UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS, FISICAS Y MATEMATICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

TESIS

TEOREMA DE ARZELA-ASCOLI APLICADO EN LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN Y EN LA SUCESIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS CON DOMINIO COMPACTO

PRESENTADO POR:
Br. BRIAN HITOMY HUAMAN HUARCA

PARA OPTAR AL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA

ASESOR:
Dr. ALEJANDRO TTITO TTICA

CO-ASESOR:
Dr. EDISON MARCAVILLACA NIÑO DE GUZMAN

CUSCO - PERÚ

2023

Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco

INFORME DE SIMILITUD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-321-2025-UNSAAC)

El que suscribe, el **Asesor** Alejandro Ttito Ttica quien aplica el software de detección de similitud al trabajo de investigación/tesis titulada: TEOREMA DE ARZELA-ASCOLI APLICADO EN LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN Y EN LA SUCESIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS CON DOMINIO COMPACTO

Presentado por: Brian Hitomy Huaman Huarca DNI N° 75534720;
presentado por: .... DNI N°: ....
Para optar el título Profesional/Grado Académico de Licenciado en Matemática

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 2 veces, mediante el Software de Similitud, conforme al Art. 6° del ***Reglamento para Uso del Sistema Detección de Similitud en la UNSAAC*** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 7 %.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No sobrepasa el porcentaje aceptado de similitud.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las subsanaciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, conforme al reglamento, quien a su vez eleva el informe al Vicerrectorado de Investigación para que tome las acciones correspondientes; Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de Asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** las primeras páginas del reporte del Sistema de Detección de Similitud.

Cusco, 10 de noviembre de 2025

Firma

Post firma Alejandro Ttito Ttica

Nro. de DNI 24676328

ORCID del Asesor 0000-0002-6898-5307

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema de Detección de Similitud: **oid:** 27259:525737052

BRIAN HUAMAN

TEOREMA DE ARZELA -ASCOLI APLICADO EN LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega
trn:oid:::27259:525737052

Fecha de entrega
10 nov 2025, 5:37 a.m. GMT-5

Fecha de descarga
10 nov 2025, 5:47 a.m. GMT-5

Nombre del archivo
Tesis.pdf

Tamaño del archivo
601.8 KB

75 páginas

19.193 palabras

79.859 caracteres

7% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Bibliografía
- Coincidencias menores (menos de 30 palabras)
- Base de datos de Crossref
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

Fuentes principales

7% Fuentes de Internet
0% Publicaciones
1% Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.° de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Presentación

Señor: Decano de la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas

Señor: Director de la Escuela Profesional de Matemática

Señores: Miembros del Jurado

El presente trabajo de tesis intitulado: TEOREMA DE ARZELA-ASCOLI APLICADO EN LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN Y EN LA SUCESIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS CON DOMINIO COMPACTO para optar al Título profesional de LICENCIADO EN MATEMÁTICA, tiene por objetivo desarrollar la teoría de las sucesiones de funciones y demostrar que el teorema de Arzela-Ascoli garantiza que cualquier sucesión de funciones continuas (f_n) con dominio compacto K, posee una subsucesión uniformemente convergente. El contenido de este trabajo se subdivide en cuatro capítulos que se describen a continuación:

En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema, la formulación del problema, los objetivos, antecedentes, metodología, justificación y las limitaciones.

En el segundo capítulo, se presenta los conceptos básicos de la teoría de los espacios métricos, que lleva asociado la idea de una distancia entre dos elementos de un conjunto no vació, del cual se puede deducir el concepto de norma, que a su vez define también otros conceptos como el de bolas las cuales son importantes para el entendimiento de la convergencia de sucesiones, seguidamente se revisan las aplicaciones continuas entre espacios normados de dimensión finita.

El tercer capítulo, hace referencia a la compacidad de un conjunto, y sus diferentes versiones equivalentes las cuales son de importancia, como el caso en que el dominio sea un subconjunto compacto, y se demuestra el teorema de Arzela-Ascoli, que es el tema principal de este trabajo junto a sus aplicaciones.

Finalmente, el cuarto capítulo se encarga de desarrollar algunas aplicaciones de relevancia que tiene el teorema de Arzela-Ascoli en la variable compleja y en la existencia de soluciones para una ecuación diferencial de primer orden.

Confiado de cumplir con lo propuesto y con el deseo de continuar profundizando en el estudio de los conjuntos compactos, las sucesiones y series de funciones, sus aplicaciones; quedo muy agradecido a los señores miembros del jurado por las observaciones que tenga a bien formular.

Dedicatoria

Agradezco a Dios, por darme una hermosa familia, por siempre tenerme presente en todos sus planes y por permitirme alcanzar mis metas, por creer en mí siempre y darme aliento para conseguir todas mis metas.

A mi papá, Jesus y mi mamá, Elida, por el apoyo que siempre me brindan en mi vida y por el incansable esfuerzo que realizan día a día para que sea un buen profesional, también a mi hermana Mabel por la ayuda que me brindó cuando la necesité. Son tantas cosas que tendría que agradecerles.

Un agradecimiento muy especial a mis asesores, los Profesores Dr. Alejandro Ttito Ttica y Dr. Edison Marcavillaca Niño de Guzmán por su gran paciencia, sus sugerencias, correcciones y por su constante apoyo en la elaboración de este trabajo. A los miembros del jurado por sus recomendaciones para mejorar este trabajo. A los profesores del Départamento Academico de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, por transmitirme sus diversas experiencias y conocimientos en el maravilloso mundo de las matemáticas.

A mis amigos de la licenciatura Edgar Huarca, Pilar Rivero, Javier Ccahuana, Jose Luis Chocata, Luis Huaman, Anderson Huaman, Julio Flores, Junior Valle, Kevin Haquehua y David Ttito que compartieron mis alegrías y tristezas en este camino, y para Abraham Flores amigo hermano un saludo al cielo. Que Dios los bendiga a todos.

Resumen

Las sucesiones de funciones con dominio compacto son una herramienta poderosa en el análisis matemático para comprender el comportamiento de funciones complicadas mediante la aproximación de secuencias de funciones más simples. Su estudio permite explorar diferentes tipos de convergencia.

El objetivo de este trabajo es determinar bajo que condiciones al respecto de un conjunto E de funciones continuas, todas con el mismo dominio, se puede garantizar que cualquier sucesión con términos $(f_n) \in E$ posee una subsucesion uniformemente convergente. Previamente, en el marco teórico, se enuncian algunas propiedades que serán necesarias para desarrollar el trabajo. Luego de desarrollar el concepto de Equicontinuidad y demostrar el Teorema de Cantor-Tychonof, se desarrolla lo que es propiamente el Teorema de Arzela-Ascoli.

El Teorema de Arzelá-Ascoli, proporciona condiciones necesarias para que una sucesión de funciones continuas (f_n) definidas en un subconjunto compacto de los números reales, admita una subsucesion uniformemente convergente. Se aborda dos aplicaciones de relevancia, en variable compleja y en la existencia de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden.

En conclusión, el Teorema de Arzelá-Ascoli es el soporte principal que dá condiciones necesarias para desarrollar las aplicaciones.

Palabras clave: Convergencia uniforme, Equicontinuidad, Sucesiones de funciones, Teorema de Arzela-Ascoli.

Abstract

The sequences of functions with a compact domain are a tool powerful tool in mathematical analysis to understand the behavior complying with complicated functions by Sequence approximation of simple functions. Its study allows us to explore different types of convergence.

The objective of this work is to determine under what conditions at with respect to a set E of continuous functions, all with the same as a domain, it can be guaranteed that any sequence with terms $(f_n) \in E$ has a uniformly convergent subsequence. Previously, in the general section, some properties that will be necessary to develop the work are stated. After developing the concept of Equicontinuity and proving the important Cantor-Tychonov Theorem, what is properly the Arzela-Ascoli Theorem is developed.

The Arzelá-Ascoli Theorem provides us with necessary conditions so that a sequence of continuous functions (f_n) defined in a compact subset of the real numbers admits a uniformly convergent subsequence. Two relevant applications are addressed, in a complex variable and in the existence of solutions of a first order differential equation.

In conclusion, the Arzelá-Ascoli Theorem is the main support necessary conditions remain to develop the applications.

Keywords: Arzela-Ascoli Theorem, Equicontinuity, Sequences of functions, Uniform convergence.

Índice general

Introducción

Las sucesiones de funciones con dominio compacto son un tema importante en el análisis matemático y juegan un papel fundamental en diversos campos como el cálculo, la teoría de la medida y la teoría de la probabilidad.

La teoría de las sucesiones de funciones con dominio compacto permite estudiar el comportamiento límite de estas sucesiones y entender cómo convergen en relación con las propiedades de los conjuntos compactos.

Una de las motivaciones principales para el estudio de estas sucesiones es la aproximación de funciones. En muchos casos, es difícil trabajar directamente con una función complicada, pero se puede obtener una mejor comprensión mediante la aproximación de dicha función mediante sucesiones de funciones más simples y manejables. Esto se logra construyendo sucesiones de funciones con dominio compacto que convergen a la función deseada en cierto sentido.

Existen diferentes tipos de convergencia que se pueden considerar en las sucesiones de funciones con dominio compacto, como la convergencia puntual, la convergencia uniforme. Cada tipo de convergencia tiene sus propias propiedades y aplicaciones particulares.

La teoría de las sucesiones de funciones con dominio compacto también está estrechamente relacionada con otros conceptos matemáticos, como la continuidad, la diferenciabilidad y la integrabilidad. Estas sucesiones permiten estudiar las propiedades de las funciones límite y cómo se heredan de las funciones de la sucesión.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción del problema

Recorriendo por el mundo de la matemática, uno de los parajes con los que uno se encuentra son las sucesiones, que son funciones de gran aplicación que se utilizan frecuentemente para demostrar teoremas y propiedades de la topología, los espacios métricos. Son mucho más destacadas sus aplicaciones las cuales no solo se limitan dentro de las matemáticas mismas, si no que también toman papel importante en otras áreas, como la biologia, los fenómenos naturales; haciendo uso de los números de Fibonacci, intereses bancarios etc. En el ámbito interdisciplinario por ejemplo, se utilizan para representar listas ordenadas de elementos, es así que debido al hecho de que las sucesiones obedecen a un patrón o comportamiento, es fundamental para la ciencia y sus aplicaciones en general, buscar siempre perfeccionar la teoría de las sucesiones ya que mediante estas se puede predecir comportamientos en el futuro.

Para las sucesiones de números reales, existe una única noción de límite, y además para que toda sucesión de números $(x_n) \in I \subset \mathbb{R}$ posea una subsucesión convergente es necesario y suficiente que I sea un conjunto limitado, así teniendo estudiado las sucesiones y series de números reales, se consideran las sucesiones cuyos términos son funciones donde se ve que hay diferentes maneras de definir la convergencia de una sucesión de funciones como la convergencia simple y la convergencia uniforme.

