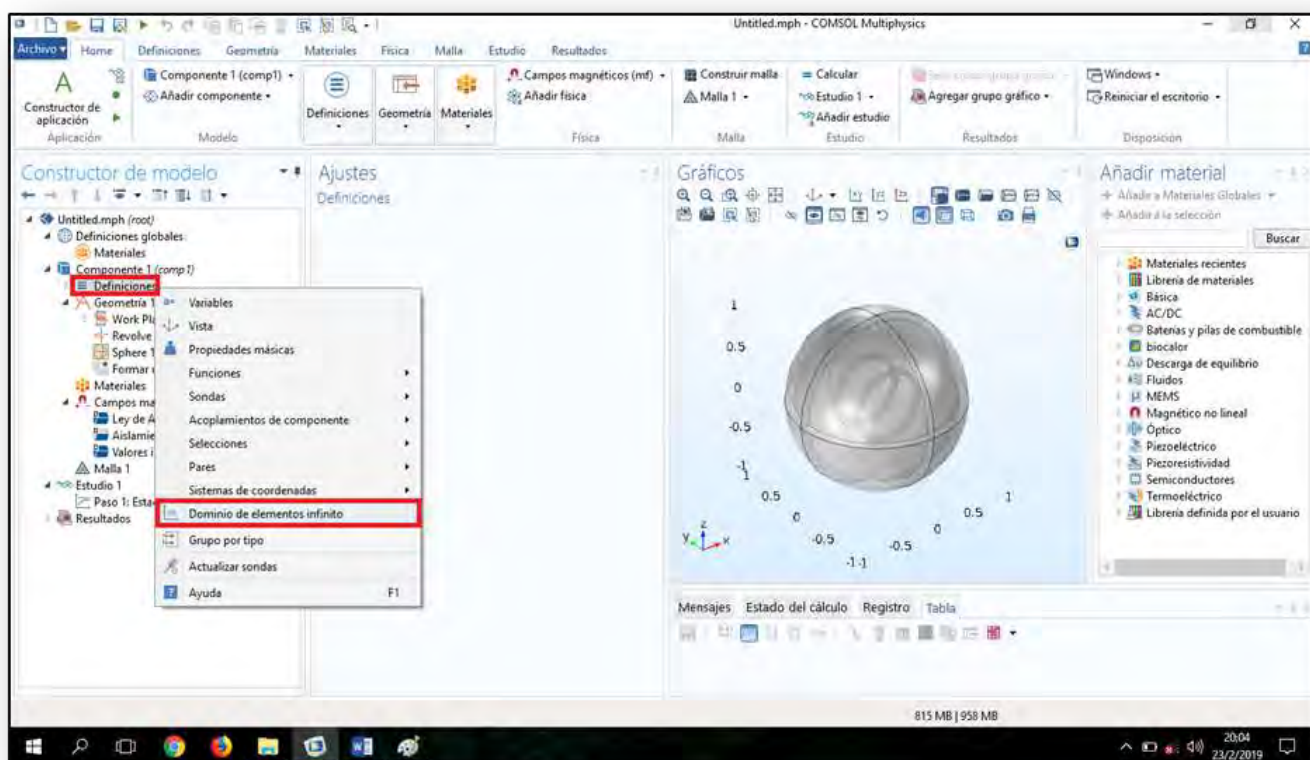
### 3.3.3 Implementación de Materiales

#### Paso 9.

Damos Anti-Click a la parte de “Definiciones” y seleccionamos “Dominio de Elementos Infinitos” (En este procedimiento estaremos creando un espacio en memoria en la cual asignaremos funciones a diversas regiones del Modelo).

**Figura 29**

*Ventana de elementos infinitos*



*Fuente:* Comsol

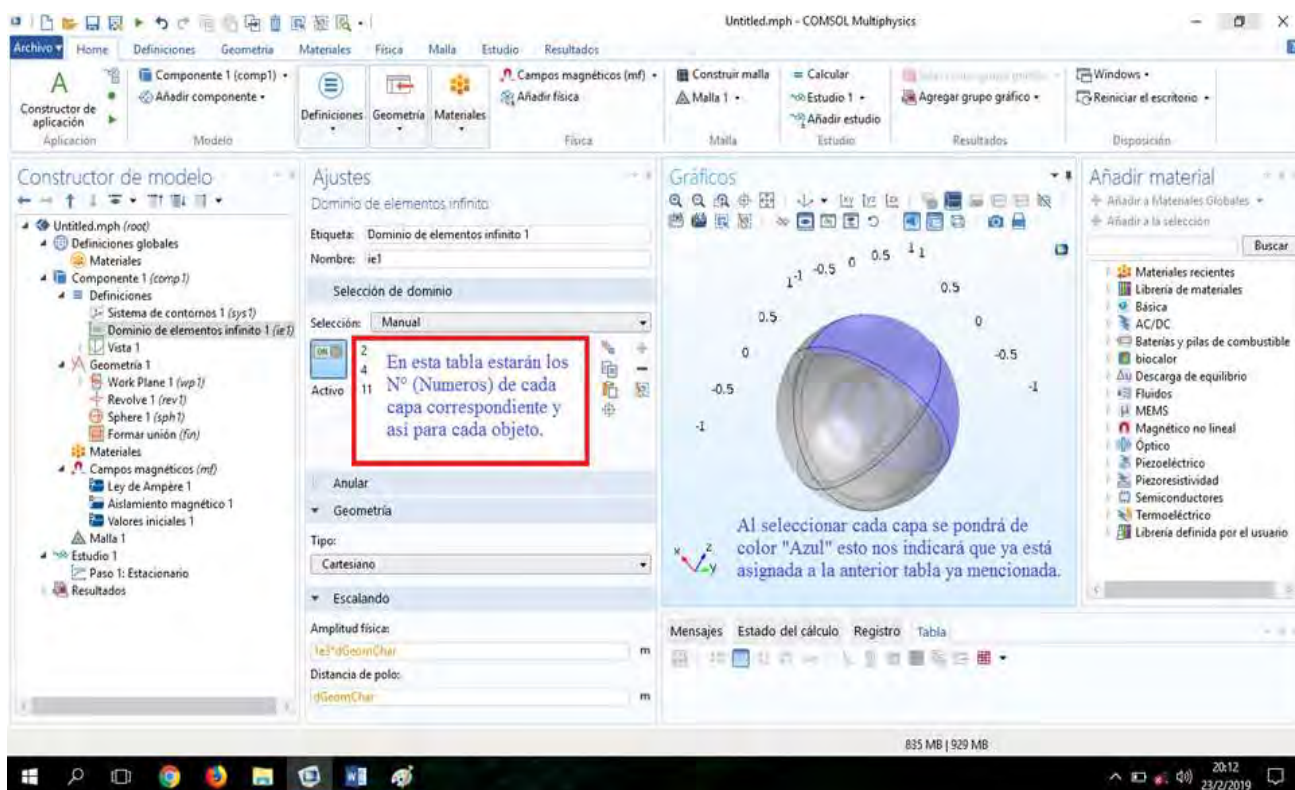


## Paso 10.

Seleccionamos todas las capas exteriores como se observa.

**Figura 30**

*Selección de capa*



*Fuente: Comso*

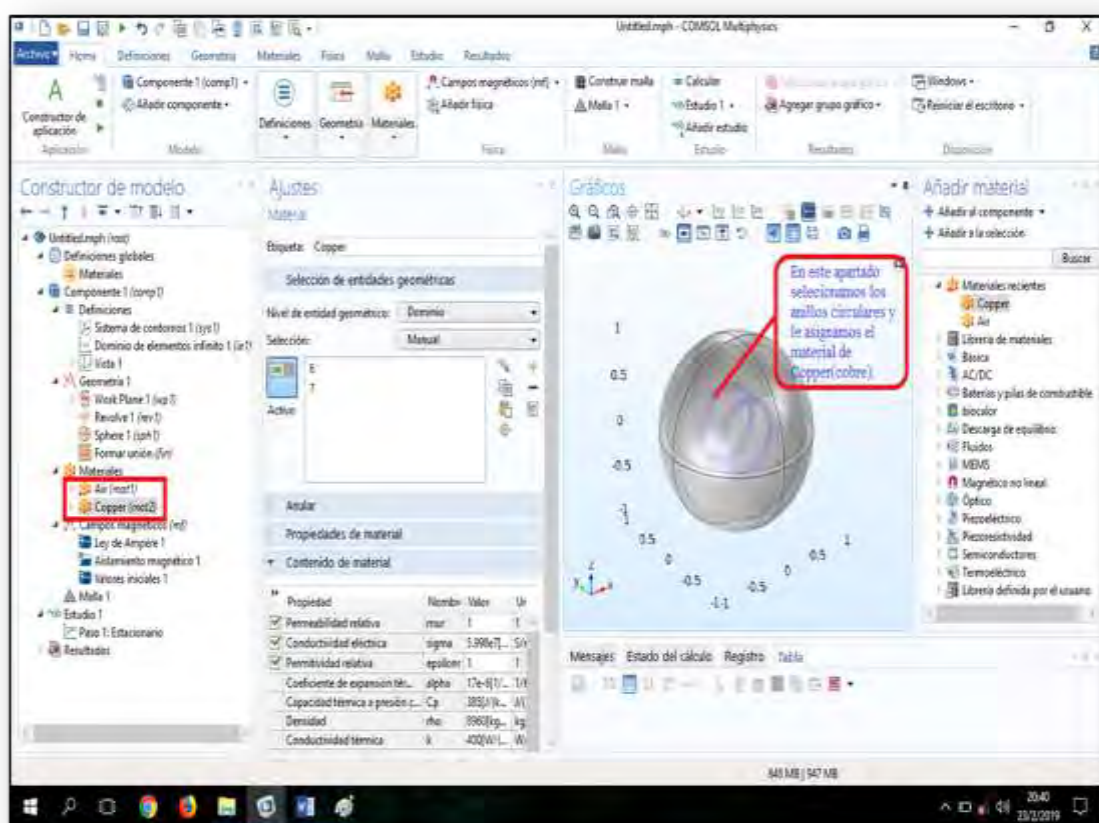


## Paso 12.

En esa misma pestaña buscamos “Copper(cobre)” también en materiales básicos y le asignaremos los anillos circulares (para poderlos seleccionar tenemos que poner el cursor del Mouse encima de uno de los anillos y mover el SCROLL o usualmente dicho rueda de desplazamiento una vez sombreado hacer Click y estará seleccionado en seguida hacemos lo mismo con el otro anillo) luego hacemos Doble-Click en Copper para crear el materia.

**Figura 32.**

***Ventana para crear el devanado de cobre en la bobina***



**Fuente:** Comsol



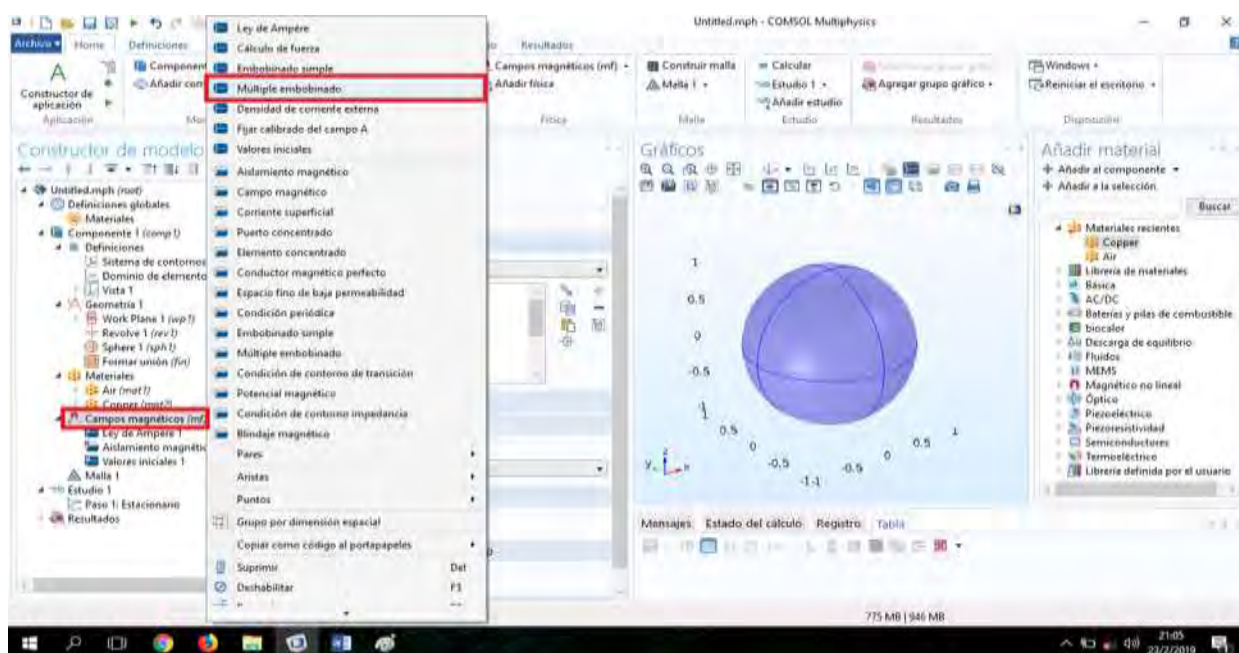
### 3.3.4. Implementación de Bobinas Múltiples y Enmallado

#### Paso 13.

Vamos ha “Campos Magnéticos” Anti-Click y nos dirigimos a “Embobinado Múltiple”.(En aquí asignaremos el proceso de embobinado a los anillos de cobre).

**Figura 33.**

*Ventana de embobinado multiple*



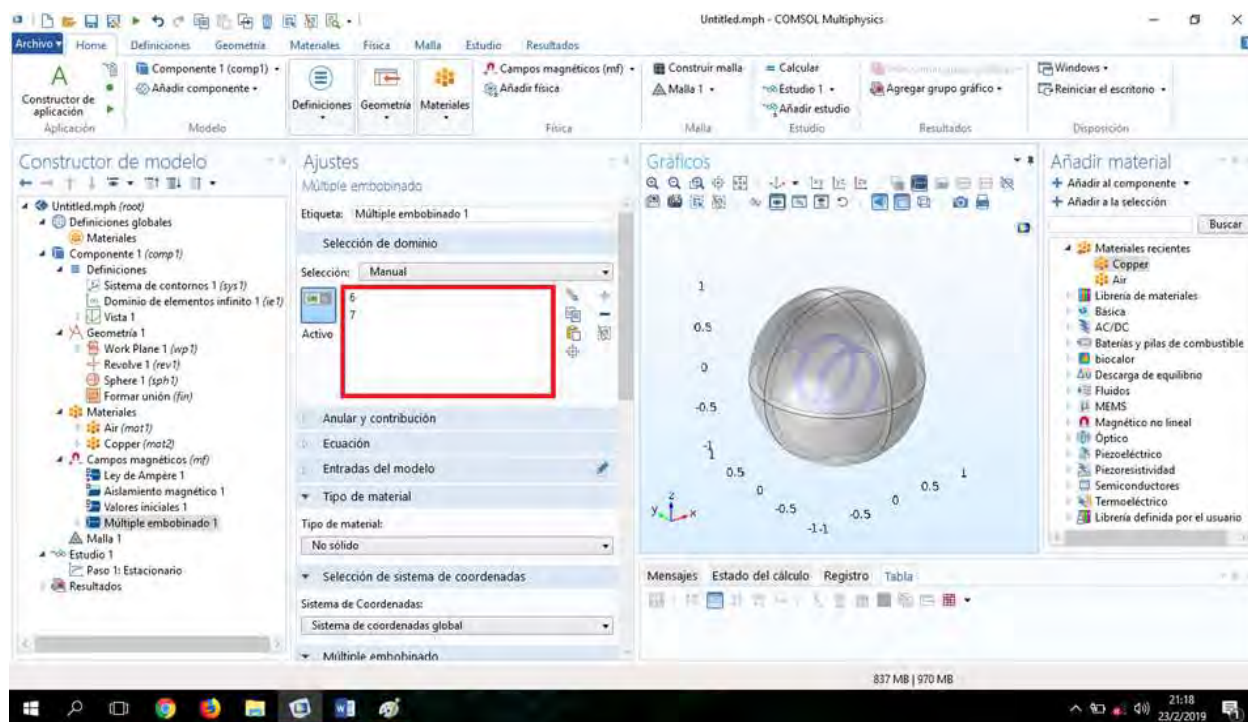
*Fuente: Comsol*

## Paso 14.

Nuevamente asignares los anillos de Cobre y se enumerarán en el recuadro.

**Figura 34.**

*Ventana para asignar los anillos de cobre*

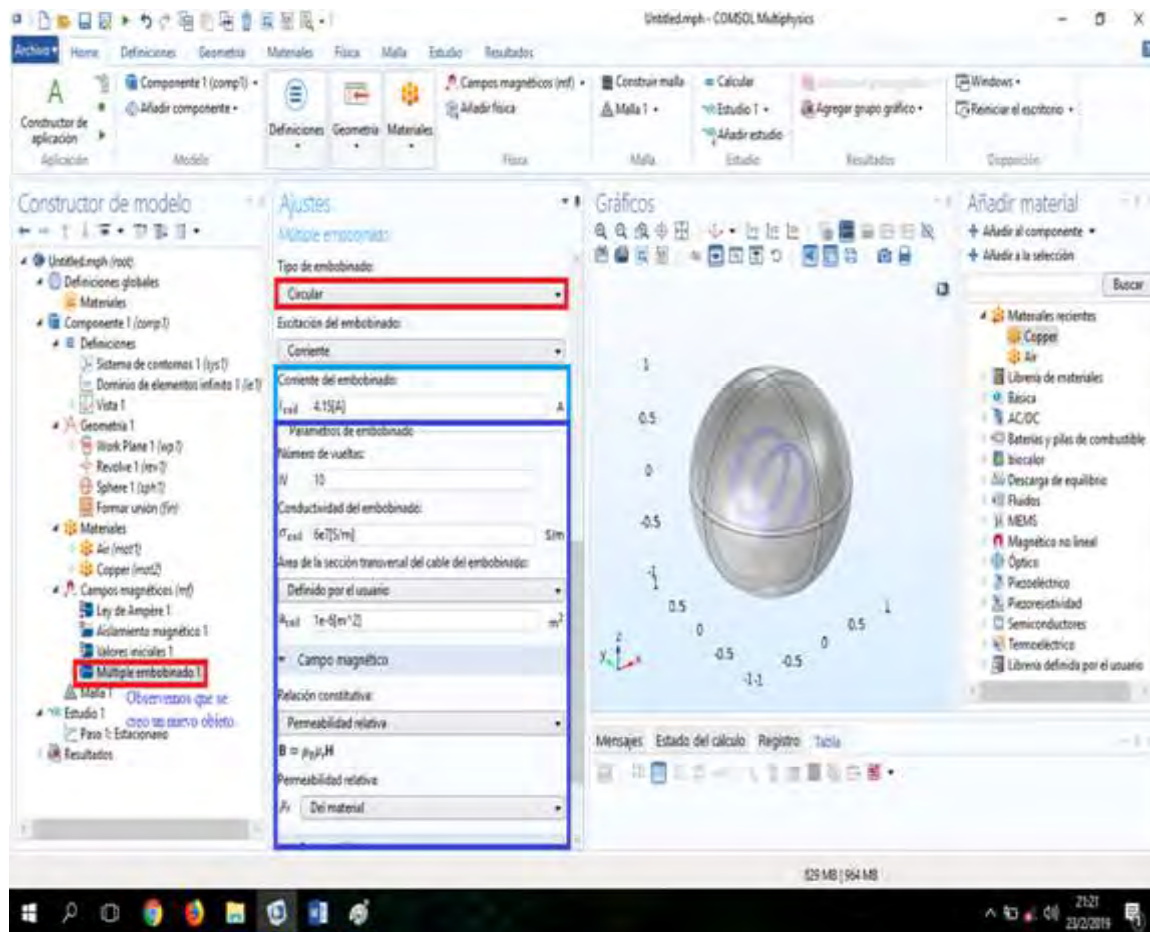


*Fuente:* Comsol

- Observemos que se crea el Embobinado (Rojo).
- Ojo el tipo de embobinado que tenemos es "Circular" así que seleccionamos esa opción (Rojo).
- Podemos variar la corriente, la Permitividad, Conductividad, Area Transversal, etc... (Celeste,Azul).

**Figura 35.**

*Ventana para colocar parámetros magnéticos*



*Fuente:* Comsol

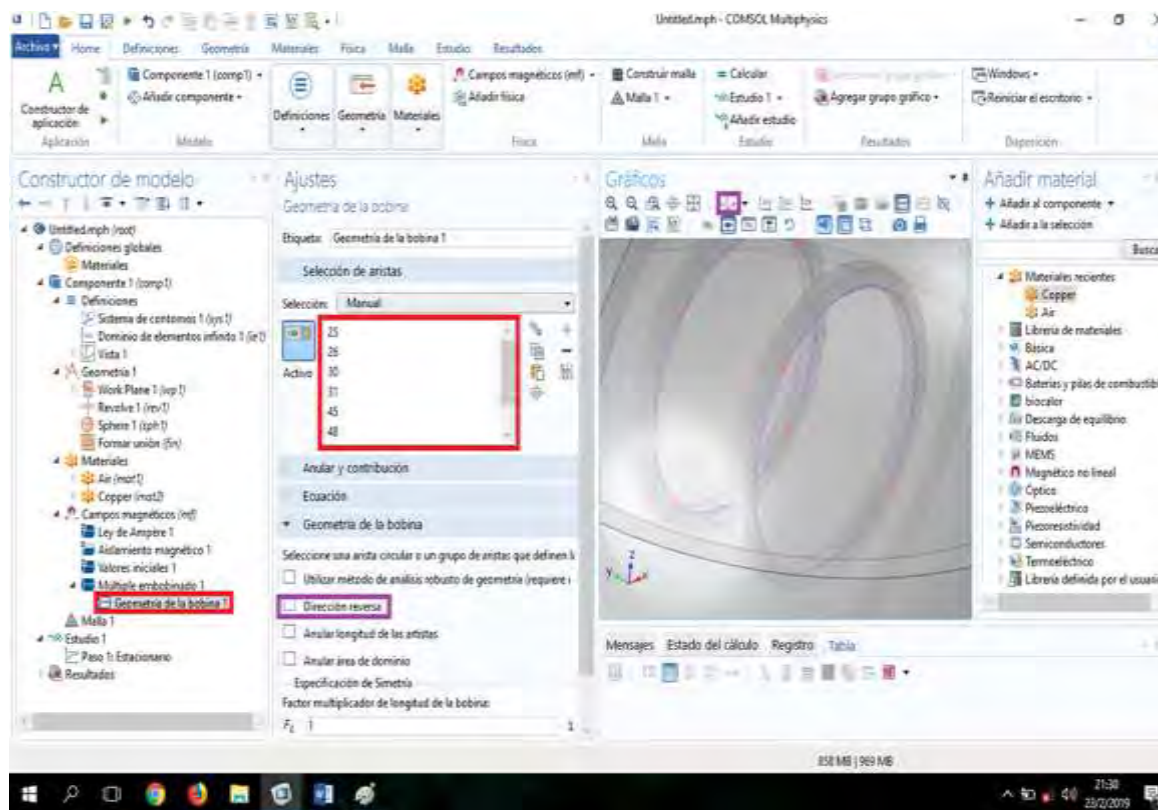
## Paso 15

**Figura 36.**

*Doble-Click en “Múltiple Embobinado” luego hace Click en “Geometría de la Bobina 1” (Rojo)*

Seleccionamos las líneas oblicuas de en una dirección como se ve en la imagen, si están en otro sentido podemos invertirlo (Morado) fíjese bien en cuál de las líneas oblicuas estamos seleccionando.

*Ventana donde se esta colocando el embobinado*



*Fuente: Comsol*

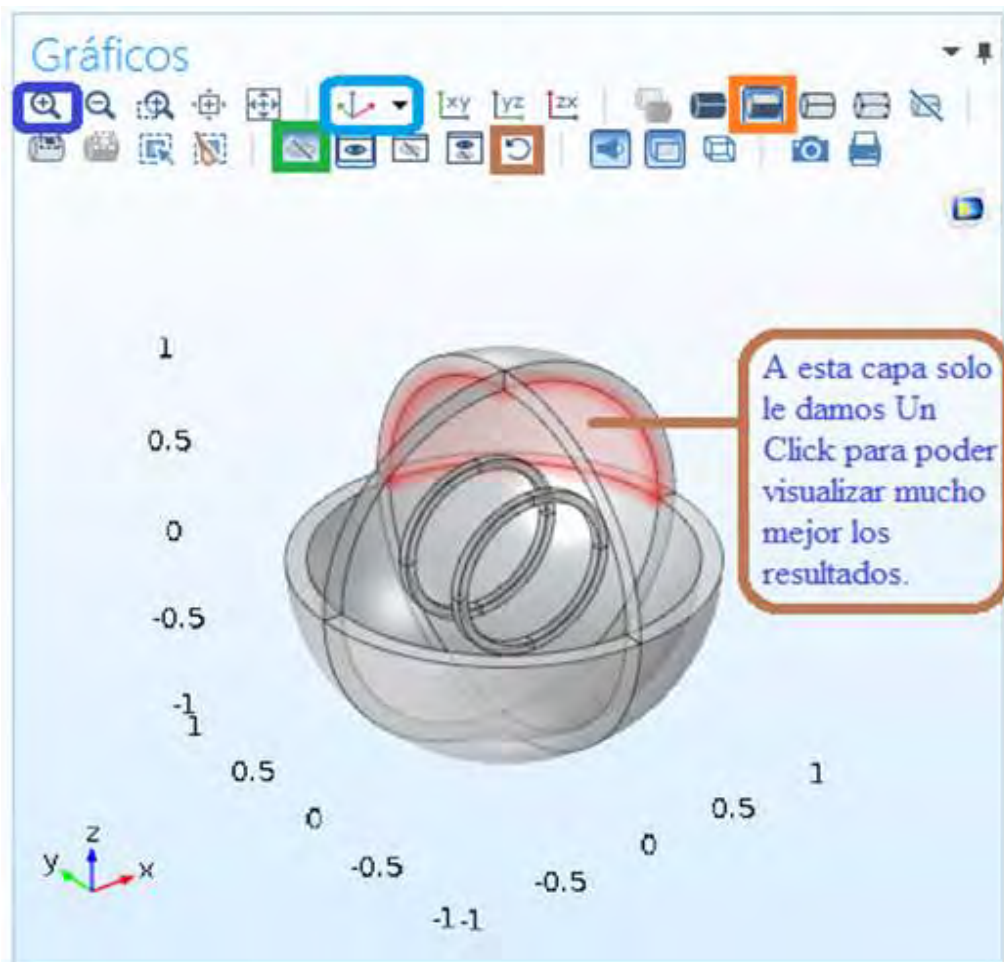
## Paso16

Regresamos a “Múltiple Embobinado” luego seleccionamos una capa (Rojo), luego vamos a “Hacer Click y Esconder” (Verde), luego a “Seleccionar Contornos” (Naranja), Después hacemos Dos Click para quitar las capas, pero la capa del fondo la quitaremos una sola vez para un mejor resultado. (Para poder centrar bien la figura hacemos click en Perspectiva 3D (Celeste) luego en Ampliar (Azul). Como podemos ver en las figuras 35, 36 y 37



**Figura 37.**

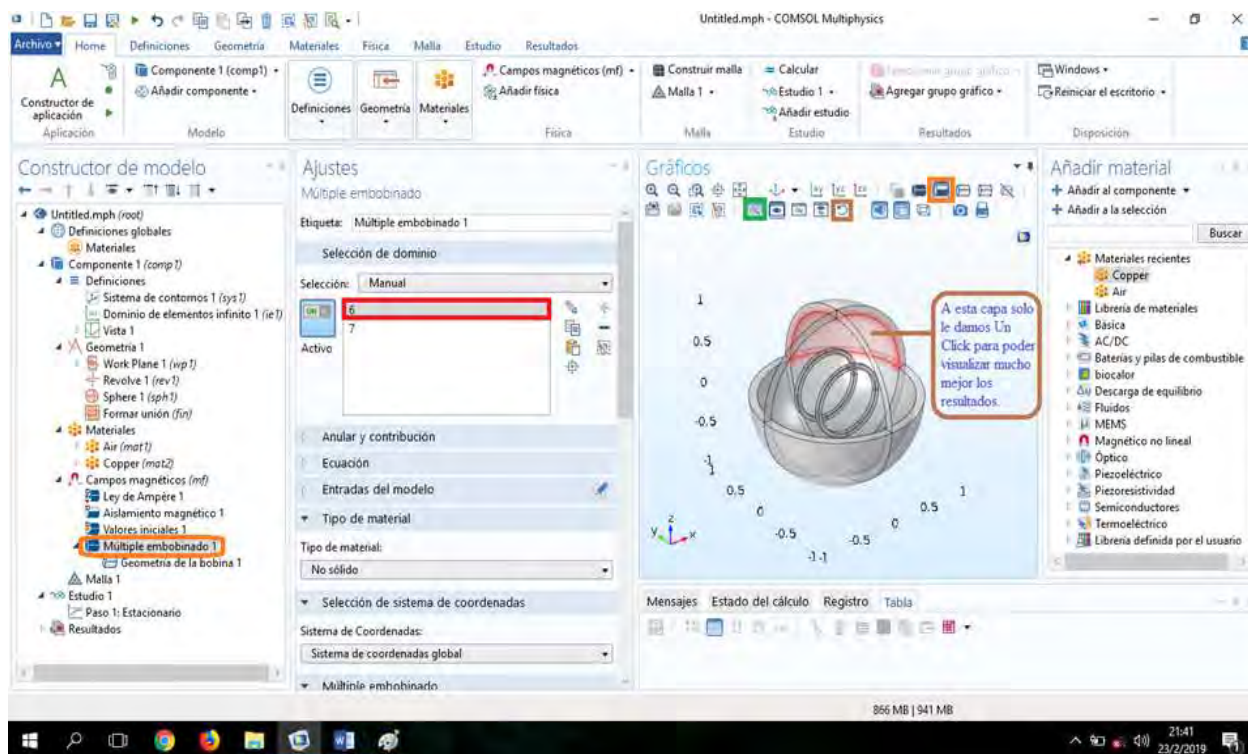
*Ventana interactiva para ver la forma geométrica*



*Fuente: Comsol*

**Figura 38.**

*Ventana para visualizar las capas*

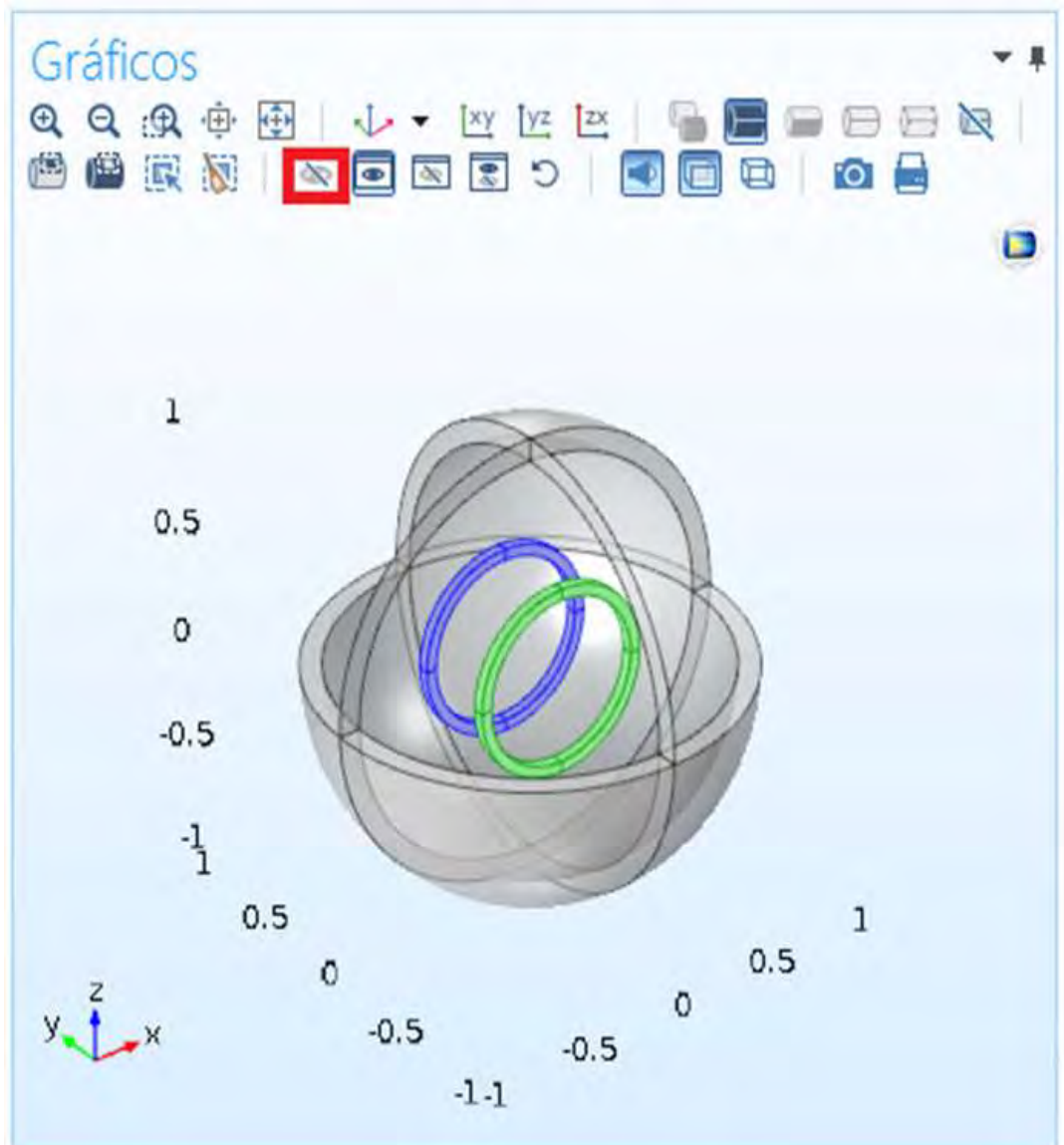


*Fuente: Comsol*

- Luego Simplemente Habilitar el “Hacer Click y Esconder”.