Ciertos problemas importantes en la teoría de sucesiones están dirigidos a que si se supone que cada término de la sucesión (f_n) tiene una cierta propiedad (por ejemplo: continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, ver Little y cols. (2015)) ¿Hasta qué punto puede afirmarse que la función limite f también posee esa propiedad? como ejemplo, supongamos que cada f_n es continua en un punto x_0 de su dominio, para todo $n \in \mathbb{N}$ (todas con mismo dominio). ¿la función límite f es también continua en el punto x_0?

El problema central radica en determinar bajo que condiciones al respecto de un conjunto de funciones continuas E, todas con mismo dominio, se puede garantizar que cualquier sucesión de funciones $f_n \in E$ posee una subsucesión uniformemente convergente. Extendiéndo la idea a un conjunto E de funciones continuas $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$, la limitación no es suficiente para que toda sucesión en E posea una subsucesión uniformemente convergente. Por tanto, serán necesarias condiciones adicionales sobre E; condiciones que se introducen a continuación, como la equicontinuidad y el concepto de uniformidad limitada que son de mucha ayuda para enunciar el teorema de Arzela-Ascoli (ver Lima (2013)) que será el resultado principal a desarrollarse.

Por último también se ven las aplicaciones de los conceptos antes mencionados en problemas diversos como las funciones de variable compleja (Cartan (1995); Ward Brown y cols. (2004); Narasimhan y Nievergelt (2012)) y ecuaciones diferenciales (Sotomayor (1979))

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿El teorema de Arzela-Ascoli garantiza que cualquier sucesión de funciones continuas (f_n), definidas en un conjunto compacto K posee una subsucesión uniformemente convergente?

1.2.2. Problemas específicos

1. Dada una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. ¿El teorema de Arzela-Ascoli garantiza la existencia de al menos una solución en un subconjunto compacto K?

2. ¿Dado un conjunto limitado y equicontinuo de funciones $\mathbb{C}$-diferenciables H, existirá una subsucesión la cual converge uniformemente a una función $\mathbb{C}$-diferenciable en un subconjunto compacto K?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Demostrar que el teorema de Arzela-Ascoli garantiza que cualquier sucesión de funciones continuas (f_n) con dominio compacto K posee una subsucesión uniformemente convergente.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Demostrar que el teorema de Arzela-Ascoli garantiza la existencia de por lo menos una solución en un subconjunto compacto K a una ecuación diferencial de primer orden.

2. Demostrar que dado un conjunto limitado y equicontinuo de funciones $\mathbb{C}$-diferenciables H, existe una subsucesión uniformemente convergente a una función $\mathbb{C}$-diferenciable en un conjunto compacto K.

1.4. Justificación del problema

El presente trabajo de investigación se desarrolla con el fin de contribuir con el desarrollo del área de investigación de Análisis, en particular la teoría de sucesiones, además, si bien es cierto que en los últimos años se ha ido avanzado en el desarrollo de la teoría de las sucesiones de funciones cada vez con mayor ahínco, la literatura existente en nuestro medio, adolece aún de ejemplos claros que permitán lograr un mejor entendimiento de las aplicaciones de estos conceptos.

En ese entender este trabajo, aporta de manera significativa en la difusión de las aplicaciones de las sucesiones de funciones para resolver problemas de variable compleja y ecuaciones diferenciales en particular.

1.5. Limitaciones

La principal limitación que se tuvo en el presente trabajo fue el excesivo costo de artículos y la poca información, en nuestro medio, referentes al tema.

1.6. Metodología

El trabajo inicia con la consulta de fuentes bibliográficas que profundicen las temáticas y con el desarrollo de ejemplos que permitan conceptualizar mejor las mismas. Para la elaboración del trabajo se lleva un registro de la actividad matemática (ejemplos, teoremas, demostraciones y en general de los avances que se obtengan) para así, cumplir con los objetivos planteados.

1.6.1. Tipo de investigación

El presente trabajo es de tipo básica debido a que se usa teoremas y resultados fundamentales dentro del campo de las matemáticas.

1.6.2. Diseño de Investigación

La investigación tiene un diseño descriptivo porque se realiza a través de la consulta de documentos, libros, artículos,etc.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Los espacios métricos son un ejemplo de espacios topológicos, de mucha importancia en la misma topología, el análisis funcional, y en general para las Matemáticas. De los espacios métricos, se desprenden como caso particular, los espacios normados y de estos a su ves, se tienen a los espacios dé Banach, que generalizan el concepto de $\mathbb{R}^n$.

Es universalmente admitido de que los primeros en estudiar los conjuntos infinitos de funciones fueron los matemáticos italianos G. Ascoli (1884) y C. Arzela (1883) ambos de manera independiente, quienes abordaron este estudio basado en algunos conceptos y teoremas de la teoría de conjuntos puntuales de Cantor trasladados a conjuntos de curvas continuas.

Diferentes enfoques recientes han sido estudiados por Chiristina Sormani (2018), en su articulo Intrinsic flat Arzela-Ascoli theorems, donde prueba dos teoremas de Arzela-Ascoli, para sucesiones intrínsecamente planas convergentes de variedades además de un teorema básico de Bolzano-Weierstrass para secuencias de puntos en tales sucesiones de espacios.

Otro estudio reciente lo hace Gilson Teixeira Pereira (s.f.) (2016) en su trabajo de fin de curso titulado El Teorema de Arzela-Ascoli, donde presenta las condiciones necesarias para que una sucesión de funciones continuas definidas en un subconjunto compacto de los números reales admita una subsucesión uniformemente convergente.

Así como también se tomó en cuenta la publicación emitida por la Universida-

de Tecnologica Federal do Parana en el año 2016, que títula Un estudio sobre el Teorema de Arzela-Asc
de Mayara Vendramini Codognos (2016), donde realiza un estudio sobre sucesiones de funciones, en el cual son analizados los principales tipos de convergencia, también se demuestra el teorema de Arzela-Ascoli y por ultimo se aborda una aplicación en el calculo de variaciones.

Todos estos trabajos dan importantes luces en el abordamiento del teorema de Ascoli-Arzela y cada uno aportando de diferente manera con enfoques distintos. De esta forma se puede encontrar mayores herramientas a la hora de aplicar este teorema de acuerdo al uso que se le quiera dar o al tema que se le quiera aplicar.

Finalmente, entre las obras que se usaron para el estudio de estos conceptos antes mencionados se incluyen los libros de James Munkres (2000), Jhon Kelley (2017), Bartle y Sherbert (2000), Elon Lima (1983), Domingues (1982). Otra referencia clásica todavía muy utilizada es Elon Lima (2004), Tom Apostol (2020). Entre las publicaciones más recientes, se menciona Pugh y Pugh (2002); Ovchinnikov (2021); Ziemer y Torres (2017), cuyos enfoques pueden servir para estudios mas generales.

2.2. Espacios Métricos

Los espacios métricos son mucho más generales que los espacios normados. La estructura métrica de un espacio normado es muy especial y posee propiedades que los espacios métricos generales no tienen necesariamente. Los espacios métricos son un concepto relevante en matemáticas, tal es así que funciona como una especie de puente entre el análisis real y la topología general. A cada espacio métrico se le asocia una topología que capta precisamente la noción de continuidad para la métrica dada. Esto significa que muchas propiedades topológicas pueden entenderse en el contexto de los espacios métricos, abarcando muchos ejemplos de diversos grados de complejidad, sin dejar de tener en cuenta una noción de distancia. La noción de distancia suele considerarse mucho menos abstracta que la de topología, y muchas de las pruebas son simplemente una reformulación de las pruebas estándar del análisis real. Los espacios métricos fueron introducidos en 1906 por Frechet en su trabajo Sur quelques points du calcul fonctionnel para explicar en términos abstractos importantes resultados obtenidos por matemáticos de su generación o ligeramente mayores, como Hadamard, y de una o dos generaciones anteriores, como Arzelá. Asi, los espacios métricos son bastante más recientes que los principales objetos de estudio tradicionales, como $\mathbb{R}$ y varios espacios funcionales.

A continuación se define el concepto de espacio métrico y se establece propiedades básicas como también se examina un método para construir nuevos espacios a partir de espacios métricos dados como la construcción de una métrica en un producto de dos espacios.

Definición 2.2.1 (Ziemer y Torres (2017)) Un espacio métrico es un conjunto arbitrario no vació X dotado de una métrica $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades para todo x, y y z en X.

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Se escribe (X, ρ) para denotar el espacio métrico X dotado de una métrica ρ. A menudo, la métrica ρ se denomina función de distancia, y un nombre razonable para la propiedad (3) es la desigualdad triangular.

Ejemplo 2.2.1 Sea $X = \mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las n-uplas de números reales. Si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ son elementos de X. Existen tres formas naturales de definir la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = [\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\rho_\infty(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Teorema 2.2.1 Sean $\rho, \rho_1, \rho_\infty$ las métricas definidas en el Ejemplo 2.2.1 Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\rho_\infty(x,y) \leq \rho(x,y) \leq \rho_1(x,y) \leq n.\rho_\infty(x,y)$$

Demostración: Se empieza a mostrar la primera desigualdad. Se tiene por definición que

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

Así, sin perdida de generalidad se puede suponer que $\rho_\infty(x,y) = |x_i - y_i|$ para algún i, luego por definición del valor absoluto se tiene que

$$|x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2}$$

luego, no es difícil ver que la siguiente desigualdad es cierta

$$\sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

y nuevamente, por definición se tiene que

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \rho(x,y)$$

Ahora, pasando a la demostración de la segunda desigualdad, por definición se tiene que

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

luego

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2} + \cdots + \sqrt{(x_n - y_n)^2}$$

puesto que la expresión $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$ siempre es menor o igual que $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 + 2(\sqrt{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)} + \sqrt{(x_1 - y_1)(x_3 - y_3)} + \cdots + \sqrt{(x_{n-1} - y_{n-1})(x_n - y_n)})$ de manera obvia. Por tanto de la definición de valor absoluto se sigue

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

Luego se tiene que $\rho(x,y) \leq \rho_1(x,y)$

Finalmente, se tiene por definición que

$$\rho_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

ahora suponga que $\max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| = |x_i - y_i|$ para algún i

Entonces

$$\begin{aligned}
|x_1 - y_1| &\leq |x_i - y_i| \\
|x_2 - y_2| &\leq |x_i - y_i| \\
&\vdots \\
|x_n - y_n| &\leq |x_i - y_i|
\end{aligned}$$

sumando las n desigualdades se tiene que

$$|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq n|x_i - y_i|$$

Por consiguiente se tiene que $\rho_1(x,y) \leq n.\rho_\infty(x,y)$ $\square$

Definición 2.2.2 (Lima (1983)) Sean X e Y espacios métricos cuyas métricas se indican por ρ. Al producto cartesiano $X \times Y$ formado por los pares ordenados $z = (x,y)$ donde $x \in X$ e $y \in Y$, se le puede dotar de una métrica, definiendo la distancia de $z = (x,y)$ a $z_1 = (x_1, y_1)$ como

$$\rho_1(z, z_1) = \rho(x, x_1) + \rho(y, y_1)$$

o

$$\rho_\infty(z, z_1) = \max\{\rho(x, x_1)\,, \rho(y, y_1)\}$$

o

$$\overline{\rho}(z, z_1) = \sqrt{\rho(x, x_1)^2 + \rho(y, y_1)^2}$$

Las dos primeras son mucho más simples para trabajar en comparación con la tercera, la cual es mencionada solo para incluir el caso euclidiano.