**Figura 39.**

*Ventana de selección de la bobina de Helmholtz*

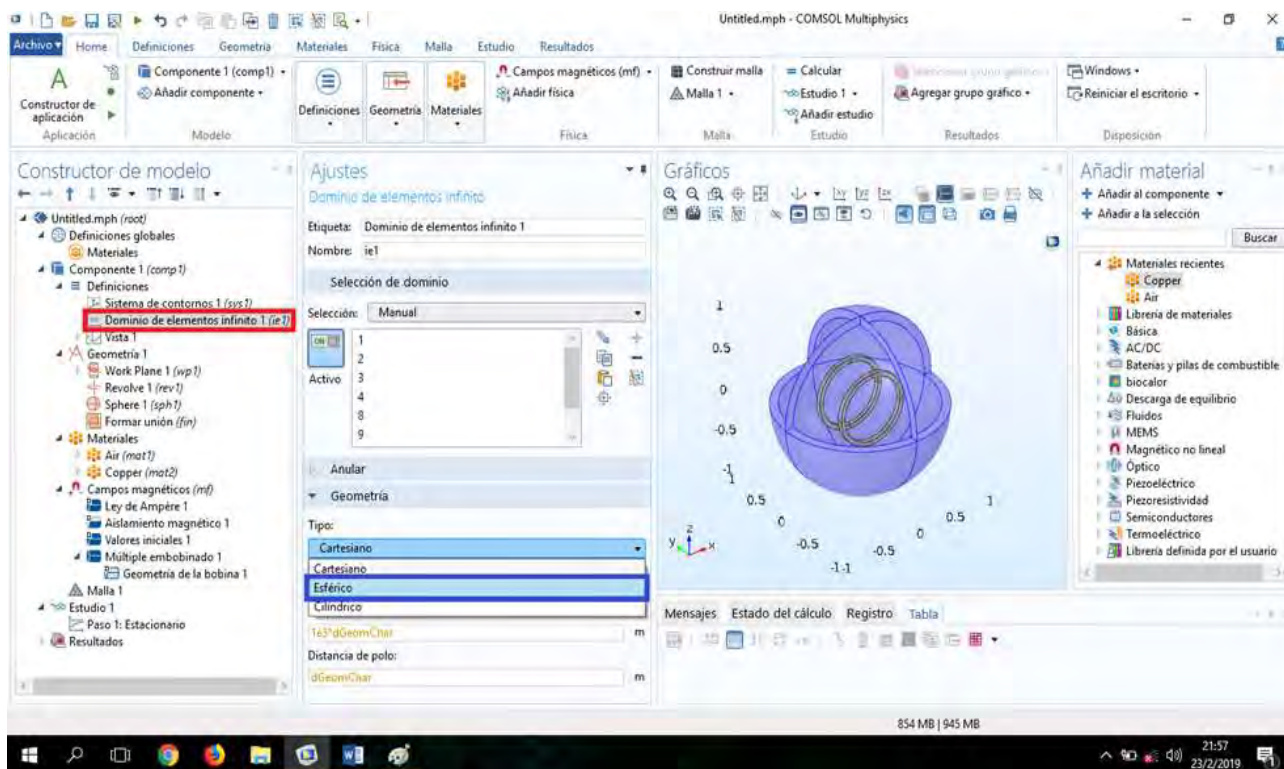


*Fuente: Comsol*

### **3.3.5. Visualización de los Resultados**

#### **Paso 17**

Vamos a “Dominio de Elementos Infinito” (Rojo) y hacemos Click luego en “Geometría” escogemos “Esférico” (Azul).

**Figura 40.****Manejo de los elementos finitos****Fuente:** Comsol

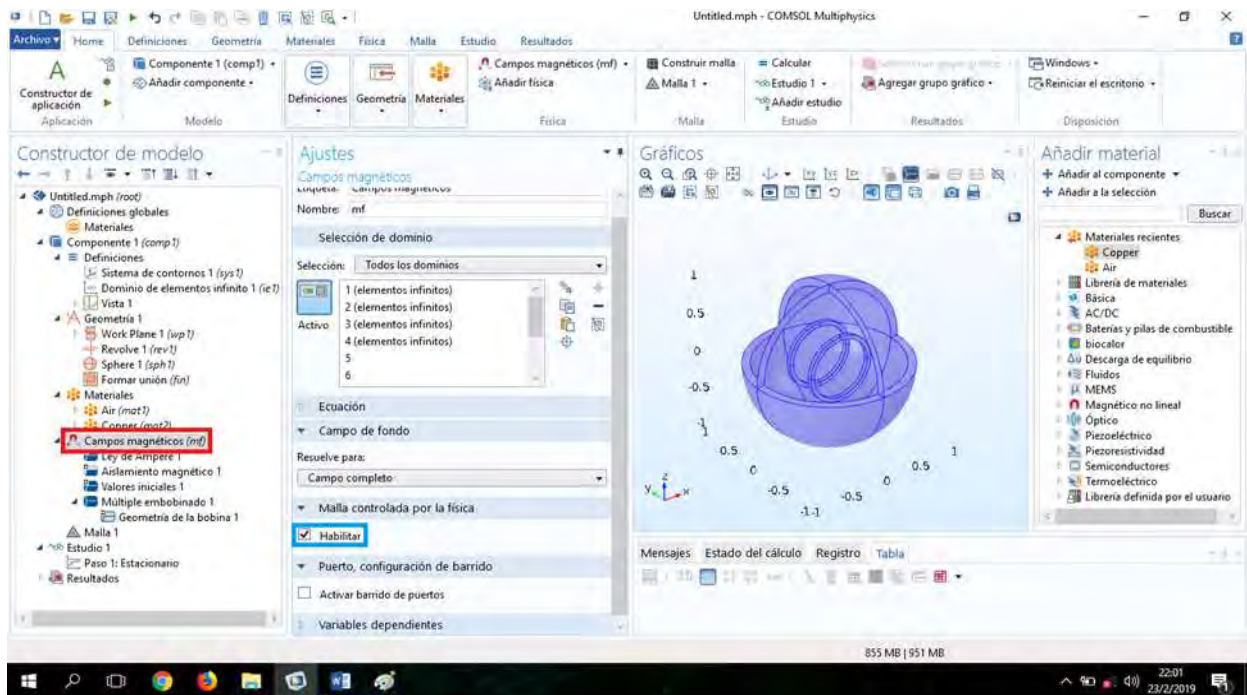


### Paso 18.

Click en “Campos Magnéticos (mf)” luego vamos a “Mallas Controladas Por La Física” y “Habilitamos” las Mallas.

### Figura 41.

*Habilitación de mallas*

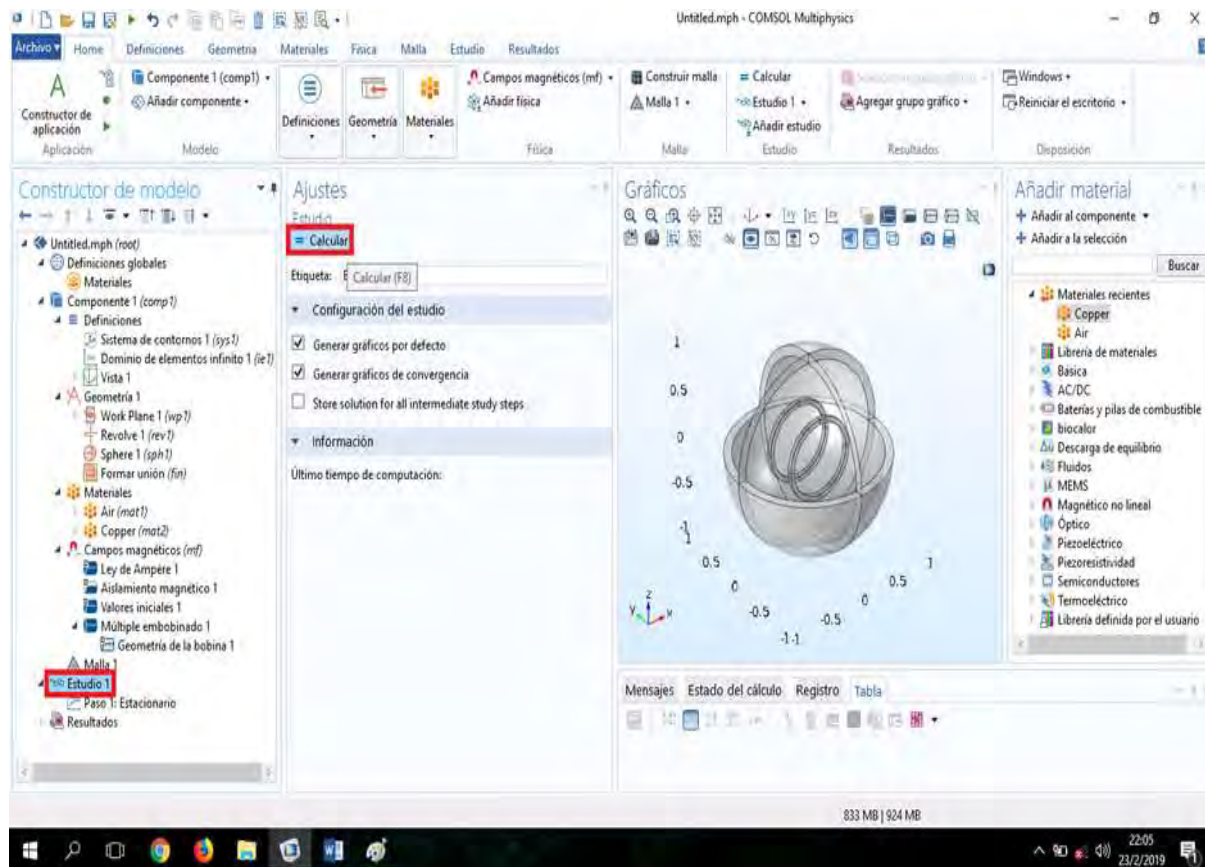


*Fuente:* Comsol

### Paso 19.

Click en “Estudio 1” luego en “Calcular”.

(En esta opción nos arrojará los resultados de nuestro experimento)

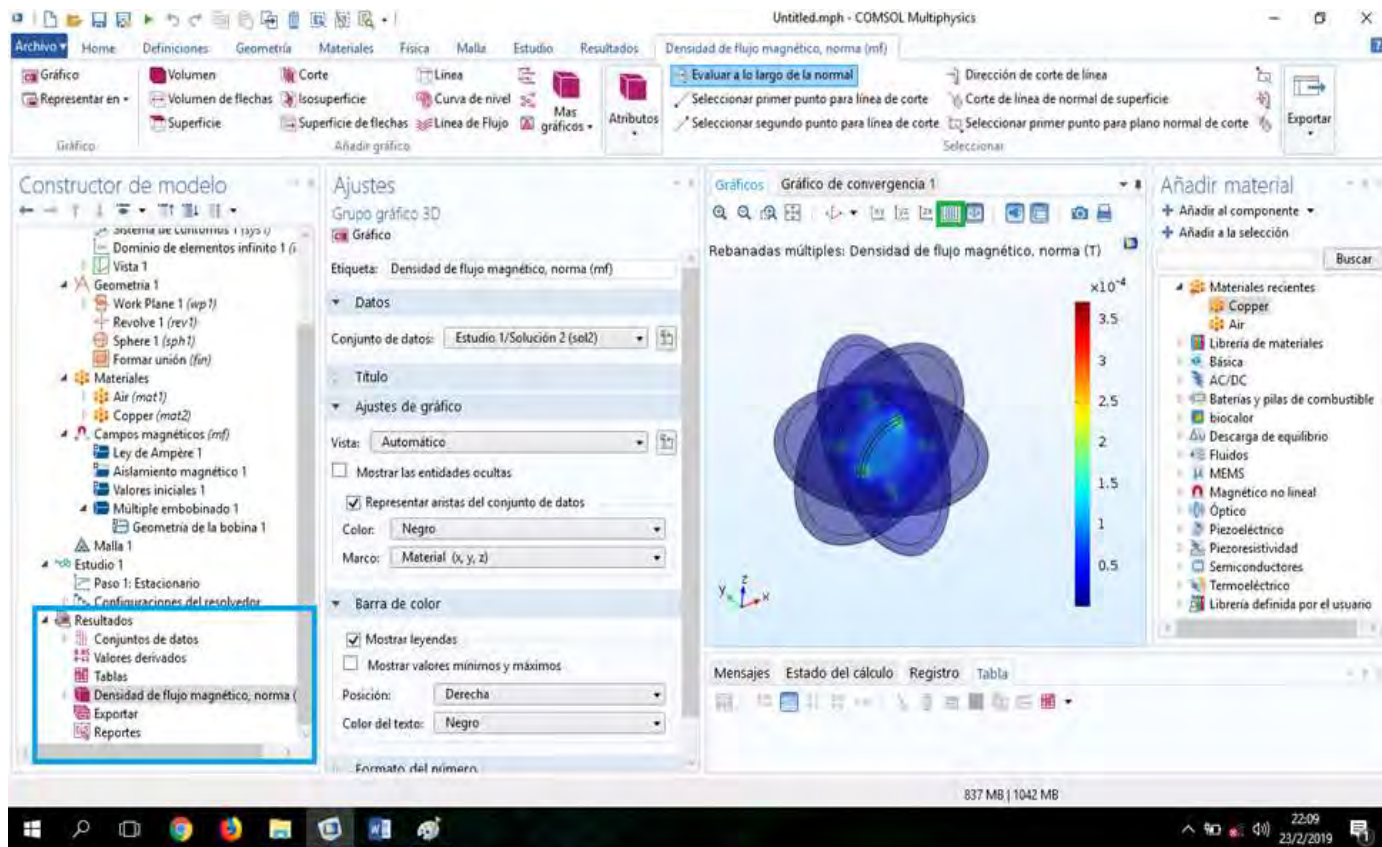
**Figura 42.****Ventana para calcular**

**Fuente:** Comsol

**Paso 20.**

En este paso deshabilitaremos la opción “Mostrar Rejilla” (Verde) para una mejor vista del gráfico.

En el apartado (Celeste) se creará Resultados distintos que hemos obtenido.

**Figura 43.***Ventana para deshabilitar**Fuente: Comsol*

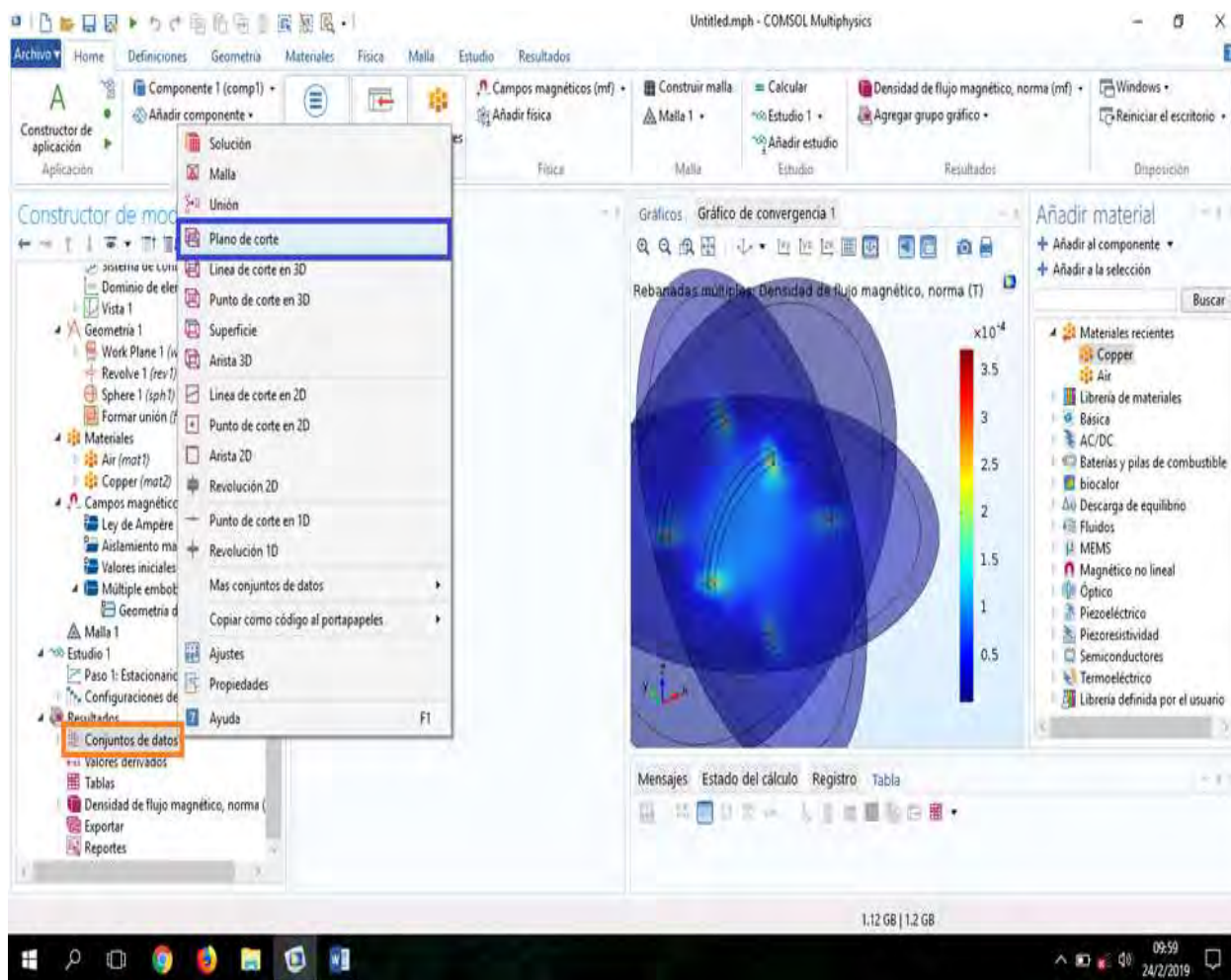
### 3.3.6. Creando un Plano de Corte y Visualizando las Gráficas

#### Paso 21.

Anti-Click en “conjunto de datos” luego nos dirigimos a “plano de corte”.

**Figura 44.**

**conjunto de datos” luego nos dirigimos a “plano de corte”.**



Fuente. Comsol

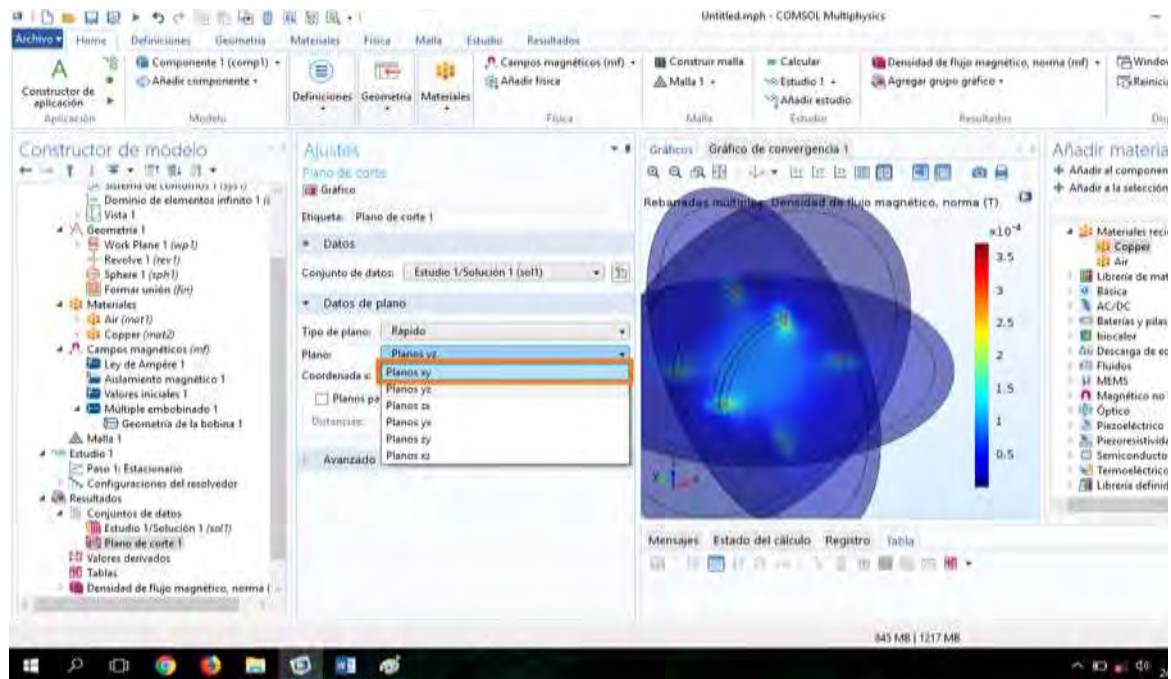


## Paso 22.

Seleccionamos “Plano xy”

**Figura 45.**

**Selección de planos**



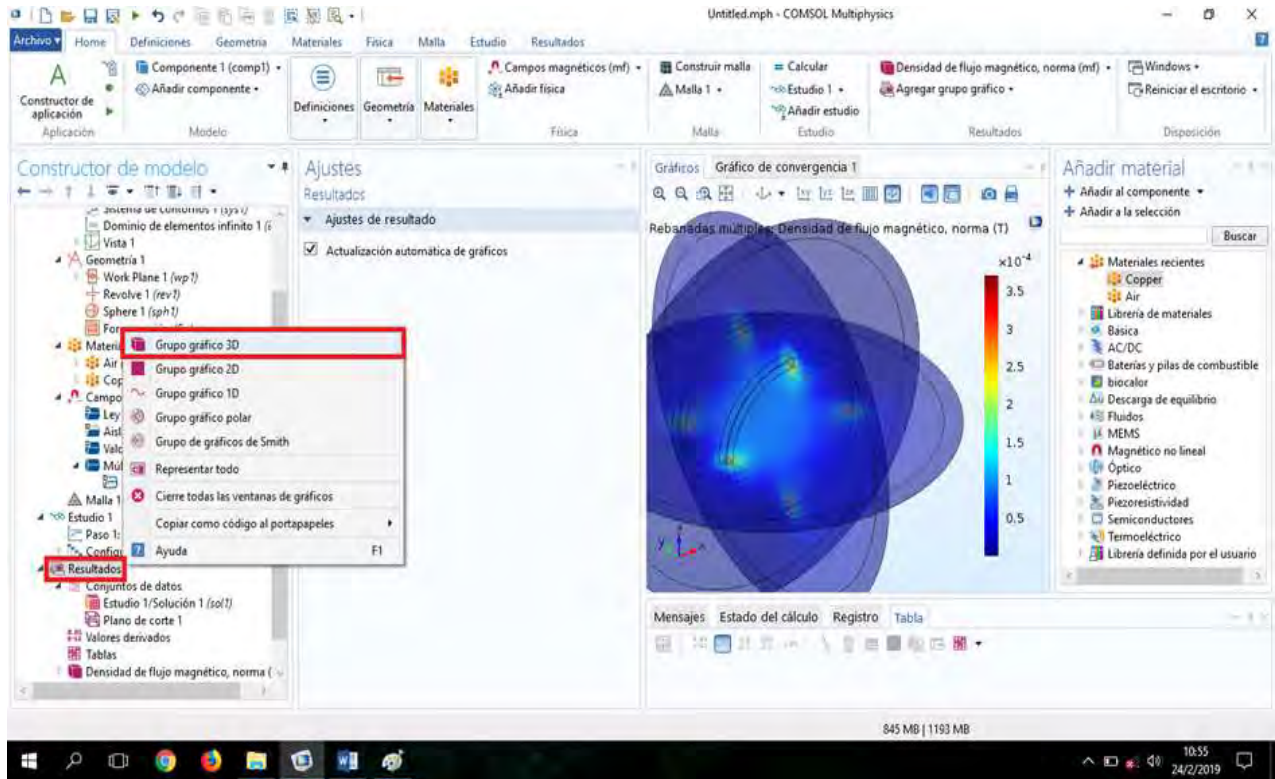
Fuente: Comsol

### Paso 23.

Vamos a “Resultados” Y sobre la pestaña “Grupo Gráfico 3D”

**Figura 46.**

*Tipos de grupos*



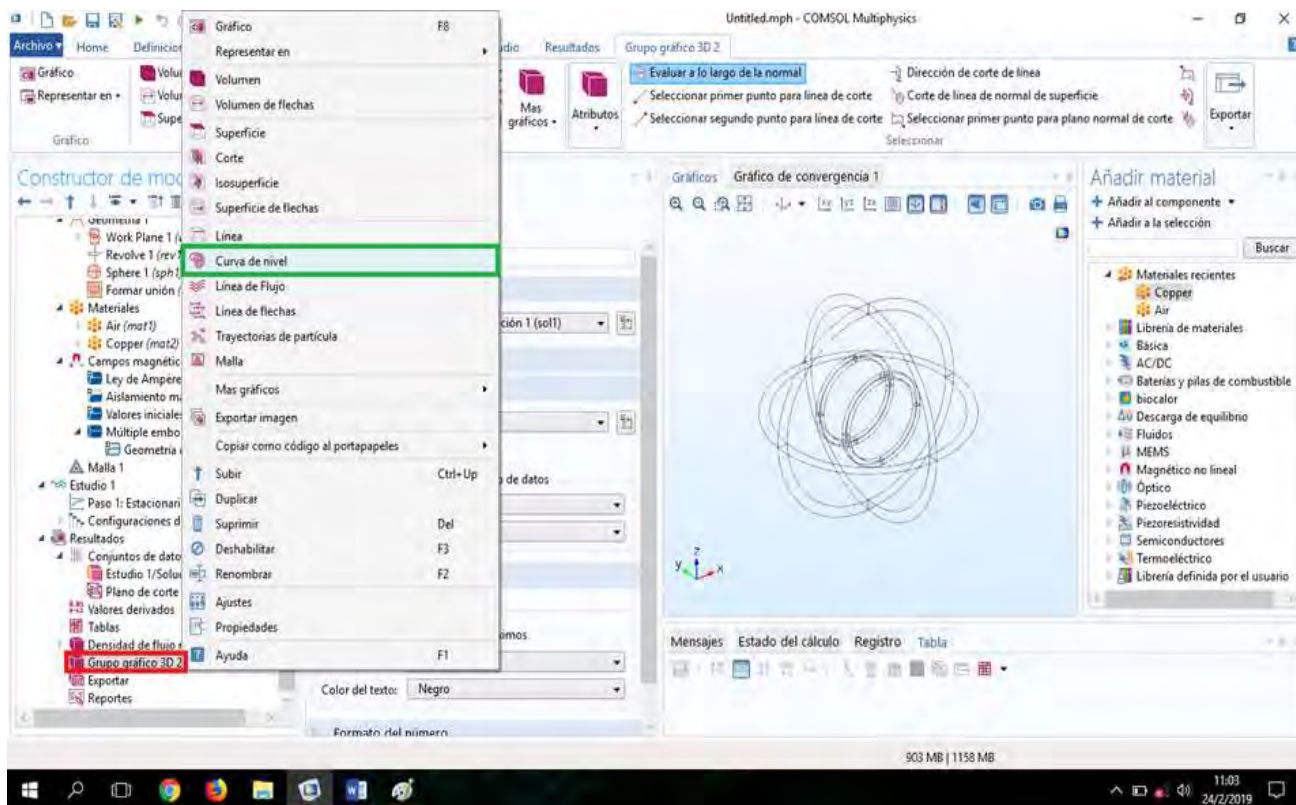
*Fuente:* Comsol

**Paso 24.**

Anti-Click a “Grupo de Gráfico 3D 2” luego a “Curva de Nivel”.