La generalización para un producto de n factores es inmediata. Se dan los espacios métricos $X_1, X_2, \cdots, X_n$ cuyas métricas se indican con ρ, el producto cartesiano $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ es el conjunto de n-uplas $x = (x_1, \cdots, x_n)$ donde $x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n$. X se convierte en un espacio métrico junto con cualquiera de las tres métricas abajo

$$\rho_\infty(x, y) = \text{máx}\{\rho(x_1, y_1), \cdots, \rho(x_n, y_n)\}$$

$$\rho_1(x, y) = \rho(x_1, y_1) + \cdots + \rho(x_n, y_n)$$

$$\overline{\rho}(x, y) = \sqrt{\rho(x_1, y_1)^2 + \cdots + \rho(x_n, y_n)^2}$$

Cuando $X_1 = \cdots = X_n = \mathbb{R}$ se obtiene el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ como producto cartesiano de n copias del espacio métrico $\mathbb{R}$.

Definición 2.2.3 (Ziemer y Torres (2017)) Sea X un espacio vectorial real. Una función $\| \, \| : X \to \mathbb{R}$ es una norma sobre X si se verifican las siguientes condiciones para todo $x, y \in X$ y α escalar:

1. $\|x\| \geq 0$
2. Si $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0$
3. $\|\alpha.x\| = |\alpha|.\|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

En particular se puede interpretar la norma de un vector x como la distancia del punto x al origen.

Un espacio vectorial normado es un par $(X, || \, ||)$ donde X es un espacio vectorial real y $|| \, ||$ es una norma en X. Aquí se designa el espacio vectorial normado con X, dejando la norma sobrentendida.

Algunos ejemplos de espacio vectorial normado son $(\mathbb{R}^n, || \, ||)$, $(\mathbb{R}^n, || \, ||_1)$, $(\mathbb{R}^n, || \, ||_\infty)$ donde $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, y se tiene que

$$\|x\| = \sqrt{\sum (x_i)^2}, \quad \|x\|_1 = \sum |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i|\}$$

Teorema 2.2.2 Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio vectorial normado entonces $d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica.

Demostración: Sean $x, y, z, w \in X$ entonces

1. $\rho(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ para todo $x, y \in X$

2. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

3. $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|.\|y-x\| = \|y-x\| = \rho(y,x)$

4. $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Teorema 2.2.3 Todo espacio vectorial normado $(X, \| \|)$ se convierte en un espacio métrico por medio de la definición $\rho(x,y) = \|x-y\|$

Demostración: Sea $(X, \| \|)$ un espacio normado, por el Teorema 2.2.2 se tiene que $\rho(x,y) = \|x-y\|$ es una métrica, por tanto (X, ρ) es un espacio métrico. $\square$

Esta métrica se dice proveniente de la norma $\| \|$.

2.2.1. Topología de los Espacios Métricos

Definición 2.2.1.1 (Ziemer y Torres (2017)) Sea X un espacio métrico con métrica ρ. Una bola abierta de radio r y centro $a \in X$ es el conjunto definido por:

$$B(a,r) = X \cap \{y; \rho(a,y) < r\}$$

donde $r > 0$.

Definición 2.2.1.2 (Ziemer y Torres (2017)) Sea X un espacio métrico con métrica ρ. Una bola cerrada de radio r y centro $a \in X$ es el conjunto definido por:

$$\overline{B}(a,r) = X \cap \{y; \rho(a,y) \leq r\}$$

donde $r > 0$.

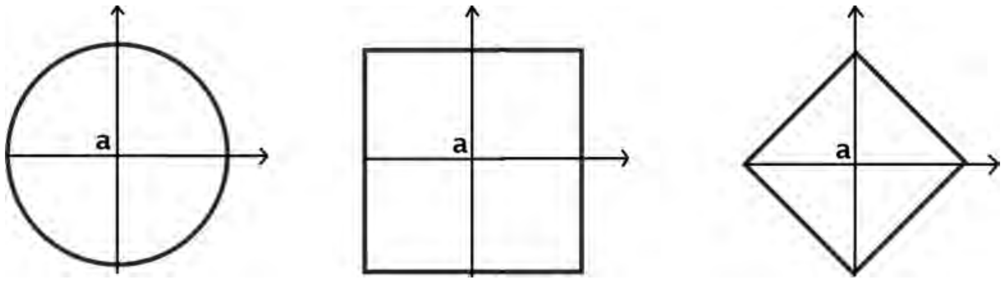
Definición 2.2.1.3 Sea X un espacio métrico con métrica ρ. La esfera de radio r y centro $a \in X$ es el conjunto definido por:

$$S(a,r) = X \cap \{y; \rho(a,y) = r\}$$

donde $r > 0$.

Luego, se tiene que $\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$, es una reunión disjunta.

Ejemplo 2.2.1.1 En el plano $\mathbb{R}^2$ la bola abierta $B(a, r)$ es el interior de un círculo de centro a y radio r, o el interior de un cuadrado de centro a y lados de longitud $2r$, paralelos a los ejes o el interior de un cuadrado de centro a y diagonales paralelas a los ejes, ambas de longitud $2r$. Estos casos corresponden a las normas $\| \|$, $\| \|_\infty$, $\| \|_1$ respectivamente, las cuales se representan a continuación.



Definición 2.2.1.4 (Domingues (1982)) Sean ρ e ρ' métricas sobre el mismo conjunto X. Se dice que ρ e ρ' son métricas equivalentes si, para cada $p \in X$, cualquier bola $B_\rho(p, \epsilon)$, existe $\lambda > 0$ de manera que $B'_\rho(p, \lambda) \subset B_\rho(p, \epsilon)$ y, viceversa, dada una bola $B'_\rho(d, \epsilon)$ existe $\lambda > 0$ de forma que $B_\rho(p, \lambda)$ y $B_\rho(p, \lambda) \subset B'_\rho(p, \epsilon)$.

Definición 2.2.1.5 (Apostol (2020)) Sea X un espacio métrico. Un punto $a \in X$ se dice que es un punto interior a X si existe alguna una bola abierta contenida en X, es decir, cuando existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset X$.

Se llama interior de X, al conjunto $int\, X$ formado por los puntos interiores a X, es decir:

$$int(X) = \bigcup_{x \in X} \{B(x, r) : B(x, r) \subset X\}$$

Definición 2.2.1.6 (Lima (1983)) Se llama frontera de $X \subset M$ al conjunto ∂X formado por los puntos $a \in M$ tal que toda bola abierta de centro a contiene por lo menos un punto de X y un punto del complemento $M - X$,es decir

$$\partial X = \{a \in M \, : \, B(a, r) \cap X \neq \phi \wedge B(a, r) \cap [M - X] \neq \phi, \, \forall r > 0\}$$

Definición 2.2.1.7 Apostol (2020) Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice abierto cuando todos sus puntos son puntos interiores.

Teorema 2.2.1.1 En cualquier espacio métrico X, una bola abierta $B(a, r)$ es un conjunto abierto.

Demostración: Sea $x \in B(a, r)$. Entonces $\rho(x, a) < r$ y por tanto $s = r - \rho(x, a)$ es un número positivo. Se afirma que $B(x,s) \subset B(a,r)$. Así, si $y \in B(x,s)$ entonces $\rho(x,y) < s$ y por tanto $\rho(a,y) \leq \rho(a,x) + \rho(x,y) < \rho(a,x) + s = r$. Luego $y \in B(a,r)$ $\square$

Teorema 2.2.1.2 Sea $(A_i)_{i\in I} \subset X$ una familia arbitraria de subconjuntos abiertos, se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un subconjunto abierto.

Demostración: Si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$ y como A_{i_0} es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, es decir que $x \in int(\bigcup_{i\in I} A_i)$ y por tanto $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un conjunto abierto. $\square$

Teorema 2.2.1.3 Sea $(A_i)_{i=1}^n \subset X$ una familia finita de conjuntos abiertos entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto.

Demostración: Sea $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ entonces $x \in A_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$, como A_i es abierto para todo $i = 1, \cdots, n$, existe $r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subset A_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$, se toma $r = \min\{r_1, \cdots, r_n\}$ entonces $B(x,r) \subset A_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$, luego $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$ Por tanto $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto. $\square$

Definición 2.2.1.8 (Kelley (2017)) Se dice que un conjunto $F \subset X$ es cerrado cuando su complemento $X - F$ es abierto en X.

Definición 2.2.1.9 (Munkres (2000)) Sea $A \subset X$ se define la clausura de A como

$$\overline{A} = \bigcap_{A\subset F} \{F; F \text{ es cerrado}\}$$

Teorema 2.2.1.4 Sea $(A_i)_{i\in I} \subset X$ una familia arbitraria de subconjuntos cerrados de X entonces se tiene que $\bigcap_{i\in I} A_i$ es un subconjunto cerrado.

Demostración: Como $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de conjuntos cerrados entonces $(A_i^c)_{i\in I}$ es una familia de abiertos y por el Teorema 2.2.1.2 se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i^c$ es abierto. Así $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ y por tanto $\bigcap_{i\in I} A_i$ es cerrado. $\square$

Teorema 2.2.1.5 Sea $(A_i)_{i=1}^n \subset X$ una familia finita de subconjuntos cerrados de X entonces se tiene que $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es un subconjunto cerrado.

Demostración: Como $(A_i)_{i=1}^n$ una familia de cerrados entonces $(A_i^c)_{i=1}$ es una familia de abiertos y por el Teorema 2.2.1.3 se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i^c$ es abierto. Así $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ y por tanto $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado. $\square$

Teorema 2.2.1.6 Sea $A \subset X$ entonces

1. $int\, A$ es abierto.

2. $int\, A \subset A$

3. $int\, A$ es el mayor abierto contenido en A

Demostración:

(1) Sea $x \in int\, A$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$, luego

$$B(x,r) \subset \bigcup_{x\in A}\{B(x,r) : B(x,r) \subset A\} = int\, A$$

(2) Sea $x \in int\, A$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset A$, luego $x \in B(x,r) \subset A$. Por tanto $int\, A \subset A$

(3) Suponga que existe B abierto tal que $int\, A \subset B \subset A$. Sea $x \in B$, como B es abierto se tiene que existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset B \subset A$, luego

$$B(x,r) \subset \bigcup_{x\in A}\{B(x,r) : B(x,r) \subset A\} = int\, A$$

Así $B \subset int\, A$, por tanto $B = int\, A$ $\square$

Teorema 2.2.1.7 Sea $A \subset X$ entonces

1. $\overline{A}$ es cerrado.

2. $A \subset \overline{A}$

3. $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A

Demostración:

(1) Como $\overline{A} = \bigcap_{A\subset F}\{F : F \text{ es cerrado}\}$ y por el Teorema 2.2.1.4 se tiene que A es cerrado.