**Figura 47.**

*Para las curvas de nivel*



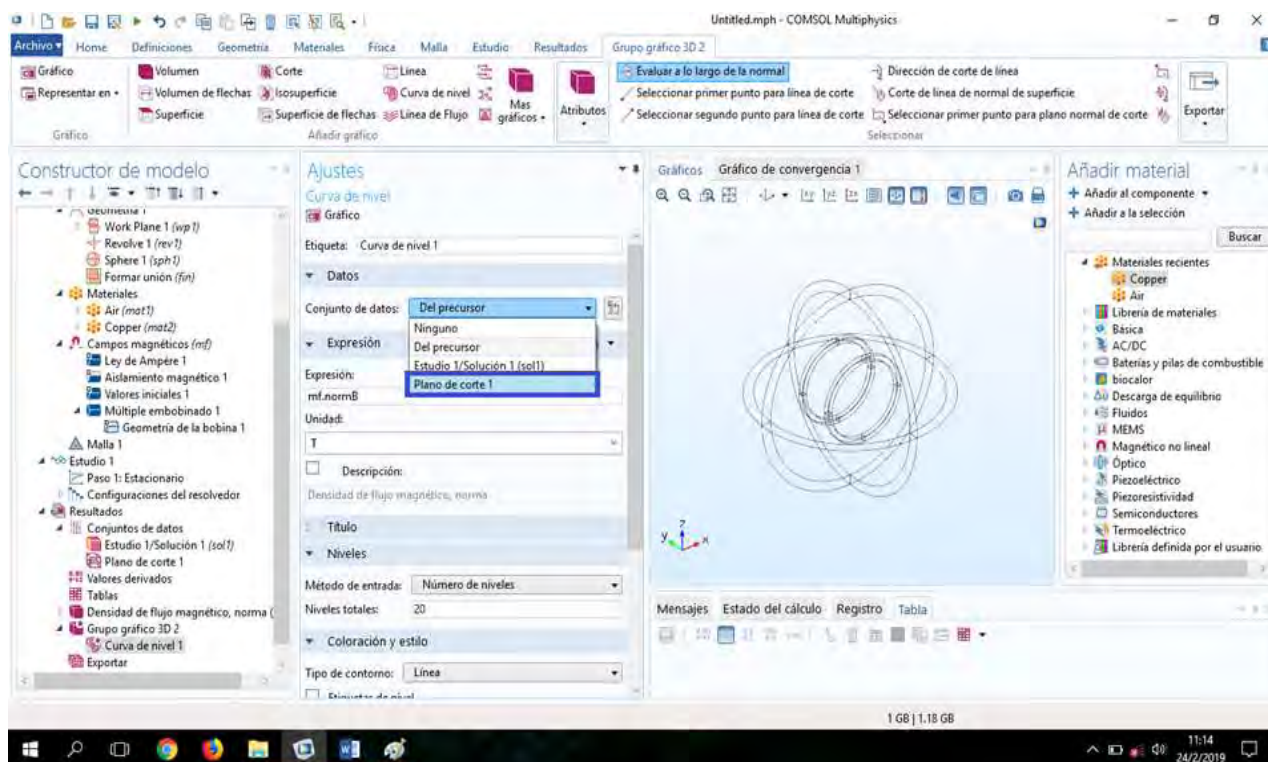
*Fuente: Comsol*

## Paso 25.

En “Datos” elegimos “Plano de Corte 1”

**Figura 48.**

*Plano de corte*



*Fuente: Comsol*

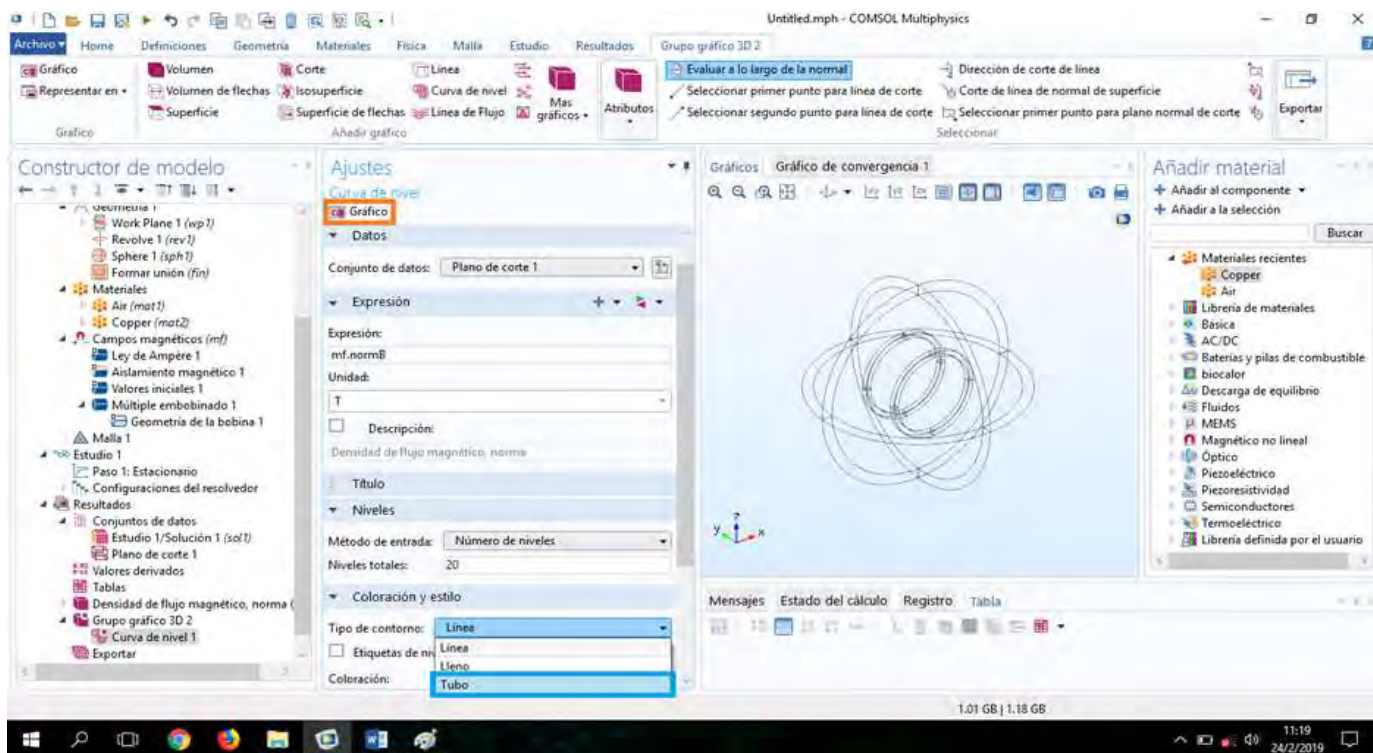


## Paso 26.

En “Coloración y Estilo” seleccionamos “Tipo de Contorno” y elegimos “Tubos” luego “Graficar”.

### Figura 49.

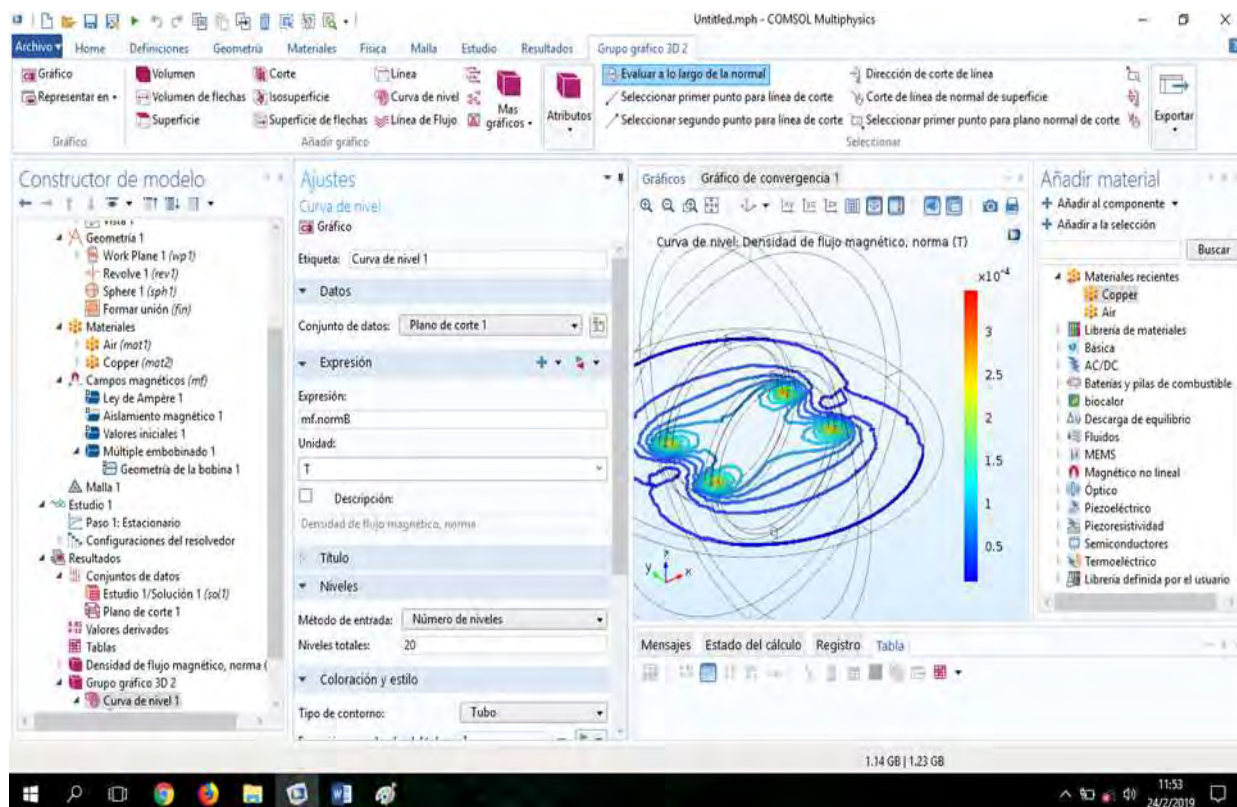
*Ajustes de curvas de nivel*



Fuente: Comsol

**Figura 50.**

*. Visualización de curvas de nivel*



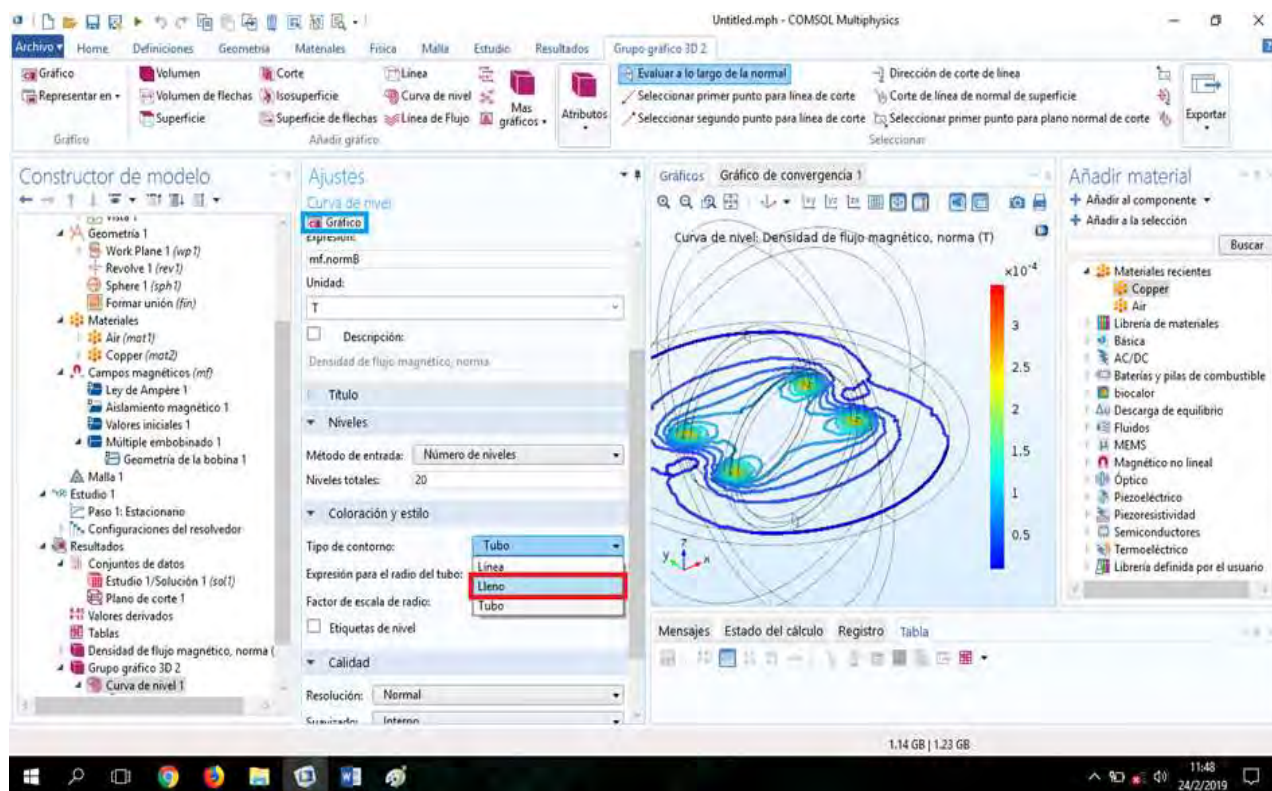
**Fuente:** Comso

**Paso 27.**

Cambiamos a “Lleno” y “Graficar”.

**Figura 51.**

*El radio de las curvas de nivel*

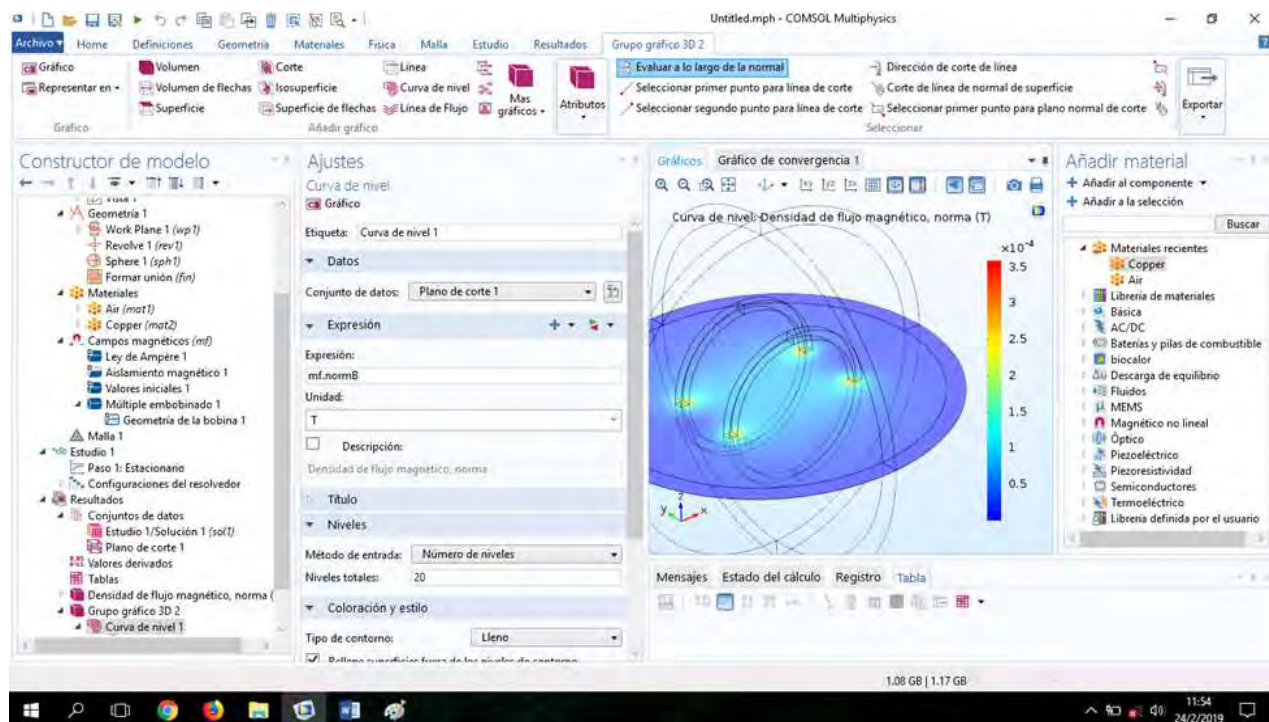


Fuente: Comsol



**Figura 52.**

*Mapa topográfico de la densidad de flujo magnético*



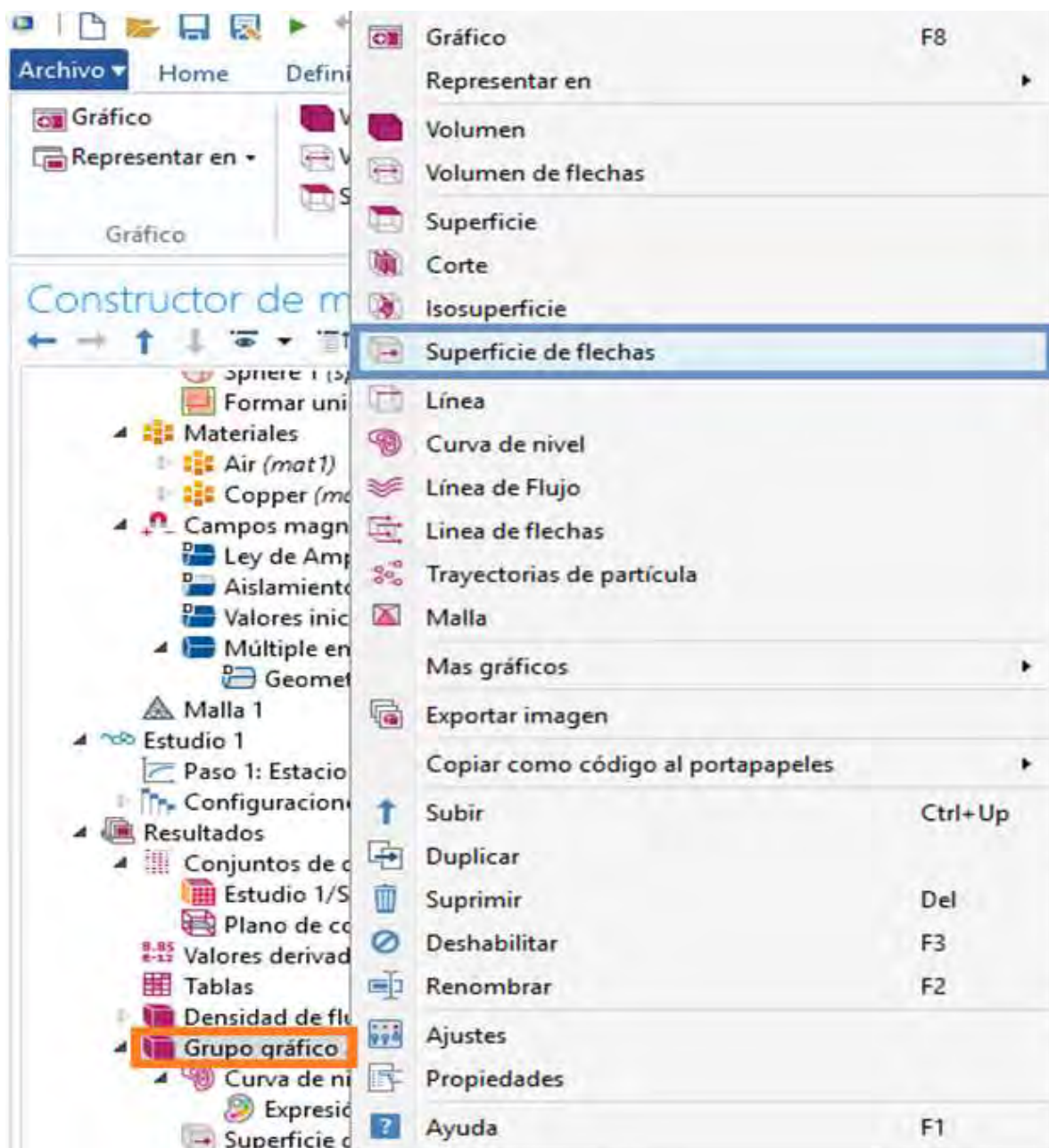
Fuente: Comsol

**Paso 28.**

Anti-Click “Grupo de Gráfico 3D ” y luego “Superficie de Flechas”.

**Figura 53.**

*Para la visualización del campo de direcciones*

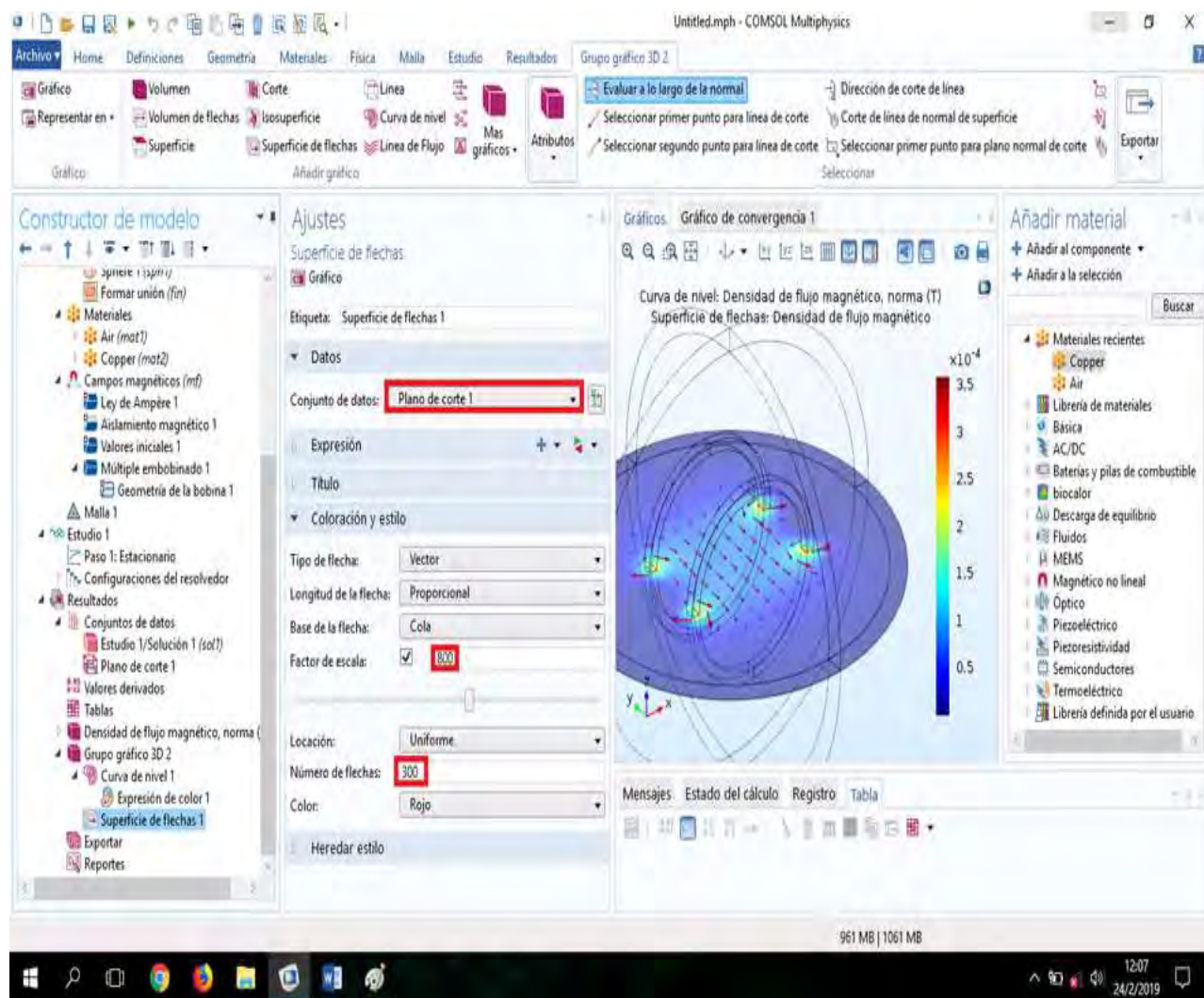


Fuente: Consol

-Variamos los datos como se ve en la imagen, con esto visualizaremos mucho mejor.

**Figura 54.**

### **Campo de dirección de la inducción magnética**



**Fuente:** Comsol

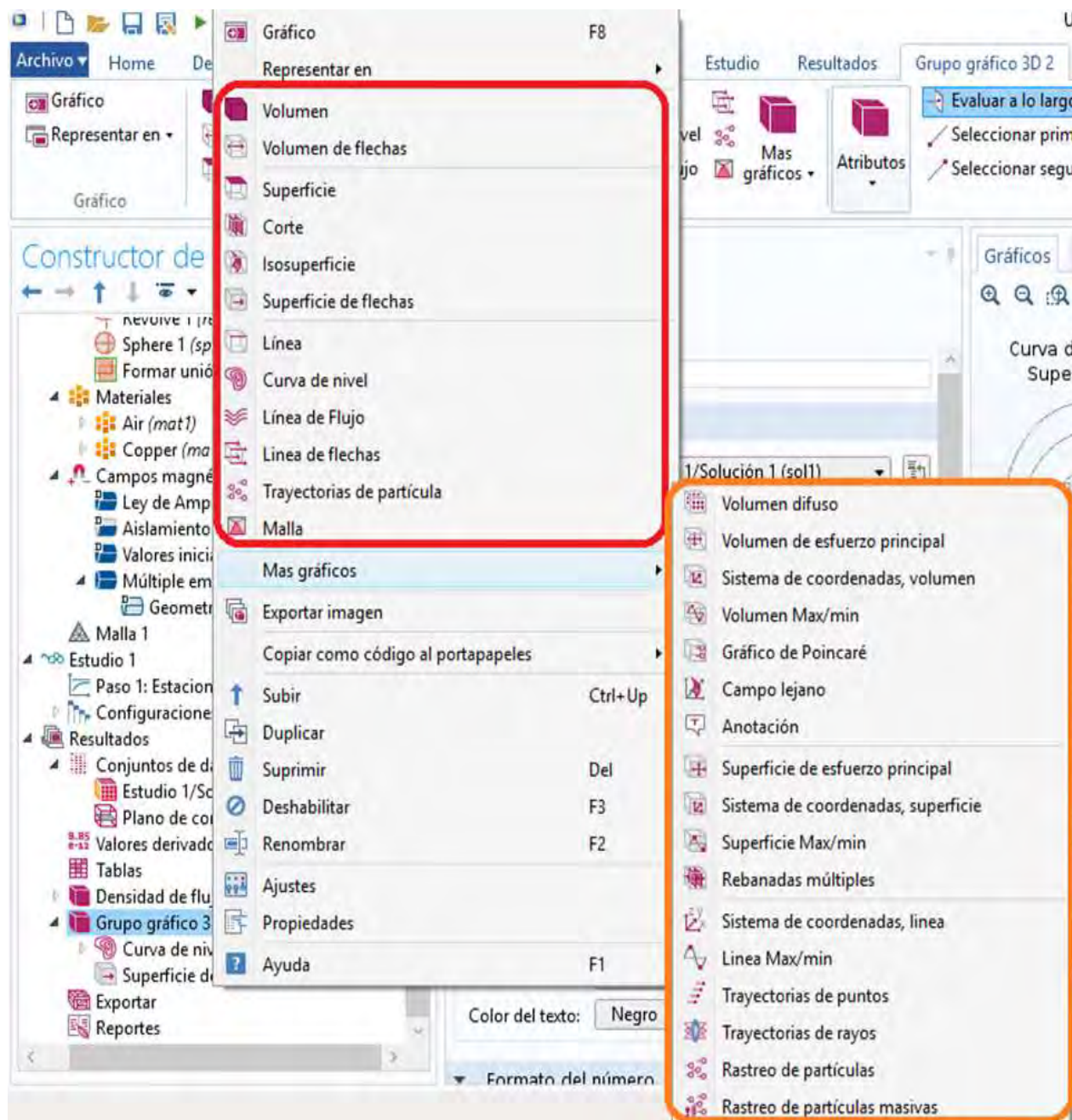
### **Paso 29.**

Anti-Click en “Grupo de Gráfico 3D ” observamos que tenemos varias opciones las cuales al seleccionar tendremos que ir a la opción de Graficar y nos mostrará los resultados correspondientes.



**Figura 55.**

*Ventana para visualizar la densidad del flujo magnético*



Fuente: Comsol

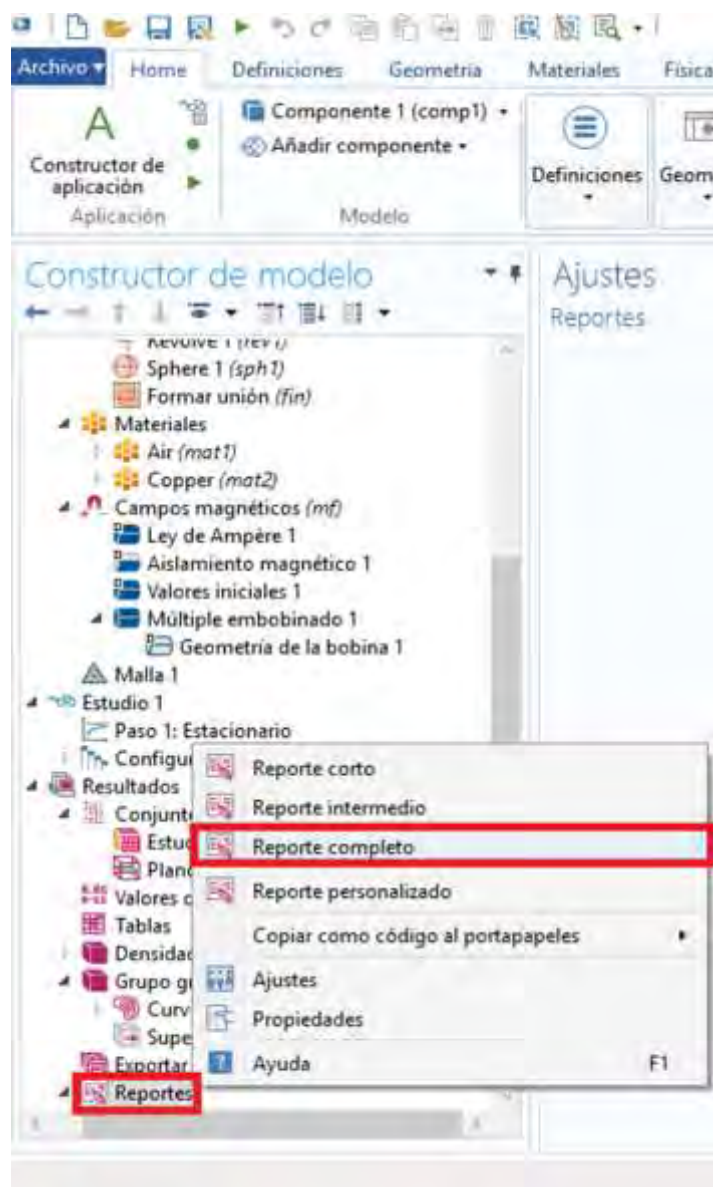
### 3.3.7. Exportación y Visualización de los Resultados

#### Paso 30.

En este paso en la parte izquierda aparecerá la opción de “Reportes” y le damos Anti-Click, se recomienda seleccionar Reporte Completo.

**Figura 56.**

Ventana de reportes



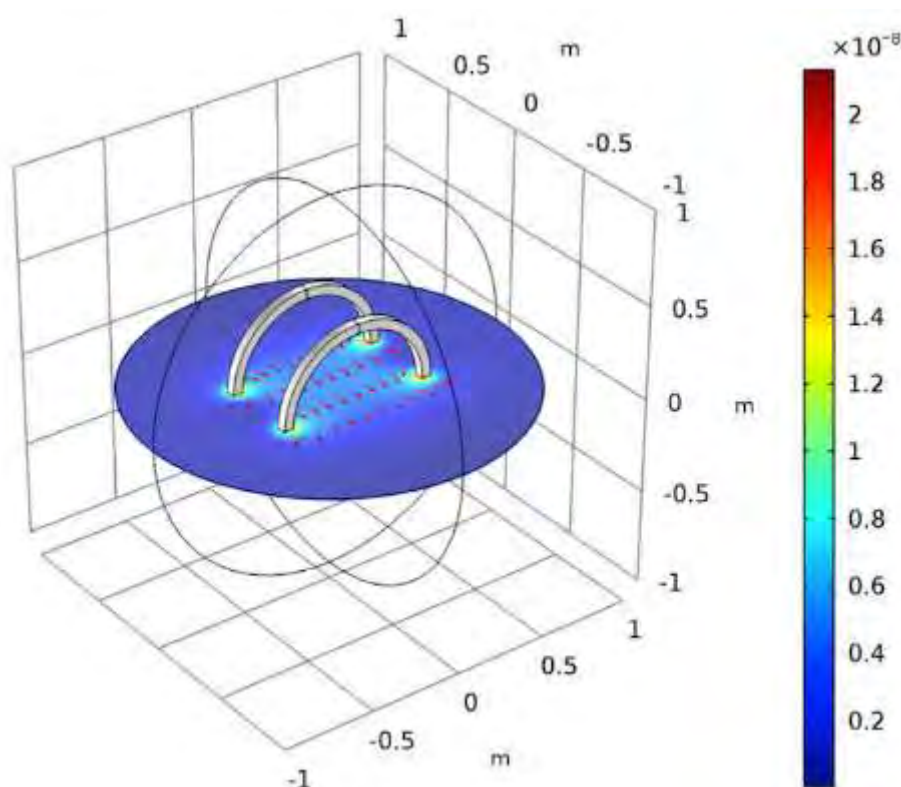
Fuente: Comsol



Finalmente podemos observar la distribución de campo magnético en la zona de experimentación podemos variar diferentes parámetros para observar la distribución de la inducción magnética, como por ejemplo la corriente eléctrica . Al final podemos visualizar la bobina y la inducción magnética como un campo de direcciones, como en la figura 53.