(2) Sea $x \in A$, suponga que $x \notin \overline{A}$ entonces $x \notin \bigcap_{A\subset F}\{F : F \text{ es cerrado}\}$, luego $x \notin F$ para algún $A \subset F$ es decir que $x \in F^c$, lo cual es absurdo pues $x \in A \subset F$ y $x \in F^c$ Por tanto $x \in \overline{A}$

(3) Suponga que existe B cerrado tal que $A \subset B \subset \overline{A}$. Si $A \subset B$ y B es cerrado entonces $\bigcap_{A\subset B}\{B : B \text{ es cerrado}\} \subset B$, así $\overline{A} \subset B$, luego $\overline{A} = B$. $\square$

Teorema 2.2.1.8 Sea $A \subset X$ entonces A es cerrado si y solo si $A = \overline{A}$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Suponga que A es cerrado, por el Teorema 2.2.1.7 se tiene que $A \subset \overline{A}$, y como

$A \subset A$ y A es cerrado entonces $\overline{A} \subset A$, por tanto $A = \overline{A}$.

($\Leftarrow$) Suponga que $A = \overline{A}$, como $\overline{A}$ es cerrado se tiene que A es cerrado. $\square$

2.2.2. Sucesiones

Definicion 2.2.2.1 (Pugh y Pugh (2002)) Una sucesión en un espacio métrico X es una función $x : \mathbb{N} \to X$ definida en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. El valor que esa función asume en el número $n \in \mathbb{N}$ se indica por x_n y se llama el termino n-esimo de la sucesión.

Definición 2.2.2.2 (Pugh y Pugh (2002)) Una subsucesión de (x_n) es una restricción de la función $x \mapsto x_n$ a un subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. La subsucesión es indicada por la notación $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$

Definición 2.2.2.3 (Lima (1983)) Una sucesión (x_n) en el espacio métrico X se llama limitada cuando el conjunto de sus términos es limitado, es decir cuando existe un $c > 0$ tal que $\rho(x_m, x_n) \leq c$ para cualquier $m, n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.2.4 (Pugh y Pugh (2002)) Se dice que una sucesión (x_n) en un espacio métrico X converge para a, si existe un punto $a \in X$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para que $n \geq n_0$ implica que $\rho(x_n, a) < \epsilon$.

En este caso, se dice que (x_n) converge hacia a y se escribe $a = \lim_{n \to \infty} x_n$. Si (x_n) no converge, se dice que la sucesión es divergente.

Afirmar que $a = \lim x_n$ en X equivale a decir que toda bola $B(a, r)$ de centro a contiene a x_n para todo n con excepción de un número finito de ellos.

Definición 2.2.2.5 (Lima (2004)) Sea $X = \mathbb{R}$. Una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ se llama monótona cuando se tiene $x_n \leq x_{n+1}$ o $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En el primer caso se dice que la sucesión es monótona no decreciente y en el segundo caso se dice que es monótona no creciente.

Definición 2.2.2.6 (Lima (2013)) Una sucesión (x_n) en un espacio métrico X se llama una sucesión de Cauchy cuando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \epsilon$.

Teorema 2.2.2.1 Toda sucesión convergente es limitada

Demostración: Sea $\lim x_n = a$ en un espacio métrico X. Tomando $\epsilon = 1$ se obtiene $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(a, 1)$. Por tanto el conjunto de valores de la sucesión esta contenido en la reunión $\{x_1, \cdots, x_N\} \cup B(a, 1)$ de dos conjuntos limitados, luego es limitado. $\square$

Teorema 2.2.2.2 El límite de una sucesión si existe, es único.

Demostración: Sea (x_n) una sucesión en el espacio métrico X y sean $a, b \in X$ tal que $\lim x_n = a$ y $\lim x_n = b$. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Existe también $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1 \Rightarrow \rho(x_n, b) < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora, tomando $n \in \mathbb{N}$ mayor que n_0 y que n_1, se tiene que $\rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) < \epsilon$. Se sigue que $0 \leq \rho(a, b) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y por tanto $\rho(a, b) = 0$ implica que $a = b$. $\square$

Teorema 2.2.2.3 Si $a = \lim x_n$ entonces toda subsucesión de (x_n) converge para a.

Demostración: Sea $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Dado cualquier $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, a) < \epsilon$. Existe también $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{i_0} > n_0$.Luego

$$i > i_0 \Rightarrow n_i > n_{i0} \Rightarrow \rho(x_{n_i}, a) < \epsilon$$

Por tanto,

$$\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

Así, cualquier subsucesión de (x_n) converge para a. $\square$

Teorema 2.2.2.4 Si (x_n) es una sucesión de X convergente, entonces es una sucesión de Cauchy.

Demostración: Como (x_n) es una sucesión convergente. Dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\rho(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$.

Tomando $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ entonces

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

por tanto (x_n) es una sucesión de Cauchy. $\square$

Teorema 2.2.2.5 Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en X, entonces es limitada.

Demostración: Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X.

Para todo $\epsilon > 0$. En particular tomando $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $\rho(x_n, x_m) < 1$.

Luego el conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \cdots\}$ es limitado y tiene diámetro ≤ 1. Se sigue que

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_1, \cdots, x_N\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \cdots\}$$

es limitada. $\square$

Teorema 2.2.2.6 Toda sucesión monótona limitada es convergente.

Demostración: Dada una sucesión monótona limitada (x_n), sin perdida de generalidad, suponga que (x_n) es no creciente. Se define el conjunto $A = \{\cdots, x_n, \cdots, x_1\}$ y $a = \inf A$. Se afirma que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. En efecto: Dado un $\epsilon > 0$ entonces $a + \epsilon$ no es cota inferior de A, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq x_{n_0} < a + \epsilon$. Así para todo $n \geq n_0$ se tiene que $a - \epsilon < x_n \leq a \leq x_{n_0} < a + \epsilon$ por tanto $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

Teorema 2.2.2.7 Toda sucesión limitada de números reales posee una subsucesión convergente.

Demostración: Como (x_n) es limitada, solo queda mostrar que (x_n) posee una subsucesión monótona. Previamente se define a un termino x_n de la sucesión como termino destacado, cuando $x_n \geq x_p$ para $p \geq n$.

Sea $E \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los índices n tal que x_n es un termino destacado, es decir $E = \{n \in \mathbb{N} / x_n \geq x_p\}$. Si E es un conjunto infinito, $E = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ entonces la subsucesión $(x_n)_{n\in E}$ sera monótona no creciente porque $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq \cdots \geq x_{n_k} \geq \cdots$

Por el contrario, si E es un conjunto finito, sea $n_1 > n$ para todo $n \in E$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ entonces x_{n_1} no es destacado porque $n_1 \notin E$, luego existe $n_2 > n_1$ con $x_{n_1} < x_{n_2}$ y sucesivamente x_{n_2} no es un termino destacado luego existe $n_3 > n_2$ con $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$, y prosiguiendo de esta forma se obtiene una subsucesión creciente $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$ $\square$

Teorema 2.2.2.8 Si una sucesión de Cauchy (x_n) posee una subsucesion que converge para $a \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$ se implica que $\rho(x_m, x_n) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Puesto que a es limite de una subsucesión de (x_n), existe una infinidad de indices n con $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. En ese entender existe $n_1 > n_0$ tal que $\rho(x_{n_1}, a) <$

$\frac{\epsilon}{2}$ por tanto para $n \geq n_0$ se tiene que

$$\rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_1}) + \rho(x_{n_1}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

lo que muestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

Teorema 2.2.2.9 Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.

Demostración: Dada (x_n) una sucesión de Cauchy, por el Teorema 2.2.2.5 (x_n) es limitada. Luego por el Teorema 2.2.2.7 posee una subsucesión convergente, y por el Teorema 2.2.2.8 se sigue que (x_n) es convergente. $\square$

Definición 2.2.2.7 (Lima (2004)) Sea $A \subset X$ se define el conjunto de puntos de acumulación de A como

$$A^{'} = \{x \in X : \exists (x_n) \subset A \text{ tal que } x_n \to x\}$$

Teorema 2.2.2.10 Si $A \subset B$ entonces $A^{'} \subset B^{'}$.

Demostración: Si $x \in A^{'}$ entonces existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x$, como $A \subset B$ se tiene que $(x_n) \subset B$ tal que $x_n \to x$. Por tanto $x \in B^{'}$. $\square$

Teorema 2.2.2.11 $A \subset X$ es cerrado si y solo si $A^{'} \subset A$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Suponga que $A \subset X$ cerrado. Sea $x \in A^{'}$ y $x \notin A$ entonces para todo $r > 0$ se tiene que $A \cap (B(x,r) - \{x\}) \neq \phi$ y $x \in A^c$, como A es cerrado, se tiene que A^c es abierto, existe $r_0 > 0$ tal que $B(x, r_0) \subset A^c$. Tomando $r = r_0$, se tiene que $A \cap (B(x,r) - \{x\}) \neq \phi$ y $B(x,r) \subset A^c$, lo cual es absurdo. Por tanto $x \in A$, así $A^{'} \subset A$.

($\Leftarrow$) Suponga que $A^{'} \subset A$. Sea $x \in A^c$ entonces $x \notin A^{'}$ existe $r > 0$ tal que $A \cap (B(x,r) - \{x\}) = \phi$, así $B(x,r) \subset A^c$, es decir, A^c es abierto. Por tanto A es cerrado. $\square$

Teorema 2.2.2.12 Si $A \subset X$ entonces $\overline{A} = A \cup A^{'}$.

Demostración: Al tratarse de una igualdad de dos conjuntos, la demostración se hará por doble inclusión.

($\subset$) Como $A \subset \overline{A}$, por el Teorema 2.2.2.10 se tiene que $A^{'} \subset (\overline{A})^{'}$ y por el Teorema

2.2.2.11 se tiene que $(\overline{A})' \subset \overline{A}$. Luego

$$A \cup A' \subset \overline{A} \cup (\overline{A})' = \overline{A} \cup \overline{A} = \overline{A}$$

por tanto $A \cup A' \subset \overline{A}$.
($\supset$) Si $x \in (A \cup A')^c$ entonces $x \notin A$ y $x \notin A'$, es decir existe $r > 0$ tal que $A \cap (B(x,r) - \{x\}) = \phi$, es decir $A \cap B(x,r) = \phi$. Note que $A' \cap B(x,r) = \phi$, en efecto, sea $a \in B(x,r)$ y $A \cap B(x,r) = \phi$ entonces $a \notin A'$, así $A' \cap B(x,r) = \phi$. Luego

$$B(x,r) \cap (A \cup A') = (B(x,r) \cap A) \cup (B(x,r) \cap A') = \phi \cup \phi = \phi$$

es decir, $B(x,r) \subset (A \cup A')^c$. Por tanto $(A \cup A')^c$ es abierto con lo que $A \cup A'$ es cerrado. Ahora bien, como $A \subset A \cup A'$ y $A \cup A'$ son cerrados entonces $\overline{A} \subset A \cup A'$. $\square$

Corolario 2.2.2.1 $A \subset X$ es cerrado si y solo si para toda $(x_n) \subset A$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.
Demostración:
($\Rightarrow$) Suponga que $A \subset X$ es cerrado entonces $A = \overline{A}$, para cualquier $(x_n) \subset A$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{A} = A$.
($\Leftarrow$) Suponga que para toda $(x_n) \subset A$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$. Si $x \in A'$ entonces existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x$, es decir, $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in A$, luego $A' \subset A$. Por el Teorema 2.2.2.11 se concluye que A es cerrado. $\square$

Definición 2.2.2.8 (Lima (2013)) Sea $A \subset X$. Se dice que A es denso en X si solo si $\overline{A} = X$.