**Figura 57.**

*Simulación final que muestran las bobinas de Helmholtz y el campo de direcciones de la inducción magnética*



*Fuente:* Comsol

### **3.4. Diseño de planos de las bobinas de Helmholtz**

El diseño de los diámetros( $D$ ), las distancias de separación( $R$ ) entre bobinas y la secciones rectas( $\emptyset$ ) de las bobinas circulares fueron diseñadas en el Software Solidworks (software de diseño CAD 3D). El cual permitio encontrar las medidas de estas longitudes geométricos que establecen la construcción de una bobina circular de Helmholtz. En esta etapa del trabajo lo más importante es que los diámetros de estas bobinas coencidan espacialmente al momento del ensamblaje final. Para obtener finalmente un dispositivo de bobinas de Helmholtz en disposición triaxial(3D).

#### ***3.4.1 Planos de Diseños de Bobinas***

A continuación presento los tres planos de las tres bobinas de Helmholtz que detallan los parámetros geométricos que disponen dichas bobinas y acompañado de los planos de ensamblaje que detallan el armado o montaje de su disposición triaxial (3D) de dichas bobinas de Helmholtz.

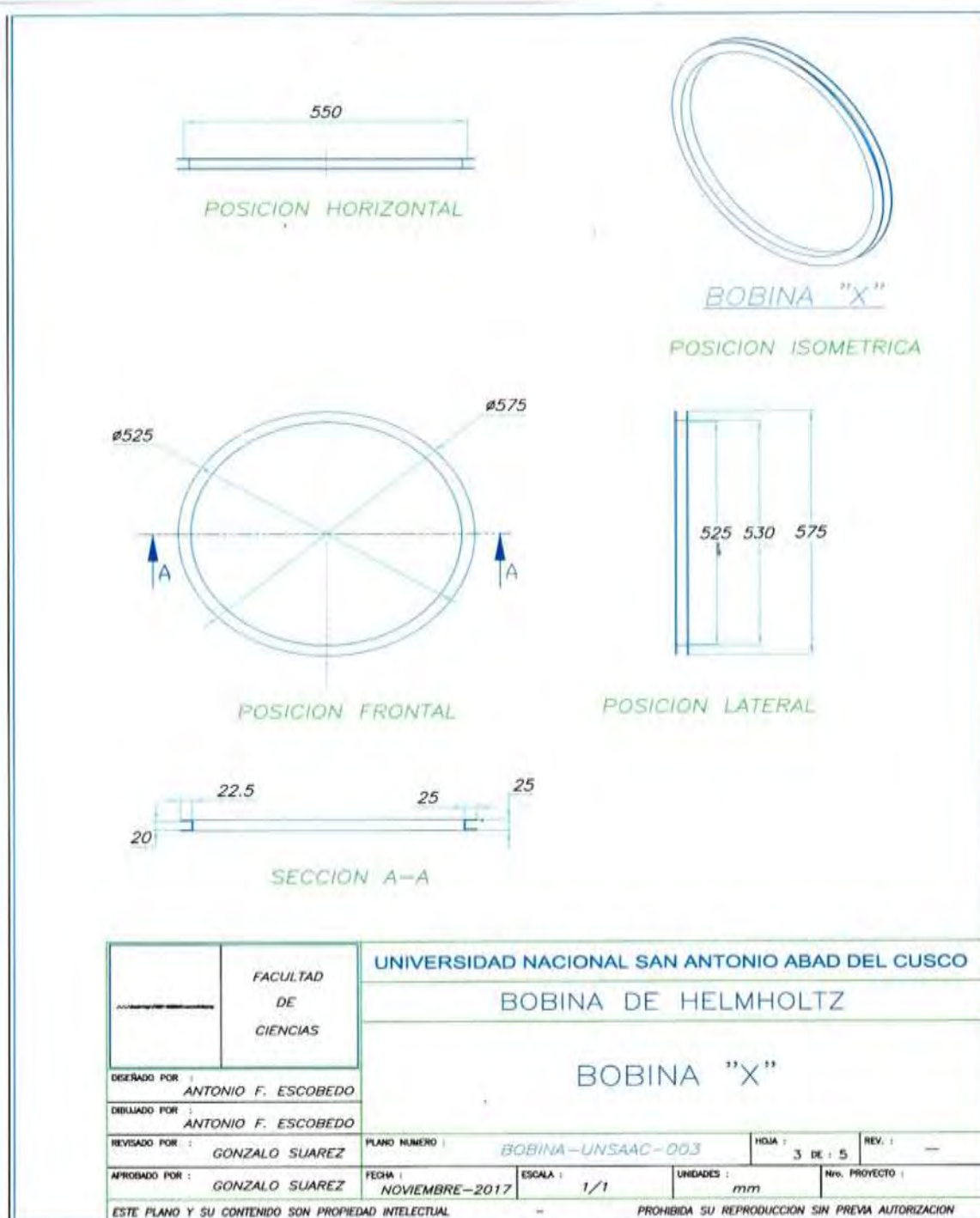
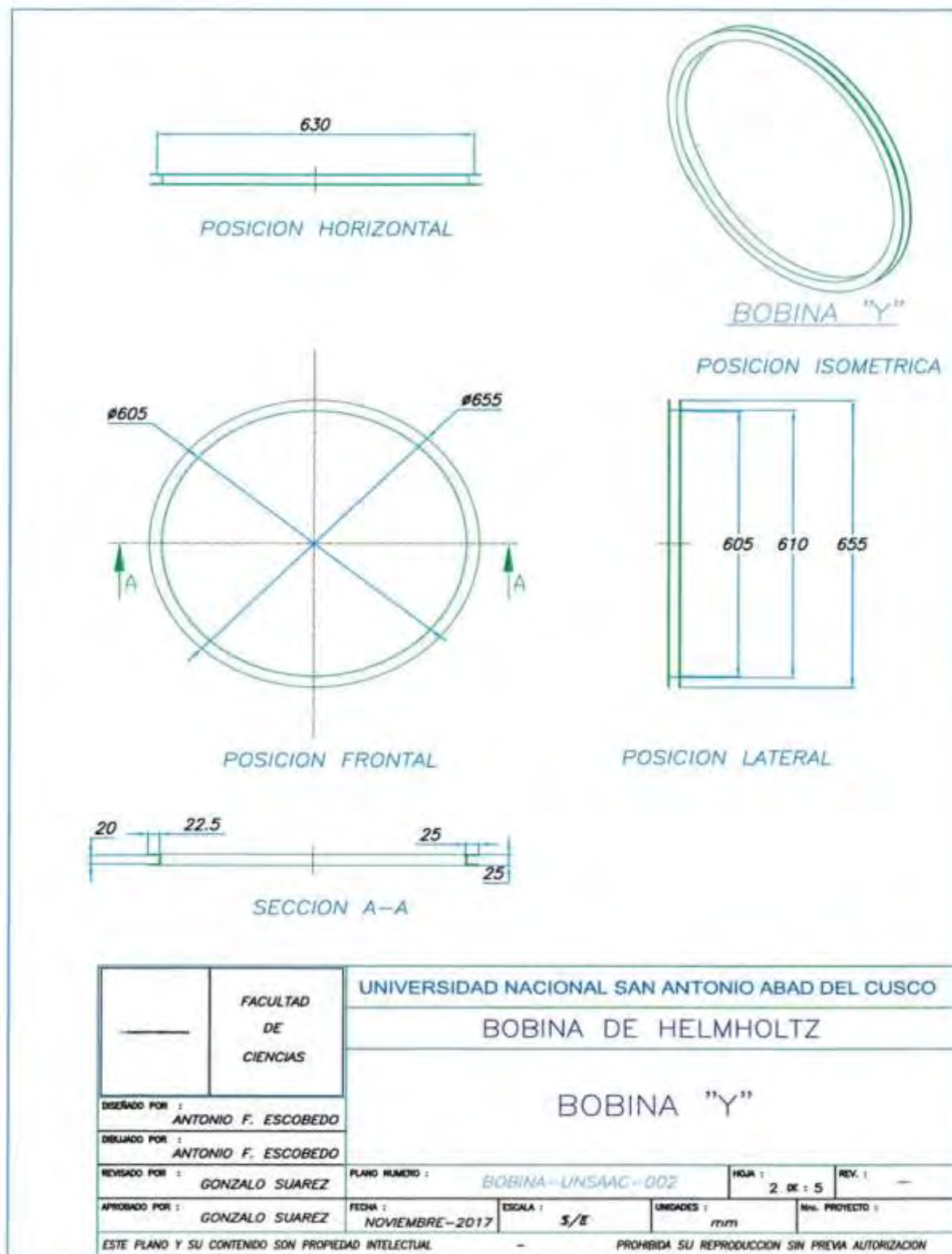
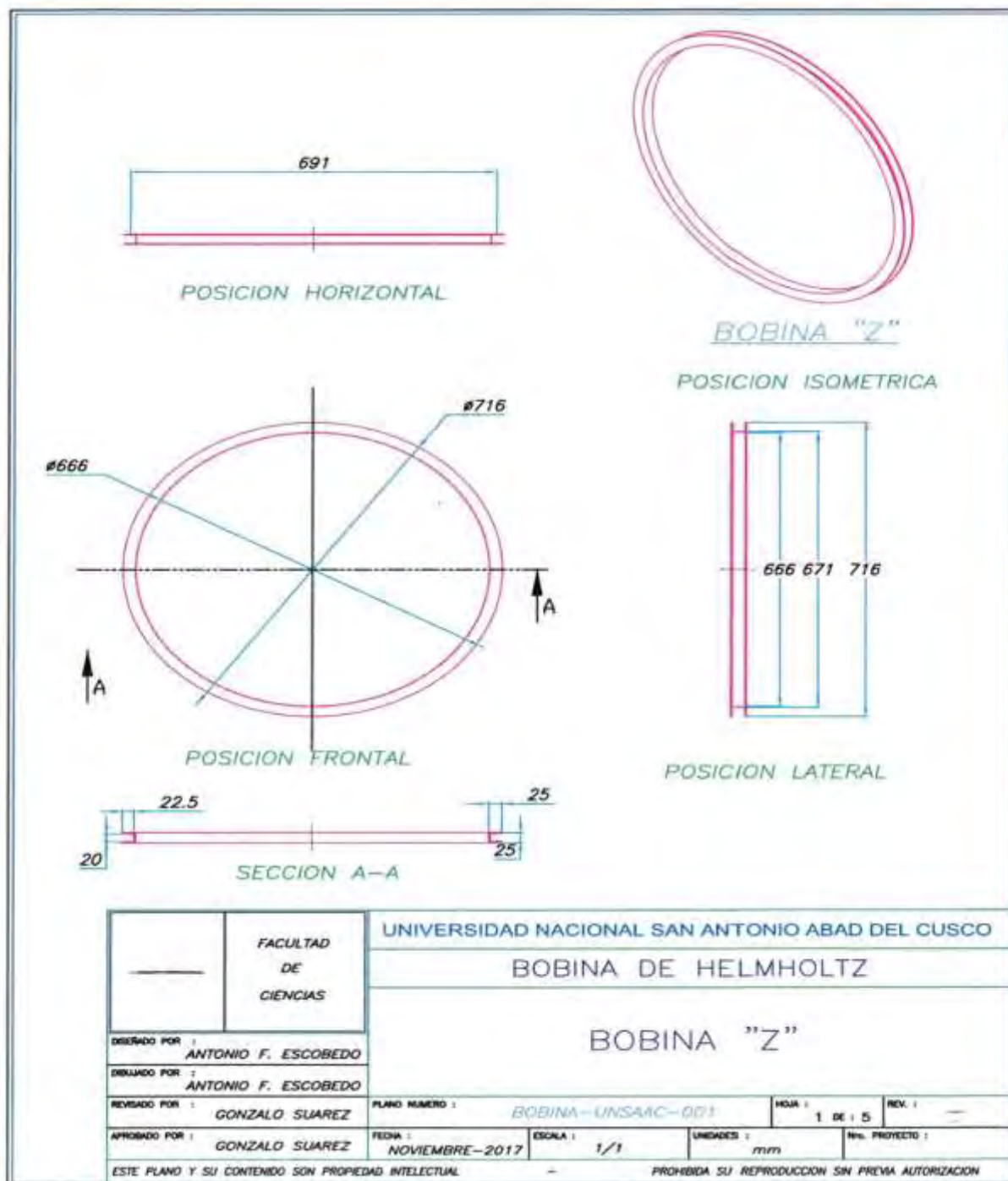
**Figura 58.***Plano de diseño bobina pequeña**Fuente: Diseño propio*

Figura 59.

## Plano de diseño bobina mediana



Fuente: Diseño propio

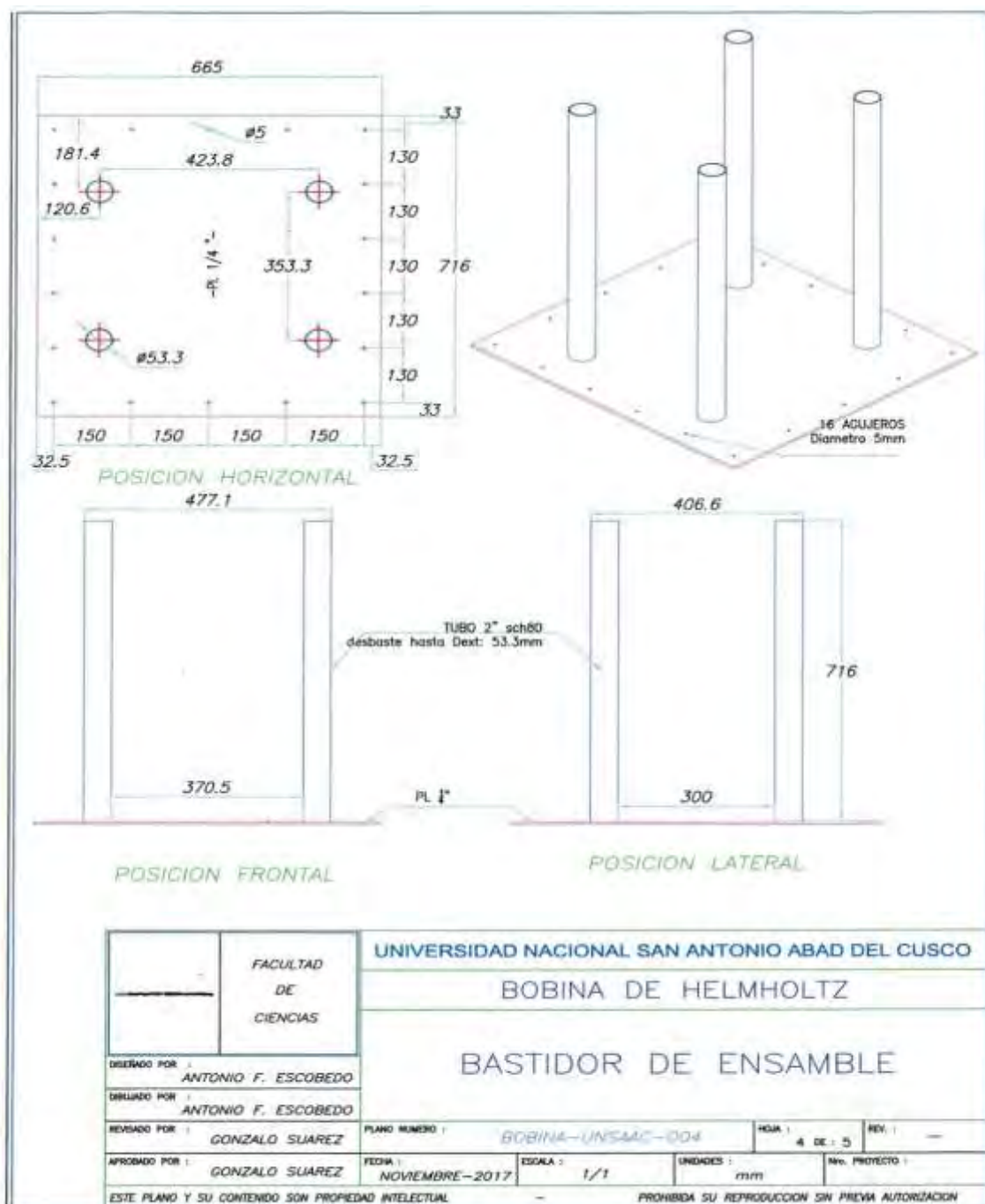
**Figura 60.***Plano de diseño de bobina grande**Fuente: Diseño propio*



**Figura 61**

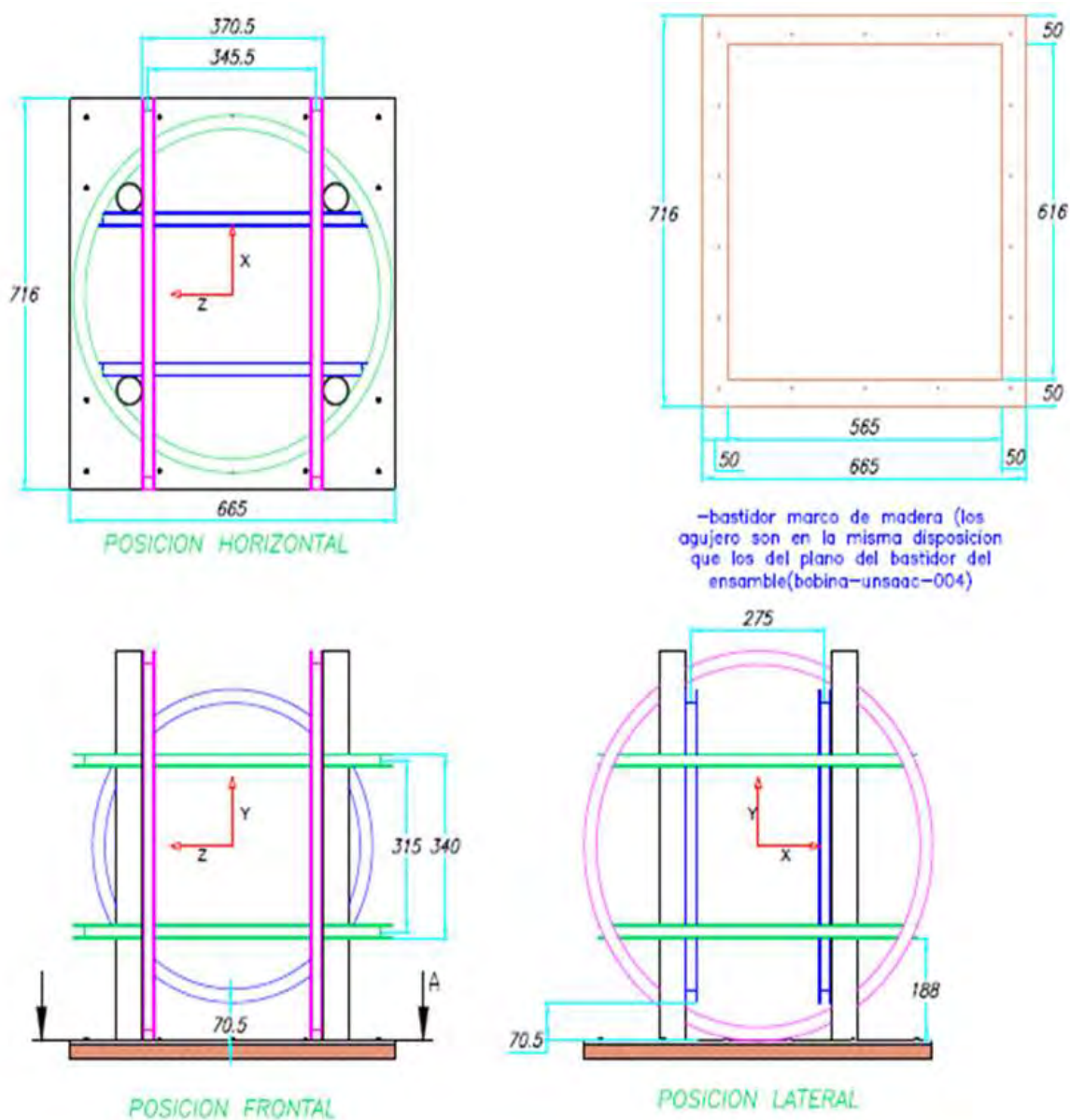
Plano de ensamble

Fuente: Diseño propio



**Figura 62.**

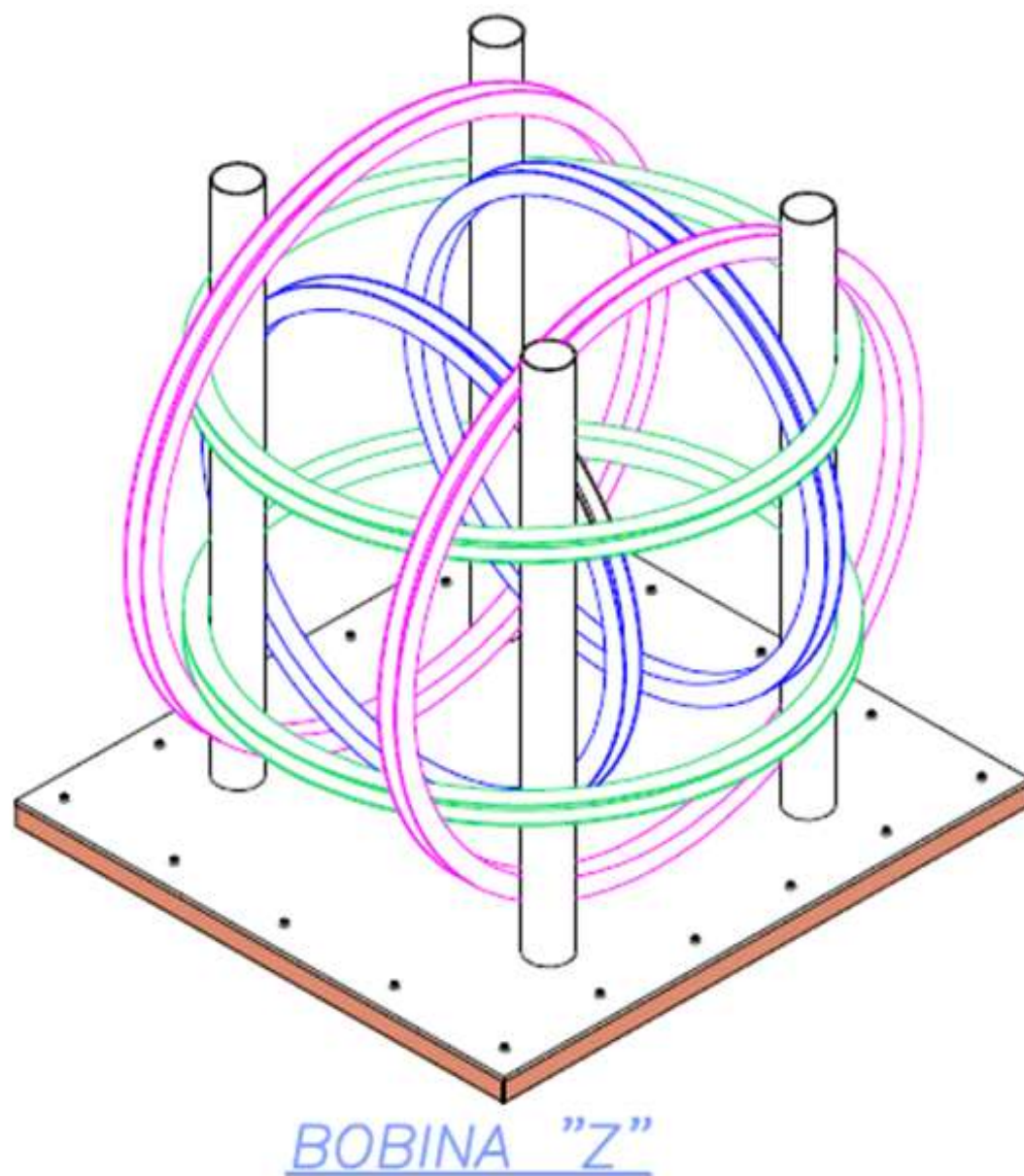
Plano de ensamble con vistas en distintas posiciones



Fuente: Diseño propio

**Figura 63.**

Diseño final de las bobinas de Helmholtz en la disposición triaxial(3D)



*Fuente:* Diseño propio



### 3.5. Procedimiento para la Implementación de las Bobinas

Para conseguir las bobinas de Helmholtz físicamente se tuvo que recurrir al apoyo de un técnico en fundición y un técnico en torno a quienes se les proporcionó las características geométricas indicadas para cada par de bobinas en dichos planos mencionados con anterioridad. Estas bobinas metálicas circulares son de aluminio, en lo posible de alta pureza (piezas reciclaves de autos). Los aros son de aluminio justamente por que este material es no magnético es decir, que no se comporta como imán, pues sobre estos aros se realiza el número de vueltas con cable de cobre esmaltado, por el cual circula corriente eléctrica y generará inducción magnética.

#### 3.5.1. Calculo del Número de Vueltas de las Bobinas de Helmholtz

La inducción magnética en el centro del eje de una bobina de Helmholtz está dado por la ecuación.

$$B = \frac{\mu_0 I N}{R} \frac{8}{5^{3/2}}$$

Se establecio trabajar con la misma inducción magnetica en las tres bobinas de Helmholtz, entonces podemos escribir la siguiente proporción matemática.

$$B_x = B_y = B_z$$

y reemplazando sus respectivos parámetros físicos se obtuvo la siguiente igualdad.

$$\frac{\mu_0 I_x N_x 8}{R_x 5^{3/2}} = \frac{\mu_0 I_y N_y 8}{R_y 5^{3/2}} = \frac{\mu_0 I_z N_z 8}{R_z 5^{3/2}}$$

- Donde  $I_x$ ,  $I_y$  y  $I_z$  son las corrientes en las respectivas bobinas de ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . y se ajustan experimentalmente para que sean constante e iguales

con una resistencia variable a través de sus circuitos eléctricos correspondientes.

- También  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$  son el número de vueltas de alambre de cobre en cada bobina ubicada en los plano xy, yz e zx.
- Igualmente  $R_x$ ,  $R_y$  y  $R_z$  son los radios de las bobinas.

Entonces como las corrientes son iguales ( $I_x = I_y = I_z$ ) y los demás términos físicos son constantes entonces la proporción matemática quedo en la siguiente forma e igualando a una constante de proporcionalidad " $k$ ".

$$\frac{N_x}{R_x} = \frac{N_y}{R_y} = \frac{N_z}{R_z} = k$$

Se tomo la bobina pequeña es decir la bobina de Helmholtz de eje " $x$ " cuyos aros los rebobinamos en un mismo sentido y con el número de vueltas de alambre de cobre esmaltado hasta cubrir su sección recta de los aros de aluminio. Observando que se llego a cubrir estos aros con 144 vueltas y como se conoce el radio de la bobina de eje " $x$ " entonces rápidamente se encontró el equivalente de la constante de proporcionalidad " $k$ " de la proporción matemática mostrada. Es decir:

$$\frac{N_x}{R_x} = k$$

$$\frac{144 \text{ vueltas}}{275 \text{ mm}} = k$$

$$k = 0.52363636 \dots$$

Luego se pudo decir que:

$$\frac{N_y}{R_y} = k$$

Entonces:  $N_y = kR_y = 0.52363636 \dots * 315 = 164 \text{ vueltas.}$

De la misma manera:  $N_z = kR_z = 0.52363636 \dots * 345 = 179 \text{ vueltas.}$

**Tabla 1.** Resumen de parámetros geométricos de cada bobina.

	<b><i>D(diametro)mm</i></b>	<b><i>R(radio)mm</i></b>	<b><i>N(número de vueltas)</i></b>
Bobina <i>x</i>	550.0	275.0	144
Bobina <i>y</i>	630.0	315.0	164
Bobina <i>z</i>	691.0	345.5	179

### 3.5.2. Implementacion de las Bobinas de Helmholtz y Conexiones

#### Eléctricas

En esta parte del trabajo se implemento las bobinas de Helmholtz sobre una base de madera tomando en consideración la sepracion de las bobinas de acuerdo a las dipsosicion de Helmholtz. Las conexiones eléctricas para cada bobina de Helmholtz de manera individual es en serie y cada una de ellas es alimentada por una fuente eléctrica del tipo switching y es controlada por un amperímetro conectado en cada una de ellas. Para igualar el valor de la inducción magnetica en cada una de ellas utilizamos un reóstato o resistencia variable de la marca Leybold.

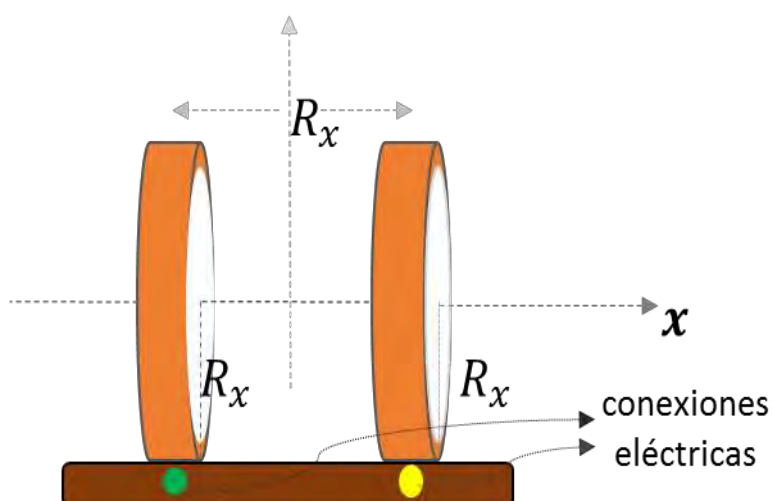
- Bobina de Helmholtz de eje "x"(bobina pequeña).

$$R_x = 275mm = 27.5cm = 0.275m$$

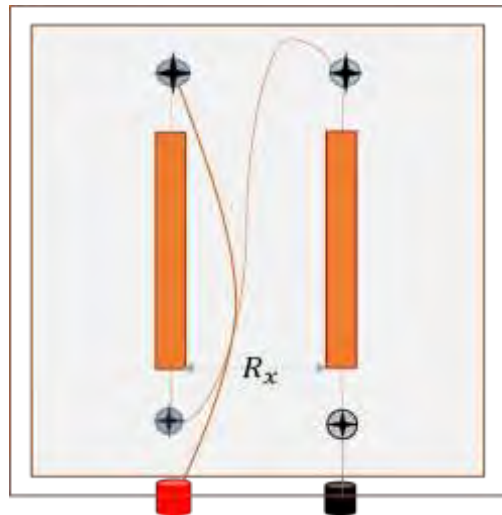
$$N = 144vuelatas$$

**Figura 63**

a) Implementación bobina pequeña



*b) Conexión eléctrica*



Fuente: Elaboración propia

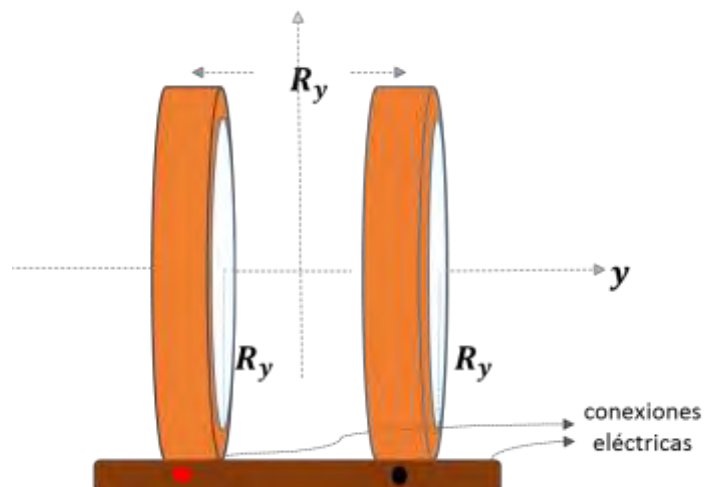
- Bobina de Helmholtz de eje "y".(bobina mediana)

$$R_y = 315 \text{ mm} = 31.5 \text{ cm} = 0.315 \text{ m}$$

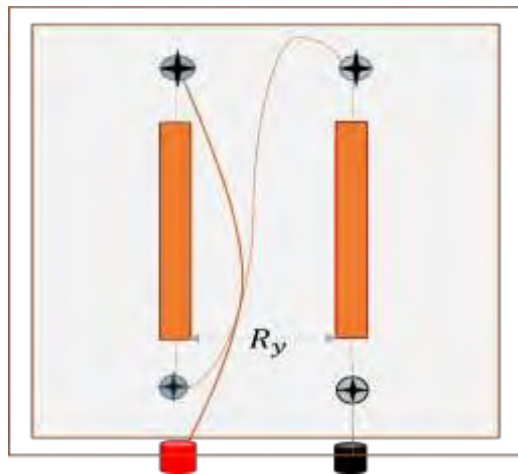
$$N = 164 \text{ vueltas}$$

Figura 64

*a) Implementación bobina mediana*



*b) Conexión eléctrica*



Fuente. Elaboración propia

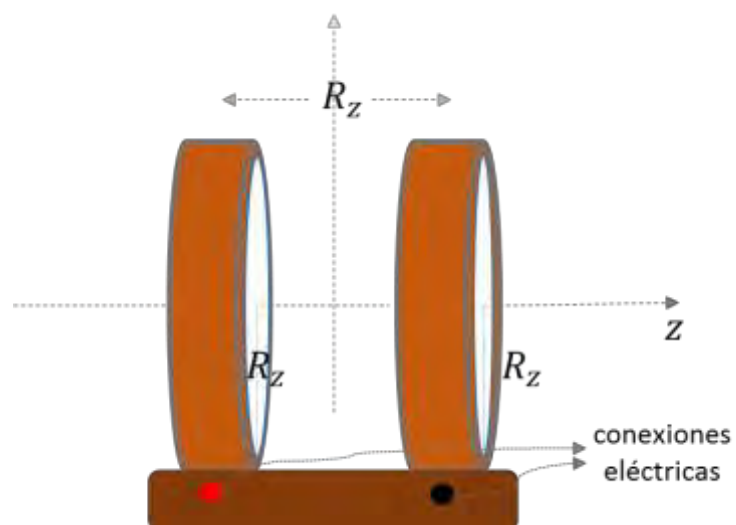
- Bobina de Helmholtz de eje "z".(bobina grande)

$$R_z = 345 \text{ mm} = 34.5 \text{ cm} = 0.345 \text{ m}$$

$$N = 179 \text{ vueltas}$$

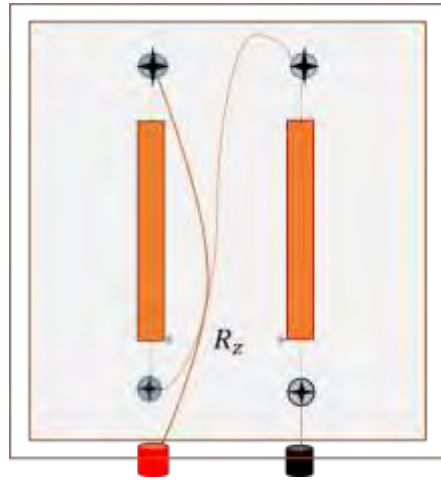
*Figura 65*

*a) Implementación bobina grande*



Fuente. Elaboración propia.

*b) Conexión eléctrica*



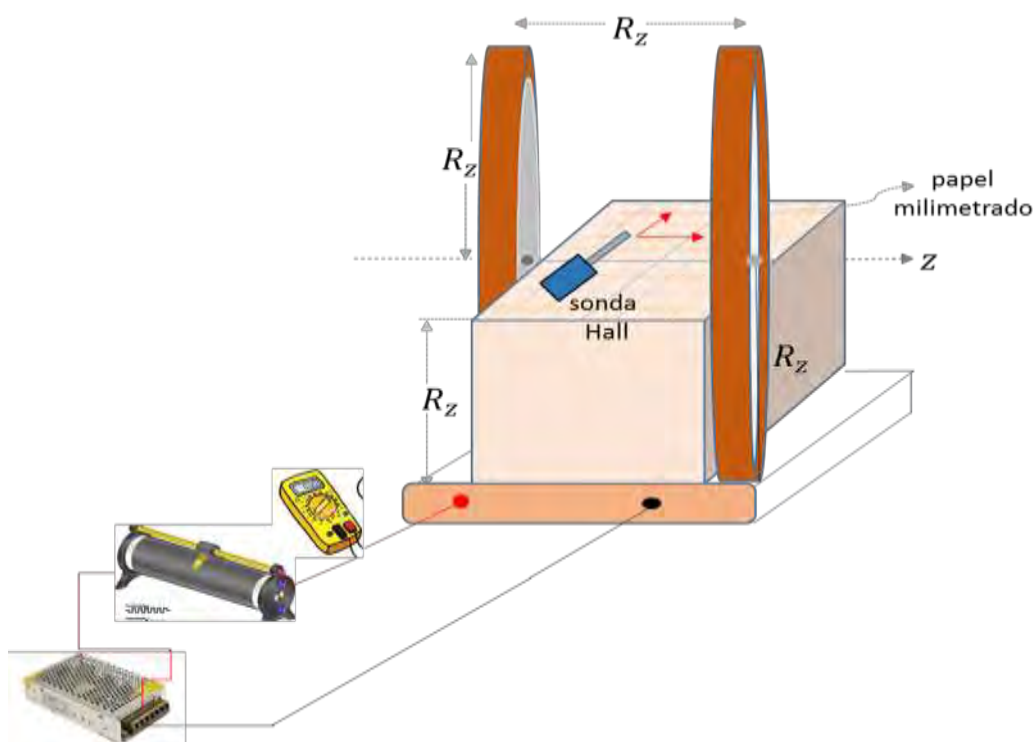
Fuente. Elboración propia

### 3.5.3 Mapeo de las Bobinas de Helmholtz

El mapeo se realizó con un Gausimetro modelo 5170/5180, instrumento portable. Utiliza una sonda Hall que mide la densidad del flujo magnético en unidades de gauss o teslas, cuyo rango de medición es de 0.01 mT a 3.00 T. este instrumento es capaz de medir campos magnéticos estáticos generados por corriente (D.C) y (A.C) y acontinuacion se muestra el mapeo respectivo con sus respectivos cuadro de datos de las tres bobinas de Helmholtz.

**Figura 66.**

*a) Mapeo bobina grande*



Fuente. Elaboración propia

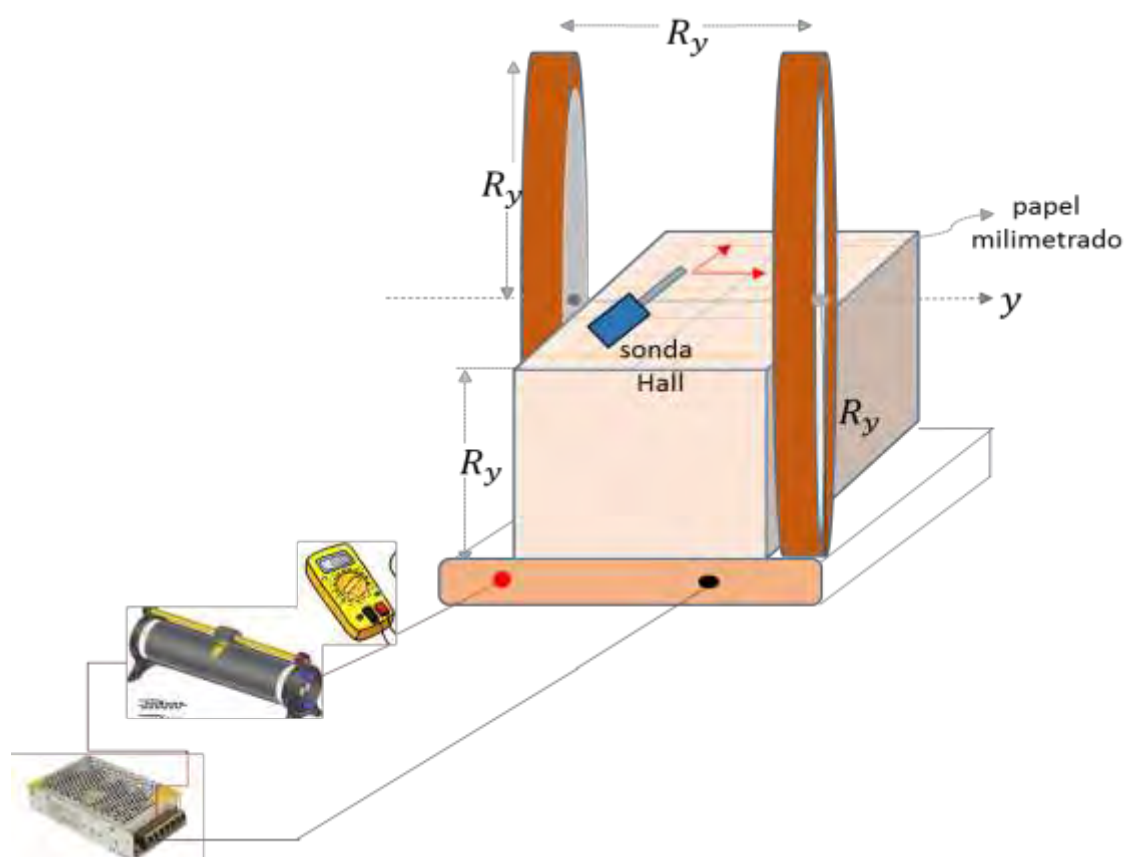


### CUADRO 1: Datos bobina grande

		Eje de coordenada X																											
		-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
-34	16.1	15.6	14	12.6	11.2	10	9.7	9.5	9.1	9.1	8.6	8.3	8.5	8.5	8.6	8.9	9.5	10	10.7	12	12	16.9							
-33	13.4	12.7	15.9	14	12.7	13.8	11.3	10.8	10.3	10	9.4	9.6	9.5	9.3	9.4	9.4	9.6	9.8	10	10.2	10.7	11.3	12.6	14.9	17.3	20	21		
-32	23.2	20.5	17.4	15.3	13.8	12.6	11.8	11.2	10.7	10.3	10.3	9.9	10.1	9.9	9.9	10	10.2	10.6	11	11.3	11.3	12.3	13.4	14.9	17	20	25.6		
-31	24.2	22.1	19.5	17.2	15.7	14.6	13.5	12.8	12.2	12	11.5	11.4	11.3	11.2	11.6	11.6	11.7	12	12.8	12.5	14.2	15.3	16.6	18	20.1	22.8	25.2		
-30	24.5	22	19	17.8	16.1	15	14.1	13.2	12.8	12.4	12.2	12	12.2	12.2	12.2	12.2	12.5	12.9	13.4	14.2	15.2	16.2	17.5	19.4	21.2	23.7	26.9		
-29	24.4	22.7	20.6	18.9	17.2	15.9	14.1	13.4	14.1	13.4	13.1	13	12.7	12.3	12.5	12.5	12.6	13	13.2	13.4	14.2	16.2	17.7	19	21	23	25.7		
-28	23.9	22.4	20.6	19.1	17.5	16.5	15.8	14.9	14.3	13.9	13.6	13.4	13.3	13.2	13.3	13.5	13.9	14.3	15	15.4	16.2	17.2	18.1	20	21.1	23	26.3		
-27	23	21.9	20.4	19.2	18	17	16	15.4	14.9	14.6	14.1	14.2	14.5	13.7	13.7	13.8	14.3	14.7	15.2	15.7	16.5	17.6	18.4	19.6	21	22.2	23.3		
-26	22.5	21	19.9	19	17.9	16.9	16.2	15.7	15.2	14.7	14.2	14.1	14.1	13.8	14.1	14.6	14.9	15.2	15.8	16.5	17.3	18	19	18.8	21	22.4	23.4		
-25	22	21.1	20.3	19.4	18.6	17.8	17.2	16.7	16.2	15.7	15.4	15.4	15.4	15.1	15.1	15.2	15.6	15.8	16.2	16.8	17.4	18.1	18.8	19.5	20.5	21.7	22.6		
-24	21.4	20.5	20	19.6	18.7	17.9	17.3	18.8	16.2	15.9	15.8	15.6	15.5	15.5	15.7	15.6	15.8	16.2	16.4	17	17.7	18.4	19	19.8	20.5	21.2	21.6		
-23	21.2	20.4	20	19.3	18.7	18.1	17.8	17.4	17.1	16.6	16.2	16	16	16.1	16	16.2	16.6	16.8	17.1	17.9	18	18.6	19.3	20.1	20.7	21.2	21.7		
-22	19.5	19.1	18.3	18	17.5	17.4	16.8	16.4	16.2	15.9	15.8	15.7	15.7	15.6	15.9	16.2	16.4	16.7	17.1	17.4	17.8	18.3	18.9	19.3	19.8	20.3	20.7		
-21	18.9	18.3	18.1	17.5	17.2	16.9	16.3	16	15.9	15.5	15.6	15.3	15.4	15.4	15.7	15.8	16.1	16.2	16.4	16.8	17.1	17.8	18.3	18.7	19	19.5	19.8		
-20	18.2	18.1	17.5	17.1	17	16.7	16.2	15.9	15.4	15.4	15.4	15.4	15.3	15.1	15.2	15.1	15.6	15.8	16	16.3	16.5	17.3	17.2	17.9	18	18.4	18.8		
-19	19.2	19	18.4	18.3	18.2	18	17.5	17.1	16.9	17.1	16.8	16.8	16.5	16.6	16.5	16.7	16.8	17.5	17.3	17.6	17.8	18.1	18.4	18.8	19.1	19.2	19.7		
-18	19.3	18.8	18.7	18.8	18.6	18.4	18	17.6	17.3	17.3	17	16.9	17	17.1	17.1	17.3	17.2	17.5	17.8	17.9	18.2	18.3	18.8	18.9	19.1	19.4	19.7		
-17	19.7	19.6	19.4	19	18.9	18.7	18.6	18.3	17.9	17.8	17.8	17.6	17.8	17.5	17.7	17.7	17.7	17.9	18	18.4	18.5	18.8	18.9	19	19.1	19.4	19.4		
-16	19.7	19.4	19.3	19.2	19	18.9	18.7	18.5	18.7	18.6	18.5	18.6	18.5	18.5	18.4	18.5	18.5	18.7	19	19.1	19.1	19.5	19.5	19.6	19.8	20			
-15	16.9	16.8	16.8	16.6	16.6	16.3	16.3	16	16	15.9	15.8	15.8	15.8	15.6	15.4	15.6	15.7	15.9	16.1	16.1	16.2	16.6	16.6	16.5	16.8	16.9	17.1		
-14	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	17.3	17.3	17.1	16.9	16.8	16.8	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	16.7	17.1	17.1	17.1	17.6	17.6	17.6	17.6	17.7	17.8		
-13	17.7	17.6	17.6	17.5	17.7	17.7	17.3	17.4	17.4	17.2	17.1	16.9	17	17.2	17.2	17.2	17.2	17.3	17.4	17.4	17.4	17.6	17.7	17.8	18	17.7	17.8		
-12	18	18.1	18.1	18.1	18.2	17.8	17.8	18.8	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	17.7	17.7	17.7	17.6	17.6	17.6	17.7	17.7	18.2	18.3	18.3	18	18.1	18		
-11	19	19.1	19.1	19.1	18.9	18.9	18.9	18.7	18.8	18.5	18.5	18.5	18.6	18.6	18.6	18.6	18.5	18.5	18.6	18.8	18.7	18.9	18.9	19	18.8	18.8	18.8		
-10	19.7	19.7	19.8	19.8	19.7	19.8	19.7	19.7	19.7	19.6	19.6	19.8	19.6	19.6	19.7	19.9	20	20	20.2	19.9	19.9	19.9	20	19.9	20.2	20.2	19.9		
-9	18.1	18.2	18.1	18.1	18.2	18.2	18.3	18.2	18.3	18.2	18.2	18.2	18.1	18	18	18.1	18	18.2	18.3	18	18.1	18.1	18.3	18.3	18.4	18.5	18.4		
-8	18	18.2	18	18.2	18.3	18.1	18.2	18.2	18.3	18.3	18.4	18.3	18.2	18.2	18.1	18.2	18	18.2	18.3	18.4	18.2	18.3	18.4	18.5	18.4	18.2			
-7	18.4	18.5	18.3	18.4	18.6	18.6	18.5	18.5	18.5	18.4	18.2	18.2	18.2	18.4	18.4	18.4	18.4	18.2	18.2	18.2	18.2	18.4	18.3	18.3	18.2	18.3	18		
-6	18.8	19	19.1	19.1	19.1	19	19	19	19.2	19.1	19.1	19.1	19.1	18.9	18.9	18.9	18.9	18.9	19	19	19	19.1	19.1	19.1	19.1	19	18.8		
-5	18	18	18.2	18.2	18.6	18.5	18.5	18.6	18.7	18.7	18.7	18.7	18.7	18.7	18.7	18.8	18.8	18.6	18.7	18.6	18.7	18.7	18.7	18.6	18.7	18.7	18.2		
-4	19.1	19.2	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.7	19.7	19.7	19.8	19.2	20	20	19.8	19.9	19.9	19.7	19.6	19.7	19.5	19.6	19.5	19.5	19.6	19.7	19.3		
-3	19	19.3	19.3	19.3	19.3	19.2	19.6	19.4	19.2	19.1	19.3	19.1	19.2	19.4	19.2	19.3	19.2	19.3	19.3	19.3	19.3	19.3	19.5	19.5	19.1	19	18.9	18.8	
-2	19.7	19.7	19.8	19.8	20	20	20.2	20.4	20.4	20.9	20.9	20.9	21.1	21.1	21.1	20.9	20.9	20.9	20.9	20.9	20.7	20.9	20.8	20.8	20.8	20.8	20.5		
-1	19.7	19.7	20	20	20.4	20.2	20.1	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	20.2	19.9	19.9	19.9	19.9		
0	18.7	18.7	18.8	18.8	18.9	18.9	18.9	18.9	18.9	18.9	18.9	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	18.9	18.8	18.8	18.8	18.7	18.7	18.5	18.4			
1	20	20.2	20.3	20.4	20.3	19.7	19.8	19.6	19.7	19.6	19.4	19.5	19.5	19.4	19.2	19.2	19.2	19.2	19.2	19.2	19.2	19.2	19.3	19	19.1	18.9	18.8	18.7	
2	18.9	19	19	19.1	19	18.9	19.1	19.2	19.2	19	19.1	19.2	19.2	19	18.9	19.9	18.8	19	18.7	18.8	18.8	18.7	18.8	18.5	18.6	18.1	18		
3	19.1	19.1	19	19.2	19	19	19.1	19	19	19	18.7	18.8	19	18.8	18.8	18.9	18.9	18.7	18.6	18.9	18.7	18.9	18.8	18.8	18.5	18.7	18.6	18.3	
4	18.8	19	18.9	19	19.1	18.9	18.9	18.8	18.9	18.7	18.7	18.9	18.5	18.3	18.2	18.1	18.3	18.2	18.1	17.9	18	17.8	17.7	17.6	17.7	17.5	17.4		
5	18.2	18.3	18.2	18.1	18	18	18	17.9	18	17.6	17.6	17.6	17.7	18	17.6	17.6	17.7	17.7	17.6	17.6	17.8	17.6	17.6	17.5	17.5	17.3	17.3		
6	18.2	18.2	18.6	18.7	18.6	18.5	18.5	18.4	18.3	18.1	18.1	17.9	18.1	17.9	18.1	17.8	18.1	17.9	17.8	18.1	17.8	17.8	17.8	17.8	17.6	17.5	16.7		
7	18.9	18.8	18.8	18.9	18.9	18.9	18.9	18.9	18.4	18.2	18.2	18.1	17.9	18	18	18.1	18	18.2	18.1	18.2	18.1	17.8	17.9	18	18	17.9	18		
8	18.5	18.7	19	18.9	18.8	18.7	18.7	18.3	18.5	18.5	18.4	18.2	18.1	18.2	18.2	17.7	17.8	17.7	17.6	18	17.5	17.6	17.5	17.3	16.9	17			
9	19.1	19.3	19.1	19.1	19	19	19	18.9	18.8	18.6	18.5	18.7	18.8	18.5	18.6	18.6	18.5	18.5	18.5	18.6	18.5	18.3	18.4	18.1	18.3	18.5	18.4		
10	19.1	19	19.1	19	19.1	19	19.2	19	19	18.9	18.6	18.5	18.6	18.6	18.6	18.5	18.3	18.4	18.2	18.3	18.1	18	18.3	18.1	18	18.1	18.2	18.2	
11	19.4	19.2	19.1	19.1	19	19	18.9	18.7	18.4	18.4	18.1	18	18	17.8	17.7	17.9	17.8	17.9	17.6	17.8	17.8	17.7	17.9	17.8	17.6	17.8	17.6	17.8	
12	19.1	19.1	19	18.8	19	18.9	18.6	18.7	18.6	18.5	18.3	18	18.1	17.9	17.9	17.5	17.3	17.4	17.2	17.1	17.2	17	16.9	16.8	16.5	16.5	16.5		
13	19.6	19.4	19.2	19.2	19	19.1	18.8	18.8	18.3	18	17.9	17.8	18	17.7	17.8	17.7	17.6	17.5	17.7	17.6	17.5	17.6	17.7	17.9	18	18.1	18		
14	19.2	19.1	19.3	19.3	19	19	18.9	18.7	18.3	18.6	18.5	18	17.9	18.1	17.9	18	17.9												

**Figura 67.**

*a) Mapeo bobina mediana*



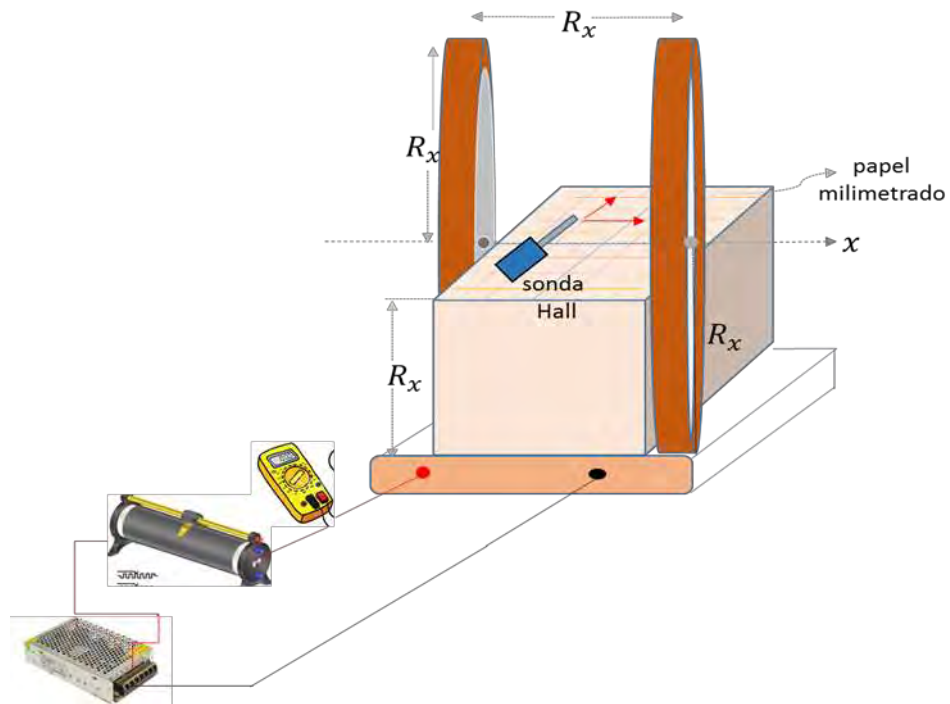
Fuente. Elaboración propia

## CUADRO 2: Datos bobina mediana

		Eje de coordenada Z																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
		-32	-31	-30	-29	-28	-27	-26	-25	-24	-23	-22	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
Eje de coordenada Y	-32	16.7	29	26.6	38.5	36.4	35	24.1	25.4	24.9	24.3	22	22.5	20.9	20.4	20	19.9	21	20.7	17.5	17.2	18.2	18.4	17.4	17.7	17.4	17.4	17.3	17.9	18.2	18	18.3	18	18	19.1	20.6	20	21	21.1	21	19.3	18.2	19.3	20.4	18.6	20.4	20.1	21.6	21.5	22	19.7	22	22.5	23.6	24.1	23.6	25	26	26.4	28.4	29.4	31.7	32.8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
	-31	13.6	19.5	29.7	31.6	31.4	31	25.1	25	24.1	24.1	22.1	22.4	20.9	20.7	19.8	19.6	21.4	21	17.2	17.2	17.9	18.5	17.8	17.9	17.5	17.4	18.1	18.3	18.3	18.5	18	18	19.1	19.2	20.7	20.1	21.1	21.1	19.3	18.4	19.4	20.3	18.6	20.1	20.7	21.3	21.6	21.9	21.7	22	23.2	23.7	23	24	25.1	26	27.4	27.8	29	29.2																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
	-30	12	16.9	23.3	25.3	24.6	25.4	25.3	24.7	24.7	23.6	21.6	21	20.5	20.5	19.7	19.9	21.3	21.2	17.1	17.1	18	18.5	17.6	17.8	17.7	17.7	18.1	18.3	18.5	18.6	18.1	18.2	19.2	20.8	20.2	21	21.2	19.4	18.5	19.3	20.1	18.9	21	20.6	21.1	21.5	21.5	19.6	21.4	21.9	21	23.3	22.7	23.2	24.2	24.2	26	26.1	26.9																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
	-29	11	14.8	19.4	21.4	22.4	22.7	22.9	23	23.4	22.3	20.5	21.2	20	20.3	19.5	19.4	21	20.7	17.3	17.3	17.9	18.5	17.7	18	18	17	17.7	18.5	18.4	18.7	18.7	18	18	19.2	19.5	20.5	20.3	20.9	21.3	19.5	18.7	19.6	19.6	20.1	20.8	21	21.7	21.7	19.5	21	21.7	22.5	23	24	24.2	24.5	24.5	27	28																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
	-28	10.4	13	17.1	19	19.9	21.6	21.2	21.8	21.7	21.7	21	20	21.4	19.4	20	18.9	19.5	20.9	20.7	17	17.4	18	18.5	17.8	17.9	17	17.8	18.7	18.2	18.8	18.7	18.2	18.2	19.3	19.5	20.6	20.5	20.5	21	19.3	18.7	19.6	20.3	18.9	20	20.6	20.9	21.4	21.9	21.4	20.7	21.1	22	22.6	21.4	22.5	22.4	23.2	23	24.5	24.5	27.1	28.1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
	-27	10	12.7	15.3	17	17.9	18.1	19.5	20.4	20.6	20.7	19.2	20.1	18.9	19.5	18.5	18.19	21	20.3	17	17.5	18.1	18.3	19.3	19.3	18	17.5	18.5	19.4	18.9	18.8	18.2	18.5	19.6	20.6	20.4	20.4	21.3	19.5	18.6	20	20.1	18.7	18.7	20.5	20.7	21.3	21.2	19.2	20.4	20.9	21.4	21.9	20.5	20.7	21.3	21.5	21.8	21.2	20.1	21.1	18.8																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
	-26	9.6	12	14	15.9	16.3	17.7	18.2	19.3	19.4	19.9	18.3	20.1	18.4	18.8	18	18.8	20.4	20.2	16.9	17.3	18	18.1	18.7	17.8	17.9	17.7	18.8	19.9	18.9	18.3	18.8	18.7	18.5	19.8	19.7	20.5	20.3	20.5	21.3	19.3	18.6	19.4	19.4	20.7	21.4	19.8	20.4	20.5	20.4	20.5	19.9	20.5	18.6	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9	17.2	18.1	17.4	17.2	17.9