Teorema 2.2.2.14 $D \subset X$ es denso en X si y solo si para todo $x \in X$ existe $(x_n) \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Demostración:
($\Rightarrow$) Suponga que $D \subset X$ es denso en X entonces $X = \overline{D}$. Si $x \in X$ entonces $x \in D$ o $x \in D'$. Si $x \in D$, se toma $x_n = x$ para todo $n \geq 0$ y así $(x_n) \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ahora bien, si $x \in D'$ existe $(x_n) \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. En ambos casos se obtiene el resultado que se quería.
($\Leftarrow$) Suponga que para todo $x \in X$ existe $(x_n) \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ entonces

$x \in D' \subset \overline{D}$. Luego $X \subset \overline{D}$, así $X = \overline{D}$. Por tanto $D \subset X$ es denso en X.$\square$

Definición 2.2.2.9 (Lima (2013)) Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se llama denso en $\mathbb{R}$ cuando todo intervalo abierto (a, b) contiene algún punto de X.

Teorema 2.2.2.15 Todo conjunto X de números reales contiene un subconjunto numerable K y denso en X.

Demostración: Sea K el referido subconjunto de X. Dado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, se puede expresar la recta como reunión numerable de intervalos de longitud $\frac{1}{n}$. Basta notar que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n})$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $p \in \mathbb{Z}$, se escoge un punto

$$x_{p_n} \in X \cap (\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n})$$

si esta intersección no fuera vacía, porque si fuera vacía, x_{p_n} no existiría. Así, se tiene que o conjunto K de los puntos x_{p_n} obtenidos es numerable. Ahora se demuestra la densidad de K en X, para esto, sea I un intervalo abierto conteniendo algún punto $x \in X$. Para cada n suficientemente grande, la longitud $\frac{1}{n}$ de cada intervalo

$$(\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n})$$

será menor que la distancia de x al extremo superior de I. Así se tiene que existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k \in (\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}) \subset I$$

Luego

$$x \in (\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}) \cap K \neq \phi$$

Así, existe un punto k_{p_n}, con $k_{p_n} \in I \cap K$. Esto muestra que todo intervalo abierto I que contiene un punto $x \in X$ contiene también un punto $k_{p_n} \in K$. Luego K es denso en X. $\square$

2.2.3. Espacios de Banach

El concepto de limite y las propiedades usuales de los limites que se conocen para funciones reales se cumplen en situaciones donde haya algo como $\| \,.\, \|$, que satisfaga las propiedades básicas de un valor absoluto. Estas cosas se llaman normas y se presentan en relación con los espacios vectoriales; son muy útiles porque permiten tratar también con el espacio $\mathbb{R}^n$ y con espacios de funciones. En la sección anterior se definió espacio normado, y ahora se define lo que es un espacio de Banach y se adapta las nociones de sucesiones y convergencia a la norma $\| \,.\, \|$

Definición 2.2.3.1 (Lang (2013)) Sea (x_n) una sucesión de X. Se dice que (x_n) converge a $x_0 \in X$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\|x_n - x_0\| < \epsilon$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Definición 2.2.3.2 (Lang (2013)) Sea (x_n) una sucesión de X. Se dice que (x_n) es una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$ entonces $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.

Definición 2.2.3.3 (Lang (2013)) Sea (x_n) una sucesión de X. Se dice que (x_n) es una sucesión limitada si existen números a, b tal que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \geq 0$.

Definición 2.2.3.4 (Lang (2013)) Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio normado. Se dice que X es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir si $(x_n) \subset X$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ con $x \in X$.

Teorema 2.2.3.1 Dos normas $\| \, \|$ y $\| \, \|'$ sobre el mismo espacio de Banach X son equivalentes si solo si existen $r, s \in \mathbb{R}^+$ de manera que:

$$r\|u\| \leq \|u\|' \leq s\|u\|$$

para cualquier $u \in X$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Por hipótesis las normas dadas son equivalentes.

Luego dada la bola $B_\rho(0,1)$ existe una bola $B_{\rho'}(0,\lambda)$ tal que $B_{\rho'}(0,\lambda) \subset B_\rho(0,1)$

Tomando un número real r tal que $0 < r < \lambda$, el vector $\dfrac{ru}{\|u\|'}$ para todo $u \in X$,

$u \neq 0$, pertenece a la bola $B_{\rho'}(0, \lambda)$, y como

$$\|\frac{ru}{\|u\|'}\|' = \frac{r\|u\|'}{\|u\|'} = r < \lambda$$

luego ese vector también pertenece a la bola $B_\rho(0, 1)$ por tanto

$$\|\frac{ru}{\|u\|'}\| < 1$$

es decir

$$r\|u\| < \|u\|'$$

Por otro lado, dada la bola $B_{\rho'}(0, 1)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_\rho(0, \lambda) \subset B_{\rho'}(0, 1)$.

Tomando un número real s que verifique las desigualdades $0 < \frac{1}{s} < \lambda$. Entonces, para todo $u \in X$, $u \neq 0$, el vector $\frac{u}{s\|u\|}$ pertenece a $B_\rho(0, \lambda)$ puesto que

$$\|\frac{u}{s\|u\|}\| = \frac{\|u\|}{s\|u\|} = \frac{1}{s} < \lambda$$

Luego también pertenece a $B_{\rho'}(0, 1)$, por tanto

$$\|\frac{u}{s\|u\|}\|' < 1$$

es decir

$$\|u\|' < s\|u\|$$

Así se tiene que

$$r\|u\| < \|u\|' < s\|u\|$$

para todo vector $u \neq 0$. Si se considera también el vector nulo de X, se obtiene la igualdad de la tesis

$$r\|u\| \leq \|u\|' \leq s\|u\|$$

para cualquier $u \in X$.

($\Leftarrow$) Dados $u, v \in X$, por hipótesis se tiene que

$$r\|u - v\| \leq \|u - v\|' \leq s\|u - v\|$$

es decir

$$r\rho(u,v) \leq \rho^{'}(u,v) \leq s\rho(u,v)$$

para cualquier $u, v \in X$, luego las métricas ρ y $\rho^{'}$ son equivalentes. $\square$

Teorema 2.2.3.2 Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach y $A \subset X$ cerrado entonces $(A, \| \|)$ es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $(x_n) \subset A$ una sucesión de Cauchy, como $A \subset X$ entonces $(x_n) \subset X$ es una sucesión de Cauchy, y como X es un espacio de Banach, existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, por el Corolario 2.2.2.1 se tiene que $x \in A$. Por tanto $(A, \| \|)$ es un espacio de Banach. $\square$

2.2.4. Espacios de funciones

Definición 2.2.4.1 (Ziemer y Torres (2017)) Para (X, ρ) un espacio métrico, sea

$$\rho(f,g) := \{\sup(|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

la distancia entre dos funciones de valor real limitadas f y g definidas en X. Esta métrica está relacionada con la noción de convergencia uniforme.

Definición 2.2.4.2 (Bartle y Sherbert (2000)) Dado el espacio normado $(X, \| \|)$. Se dice que una función real $f : X \to \mathbb{R}$ es limitada cuando existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$.

Se denota al conjunto de las funciones limitadas por

$$\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es limitada}\}$$

Otro conjunto importante es el conjunto de funciones continuas definido por

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es continua}\}$$

Teorema 2.2.4.1 $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \| \|)$ es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $(f_n) \subset \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ una sucesión de Cauchy, es decir para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Ahora por el Teorema 2.2.2.5 (f_n) es limitada, luego existe $M > 0$ tal que $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M$

para todo $n \geq 0$, así, sea $a \in X$ entonces

$$|f_n(a)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq M$$

así $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y $n \geq 0$. Ahora se busca el candidato para limite de (f_n) ; sea $a \in X$ si $n, m \geq n_0$ entonces

$$\begin{aligned} |f_n(a) - f_m(a)| &\leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

por tanto $(f_n(a))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, como $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach, existe $f(a) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a)$$

es decir, existe $n_a > 0$ tal que si $n \geq n_a$ entonces $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$. Se afirma que la convergencia es uniforme, en efecto, sea $a \in X$ y sea $n_0' = \max\{n_0, n_a\} + \frac{1}{2}$, luego si $n \geq n_0'$.

$$\begin{aligned} |f_n(a) - f(a)| &\leq |f_n(a) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto hay convergencia uniforme así, $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$. Solo queda probar que $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, sea $x \in X$

$$|f(x)| = |\lim_{n \to \infty} f_n(x)| = \lim_{n \to \infty} |f_n(x)| \leq M$$

Por tanto, $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \| \|)$ es un espacio de Banach. $\square$

Teorema 2.2.4.2 $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $(f_n) \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ una sucesión de Cauchy, es decir para todo $\epsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Buscando el candidato para límite de (f_n), sea $a \in X$ y si $n, m \geq n_0$ entonces

$$\begin{aligned} |f_n(a) - f_m(a)| &\leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

por tanto $(f_n(a))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, como $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach, existe $f(a) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a)$$

es decir, existe $n_a > 0$ tal que si $n \geq n_a$ entonces, en particular $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3}$. Se afirma que la convergencia es uniforme, en efecto, sea $a \in X$ entonces $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3}$ si $n_a \leq n$. Sea $n_0' = \max\{n_0, n_a\} + \frac{1}{2}$, luego si $n \geq n_0'$.

$$\begin{aligned} |f_n(a) - f(a)| &\leq |f_n(a) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto hay convergencia uniforme, así, $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$. Solo queda probar que $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, en efecto, como (f_n) es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - a\| < \delta$ entonces $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $n \geq 0$; se toma δ y n_0 tal que si $\|x - a\| < \delta$ y $n \geq n_0$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ $\square$

2.3. Funciones Continuas

Definición 2.3.1 (Ovchinnikov (2021)) Sea X un espacio normado. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice continua en el punto $a \in X$ cuando para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, es posible obtener $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \ ; x \in X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Se dice que f es continua cuando ella es continua en todos los puntos $a \in X$.

Equivalentemente, $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in X$ cuando, dada cualquier bola $B' = B(f(a), \epsilon)$ de centro $f(a)$, se puede encontrar una bola $B = B(a, \delta)$, de centro a, tal que $f(B) \subset B'$.

Teorema 2.3.1 Si $f : X \to Y$ es continua en el punto a y $g : Y \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $f(a)$, entonces $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$. La continuidad de g en el punto $f(a)$ permite obtener $\lambda > 0$ tal que $y \in Y$, $\|y - f(a)\| < \lambda \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \epsilon$. A su ves, dado $\lambda > 0$, la continuidad de f en el punto a proporciona $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \lambda \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$ □

Teorema 2.3.2 Sean X e Y espacios normados. Una función $f : X \to Y$ es continua si solo si la imagen inversa $f^{-1}(A)$ de todo subconjunto abierto $A \subset Y$ sea un subconjunto abierto en X.