**Figura 68.**

a) Mapeo bobina pequeña



Fuente. Elaboración propia

CUADRO 3. Datos bobina pequeña

		Eje de coordenada X																				
		-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eje de Coordenada Z	-28	10.1	9.3	11	10.8	10.1	9.9	9.5	9.4	9.1	9.1	9.2	8.9	9	9.2	9.3	9.3	9.7	10	10.3	9.3	9.1
	-27	18.8	15	13.5	12.3	11.3	10.8	10.4	10	10.1	9.8	10	9.8	9.9	10.3	10.6	11	11.6	12.7	13.7	15.7	18.8
	-26	26.5	20	16.6	14.4	13	12	11.4	10.9	10.9	10.5	10.1	10.5	10.8	11	11.5	12	13	14.3	16.6	19.9	24.9
	-25	29.8	24	18.9	16.4	14.6	13.7	13	12.3	12	11.6	11.7	11.5	12	12.2	12.8	13.6	14.8	16.1	18.8	23	26.8
	-24	30.2	25.4	20.3	17.9	16	15.1	14.2	13.6	13	12.8	12.8	13	13.4	13.6	14.2	15	16.3	18.3	20.9	25.7	28
	-23	23	23.4	21.2	19.2	18	16.8	15.6	15.1	14.6	14.3	14.1	14.3	14.8	15	15.9	16.6	17.9	19.3	21	26.4	28.4
	-22	23.1	22.9	20.6	19	17.7	16.5	15.8	15.4	14.7	14.6	14.6	14.9	15	15.7	16.4	17.1	18.5	20	21.9	23.5	25.8
	-21	25.3	24	22.5	21	20	18.9	18.4	17.5	17.1	17	17	16.8	17.1	17.4	17.6	18.5	19.4	20.7	22	23.8	24.7
	-20	23.4	22.3	21.2	19.9	19.2	18.1	17.7	17.2	17	16.9	16.7	17	17.3	17.7	18.5	19	20.1	21.2	22.4	23.7	25
	-19	22.8	22	21	20.2	20	19.5	19	18.5	18.3	18.4	18.1	17.9	18.1	18.6	19	19.8	20.5	21.5	22.6	23.5	24.3
	-18	22.6	21.9	21.5	20.8	20.1	19.7	19.5	18.9	18.6	18.7	18.7	19	19.1	19.5	19.7	20.6	21.3	21.9	23	23.7	24.6
	-17	23.5	23	22.4	21.8	21.3	20.9	20.6	20	19.6	19.9	19.9	19.5	19.7	19.9	20.1	20.9	21.2	22.2	22.5	23.2	23.7
	-16	22.3	22	21.8	21.2	20.9	20.6	20.3	20.2	20.1	19.9	20.3	19.8	20.1	20.4	20.7	21.3	21.6	22	22.5	23.1	23.7
	-15	21.5	21.2	20.8	20.5	20.3	20	19.6	19.5	19.3	19.4	19.6	19.8	19.9	20.1	20.4	20.8	21.1	21.4	21.9	22.3	22.6
	-14	21.2	21.1	20.6	20.4	20.1	19.9	19.8	19.6	19.7	19.6	19.7	19.9	19.9	20.1	20.3	20.5	21	21.1	21.5	22	22.2
	-13	22.3	22.1	21.9	21.8	21.6	21.5	21.2	21.1	21	21.1	20.6	20.9	21	21.2	21.4	21.6	21.9	22	22.3	22.4	22.5
	-12	21.2	21.1	21	20.9	21	20.9	21	20.5	20.6	20.6	20.8	21	21.1	21.2	21.2	21.4	21.7	21.9	22	22.1	22.5
	-11	20.5	20.3	20.2	20.2	20.4	20	20.1	19.8	19.9	20.1	20.1	20	20.1	20.2	20.2	20.4	20.6	20.7	20.8	20.9	21
	-10	20.4	20	20.4	20.2	20.3	20.2	20.2	20.3	20.1	20.1	20	19.9	20	20.2	20.2	21	20.2	20.5	21	21	20.8
	-9	19.7	20	20	20	20.2	20.2	20	20.4	19.9	21	20	20	20.2	20	20	20.2	20.4	20.7	20.8	20.8	20.7
	-8	20	19.9	19.8	20	20.2	19.9	20	19.8	19.9	20	20	19.9	20	20.1	20	19.9	20.2	20.1	20.2	20.1	20
	-7	19.8	19.9	19.7	19.8	19.9	20	19.9	20.1	20.2	20.1	20.3	20.5	20.3	20.4	20.1	20.4	20.3	20.4	20.5	20.6	20.7
	-6	19.9	20.2	20.2	20.3	20.2	20	20	20.1	20	20.3	20.4	20.2	20.3	20.4	20.2	20.5	20.4	20.3	20.5	20.1	20.2
	-5	20	20.2	20.2	20.3	20.4	20.6	20.5	20.9	20.9	20.7	21.1	21	21.1	21.1	21.2	21	21.4	21.3	21.1	21	20.8
	-4	20	20.3	20.4	20.5	20.7	20.6	20.6	20.8	20.8	20.7	20.9	20.8	20.6	20.7	20.9	21	20.7	20.6	20.5	20.3	20.2
	-3	20.6	20.8	20.7	21	20.7	20.9	21	20.9	21	20.9	21.1	21.2	21.1	21.3	21.1	21.3	21.1	21	21.1	21	20.9
	-2	18.9	19.2	19	19.3	19.2	19.4	19.3	19.5	19.4	19.2	19.6	19.7	19.5	19.4	19.3	19.2	19.4	19.3	19.4	19.4	19.3
	-1	19.2	19.5	19.5	19.6	19.7	19.4	19.6	19.7	19.8	20.1	20.2	20.1	20	20	19.9	19.8	19.7	19.9	19.9	19.8	19.9
0	20.1	20.2	20.5	20.7	20.7	21	21.2	21	21.4	21.4	21.7	21.5	21.6	21	20.9	20.8	20.8	20.7	20.6	20.5	20.5	
1	20.6	20.5	20.4	20.7	20.5	20.3	20.4	20.5	20.3	20.2	20.3	20.2	20.1	20.2	20.1	20	19.9	19.8	20	19.7	19.7	
2	20.5	20.8	20.9	20.7	21	21.2	21.3	21	21.2	20.9	21.2	20.9	20.7	20.6	20.7	20.4	20.4	20.3	20.1	20.5	20	
3	20	19.9	20	19.8	19.8	20	19.9	19.7	19.7	20	20	20.1	20	19.9	19.4	19.5	19.77	19.4	19.7	19.6	19.4	
4	19.2	19.3	19.6	19.4	19.6	19.8	19.9	19.9	19.5	19.6	19.5	19.7	19.5	19.3	19.3	19.4	19.2	19.4	19.2	19.2	19.1	
5	18.9	18.8	19	18.9	19	18.8	19	18.9	18.5	18.5	18.7	18.5	18.5	18.5	18.3	18.7	18.5	18.6	18.5	18.4	18.4	
6	19.4	19.5	19.5	19.5	19.6	19.5	19.8	19.9	19.6	19.3	19.4	19.4	19.1	18.9	19	18.9	18.8	18.9	18.6	19	18.6	
7	19.7	19.4	19.3	19.2	19.2	19.1	19	18.9	19	18.9	19	19	18.8	18.7	18.4	18.7	18.7	18.3	18.8	19	18.6	
8	19.1	19.4	19.5	19.5	19.6	19.3	19.3	19	19.3	19	19	18.8	19	18.9	18.8	18.4	18.7	18.5	18.5	18.5	18.2	
9	20.2	20.1	20	19.8	19.6	19.5	19	18.8	19	18.9	18.6	18.5	18.9	18.7	18.7	18.7	18.7	18.7	18.8	18.6	18.6	
10	20.3	20.4	20.2	20.3	20.2	20	19.9	19.6	19.5	19.4	19.4	19.2	19.3	19.2	19.2	19.1	19.3	19.4	19.2	19.5	19.1	
11	21	20.6	20.8	20.4	20.2	20	19.8	19.6	19.5	19.3	19.1	19	18.9	19.1	19	19.2	19.2	19.3	19.9	19.5	19.6	
12	21.2	21.3	21.2	21.1	21.1	20.9	20.6	20.3	20.1	20	19.6	19.7	19.5	19.6	19.6	19.5	19.6	19.4	19.9	19.9	20	
13	22	21.8	21.5	21.2	20.9	20.4	20	19.9	19.3	19.2	19.2	19	19.1	18.9	19.1	19.2	19.5	19.2	19.5	19.9	20	
14	20.2	20.1	19.7	19.4	19.2	18.5	18.5	18.1	18	17.7	17.7	17.5	17.7	17.7	17.6	17.7	17.9	18	18.2	18.4	18.5	
15	19.4	19.2	18.9	18.5	17.1	17	16.8	16.6	17	17.1	17.1	17.2	17.6	18	18.4	18.6	19	19.6	20.1	20.4	21	
16	21.3	20.8	20.6	19.9	19.5	19	18	18.2	18	17.8	17.3	17.4	17.3	17.5	17.8	18.8	18	18.3	18.9	19	19.2	
17	19.1	18.5	17.9	17.5	17.1	16.9	16.5	16.3	16.4	16.5	16	16.9	17.2	17.3	17.9	18	19	19.6	20.5	21.2	22.6	
18	23	22.2	21.4	20.4	19.4	18.8	18.3	18	17.6	17.3	17	17	16.9	17.3	17.4	17.8	18.3	18.6	18.8	19.6	20	
19	23.8	22.8	22	20.9	19.8	18.8	18	17.5	16.6	16.3	16.1	16	15.9	16.1	16.3	16.7	17.2	17.9	18.7	19.4	20.5	
20	24.8	23.5	22	21	19.6	18.7	18.2	17.3	16.6	16.5	16.2	16.2	16.1	16.3	16.7	17.2	17.9	18.2	19.2	20.1	20.9	
21	21.3	20.8	19.7	18.2	17.3	16.5	16.1	15.8	14.6	14.8	15	15.1	15.7	16.6	17.3	18.3	19.5	21	22.5	24	25.9	
22	27	24.8	22.3	20.6	19.2	17.8	16.8	15.9	15.2	14.9	14.8	14.6	14.6	15	15.3	16	16.6	17.8	18.8	20.4	19.7	
23	29	26	22.7	20.6	18.8	17.2	16	15.5	15	14.2	14.1	13.8	13.6	13.8	14	14.6	15.5	16.5	18.4	26.3	28.6	
24	28.4	25	21.7	19.2	17.7	16.4	15.3	14.9	14.1	13.7	13.8	14	13.6	14	14.2	14.7	15.6	16.8	18.6	25.6	28.8	
25	28.4	24	20.4	18.2	16.2	15	14.2	13.5	12.7	12.3	12.3	12	12	12.3	12.9	13.3	14.2	15.6	17.6	24.3	27.5	
26	26.2	21.7	18.5	16	14.8	13.6	13	12.5	11.8	11.6	11.1	11.2	11.2	11.1	11.6	12	12.6	14	16	20.5	25.7	
27	26.2	18.4	18.5	16	14.8	13.6	13	12.5	11.8	11.6	11.1	11.2	11.2	11.1	11.6	12	12.6	14	16	14.8	17.7	
28	26.2	14.6	18.5	16	14.8	13.6	13	12.5	11.8	11.6	11.1	11.2	11.2	11.1	11.6	12	12.6	14	16	7.8	7.9	

Eje de Coordenada Z

## CAPÍTULO IV: RESULTADOS

### 4.1. Resultados del diseño

#### 4.1.1. Resultado del diseño de las bobinas de Helmholtz.

El resultado del diseño de las bobinas vienen hacer los planos. En los cuales están especificadas los parámetros geométricos de dichas bobinas.

Bobinas	$D(\text{diámetro})\text{mm}$	$R(\text{radio})\text{mm}$	Distancia de separación ( $R = h$ ) mm
Bobina pequeña	550.0	275.0	275.0
Bobina mediana	630.0	315.0	315.0
Bobina grande	691.0	345.5	345.5

#### 4.1.2. Resultado de la implementación

El resultado de la implementación de las bobinas son las bobinas de aluminio en físico con sus respectivas parámetros geométricos y número de vueltas.

Bobinas	$D(\text{diámetro})\text{mm}$	$R(\text{radio})\text{mm}$	$N(\text{número de vueltas})$
Bobina pequeña	550.0	275.0	144
Bobina mediana	630.0	315.0	164
Bobina grande	691.0	345.5	179

#### 4.1.3. Resultado del mapeo topográfico

El resultado del mapeo topográfico, vienen hacer los cuadros 1, 2 y 3. Los cuales son un registro de la inducción magnetica coordenada a coordenada y el analisis de estos datos fueron realizados con el software surfer-10, que enseguida presentamos.

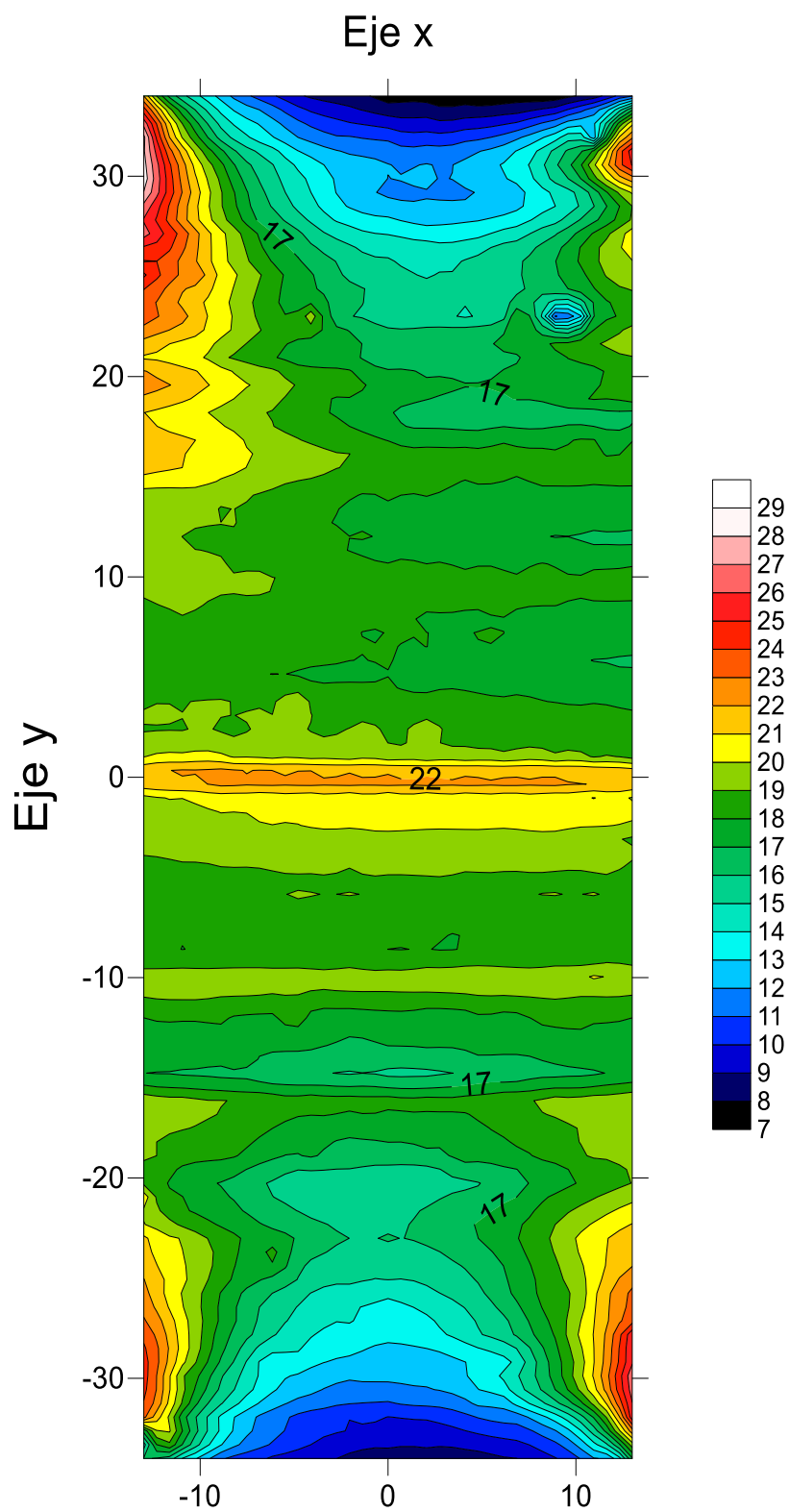
### **Bobina de Helmholtz Grande**

Los datos son procesados con el Software Surface, el cual procesado los datos presenta el campo topográfico de la inducción magnetica en la zona experimental de la bobina grande de Helmholtz. Los datos obtenidos en la zona experimental de la bobina grande nos proporciona la variación del campo magnético como podemos observar en las isosuperficies de las figuras 69 partes a), b) y c)

Se observa que en cercanías a las bobinas la inducción magnética es mayor y toma como valores de 22 a 28 Gauss con tonos de color rojo. También se observa que se tiene valores muy bajos de inducción magnetica alrededor de 8 Gauss con tonos de color azul. La discusión más importante es la homogenidad de la inducción magnética en el centro de la zona experimental de 22 Gauss con tonos de anaranjado. Teniendo una variación de inducción magnetica en el medio entre 21Gauss y 22Gauss.

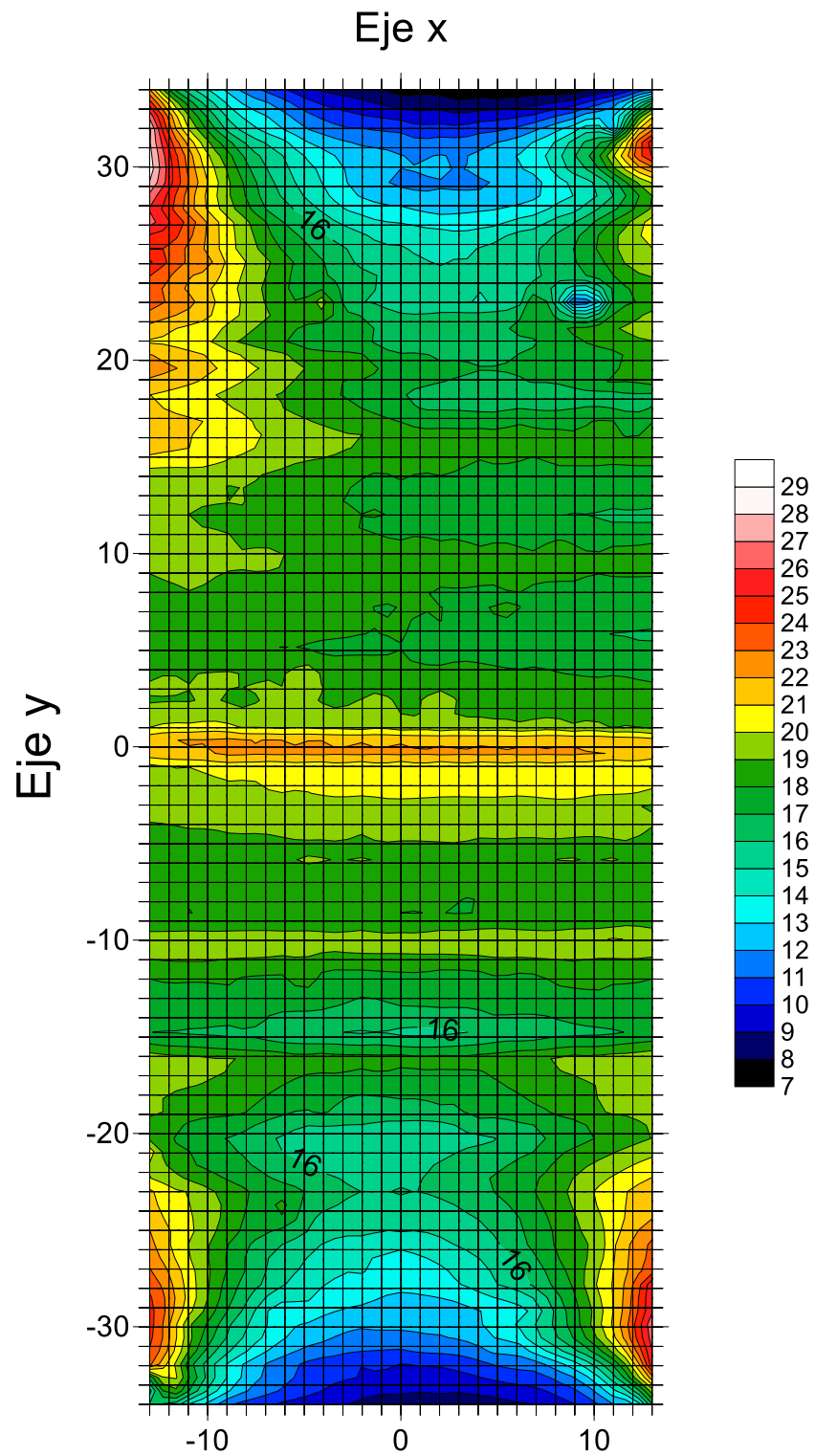
**Figura 69.**

a) Campo topográfico de la inducción magnético en el plano XY

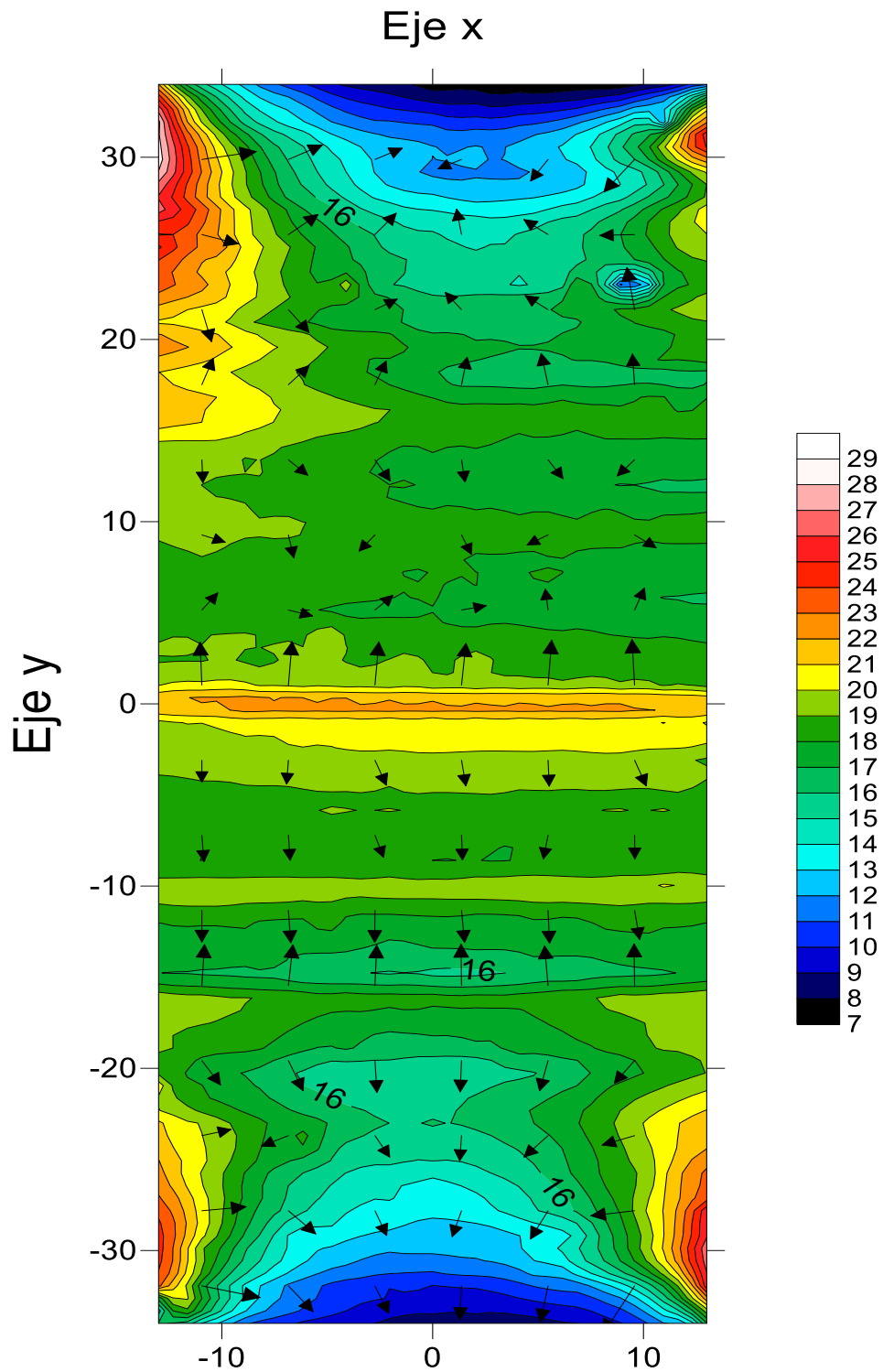




b) Muestra las curvas isomagnéticas sobre un fondo de papel milimetrado en el plano XY, el cual muestra la variación de la inducción magnética



c) Campo de direcciones del vector inducción magnetica en el plano XY y como esta varia en dirección y sentido en la zona experimental



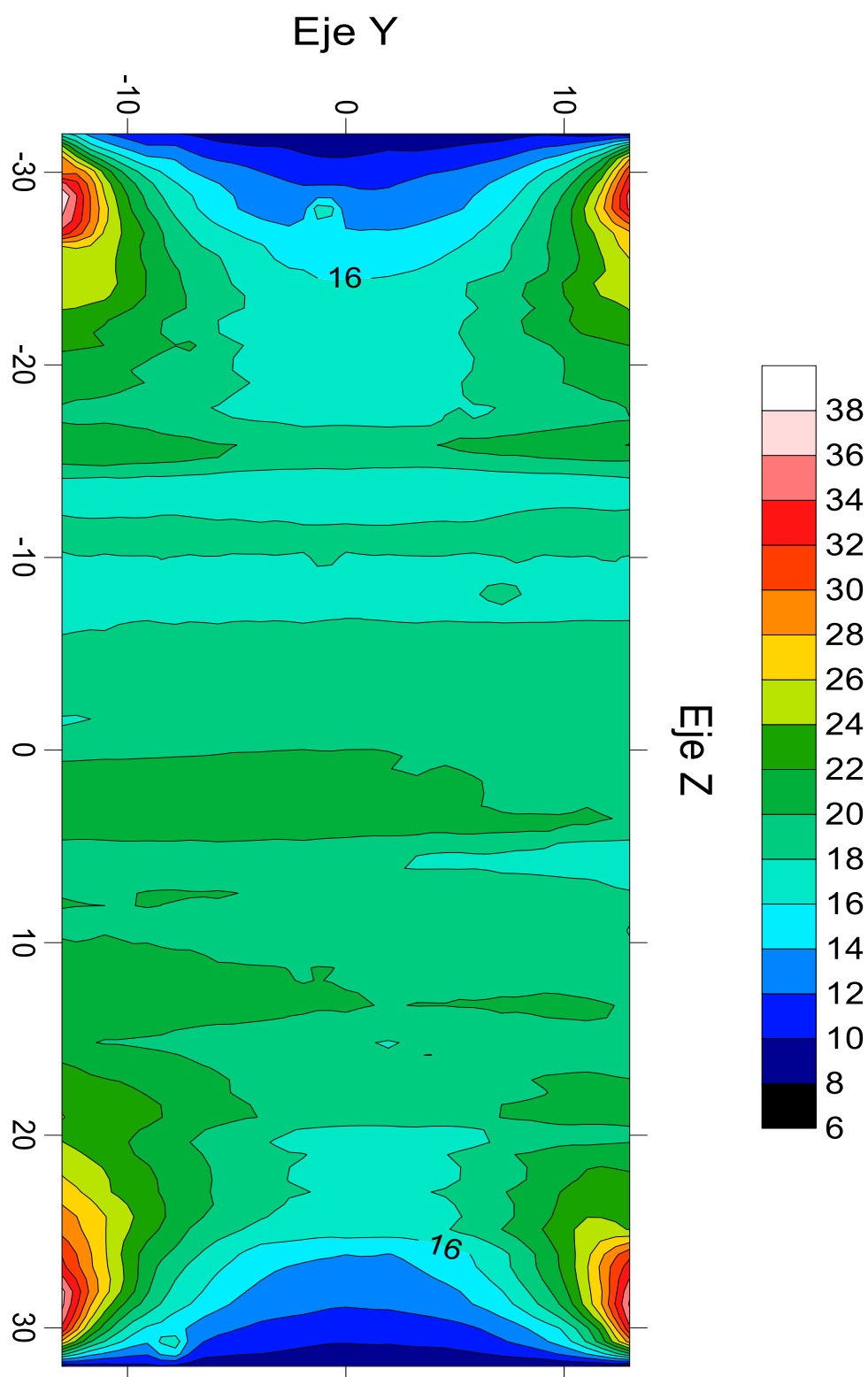
Fuente: Elaboración Propia

### Bobina de Helmholtz Mediana

Los datos obtenidos en la zona experimental de la bobina mediana nos proporciona la variación del campo magnético como podemos observar en las isosuperficies de las figuras 70 partes a), b) y c) . Se observa que en cercanías a las bobinas la inducción magnética es mayor y toma como valores de 30 a 36 Gauss con tonos de color rojo. También se observa que se tiene valores muy bajos de inducción magnetica alrededor de 8 a 16 Gauss con tonos de color azul. La discusión más importante es la homogenidad de la inducción magnética en el centro de la zona experimental de 22 Gauss con tonos de color verde. Teniendo una variación de inducción magnetica en el medio entre 20Gauss y 24Gauss. Esta homogenidad es la esperada en los cálculos teóricos como también en la simulación.

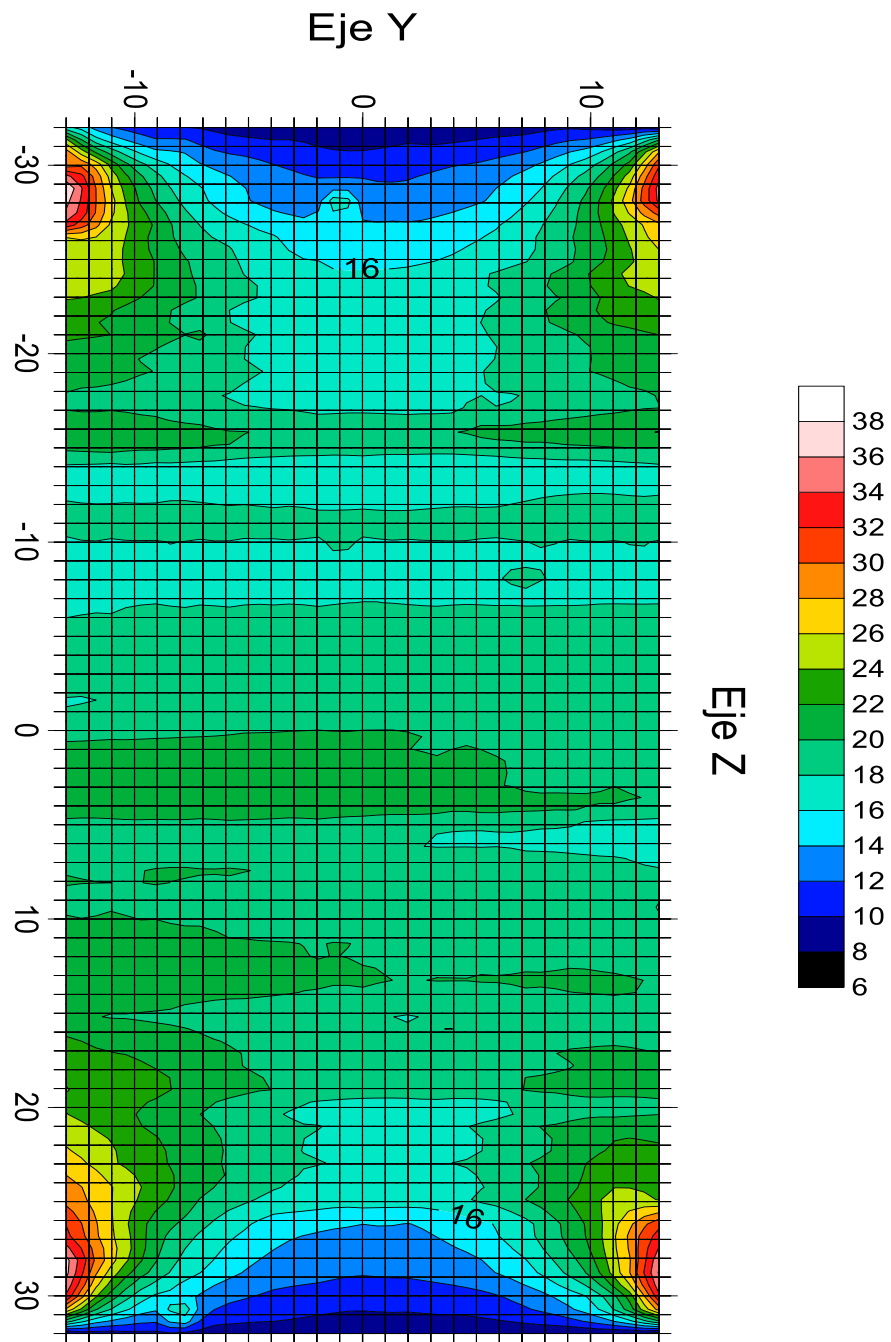
Figura 70

a) Campo topográfico de la inducción magnética en el plano YZ



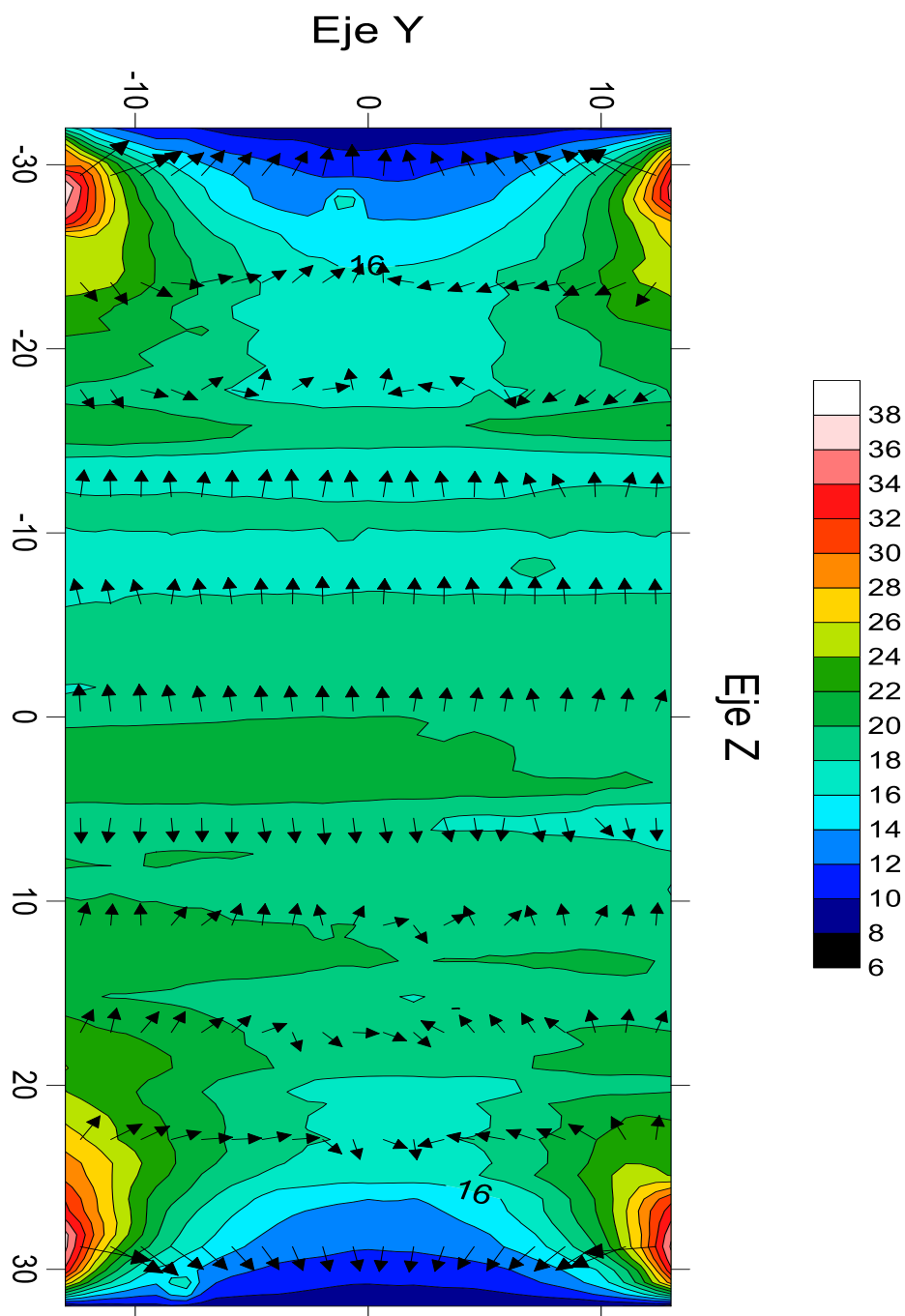
Fuente: Elaboración propia

b) Muestra las curvas isomagneticas sobre un fondo de papel milimetrado el cual muestra la variación de la inducción magneticade



Fuente: Elaboración propia

c) Campo de direcciones del vector inducción magnetica en el plano YZ y como esta varia en dirección y sentido en la zona experimental



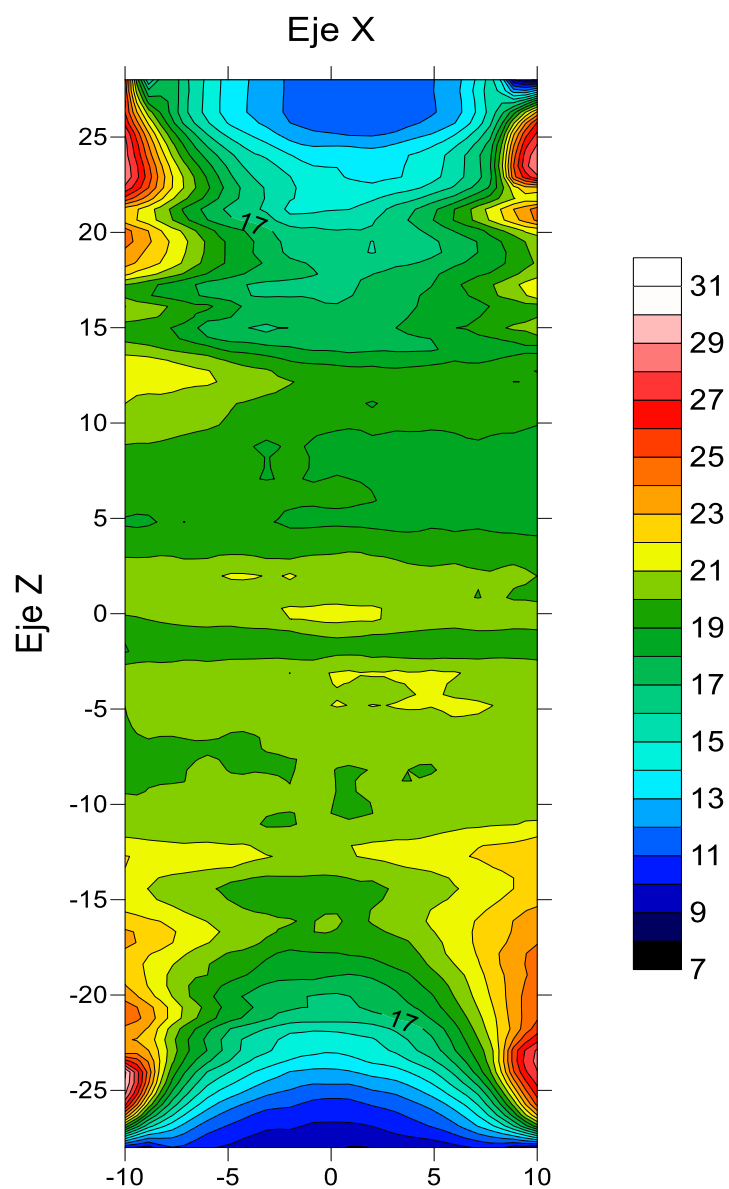
Fuente: Elaboración propia

### Bobina de Helmholtz Pequeña

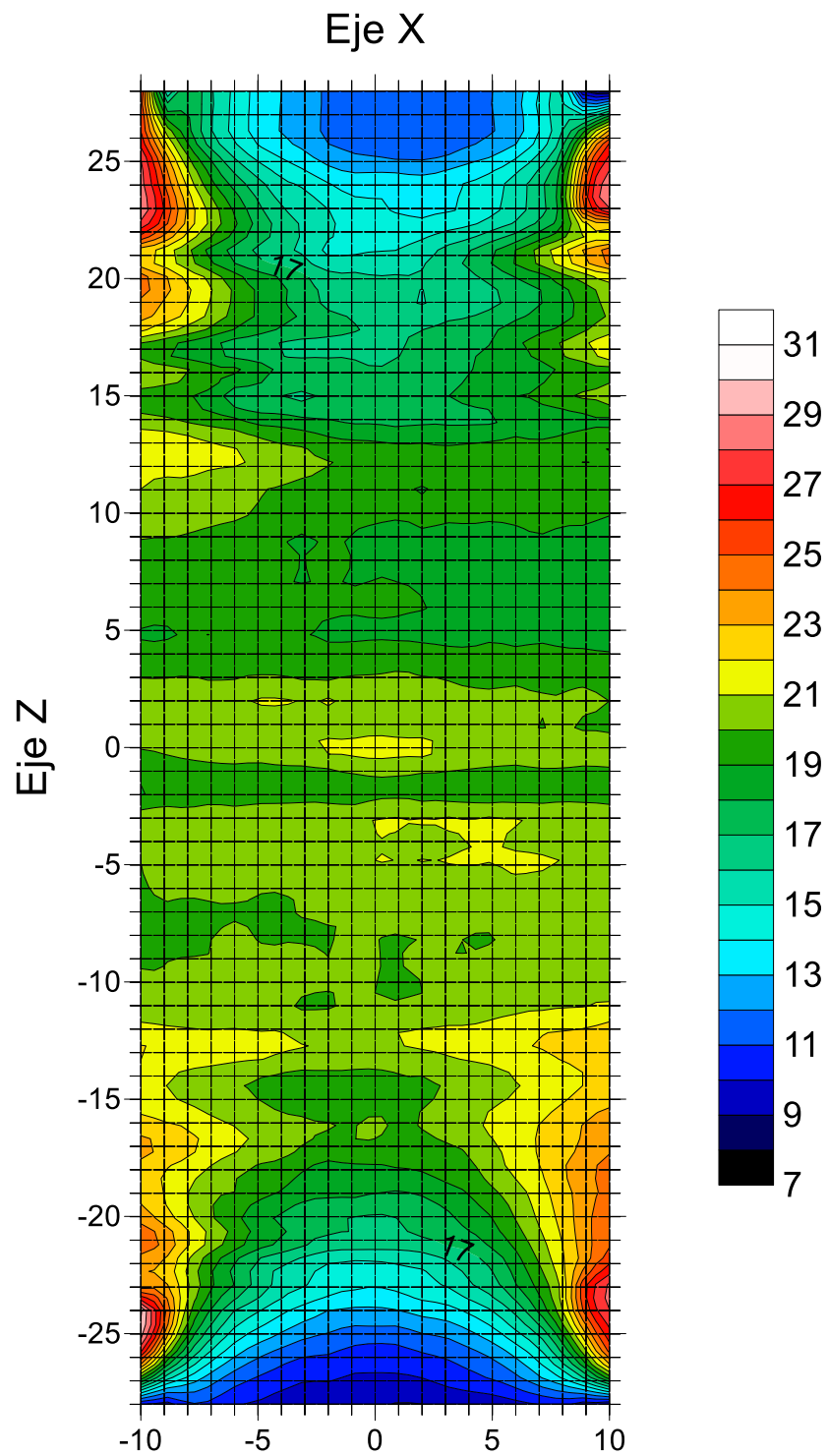
Esta bobina proporciona un campo magnético en el plano XZ. Al igual que las otras bobinas tenemos su distribución del campo magnético, como las que muestra las figuras 71 partes a), b) y c)

Figura 71

a) *Campo topográfico de la inducción magnética en el plano XZ.*

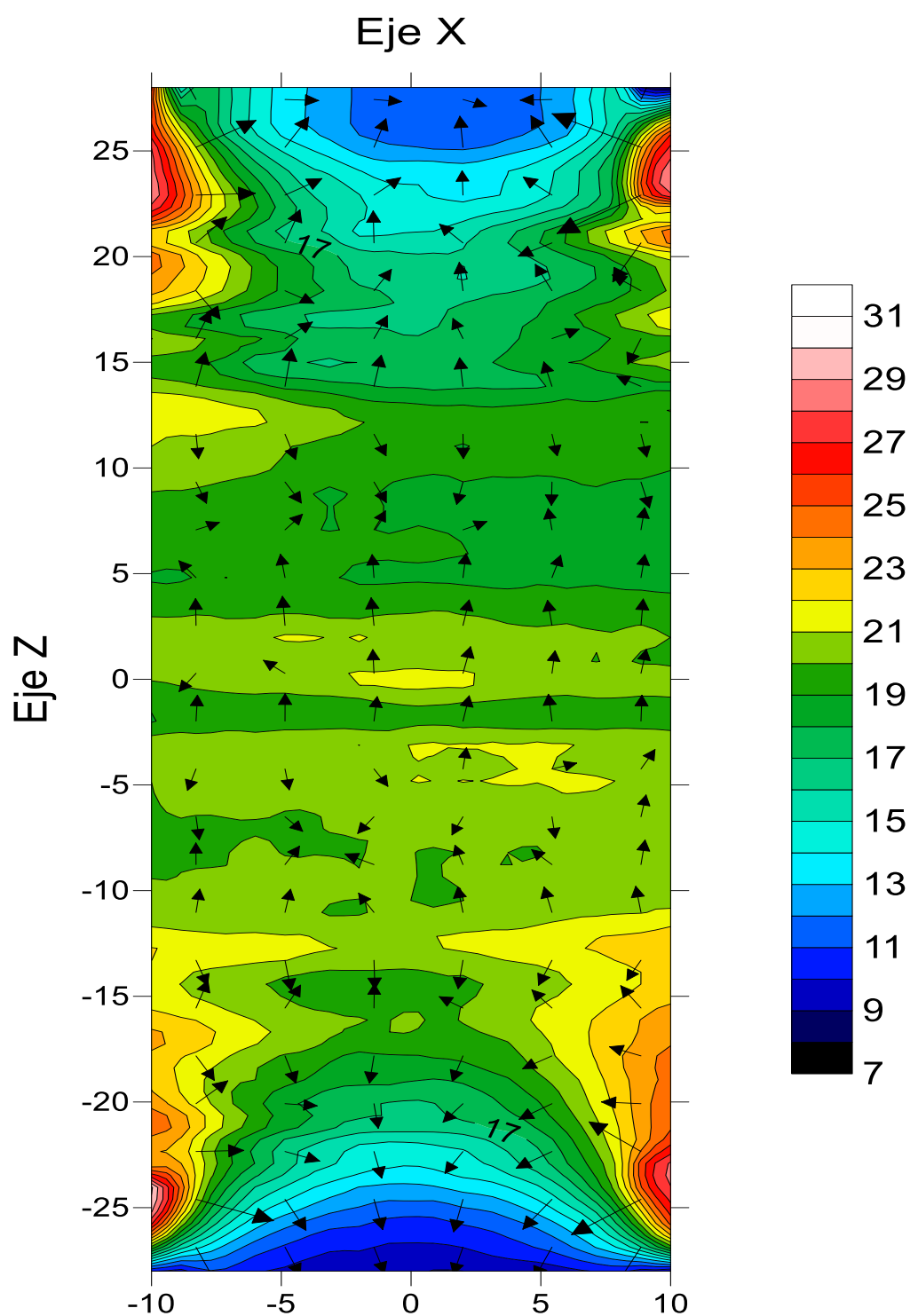


b) Muestra las curvas isomagneticas sobre un fondo de papel milimetrado el cual muestra la variación de la inducción magneticade





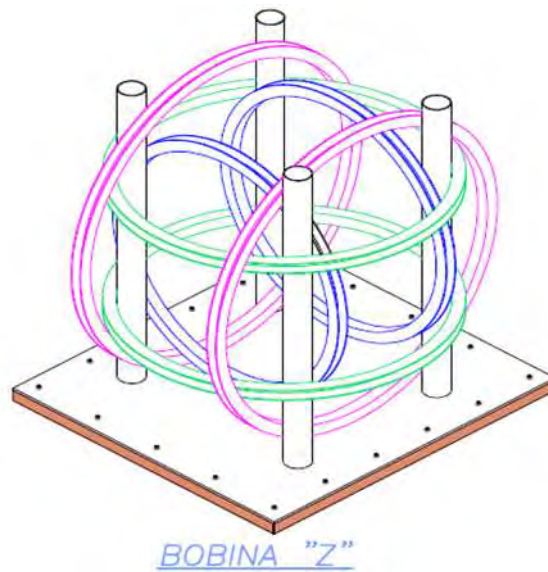
c) Campo de direcciones del vector inducción magnetica en el plano XZ y como esta varia en dirección y sentido en la zona experimental



#### 4.1.4. Resultado de las bobinas de Helmholtz en disposición triaxial 3D.

Finalmente presentamos ya, físicamente el prototipo de las bobinas de Helmholtz en disposición triaxial 3D. Que fué nuestro principal objetivo y generen campo magnético uniforme en las tres direcciones.

❖ Bobinas ensambladas a nivel de diseño



❖ Bobinas ensambladas como prototipo



#### 4.1.5. Resultados a nivel teórico de las bobinas Hemholtz y simulación

##### a) Resultado teórico

Para el desarrollo del modelo teórico se utilizó los potenciales magnéticos tomando énfasis en el potencial magnético escalar ya que la intensidad  $\vec{H}$  es el gradiente del potencial magnético escalar  $\vec{H} = -\nabla\varphi$ , Determinamos el potencial magnético en un punto del eje de simetría de la bobina de Helmholtz en el espacio de experimentación hasta obtener el sexto termino en una serie de Maclaurin del potencial magnético escalar  $\varphi$ .

$$\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}}\left(\frac{z}{R} - \frac{1080(16)}{625(5!)}\frac{z^5}{R^5} + \dots\right)$$

esta expresión del potencial escalar lo ponemos como función de los polinomios de Legendre

$$-\frac{nI8}{5\sqrt{5}}\left(\frac{rP_1(\cos\theta)}{R} - \frac{144r^5P_5(\cos\theta)}{625R^5} + \dots\right)$$

Por tablas de polinomios de Legendre (ver apéndice F) tenemos:

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \text{ y } P_5(\cos\theta) = \left(\frac{1}{8}\right)(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$$

$$\varphi\left(\frac{z}{R}\right) = -\frac{nI8}{5\sqrt{5}R}z\left(1 - \frac{144}{625}\frac{z^4}{R^4} + \frac{144}{125}\frac{z^2r'^2}{R^4} - \frac{54}{125}\frac{r'^4}{R^4} + \dots\right)$$

donde  $r'$  es la distancia del eje de simetría a un punto cualquiera en la región de experimentación.

Este potencial escalar en todo el espacio experimental de la bobina de Helmholtz se denomina el método de expansión Axial.

Finalmente calculamos el gradiente en coordenadas cilíndricas del potencial escalar para obtener las componentes de la intensidad magnética  $\vec{H}$  en todo el espacio de la zona de experimentación de las bobinas de Helmholtz

$$H_{r'} = \frac{nI8}{5\sqrt{5}R} \frac{72zr'(4z^2 - 3r'^2 + \dots)}{125R^4}$$

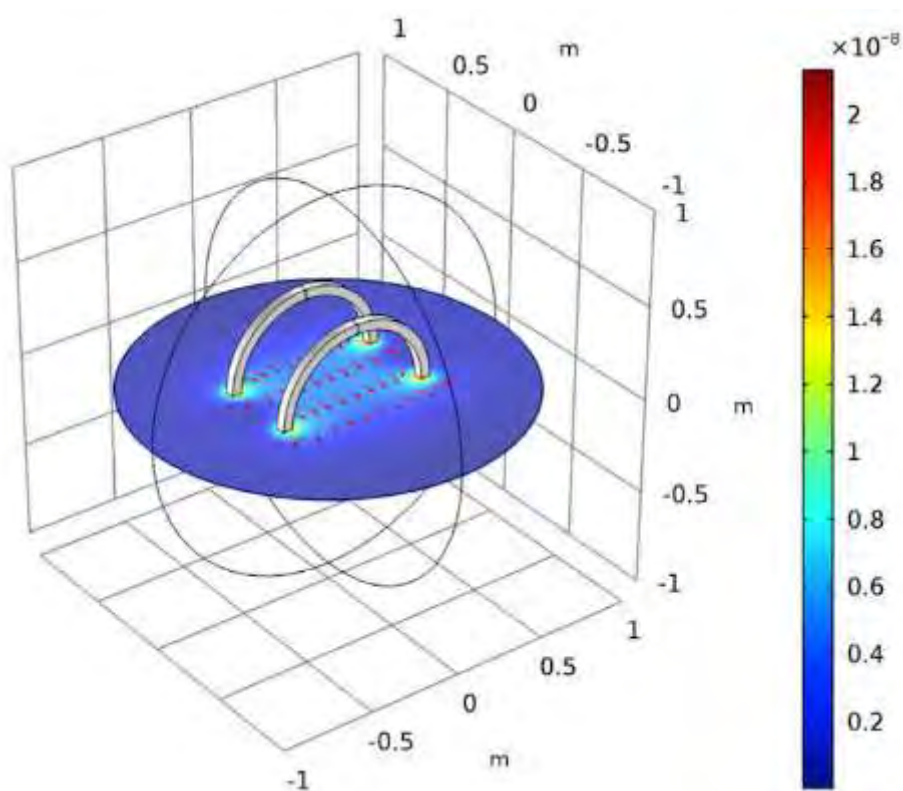
$$H_z = \frac{nI8}{5\sqrt{5}R} \left( 1 - \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} + \frac{432}{125} \frac{z^2 r'^2}{R^4} - \frac{54}{125} \frac{r'^4}{R^4} + \dots \right)$$

### Resultado de la Simulación

Para observar de manera gráfica el comportamiento de la inducción magnética en una bobina de Helmholtz simulamos dicha bobina con el software Comsol para esto seleccionamos el estudio en 3D, luego seleccionamos el fenómeno físico que corresponde a campo magnético, en la ventana de trabajo de Comsol elegimos la geometría, buscamos en el archivo del Comsol el módulo de Helmholtz, elegimos el contorno esfera construimos la forma de la bobina de Helmholtz todo esto utilizando el dominio de elementos finitos, seleccionamos las capas exteriores, seleccionamos aire al material de las capas exteriores y a los cables de la bobina de Helmholtz seleccionamos como material cobre e indicamos que es un embobinado múltiple del tipo circular, seleccionamos la geometría de la bobina, seleccionamos el contorno de color naranja, visualizamos a la bobina en 3 dimensiones y habilitamos las mallas en la opción ajustes, luego el ajuste de curvas de nivel y visualización de las curvas de nivel, Para observar los vectores de inducción magnética en la zona de experimentación de la bobina de Helmholtz, hacemos click sobre la opción superficie de flechas y finalmente tenemos el campo de dirección del vector inducción magnética de manera gráfica y visual de la bobina de Helmholtz con

el fin de anticiparnos que nuestros datos experimentales tome esa forma del campo de direcciones al momento de graficar dichos datos o corregir datos que no corresponde y volver a medir. Este resultado de simulación podemos verlo en la siguiente figura.

- ❖ *Simulación final que muestran las bobinas de Helmholtz y el campo de direcciones de la inducción magnética*



## CONCLUSIONES

1. Se logro diseñar las bobinas de Helmholtz, recurriendo a los softwares informatcos como el Solid Word y el Autocad.
2. Se implemento las tres bobinas de Helmholtz ( fundición y torneado), con los datos proporcionados en la primera parte.
3. Se pudo mapear con una sonda de efecto Hall cada bobina independientemente y registrar esta información por medio de los cuadros 1, 2, y 3. Y para su análisis de datos el software Surfer-10. El cual muestra regiones con uniformidad de campo magnético mediante isolineas magneticas y el vector campo de direcciones.
4. Se pudo finalmente ensamblar estos três pares de bobinas en diposicion triaxial 3D. y sus respectivas conexiones eléctricas para el funcionamiento y uso aplicativo.
5. A nivel teórico se pudo estudiar dichas bobinas partiendo de la ley de Biot y Savart y el empleo del potencial magnético escalar, series de Taylor, suma de potencias, series de Maclaurin y usando el método axial de los polinomios de Legendre.

## RECOMENDACIONES

1. En el diseño de las bobinas de Helmholtz es recomendable el uso de softwares informáticos. Dada su dificultad de obtener parámetros geométricos que coincidan espacialmente dichas bobinas.
2. Implementar una bobina de Helmholtz con sus conexiones eléctricas no trae muchas dificultades. El detalle es en el arrollamiento del alambre conductor, es recomendable un arrollamiento por capas. Como la propuesta en el trabajo de seminario por el compañero Nilto Olivera.
3. Durante el mapeo de la inducción magnética para medidas y datos muy grandes; que requieren de tiempo prolongado es decir una gran cantidad de datos teniendo prendido las bobinas se debe tener cuidado con el EFECTO JOULE. El cual hace que el magnetómetro sea fluctuante y no registre un valor próximo con la realidad. Por tal razón no se debe colocar el magnetómetro cerca de las bobinas. Y para su análisis de datos es necesario el manejo de un software capaz de procesar múltiples datos y pueda interporlar dichos datos como es el software Surface.
4. En este dispositivo final de las tres bobinas de Helmholtz, se puede poner muestras orgánicas o inorgánicas. Es decir en la intersección de la disposición triaxial y afectarlo periódicamente por inducción magnética uniforme en las tres direcciones.
5. En la presente tesis se enfatizó la importancia y a su vez se recomienda el uso del potencial escalar magnético en el campo de la física teórica.

## Apéndice A

### Series de Taylor

Las siguientes funciones

$$4$$

$$2 + 3x$$

$$1 + 2x - x^2$$

$$3 + 7x + 2x^2 + x^3$$

Pueden servir como ejemplos de polinomios de grado nulo, primero segundo y tercero respectivamente. En general, en general se denomina polinomio de grado  $n$  la suma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \dots \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k \quad (a_n \neq 0)$$

Donde  $a_k$  son números constantes prefijados y  $x$ , la variable independiente.

Los polinomios son acomodados en la práctica. Afín de calcularlos, partiendo de los  $x$  dados, resulta necesario efectuar solo las operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

Por lo común, los polinomios se utilizan para aproximar por medio de ellos otras funciones mas complejas. Uno de los métodos más importantes para aproximar las funciones por medio de un polinomio es la fórmula de Taylor<sup>1</sup>

Deduzcamos la fórmula de Taylor prefijemos la función  $f(x)$  sobre el segmento  $[-a, a]$  que tiene derivadas de cualesquiera órdenes. tracemos su gráfica en el sistema rectangular de coordenadas (fig:55). A través del punto A cuya absisa es  $x = 0$ , tracemos una recta paralela al eje Z. su ecuación será



$$y = f(0)$$

Hemos obtenido un polinomio de grado nulo

$$Q_0(x) = f(0)$$

Que se puede considerar como la aproximación nula de una función  $f$  en un entorno suficientemente pequeño del punto  $x = 0$ ,

$$f(x) \approx f(0) \quad (A.1)$$

La función  $f(x)$  es continua y por lo tanto difiere poco de  $f(0)$  para los valores de  $x$  correspondientes al pequeño entorno del punto  $x = 0$ . Además, en el propio punto  $x = 0$  la igualdad aproximada se convierte en una igualdad exacta. tracemos ahora por el punto A una tangente a uesta curva. Su ecuación tiene la siguiente forma:  $y = kx + b$  (Zill, 2009)

Donde

$$b = f(0), \quad k = f'(0)$$

De este modo, la ecuación de una tangente se puede escribir en forma de

$$y = f(0) + f'(0)x$$

Hemos obtenido un polinomio de primer grado

$$Q_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

El cual puede considerarse como la primera aproximación de la función  $f(x)$  en tormno al punto  $x = 0$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \quad (A.2)$$

De la figura se infiere que la primera aproximación es mejor que la de grado nulo, en todo caso, para los  $x$  de un entorno suficientemente pequeño del punto  $x = 0$ .

Los miembros, primero y segundo, de la igualdad aproximada (2) no solo son iguales en el punto  $x = 0$ , sino que también sus derivadas son iguales entre si en dicho punto:

$$Q_1(0) = f(0) \quad y \quad Q'_1(0) = f'(0)$$

En la práctica la igualdad aproximada (2) se utiliza ampliamente.

Así pues, un polinomio de primer grado.

$$Q_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

Posee la propiedad notable de que el mismo coincide con la función  $f$  en el punto cero y tiene la derivada que coincide con la derivada de  $f$  en este punto.

Encontremos ahora un polinomio de segundo grado.

$$Q_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{A.3}$$

Tal que simultáneamente se satisfagan las igualdades

$$f(0) = Q_2(0) \quad , \quad f'(0) = Q'_2(0) \quad y \quad f''(0) = Q''_2(0)$$

Sustituyendo  $x = 0$  en  $Q_2(x)$ , obtendremos

$$f(0) = a_0$$

Tomando la derivada de  $Q_2(x)$ , obtendremos

$$Q'_2(x) = a_1 + 2a_2x$$

Y adoptando  $x = 0$ , llegaremos a la igualdad

$$f'(0) = a_1$$

Por fin, diferenciando  $Q_2(x)$ , obtendremos

$$Q_2''(x) = 2a_2$$

De donde

$$f''(0) = 2a_2$$

Y, por consiguiente

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

A si pues, el polinomio buscado de segundo grado tiene la siguiente forma.

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2, \quad (2! = 1 \cdot 2)$$

Hemos anotado 2! En vez de dos, teniendo en cuenta las generalizaciones posteriores. Plantemos un problema más: se requiere encontrar un polinomio de tercer grado.

$$Q_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$f(0) = Q_3(0) \quad , \quad f'(0) = Q_3'(0) \quad , \quad f''(0) = Q_3''(0) \quad , \quad f'''(0) = Q_3'''(0) \quad (A.4)$$

Tenemos

$$Q_3'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

$$Q_3''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x$$

$$Q_3'''(x) = 3 \cdot 2a_3 = 3! a_3$$

Por lo tanto, tomando en consideración (4), obtendremos.

$$f(0) = Q_3(0) = a_0$$

$$f'(0) = Q_3'(0) = 1! a_1$$

$$f''(0) = 2! a_2$$

$$f'''(0) = 3! a_3$$

Por consiguiente, el polinomio buscado de tercer grado tiene la siguiente forma.

$$Q_3(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3$$

De modo análogo, se puede plantear el problema más general : hay que encontrar un polinomio  $n$ .

$$Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (A.5)$$

Tal , que simultáneamente se cumpla las igualdades

$$f(0) = Q_n(0)$$

$$f'(0) = Q_n'(0)$$

.....

$$f^{(k)}(0) = Q_n^{(k)}(0)$$

Diferenciando  $Q_n(x)$  sucesivamente  $n$  veces y sustituyendo  $x = 0$

Obtendremos

$$a_0 = Q_n(0)$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!},$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

.....

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Por lo tanto , el polinomio buscado  $Q_n(x)$  de grado  $n$  tiene la forma de.

$$Q_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \cdots \cdots \cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (\text{A. 6})$$

La función  $Q_n(x)$  se llama  **$n$  – ésimo polinomio de Taylor** de una función de grado  $x$  . El coeficiente  $x^k$  en el polinomio de Taylor se calcula según la formula  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$  , es decir, se toma la  **$k$  – ésima** , derivada de  $f$ , sustituyendo en ella  $x = 0$  y el resultado obtenido se divide entre  $k!$ . Así pues, si necesitamos aproximar la función  $f$  en un entorno pequeño del punto  $x = 0$  , tiene sentido emplear la igualdad aproximada

$$f(x) \approx Q_n(x)$$

Donde  $Q_n(x)$  es polinomio de Taylor de la función  $f$  .

Las gráficas de los polinomios de Taylor consecuentes de la función  $f$  según los grados  $x$ . Se aproximan cada vez más ala gráfica de  $f$ , por lo menor en un entorno bastante pequeño del punto A, claro esta, en caso que la función  $f$  sea diferenciable un número suficiente de veces.