Demostración:

($\Rightarrow$) Suponga que f sea continua, y tome $A \subset Y$ abierto, para cada $a \in f^{-1}(A)$ se tiene que $f(a) \in A$. Por definición existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(a), \epsilon) \subset A$. Siendo f continua en el punto a. A ϵ le corresponde un $\delta > 0$ tal que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon) \subset A$, es decir que $B(a, \delta) \subset f^{-1}(A)$. Luego $f^{-1}(A)$ es abierto.

($\Leftarrow$) Suponga que la imagen inversa por f de cada abierto en N sea abierto en en X. Sea $a \in X$.

Dado $\epsilon > 0$, la bola $A' = B(f(a), \epsilon)$ es un abierto en Y que contiene a $f(a)$. Luego su imagen inversa $A = f^{-1}(A')$ es un abierto en X conteniendo a a. Así existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$ osea $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$ □

2.4. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Definición 2.4.1 (Sotomayor (1979)) Una ecuación diferencial de primer orden adopta la forma

$$F(t, x, x') = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

La primera de las ecuaciones anteriores denota una ecuación diferencial en forma implícita, mientras que la segunda se dice que está en forma explícita.

Definición 2.4.2 (Sotomayor (1979)) Una función diferenciable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

en el intervalo I si:

1. El gráfico de φ en I, es decir $\{(t,\varphi(t)); t \in I\}$ está contenido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
2. $\dfrac{d\varphi}{dt}(t) = f(t,\varphi(t))$ para todo $t \in I$. Si t es un punto extremo del intervalo I, la derivada es la derivada lateral respectiva.

Definición 2.4.3 (Lima (2013)) Sea X un espacio normado. Una función $f : X \to \mathbb{R}$, se dice Lipschitziana cuando existe $k > 0$ tal que para cualquier $x, y \in X$, se tiene $|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|$; donde k se llama constante de Lipschitz.

El conjunto de las funciones Lipschitz definidas en el abierto U de $\mathbb{R}$ se denota por $Lip(U, \mathbb{R})$.

Teorema 2.4.1 Sea (X, ρ) un espacio métrico completo y $F : X \to Y$ una contracción. Entonces existe un único punto $x_0 \in X$ tal que

1. $F(x_0) = x_0$
2. $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = x_0, \; \forall\, x \in X$

Demostración: Primero se prueba la existencia del punto fijo.

Dado cualquier punto $x_1 \in X$, se define $x_2 = F(x_1)$. Si $x_2 = x_1$ no habrá nada que demostrar, porque x_1 sería el punto fijo buscado. Entonces considerando el caso $x_1 \neq x_2$ y considerando la sucesión $(x_n) \subset X$ definida recursivamente por

$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{2.1}$$

Note que si la constante de Lipschitz k es menor que 1 ($k < 1$) se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(x_3, x_2) &= \rho(F(x_2), F(x_1)) \leq k\rho(x_2, x_1) \\ \rho(x_4, x_3) &= \rho(F(x_3), F(x_2)) \leq k\rho(x_3, x_2) \leq k^2\rho(x_2, x_1) \end{aligned}$$

y en general

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq k^{n-1}\rho(x_2, x_1), \quad \forall n \geq 1$$

Para $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m > n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\rho(x_m, x_n) &\leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq k^{m-2}\rho(x_2, x_1) + k^{m-3}\rho(x_2, x_1) + \cdots + k^{n-1}\rho(x_2, x_1) \\
&= [1 + k + \cdots + k^{m-n-1}]k^{n-1}\rho(x_2, x_1) \\
&\leq \frac{k^{n-1}}{1-k}\rho(x_2, x_1)
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$ entonces dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \geq n_0$ implica que $k^{n-1} < \dfrac{1-k}{\rho(x_2, x_1)}\epsilon$. De la desigualdad anterior se sigue que si $m, n \geq n_0$ entonces $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$, de esta manera $(x_n) \subset X$ es una sucesión de Cauchy y como X es un espacio métrico completo, se sigue que la sucesión (x_n) es convergente, es decir existe un $x_0 \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tomando límite cuando $n \to \infty$ en ambos lados de 2.4 y teniendo en cuenta la continuidad de F se llega a

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = F(x_0)$$

es decir $x_0 \in X$ es un punto fijo de F. Para probar la unicidad, suponga que existe $x^* \in X$ con $F(x^*) = x^*$, se tiene que

$$\rho(x^*, x_0) = \rho(F(x^*), F(x_0)) \leq k\rho(x^*, x_0)$$

De la desigualdad anterior se sigue que $x = x_0$. Finalmente, dado cualquier $x \in X$ se cumple

$$\begin{aligned}
\rho(F^n(x), x_0) &= \rho(F^n(x), F^n(x_0)) \leq k\rho(F^{m-1}(x), F^{n-1}(x_0)) \\
&\leq k^2\rho(F^{m-2}(x), F^{n-2}(x_0)) \\
&\vdots \\
&\leq k^n\rho(x, x_0)
\end{aligned}$$

se sigue que $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = x_0$ para cualquier $x \in X$.

Corolario 2.4.1 Sea X un espacio métrico completo. Si $F : X \to X$ es continua y existe un $m_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que F^{m_o} es una contracción, entonces existe un único punto $x_0 \in X$ tal que x_0 es un punto fijo atractor de F. *Demostración:* Por el Teorema 2.4.1 existe un único punto $x_0 \in X$ tal que $F^{m_0}(x_0) = x_0$ y $\lim_{k\to\infty}(F^{m_0})^k(x) = x_0$, $\forall x \in X$. Dado $x \in X$, para un $r \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ fijo, se tiene que $\lim_{k\to\infty}(F^{m_0})^k(F^r(x)) = x_0$.

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, por el algoritmo de la división, existe un $k \in \mathbb{Z}^+$ y existe un $r_0 \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$ tal que $n = m_0 k + r_0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = \lim_{k\to\infty} F^{m_0 k + r_0}(x) = \lim_{k\to\infty} (F^{m_0})^k(F^{r_0}(x)) = x_0$$

Por otro lado, por la continuidad de F se tiene

$$x_0 = \lim_{n\to\infty}(F^{n+1}(x_0)) = \lim_{n\to\infty} F(F^n(x_0)) = F(\lim_{n\to\infty} F^n(x_0)) = F(x_0)$$

luego x_0 es punto fijo atractor de F.

Por ultimo, para probar la unicidad, suponga que existe $x_1 \in X$ tal que $F(x_1) = x_1$ entonces $F^2(x_1) = x_1, \cdots, F^m(x_1) = x_1$. Se sigue que $x_1 = x_0$.

Definición 2.4.4 Se denomina problema de valores iniciales al problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

cuyo objetivo es hallar una solución de la ecuación diferencial que verifique una determinada condición, en este caso que la función $x(t)$ valga x_0 en $t = t_0$

Teorema 2.4.2 (Picard) Si $f : I_a[t_0] \times B_b[x_0] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y Lipschitz con respecto a la segunda variable entonces existe una única solución del P.V.I

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

la cual está definida en el intervalo I_α, donde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{N}\}$ y $N \geq \max\{|f(t, x)|, (t, x) \in I_a[t_0] \times B_b[x_0]\}$.

Demostración: Resolver el P.V.I es equivalente a resolver la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \tag{2.3}$$

Considerando el conjunto $X = C(I_\alpha[t_0], B_b[x_0])$ con la métrica del máximo, es decir

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R} \quad \text{que asigna} \quad (\phi, \varphi) \mapsto \rho(f, g) = \text{máx}\{|\phi(t) - \varphi(t)|,\, t \in I_\alpha[t_0]\}$$

Se sabe que X es un espacio métrico completo. Dado $\phi \in X$, se define el camino

$$F_\phi : I_\alpha[t_0] \to \mathbb{R}^n \quad \text{que asigna} \quad t \mapsto F_\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds$$

note que, F_ϕ es un camino continuo, además

$$\begin{aligned} |F_\phi(t) - x_0| &= |\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))\, ds| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi(s))|\, ds \\ &= N|t - t_0| \leq N\alpha < b \quad \forall \phi \in X \end{aligned}$$

es decir $F_\phi(t) \in B_r[x_0]$, $\forall t \in I_\alpha[t_0]$. Luego se concluye que

$$F_\phi \in X = C(I_\alpha[t_0], B_b[x_0]) \quad \forall \phi \in X$$

Así, se puede definir la función

$$F : X \to X \quad \text{que asigna} \quad \phi \mapsto F(\phi) = f_\phi$$

Ahora se va probar que F es continua y existe un $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que F^m sea una contracción. Para ello es suficiente mostrar que para cualquier $t \in I_\alpha[t_0]$ y cualquier par de funciones $\phi_1, \phi_2 \in X$ se cumple

$$|F^k(\phi_1)(t) - F^k(\phi_2)(t)| \leq \frac{lip_2(f)^k |t - t_0|^k}{k!} \rho(\phi_1, \phi_2) \quad \forall k \geq 0 \tag{2.4}$$

En efecto, para $k = 0$, 2.4 se cumple. Suponga que 2.4 sea cierto para $n = k \in \mathbb{Z}^+$, luego:

$$\begin{aligned}
|F^{k+1}(\phi_1)(t) - F^{k+1}(\phi_2)(t)| &= |F(F^k(\phi_1))(t) - F(F^k(\phi_1))(t)| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, F^k(\phi_1)(s)) - f(s, F^k(\phi_2)(s))|\, ds \\
&\leq Lip_2(f) \int_{t_0}^{t} |F^k(\phi_1)(s) - F^k(\phi_2)(s)|\, ds \\
&\leq Lip_2(f) \int_{t_0}^{t} \frac{Lip_2(f)^k |s-t_0|^k}{k!} \rho(\phi_1, \phi_2)\, ds \\
&= \frac{Lip_2(f)^{k+1}}{k!} \rho(\phi_1, \phi_2) \int_{t_0}^{t} |s-t_0|^k\, ds \\
&= \frac{Lip_2(f)^{k+1}}{(k+1)!} |t-t_0|^{k+1} \rho(\phi_1, \phi_2)
\end{aligned}$$

lo cual demuestra 2.4. Luego

$$\text{máx}\{|F^k(\phi_1)(t) - F^k(\phi_2)(t)|,\, t \in I_\alpha[t_0]\} \leq \frac{Lip_2(f)^k}{k!} \alpha^k \rho(\phi_1, \phi_2)$$

es decir

$$\rho(F^k(\phi_1)(t), F^k(\phi_2)(t)) \leq \frac{Lip_2(f)^k}{k!} \alpha^k \rho(\phi_1, \phi_2) \quad \forall k \geq 0$$

Ahora haciendo $k = 1$ en 2.4 se tiene que

$$\rho(F^k(\phi_1)(t), F^k(\phi_2)(t)) \leq Lip_2(f) \alpha \rho(\phi_1, \phi_2) \quad \forall\, \phi_1, \phi_2 \in X$$

es decir $F : X \to X$ es Lipschitz, entonces se sigue que es continua.