## Apéndice B

### Historia del magnetismo

El estudio del magnetismo se remonta hace 2600 a.c cuando el emperador chino Hwang-ti se guio en una batalla a través de una densa niebla por una pequeña figura giratoria instalada en su carro de guerra que siempre señalaba al sur debida a la piedra imán incrustada en su brazo extendido. Esta prodigiosa capacidad de la brújula de alinearse con el eje norte sur del universo, debió inspirar entonces un asombro total. Aun ahora cuando sabe que solo es un efecto local del propio campo magnético invisible de la tierra. (Hecht, 1987)

Los griegos 800 a.C. tenían conocimiento sobre el magnetismo. Descubrieron que la magnetita ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) atrae fragmentos de hierro. La leyenda adjudica el nombre magnetita al pastor Magnes que atraía trozos de magnetita mientras pastoreaba sus rebaños con los clavos de sus sandalias y el regatón de su bastón. (Serway & Jewett, 2009)

En 1600, William Gilbert descubrió que la tierra es un imán natural con polos magnéticos próximos a los polos geográficos norte sur. Como el polo norte de la aguja de una brújula apunta al polo sur de un imán lo que llamamos polo norte geográfico de la tierra es realmente un polo sur magnético. De esta forma los polos norte y sur de un imán se definen como aquellos polos que marcan el norte y sur geográfico respectivamente. (Tipler & Mosca, 2003) En los tres siglos y medio que han transcurrido desde los trabajos de Gilbert nadie ha conseguido explicar el magnetismo de la tierra de forma satisfactoria para todos los especialistas, durante largo tiempo los científicos especularon con la posibilidad de que la tierra pudiese tener como núcleo un gigantesco imán de hierro. A pesar de que en efecto se descubrió que nuestro planeta tenía un núcleo de hierro, hoy

sabemos que tal núcleo no puede ser un imán puesto que el hierro, cuando se calienta hasta los  $760^{\circ}\text{C}$  pierde sus grandes propiedades magnéticas, la temperatura del núcleo de la tierra debe ser, por los menos de  $1000^{\circ}\text{C}$ . La temperatura a la que una sustancia pierde su magnetismo se llama temperatura de Curie. (Asimov, 1973)

En 1820 se pensó que el magnetismo era independiente de la electricidad en ese año un profesor de física danés llamado Hans Cristian Oersted hizo un notable descubrimiento. En el curso de una demostración en clase, Oersted descubrió que una corriente eléctrica desvía la aguja de una brújula. Oersted fue el primero en establecer que el magnetismo estaba relacionado con la electricidad. Este descubrimiento trajo consigo una gran cantidad de adelantos tecnológicos, entre los que se encuentran los generadores eléctricos la radio y la televisión. (Hewitt, 2007)

Una semana después de enterarse del descubrimiento de Oersted, André Marie Ampère hizo pasar corrientes por dos hilos paralelos uno de los cuales estaba suspendido de forma que pudiera alejarse o acercarse al otro. Cuando la corriente pasaba en la misma dirección los hilos se atraían en caso contrario se repelían. Como los dos hilos eran neutros eléctricamente, la fuerza no podía ser electrostática por lo que tenía que ser magnética. (Hecht, 1987)

También en 1820, se formula la ley de Biot-Savart la cual es una aproximación magnetostática, el modelo indica que el campo magnético puede ser determinado, si se conoce la densidad de corriente esta ley es en honor a los físicos franceses Jean-Baptiste Biot y Félix Savart.

En 1831 Faraday descubrió el principio de la inducción eléctrica y creo el primer transformador. Procedió a demostrar el fenómeno de una manera más

clara para lo cual empleo un imán permanente que introducía una y otra vez en el interior de una bobina de cable para sacarlo luego del mismo; pues a que no existía fuente alguna de electricidad se establecía corriente siempre que las líneas de fuerza del imán atravesaban el cable. Los descubrimientos de Faraday condujeron directamente no solo en la creación del dinamo para generar electricidad, sino que también dieron base a la teoría electromagnética. (Asimov, 1973)

En 1864 James Clerk Maxwell tubo la brillante hipótesis de los campos eléctricos variables inducen campos magnéticos. Fue llevado a esta idea al considerar las relaciones entre las leyes básicas del electromagnetismo descubiertas algunas décadas antes. Estas eran: La ley de coulomb para la fuerza entre dos cargas,  $Q$ , de forma equivalente, para el campo eléctrico debido a una carga puntual. La ley de Biot Savart para el campo magnético debido a una corriente. La ley de Faraday que establece que un campo magnético variable induce un campo eléctrico. La ley de conservación de carga. Maxwell demostró que estas leyes no son matemáticamente consistentes cuando los campos eléctricos varían con el tiempo sin embargo. Si se hace la hipótesis de que un campo eléctrico variable induce un campo magnético, se evita la mencionada inconsistencia. Aunque basada en especulaciones puramente teóricas, la hipótesis de Maxwell llevo inmediatamente a la predicción de se pueden producir ondas electromagnéticas mediante cargas o corrientes oscilantes. (Kane & Sternheim, 2007)

En 1884 Nikola Tesla mientras trabaja en la compañía de Edison en París construyo el primer motor eléctrico de inducción magnética. En 1885 ya en los Estado Unidos, tesla patento sus inventos y estableció su propio laboratorio en



el cual desarrollo inventos como la bobina de Tesla, barcos a control remoto y otros dispositivos guiados a distancia . (Alvarenga, 2008) Tesla estaba fascinado por la energía radiante y su posibilidad de convertirse en energía libre y gratuita.

En 1931 P.A. M. Dirac presento un delicioso argumento teórico sobre los monopolos magnéticos una partícula polo sur y una partícula polo norte pares de monopolos, la existencia de monopolos proporcionaría también una explicación apropiada de la cuantización de carga en cuerpo iguales a la carga del electrón. Estos monopolos serían fascinantes diablillos que ejercerían una atracción entre sus números opuestos casi unas cinco mil veces mayor que la atracción existente entre el electrón y el protón. (Yavorski, 1988)

## Apéndice C

### Identidades vectoriales

Concluiremos este apéndice mostrando algunas identidades analíticas vectoriales usadas en el presente trabajo de tesis de especialmente importancia. En estas identidades  $\varphi$  y  $U$  son funciones puntuales escalares;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  y  $\mathbf{V}$  son funciones vectoriales;  $X$  es una función de punto escalar o vectorial de coordenadas con prima e incorpora un signo de multiplicación apropiado.

#### IDENTIDADES PARA EL CÁLCULO DE GRADIENTE

1.  $\nabla(\varphi U) = \varphi \nabla U + U \nabla \varphi$
2.  $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$
3.  $\nabla \varphi(U_1 \dots \dots U_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial U_i} \nabla U_i$

#### IDENTIDADES PARA EL CÁLCULO DE LA DIVERGENCIA

4.  $\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) = \varphi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \varphi$
5.  $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$
6.  $\nabla \cdot \vec{A}(U_1 \dots U_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{A}}{\partial U_i} \cdot \nabla U_i$

#### IDENTIDADES PARA EL CÁLCULO DEL ROTACIONAL

7.  $\nabla \times (\varphi \vec{A}) = \varphi \nabla \times \vec{A} + \nabla \varphi \times \vec{A}$
8.  $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$
9.  $\nabla \times \vec{A}(U_1 \dots U_n) = \sum_{i=1}^n \nabla U_i \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial U_i}$

### APLICACIÓN REPETIDA DE $\nabla$

$$10. \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$11. \quad \nabla \times \nabla U = 0$$

$$12. \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$13. \quad \nabla^2(\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times (\nabla^2 \vec{A})$$

$$14. \quad \nabla^2(\nabla \phi) = \nabla(\nabla^2 \phi)$$

### IDENTIDADES PARA EL CÁLCULO DE INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

$$15. \quad \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Teorema Stokes})$$

$$16. \quad \oint U d\vec{l} = \int d\vec{S} \times \nabla U$$

$$17. \quad \oint \vec{A} \times d\vec{l} = \int \nabla \cdot \vec{A} d\vec{S} - \int \nabla(\vec{A} \cdot d\vec{S})$$

### TEOREMA DE POISSON

$$18. \quad \mathbf{V} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla'(\nabla' \cdot \mathbf{V}) - \nabla' \times (\nabla' \times \mathbf{V})}{r} d\mathbf{v}'$$

### OPERACIONES CON $\nabla$ EN LAS INTEGRALES DE POISSON

$$19. \quad \nabla' \frac{(X)}{r} = \frac{\nabla'(X)}{r} + \vec{r}_u \frac{(X)}{r^2}$$

$$20. \quad \nabla \frac{(X)}{r} = -\vec{r}_u \frac{(X)}{r^2}$$

$$21. \quad \frac{\nabla'(X)}{r} = \nabla \frac{(X)}{r} + \nabla' \frac{(X)}{r}$$

## Apéndice D

### Angulo Solido $\Omega$

Es un concepto geométrico que cuantifica la apertura con que se ve desde un punto una superficie determinada. Se considera un análogo tridimensional de lo que representa un ángulo plano (apertura con que se ve un arco desde un punto).

Se define el angulo solido subtendido por una superficie  $S$  desde un punto  $\vec{r}_0$  Mediante la siguiente expresión:

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \iint \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

Donde es necesario especificar el sentido elegido para los elementos de superficie  $d\vec{S}$ . Evidentemente para el sentido opuesto (simbolizado por  $-S$ ) se tendrá:

$$\Omega(\vec{r}_0, -S) = -\Omega(\vec{r}_0, S)$$

La unidad del angulo solido es el estéerorradian (sr) y no tiene dimensiones.

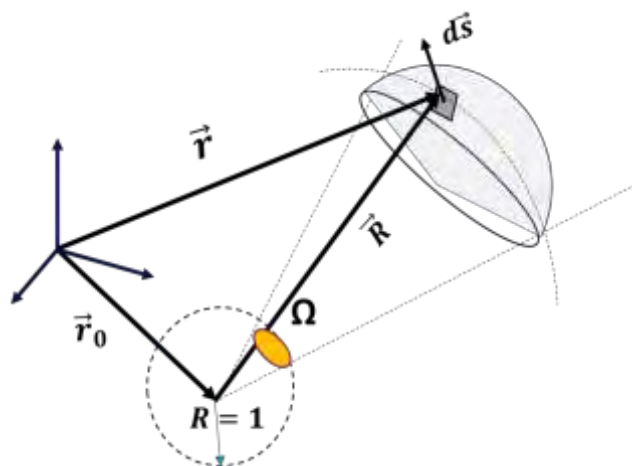


Figura D.1 Angulo solido de una superficie

Interpretación geométrica: en función del vector  $\mathbf{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$

Podemos escribir el integrando en forma  $\vec{u}_R \cdot d\vec{S}/R^2$ , siendo  $R$  el modulo del vector posición relativa de un punto de la superficie al punto definido por  $\vec{r}_0$  (ver figura) y  $\vec{u}_R = \vec{R}/R$  por otra parte  $\vec{u}_R \cdot d\vec{S}$  Representa la proyección de un elemento de la superficie . Sobre el plano tangente a la esfera de radio  $R$  con centro en  $\vec{r}_0$ ,

Definido en el punto  $\vec{r}$  . El factor  $1/R^2$  adicional en el integrando nos permite relacionar esta superficie proyectada con una superficie definida en la esfera de radio unidad mediante una homotecia con centro en  $\vec{r}_0$  . dicho de manera ilustrativa, el ángulo sólido se puede entender como el área mínima de un obstáculo situado en la esfera de radio unidad dispuesto de tal forma que un foco luminoso puntual en  $\vec{r}_0$  no ilumina ningún punto de la superficie  $S$  .

Es interesante obtener el ángulo solido correspondiente a una superficie elemental definida sobre una esfera de radio  $R$ , subtendido desde el centro , cuando dicha superficie está delimitada por líneas coordenadas en esféricas. En tal caso sabemos que  $\vec{u}_R \cdot d\vec{S} = dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$  y por tanto  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  . en este caso el carácter angular del ángulo solido queda patente.

- Propiedades:

$$(1) \Omega(\vec{r}_0, S) = 0 \text{ si } \vec{r}_0 \notin \tau$$

La demostración hace uso del teorema de la divergencia

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} = \int \nabla \cdot \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \right) d\tau$$

Pero  $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{u}_R}{R^2}\right)$ , que calculando en coordenadas esféricas  $\{R, \theta, \phi\}$  resulta ser:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{u}_R}{R^2}\right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{1}{R^2}\right) = 0 \quad \text{si } R \neq 0$$

$$(2) \Omega(\vec{r}_0, S) = 4\pi \quad \text{si } \vec{r}_0 \in \tau.$$

La demostración es inmediata si tenemos en cuenta que por el ángulo sólido

Con que se ve una superficie cerrada desde un punto interior es equivalente al de una esfera de radio unidad desde su centro, que es obviamente  $4\pi$

$$(3) \Omega(\vec{r}_0, S_1) = \Omega(\vec{r}_0, S_2) \text{ si } \gamma_{S_1} = \gamma_{S_2}$$

Esta propiedad se deduce de la primera teniendo en cuenta que en el caso topológicamente más simple  $S_1 \cup (-S_2) = S$  forma una superficie cerrada con vector normal saliente (o entrante) y  $\vec{r}_0$  es un punto exterior. Por tanto.

$$\Omega(\vec{r}_0, S) = \Omega(\vec{r}_0, S_1) - \Omega(\vec{r}_0, S_2) = 0$$

Si la unión de ambas superficies deja dentro al punto  $\vec{r}_0$  el resultado sería:  $\Omega(\vec{r}_0, S_2) = \Omega(\vec{r}_0, S_1) - 4\pi$ . Podemos imaginar situaciones más complicadas que requiere un análisis topológico más detallado, pero no las consideraremos aquí por simplicidad.

## Apéndice E

### Polinomios de Legendre

Se acostumbra representar la ecuación en terminos del angulo  $\theta$  entonces se tiene la función  $P(\theta)$  donde la variable  $x$  toma la forma  $x = \cos \theta$ . Entonces tendremos la ecuación:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0$$

Que se conoce como la ecuación generalizada de LEGENDRE y sus soluciones son las funciones asociadas de Legendre. La ecuación diferencial de Legendre ordinaria con  $m^2 = 0$  tendra la forma :

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0$$

Obtendremos una solución de esta ecuación en series de potencias. Suponemos que en la región de interés está incluido el margen de valores completo de  $\cos \theta$ . La solución deseada ha de ser de un solo valor, finita y continúa en el intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ . Supondremos de antemano que la solución es representable por una serie de potencias de la forma:

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

Donde  $\alpha$ , es un parámetro que hay que determinar. Sustituyendo esta solución en la ecuación diferencial anterior, resulta la serie:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{ (\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j x^{\alpha+j-2} - [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)]a_j x^{\alpha+j} \} = 0$$

En este desarrollo cada uno de los coeficientes de las potencias de  $x$  debe anularse por separado. Para  $j = 0, 1$ , nos encontramos con que:

$$\text{Si } a_0 \neq 0, \text{ tenemos } \alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\text{Si } a_1 \neq 0, \text{ tenemos } \alpha(\alpha + 1) = 0$$

Mientras que para cualquier otro valor de  $j$

$$a_{j+2} = \left[ \frac{(\alpha + j)(\alpha + j + 1) - l(l + 1)}{(\alpha + j + 1)(\alpha + j + 2)} \right] a_j$$

Un momento de reflexión demuestra que las dos relaciones

Son equivalentes y basta con elegir  $a_0$  o  $a_1$  distintos de cero pero no ambos simultáneamente. Haciendo la primera elección tenemos  $\alpha = 0$  o  $\alpha = 1$ .

Siguiendo la segunda relación vemos que las series de potencias tiene solamente potencias pares de  $x$  ( $\alpha = 0$ ) o solamente potencias impares ( $\alpha = 1$ ).

Para cualquiera de las dos series  $\alpha = 0$  o  $\alpha = 1$  se pueden probar las siguientes propiedades:

- a) La serie converge para  $x^2 < 1$ , cualquiera que sea  $l$ .
- b) La serie diverge para  $x = \pm 1$ , a menos que tenga un número finito de términos.

Puesto que queremos que la solución sea finita para  $x = \pm 1$ , así como para  $x^2 < 1$ , exigiremos a la serie que se corte. Como  $\alpha$  y  $j$  son números enteros positivos o cero, la relación de recurrencia:



$$a_{j+2} = \left[ \frac{(\alpha + j)(\alpha + j + 1) - l(l + 1)}{(\alpha + j + 1)(\alpha + j + 2)} \right] a_j$$

Dará términos nulos no solamente si  $l$  es cero o un numero entero positivo.

Incluso así, solamente una de las dos series es convergente para  $x = \pm 1$ .

Si  $l$  es par (impar) Solamente termina la serie  $\alpha = 0$  ( $\alpha = 1$ ). En cada caso los polinomios son de grado  $l$  siendo  $x^{l-2}$  el termino siguiente, y así progresivamente descendiendo hasta  $x^0(x)$  para  $l$  (par) impar. Por convenio, estos polinomios se “normalizan” para que tengan el valor unidad en el punto  $x = +1$ . Se les llama polinomios de Legendre son:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Si  $l = 0$ , la serie correspondiente a  $\alpha = 1$  tiene como coeficientes general  $a_j =$

$a_0/j + 1$  para  $j = 0, 2, 4 \dots$  Así, la serie  $a_0 \left( x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \dots \dots \right)$ . este es

precisamente el desarrollo en series de potencias de la función.

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

Donde  $Q_0(x)$  es un polinomio de legedre de segundo grado.

La tabla D-1 muestra los primeros polinomios de Legendre de primera clase  $P_n(x)$  y segunda clase  $Q_n(x)$

Tabla 2. D-1

Polinomios de Legendre de primera clase

$P_n(x)$  y segunda clase  $Q_n(x)$

$n$	$P_n(x)$	$Q_n(x)$
0	1	$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$
1	$x$	$\frac{1}{2} x \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - 1$
2	$\frac{1}{2} (3x^2 - 1)$	$\frac{1}{4} (3x^2 - 1) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3}{2} x$
3	$\frac{1}{2} (5x^2 - 3x)$	$\frac{1}{4} (5x^3 - 3x) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$	
5	$\frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$	

$n$	$P_n(\cos\theta)$	$Q_n(\cos\theta)$
0	1	$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$
1	$\cos\theta$	$\frac{1}{2} x \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - 1$
2	$\frac{1}{2} (3\cos\theta^2 - 1)$	$\frac{1}{4} (3x^2 - 1) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3}{2} x$
3	$\frac{1}{2} (5\cos\theta^2 - 3x)$	$\frac{1}{4} (5x^3 - 3x) \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$	
5	$\frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$	

## Apéndice F

### Teorema de Poisson

#### Teorema de Poisson

Un campo vectorial  $\vec{V}$ , regular en el infinito, se puede expresar en términos de su divergencia y su rotacional como:

$$\vec{V} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{V})}{r} dv' \quad (\text{F. 1})$$

Corolario:

Un campo vectorial  $\vec{V}$ , infinito regular, cuyo rotacional y divergencia son cero fuera de una región finita del espacio, pueden expresarse como.

$$\vec{V} = -\nabla\varphi + \nabla \times \vec{A} \quad (\text{F. 2})$$

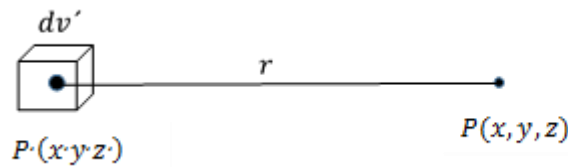


Figura. F.1 Explicación de los símbolos utilizados en las integrales de Poisson. La distancia entre los puntos  $P'$  y  $P$  es  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ .

Donde  $\varphi$  llamado potencial escalar de  $\vec{V}$ , está dado por:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \vec{V}}{r} dv' + \varphi_0 \quad (\text{F. 3})$$

Y  $\vec{A}$ , llamado potencial vectorial de  $\vec{V}$ , viene dado por:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \vec{V}}{r} dv' + \vec{A}_0 \quad (\text{F. 4})$$

$\varphi_0$  y  $\vec{A}_0$  siendo constantes arbitrarias. Llamaremos a las integrales a las Ecuaciones (F.1), (F.3) y (F.4) las integrales de Poisson; Donde  $r$  representa la distancia desde el punto  $P' (x', y', z')$  donde el elemento de volumen de integración,  $dv'$ , está situado al punto  $P (x, y, z)$  donde  $\vec{V}, \varphi$  y  $\vec{A}$  son determinados en la figura F.1. Las manipulaciones matemáticas con campos vectoriales requieren con frecuencia aplicaciones del operador  $\nabla$  para expresiones del tipo.

$$\frac{f(x,y,z)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (\text{F. 5})$$

Que ocurren en integrales de Poisson. Cuando se aplica  $\nabla$  a tales expresiones se debe tener en cuenta que pueden ser diferenciadas con respecto a las coordenadas primas así como también con respecto a las coordenadas no primadas. Siempre que se necesite una declaración explícita de las variables de diferenciación, se utiliza el operador  $\nabla'$  para indicar una operación con respecto a las coordenadas primadas y el operador ordinario  $\nabla$  para indicar una operación con respecto a las coordenadas no primadas. De manera similar, si se necesita una declaración explícita de la dirección de los vectores de radio que ocurren en las integrales de Poisson, se usan los vectores primos  $\vec{r}'$  y  $\vec{r}'_u$  para indicar una

dirección hacia el punto  $x', y', z'$  y los vectores ordinarios  $\vec{r}$  y  $\vec{r}_u$ , para indicar una dirección hacia el punto  $x, y, z$ .

Designando una función escalar o vectorial no especificada  $f(x', y', z')$  junto con un signo de multiplicación apropiado por  $(X)$  y usando las anotaciones anteriores, tenemos las siguientes dos relaciones operacionales:

$$\nabla' \frac{(X)}{r} = \frac{\nabla'(X)}{r} + \vec{r}_u \frac{(X)}{r^2} \quad (\text{F. 6})$$

Cuando usamos la identidad

$$\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}'_u}{r^2} = \frac{\vec{r}_u}{r^2}$$

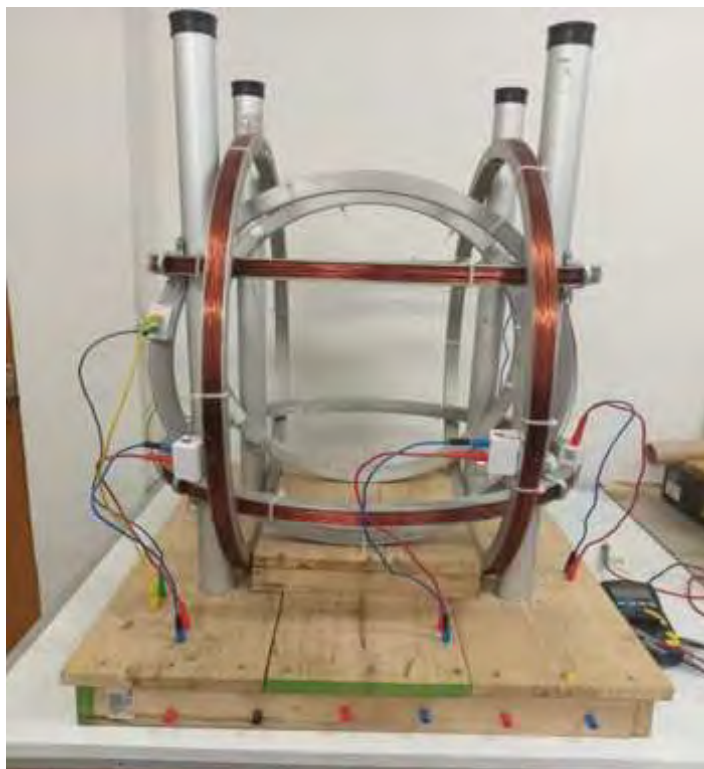
$$\nabla \frac{(X)}{r} = -\vec{r}_u \frac{(X)}{r^2} \quad (\text{F. 7})$$

Combinando estas dos relaciones tenemos otra relacion util:

$$\frac{\nabla'(X)}{r} = \nabla \frac{(X)}{r} + \nabla' \frac{(X)}{r} \quad (\text{F. 8})$$

## Apéndice G

Diferentes vistas del anidado de las bobinas de Helmholtz



Vista Frontal



Figura G.1 vistas frontal y perfil del anidado de bobinas de Helmholtz

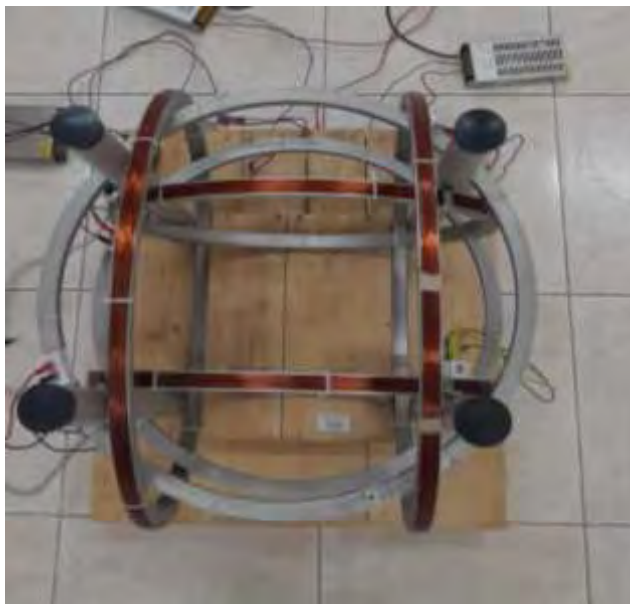


Figura G.2 Vista superior

### Materiales usados



Figura G.3 Carril de mapeo topografico.



Figura G.4 Base de la bobina mayor.



Figura G.5 Base de la bobina mediana.



Figura G.6 Base de la bobina mediana.



Figura G.7 Base de la bobina pequeña.

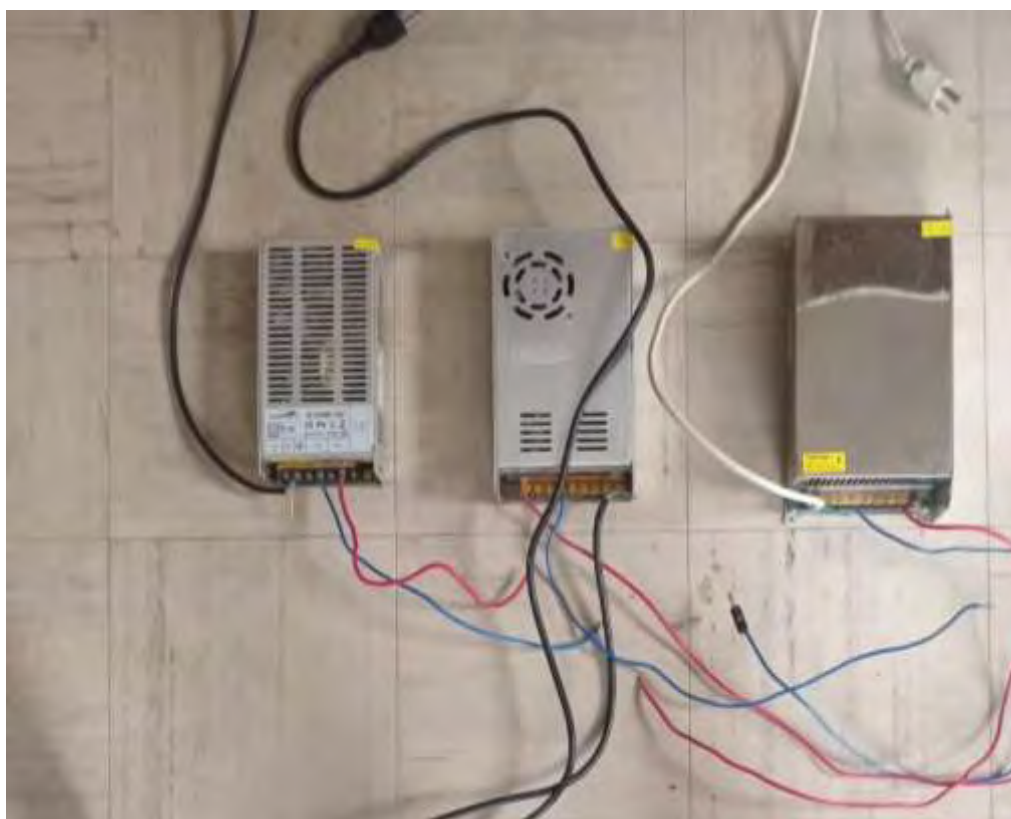


Figura G.8 Fuentes de alimentación de cada bobina.



Figura G.9 El potenciómetro.



Figura G.10: El multímetro.



Figura G.11 Alambre de cobre esmaltado

## Bibliografía

- A. Kovetz, J. O. (2000). *Electromagnetic Theory*. New York: Prensa de la Universidad de Oxford.
- Alvarenga, M. (2008). *física general*. Mexico: Oxford .
- Asimov, I. (1973). *Introducción a la Ciencia, (Tomo I, Las Ciencias Físicas)*. Barcelona: Ediciones Orbis, Muy Interesante,.
- Beiranvand. (2014). Magnetic field uniformity of the practical tri-axial Helmholtz coils systems. *Review of Scientific Instruments*, 85.
- Bell, G. y. (1989). *Sistemas de Exposición para la Producción de Campos Magnéticos Uniformes*. Louisiana : Diario of Bioelectricidad.
- Brewer. (2018). Triaxial square Helmholtz coil system at the alibag magnetic observatory. *Geoscientific Instrumentation, Methods and Data Systems.*, 143–156.
- Cacak, R. (1969). *Magnetic Uniformity around Near helmholtz coil configurations*. Review of scientific instruments.
- Cidrac, C. d. (1979). *Magnetostática*. Barcelona: Editorial Reverte.
- Crosser, M. (2010). *On the magnetic field near the center of Helmholtz coils*. Kentucky: Review of Scientific Instruments .
- Cryomagtech. (2025). *Equal diameter 3D Helmholtz coil system*. producto comercial.
- Finn, M. A.-E. (1967). *física Vol. II campos y ondas* . EE.UU: Fondo Educativo interamericano, S.A.
- Frederic. (1964). *Optimum Spacing of coil pairs*. Rew Ciencia. Instrumento.
- Hayt, W. H. ( 2006). *Teoría electromagnética*. Mexico D.F: Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.

- Hecht, E. (1987). *Física en perspectiva*. Wilmington: Addison Wesley Iberoamericana.
- Hewitt, P. G. (2007). *Física Conceptual*. México: Pearson Educación.
- Jackson, J. D. (1980). *Electrodinámica Clásica*. Madrid: Alhambra.
- Jefimenko, O. D. (1989). *Electricity and Magnetism*. Virginia: Electret Scientific Co; N.º 2 edición.
- Jiles, D. (2016). *Introduction to Magnetism and Magnetic Materials*. U.S.: CRC Press.
- Kane, J. W., & Sternheim, M. M. (2007). *Física*. New York: Editorial Reverte.
- Kovetz, A. (2000). *Electromagnetic Theory*. New York: Prensa de la Universidad de Oxford.
- Kovetz, A. (2000). *Electromagnetic Theory*. Oxford: University Press.
- Kuong Jo, J. (1985). *fundamentos de campos y ondas electromagneticas*. Lima Perú: editorial universitaria.
- Markus, Z. (1991). *Teoría electromagnética*. México: McGraw-Hill.
- Matthew, S. (2003). *Elementos De Electromagnetismo*. Oxford: Oxford University Press.
- Matveev, A. (1988). *Electricidad y magnetismo*. Moscú: Editorial Mir.
- Milford, R. (2001). *Fundamentos de la teoría Electromagnética*. Mexico: Alhambra Mexicana.
- Murano, K. (2006). *low frequency Radiated Immunity test Using tree dimensional Helmholtz*. Yoshio: Review of Scientific.
- Olivera, N. (2003). *Diseño y construccion de la bobina de Helmholtz*. UNSAAC Cusco.
- Reitz, J. R., & Milford, F. J. (1969). *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Mexico: Utexa.
- Ruark, A. E. (1926). *Helmholtz Coils For Producing Uniforme Magnetic Fields*. Washington, D.C: Instrument Section.

- Rudd, M. (1983). *optimum spacing of square and circular coils pairs*. Review of Scientific Instruments.
- Sadiku, M. (2003). *Elementos de Electromagnetismo*. Oxford : Oxford University Press.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2009). *Electricidad y Magnetismo*. U.S.: Edición Iberoamericana.
- Tipler, P. A., & Mosca, G. (2003). *Física para la ciencia y la tecnología. II*. New York: Editorial reverte.
- Vrbancich. (1991). *Magnetic field distribution and design of Helmholtz Coils*. National Technical Information Service.
- Yavorski, B. (1988). *Prontuario de Física*. Moscu: Mir.
- Zahn, M. (1991). *Teoría Electromagnética*. Mexico: McGraw Hill.
- Zahn, M. (1991). *Teoría Electromagnética*. México: McGraw-Hill.
- Zhang. (2025). Design of a three-axis Helmholtz coil for magnetic sensor calibration. *Academic Journal of Science and Technology*, 5437.
- Zill, D. (2009). *Ecuaciones Diferenciales*. México D.F: Cengage.