Por otro lado, se sabe que $\text{lím}_{n\to\infty} \dfrac{[Lip_2(f)\alpha]^k}{k!} = 0$, luego existe un $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\dfrac{[Lip_2(f)\alpha]^{k_0}}{k_0!} < 1$. Haciendo $k = k_0$ en 2.4 se deduce que F^{k_0} es una contracción y por el corolario 2.4.1 existe un único $\phi_0 \in X$ tal que $F(\phi_0) = \phi_0$, luego

$$\phi_0(t) = F(\phi_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0(s))\, ds$$

Así se tiene, $\phi_0 : I_\alpha[t_0] \to B_b[x_0]$ es la única solución de (2.3)

Capítulo 3

COMPACIDAD EN ESPACIOS DE FUNCIONES

La idea de compacidad surgió en uno de los perıodos mas prolíficos de la actividad matemática, entre el siglo XVIII y XX. Fue con los trabajos de grandes genios matemáticos como Weierstrass, Hausdorff, Cantor y Dedekind, que se comenzaron a hacer rigurosos muchos de los conceptos e ideas que durante mucho tiempo atrás habían sido dadas por sentadas. Entre los primeros matemáticos en dar resultados importantes con respecto a la compacidad de conjuntos, fueron Edward Heine y Emile Borel, mientras Heine trabajaba sobre funciones continuas, Borel trataba de caracterizar la recta real mediante cubiertas abiertas. Gracias al trabajo de ambos, de manera independiente, se encontró una caracterización de los conjuntos compactos en $\mathbb{R}$, que afirmaba lo siguiente: Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si y solo si es cerrado y limitado. Mas adelante se mostró que la afirmación anterior solo se cumplía para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Luego al momento de querer generalizar la idea de conjunto compacto en espacios métricos, se noto que las condiciones de cerrado y limitado no implicaban compacidad, así con ello surgió un nuevo problema. Cuando se encontró una caracterización para los conjuntos compactos en espacios métricos, se introdujo el concepto de totalmente limitado, de hecho, en un espacio métrico un conjunto es compacto si y solo si es completo y totalmente limitado.

3.1. Compacidad

Definición 3.1.1 (Lima (2013)) Sea X un subconjunto de un espacio normado M. Una cubierta de $X \subset M$ es una familia $\mathcal{C} = (A_i)_{i \in L}$ de subconjuntos $A_i \subset M$ tal que $X \subset \bigcup_{i \in L} A_i$.

Definición 3.1.2 (Lima (2013)) Una subcubierta de X es una subfamilia $\mathcal{C}' = (A_i)_{i \in L'}$ de $\mathcal{C}$ donde $L' \subset L$ tal que también se puede obtener $X \subset \bigcup_{i \in L} A_i$.

Definición 3.1.3 (Lima (2013)) Una cubierta se dice abierta cuando cada conjunto $A_i\,, i \in L$ es abierto en M.

Definición 3.1.4 (Lima (2013)) Una cubierta se dice finita cuando L es un conjunto finito.

Teorema 3.1.1 (Borel-Lebesgue) Sea $[a, b] \subset \bigcup_{i \in L} A_i$, donde $(A_i)_{i \in L}$ es una familia de subconjuntos abiertos de la recta. Entonces existen $i_1, \cdots, i_n \in L$ tal que $[a, b] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$.

Demostración: Sea X el conjunto de los puntos $x \in [a, b]$ tal que el intervalo $[a, x]$ está contenido en alguna reunión finita $A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$.

Es decir:

$$X = \{x \in [a, b] \,/\, [a, x] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}\}$$

$X \neq \phi$ porque se tiene $a \in A_i$, para algún i. Como A_i es abierto, $\exists\, \delta > 0 \;/\; a + \delta < b$ y $[a, a + \delta) \subset A_i \Rightarrow [a, a + \delta) \subset X$.

Note que si $x \in X$ y $a \leq y < x \Rightarrow y \in X$. Luego X es un intervalo de la forma $[a, c]$ o de la forma $[a, c)$, donde $c = sup\, X$.

Se afirma que $c \in X$.

Existe $i_0 \in L$ tal que $c \in A_{i_0}$. Como A_{i_0} es abierto, $\exists\, \epsilon > 0$ tal que $(c-\epsilon, c+\epsilon) \subset A_{i_0}$, luego se puede encontrar un $x \in X$ tal que $c - \epsilon < x \leq c$ Entonces se tiene

$$[a, x] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$$

luego

$$[a, c] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup A_{i_0}$$

por tanto $c \in X$.

Suponga por el absurdo que, $c \neq b$, sin perdida de generalidad, diga que $c < b$

entonces, tomando ϵ tal que $c+\epsilon < b$ se tendrá que $[a, c+\epsilon) \subset X$ lo que contradice que $c = \sup X$.

Forma general del Teorema de Borel-Lebesgue Sea $F \subset \mathbb{R}$ un subconjunto cerrado y limitado. Toda cubierta $F \subset \bigcup_{i\in L} A_i$ de F por medio de abiertos admite una subcubierta finita

$$F \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$$

Demostración: Como F es cerrado entonces $A = \mathbb{R} - F$ es abierto y siendo F limitado, existe un intervalo limitado $[a, b]$ que contiene a F. Así se tiene que $[a, b] \subset \bigcup_{i\in L} A_i \cup A$ y por el teorema anterior se puede extraer una subcubierta finita $F \subset [a, b] \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup A$. Como ningún punto de F esta en A, se obtiene $F \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$ como se quería demostrar. $\square$

Definición 3.1.5 (Lima (2013)) Un espacio normado X se llama compacto cuando de toda cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X se puede extraer una subcubierta finita que también cubre X.

Teorema 3.1.2 Si $K, L \subset X$ son subconjuntos compactos entonces $K \cup L$ es compacto.

Demostración: Si $K \cup L \subset \bigcup A_i \Rightarrow K \subset \bigcup A_i$ y $L \subset \bigcup A_i$, y como $K \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$ y $L \subset A_{i_{n+1}} \cup \cdots \cup A_{i_p}$, por tanto $K \cup L \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_p}$. $\square$

Corolario 3.1.1 La reunión de un número finito de subconjuntos compactos es compacto.

Teorema 3.1.3 Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto. Recíprocamente, un subconjunto compacto de cualquier espacio normado es cerrado.

Demostración:

($\Rightarrow$) Sean X compacto y $F \subset X$ cerrado. Dada una cubierta abierta $F \subset \bigcup A_i$, se obtiene la cubierta abierta $X = (\bigcup A_i) \cup (X - F)$, de la cual se extrae la subcubierta finita $X = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n} \cup (X - F)$ por tanto $F \subset A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$. Luego F es compacto.

($\Leftarrow$) Sea $K \subset X$ un subconjunto compacto de un espacio métrico arbitrario X. Suponga que K no fuese cerrado en X, entonces existe $x \in \overline{K} - K$. Definiendo $A_n = X - \overline{B}(x, \frac{1}{n})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene una cubierta abierta $K \subset \bigcup A_i$.

Como $A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \subset \cdots$, la reunión finita de conjuntos A_n es igual al conjunto de mayor índice de la colección. Como $x \in \overline{K}$, cada bola $\overline{B}(x, \dfrac{1}{n})$ contiene algún punto de K, entonces ningún A_n contiene a K. Luego la cubierta abierta $K \subset \bigcup A_i$ no admite subcubierta finita, lo que contradice la compacidad de K. $\Box$

Corolario 3.1.2 Cualquier intersección $K = \bigcap K_i$ de compactos $K_i \subset X$ es compacta.

Demostración Por el teorema anterior, cada K_i es cerrado en X, luego la intersección K es un subconjunto cerrado en X y por tanto en cada K_i. Luego K es compacto. $\Box$

Teorema 3.1.4 Si X es un espacio normado compacto entonces es limitado.

Demostración: Si X es compacto, de la cubierta $X = \bigcup_{x \in X} B(x, 1)$ es posible extraer una subcubierta finita

$$X = B(x_1, 1) \cup \cdots \cup B(x_n, 1)$$

luego X es limitado. $\Box$

Teorema 3.1.5 La imagen de un conjunto compacto por una función continua es un conjunto compacto.

Demostración: Dada la función continua $f : M \to N$ y $K \subset M$ compacto y una cubierta abierta $\bigcup A_i \supset f(K)$, se obtiene la cubierta abierta $K \subset \bigcup_i f^{-1}(A_i)$, de la cual se extrae una subcubierta finita

$$K \subset f^{-1}(A_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_{i_n})$$

luego: $f(K) \subset ff^{-1}(A_{i_1}) \cup \cdots \cup ff^{-1}(A_{i_n}) \subset (A_{i_1}) \cup \cdots \cup (A_{i_n})$
Por tanto $f(K)$ es compacto. $\Box$

Corolario 3.1.3 Si X es compacto entonces toda función continua $f : X \to N$ es limitada.

Demostración: Como $f(X) \subset N$ es compacto entonces es limitado. $\Box$

Teorema 3.1.6 Si X es compacto, toda función real continua $f : X \to \mathbb{R}$ es limitada y alcanza sus valores máximo y mínimo en X.

Demostración: La imagen $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Luego es limitado y cerrado. Así f es limitada y definiendo $\alpha = \inf f(X)$, $\beta = \sup f(X)$, se tiene $\alpha \in f(X)$, $\beta \in f(X)$, es decir existen $x_0, x_1 \in X$ tal que $f(x_0) = \alpha$, $f(x_1) = \beta$. Por tanto $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$. $\Box$

Definición 3.1.6 (Munkres (2000)) Un espacio $K \subset X$ se dice que es sucesionalmente compacto si toda sucesión de K tiene una subsucesión convergente.

Definición 3.1.7 (Munkres (2000)) Se dice que X es compacto por punto limite si todo subconjunto $B \subset X$ infinito tiene un punto de acumulación que pertenece a X.

Definición 3.1.8 (Munkres (2000)) Sea X un espacio normado y sea $U = (U_i)_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. Un numero $\delta > 0$ se llama número de Lebesgue del cubrimiento Usi para cada $x \in X$, la bola de centro x y radio δ esta contenida en alguno de los abiertos del cubrimiento, es decir, existe $j \in I$ (que depende de x) tal que $B(x, \delta) \subset U_j$.

Teorema 3.1.7 Sea X un espacio normado y $K \subset X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. K es compacto

2. K es compacto por punto limite

3. K es sucesionalmente compacto

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $A \subset K$ un subconjunto infinito de K que no tiene puntos de acumulación, entonces para cada punto de $x \in K$ se puede hacer que $x \in B(x, r)$ tal que $B(x, r)$ tenga a lo sumo un punto de A, el conjunto $\{B(x, r) : x \in K\}$ es un cubrimiento abierto de K, como K es compacto, existe subcubrimiento finito $\{B(x_i, r)\}_{i=1}^{n}$ tal que

$$A \subset K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$$

como $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)$ tiene a lo sumo n elementos de A, entonces A es finito lo cual es absurdo, así K es compacto por punto limite.

(2) $\Rightarrow$ (3) Dada $(a_i) \subset K$ una sucesión de K. Se tiene dos casos

i) Si $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ es finito entonces se define $a_{i_0} = a_j$ para infinitos valores de $j \in \mathbb{N}$, (a_j) es una subsucesión convergente de (a_i), es decir, $(a_j) \subset (a_i)$ y $\lim_{j \to \infty} a_j = a_{i_0}$.

ii) Si $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ es infinito entonces $A \subset K$ y K es compacto por punto limite lo que implica que A tiene un punto de acumulación a_0, es decir, existe $(a_j) \subset A$ tal que $\lim_{j\to\infty} a_j = a_0$.

Por tanto, K es sucesionalmente compacto.

(3) $\Rightarrow$ (1) Suponga que K es sucesionalmente compacto y sea $\mathcal{A} = (A_i)$ un cubrimiento abierto de K. Suponga que no existe $\delta > 0$ tal que cada conjunto A_i con diámetro menor que δ este contenido en un elemento de $\mathcal{A}$.

Esta suposición implica que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existe un conjunto C_n con diámetro menor que $\dfrac{1}{n}$ que no este contenido en ningún elemento de $\mathcal{A}$. Se elige un punto $x_n \in C_n$ para cada n. Por hipótesis existe una subsucesión (x_{n_i}) de la sucesión (x_n) que converge a un punto a. Ahora a pertenece a algún elemento A de $\mathcal{A}$.

Como A es abierto, se puede elegir un $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subset A$. Si i es suficientemente grande para que $\dfrac{1}{n_i} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Entonces el conjunto C_n esta contenido en el entorno de radio $\dfrac{\epsilon}{2}$ con centro x_{n_i}; así, si i se escoge suficientemente grande como para que $\rho(x_{n_i}, a) < \dfrac{\epsilon}{2}$ entonces C_{n_i} esta incluido en el entorno de radio ϵ con centro en a. Pero esto significa que $C_{n_i} \subset A$, lo que contradice la hipótesis, por tanto existe $\delta > 0$ tal que cada conjunto A_i con diámetro menor que δ este contenido en un elemento de $\mathcal{A}$. Este numero se conoce como el numero de Lebesgue.

Ahora, suponga que existe $\epsilon > 0$ tal que K no pueda ser cubierto por un numero finito de bolas de radio ϵ. Se construye una sucesión de puntos (x_n) de la siguiente manera:

Primero se elige un punto cualquiera x_1 de K, observando que la bola $B(x_1, \epsilon)$ no es todo el espacio K (Si así fuera, X estaría cubierto por una única bola de radio ϵ, lo que contradiría la hipótesis hecha.), seguidamente se elige un punto x_2 de K que no este en $B(x_1, \epsilon)$. En general, dados $x_1, x_2, \cdots, x_n$, se elige x_{n+1} un punto que no se encuentre en la unión

$$B(x_1, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \epsilon)$$

utilizando el hecho de que estas bolas no cubren K.

Note que por construcción $\rho(x_{n+1}, x_i) \geq \epsilon$ para cada $i = 1, \cdots, n$. De esta forma, la sucesión (x_n) no puede tener una subsucesión convergente, lo que contradice que K es sucesionalmente compacto.

Finalmente como $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de K y K es sucesionalmente compacto, el cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ posee un numero de Lebesgue δ. Si, sin perdida de generalidad $\epsilon = \frac{\delta}{3}$, como K es sucesionalmente compacto se puede encontrar un cubrimiento finito de K por bolas de radio ϵ.

Cada una de estas bolas tendrá como máximo un diámetro de $\frac{2\delta}{3}$, por tanto están contenidos en algún elemento de $\mathcal{A}$. Entonces se elige un elemento de $\mathcal{A}$ para cada una de estas bolas de radio ϵ y se obtiene una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre K. $\square$

3.2. Equicontinuidad

Definición 3.2.1 (Lima (2013)) Se dice que la sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$, definidas en un conjunto arbitrario X y tomando valores en $\mathbb{R}$, converge simplemente o puntualmente en X para la función $f : X \to \mathbb{R}$ cuando para cada $x \in X$, la sucesión $(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots)$ tiene limite $f(x)$ en $\mathbb{R}$ osea, para cada $x \in X$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Esto significa que dado arbitrariamente $x \in X$ (fijo) y $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de x y ϵ) tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Definición 3.2.2 (Little y cols. (2015)) Se dice que una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente en X para la función $f : X \to \mathbb{R}$ cuando para todo número real $\epsilon > 0$ dado, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$.

Teorema 3.2.1 Una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente convergente si, solo si es una sucesión de Cauchy.

Demostración:

($\Rightarrow$) Suponga que $f_n \to f$ uniformemente en X. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, se puede encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Entonces, si se toma $m, n \geq n_0$, vale la desigualdad y también $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Por tanto, la condición $m, n \geq n_0$ implica $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, para todo $x \in X$. Luego (f_n) es una sucesión de Cauchy.

($\Leftarrow$) Si la sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ es de Cauchy entonces, para cada $x \in X$, los números $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, forman una sucesión de Cauchy de números reales. Por el Teorema 2.2.2.9, esta sucesión converge para un número real que se llama $f(x)$. Esto define una función $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in X$. Para mostrar que $f_n \to f$ uniformemente en X, dado $\epsilon > 0$. Existe n_0 tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$. Si en esta desigualdad, se mantiene n y x fijos y haciendo $m \to \infty$. se obtiene: $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \in X$, desde que $n \geq n_0$. Esto prueba que $f_n \to f$ uniformemente.

El Teorema 3.2.1 se llama el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. $\square$

Teorema 3.2.2 Si una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$, continuas en el punto $a \in X$, converge uniformemente en X para una función $f : X \to \mathbb{R}$ entonces f es continua en el punto a.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in X$.

Como f_n es continua en el punto a, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Entonces para todo $x \in X$ se tiene que:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

luego: $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ $\square$

Definición 3.2.3 (Lima (2013)) Una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monótonamente para la función $f : X \to \mathbb{R}$ cuando para cada $x \in X$ la sucesión de números $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ es monótona y además $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Teorema 3.2.3 Sea $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Si una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ definidas en un espacio normado compacto X, converge monotonamente para una función continua $f : X \to \mathbb{R}$, entonces la convergencia es uniforme en X.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, se define el siguiente conjunto para cada $n \in \mathbb{N}$

$$K_n = \{x \in X \,:\, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$$

Como f_n y f son funciones continuas e X es cerrado, se sigue que cada K_n es un subconjunto cerrado de X y, por tanto, cada K_n es compacto. La monotonicidad de la sucesión (f_n) implica que

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$$

Pero $\bigcap_n K_n = \phi$, porque $x \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implicaría

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

lo que es absurdo, porque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \in X$$

y como $\bigcap K_n = \phi$ se concluye por el Corolario 3.1.2 que algún K_{n_0} es vació. Por tanto, para $n \geq n_0 \Rightarrow K_n$ es vació, es decir, $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$. $\square$

Definición 3.2.4 (Ovchinnikov (2021)) Sea X un espacio normado y $f : X \to \mathbb{R}$ se dice que f es uniformemente continua en X, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $\|x - y\| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Teorema 3.2.4 Si el espacio normado X es compacto, entonces toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

Demostración: Como X es compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ continua, suponga que f no es uniformemente continua en X. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen $x, y \in X$ tales que $\|x-y\| < \delta$ y $|f(x)-f(y)| \geq \epsilon_0$. Se toma $\delta = \dfrac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, se construye dos sucesiones (x_n) e (y_n) contenidas en X tales que $\|(x_n) - (y_n)\| < \dfrac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. Ahora, al ser X compacto se tiene que existe una subsucesión convergente de (x_n), es decir, existe x_{n_k} tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \quad \text{con} \quad x_0 \in X$$

Además también se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$$

En efecto: $\|(y_{n_k}) - (x_0)\| \leq \|(y_{n_k}) - (x_{n_k})\| + \|(x_{n_k}) - (x_0)\| < \dfrac{1}{n_k} + \dfrac{\epsilon_0}{2}$

Así se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$$

Luego por la continuidad de f se tiene que

$$\lim_{k\to\infty}[f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) - f(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

y esto contradice el hecho de $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0$. Por tanto f es uniformemente continua en X. $\square$

Definición 3.2.5 (Bartle y Sherbert (2000)) Sea $E \subset C(K, \mathbb{R})$. Se dice que E es equicontinua en el punto x_0, si para todo $\epsilon > 0$ y $x \in K$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $f \in E$.

Definición 3.2.6 (Bartle y Sherbert (2000)) Se dice que (f_n) es una sucesión equicontinua en el punto $x_0 \in X$ cuando el conjunto $E = \{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}$ es equicontinua en el punto x_0.

Un conjunto E de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ se llama equicontinua cuando E es equicontinua en todos los puntos $x_0 \in X$. De la misma forma una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ se dice equicontinua cuando es equicontinua en todos los puntos $x_0 \in X$.

Teorema 3.2.5 Si una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ entonces el conjunto $E = \{f, f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}$ es equicontinuo.

Demostración: Sea $x_0 \in X$, como f es continua, se tiene que: Dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}, \forall x \in X$.

Simultáneamente para $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon$, para todo $i = 1, \cdots, n_0$ y $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Entonces cuando $n \geq n_0$ las condiciones $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta$ implican que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| < \epsilon$$

Esto establece la equicontinuidad del conjunto E en un punto arbitrario $x_0 \in X$. $\square$

Definición 3.2.7 (Bartle y Sherbert (2000)) Un conjunto E de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ se llama uniformemente equicontinuo cuando para cada $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ para todo $f \in E$.

Teorema 3.2.6 Si $E \subset C(K, \mathbb{R})$ es equicontinuo con K un subconjunto compacto, entonces E es uniformemente equicontinuo.

Demostración: Sea E un conjunto equicontinuo de funciones $f : K \to \mathbb{R}$. Si E no fuese uniformemente equicontinuo, se puede obtener $\epsilon > 0$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, puntos $x_n, y_n \in K$ y una funcion $f_n \in E$, tal que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ pero $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \epsilon$. Pasando a una subsuseción, si es necesario, se podría (en virtud de la compacidad de K) suponer que $x_n \to x \in K$ y, como $\|y_n - x_n\| < \frac{1}{n}$, se tendrá también $y_n \to x$. Como E es equicontinuo en el punto x, existe $\delta > 0$ tal que $\|z - x\| < \delta$, $z \in K$, $f \in E \Rightarrow |f(z) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ahora, para todo n suficientemente grande, se tiene $\|x_n - x\| < \delta$ y $\|y_n - x\| < \delta$, donde $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y_n)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, una contradicción. $\square$

3.3. Teorema de Arzela-Ascoli

El teorema de Arzelà-Ascoli es un resultado fundamental del análisis matemático que brinda las condiciones necesarias y suficientes para decidir si cada sucesión de funciones continuas de valor real definidas en un conjunto cerrado y acotado tiene una subsucesión uniformemente convergente. La condición principal de este teorema es la equicontinuidad de la familia de funciones. Este teorema es fundamental para muchas demostraciones en matemáticas, incluido el teorema de existencia de Peano en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, el teorema de Montel en análisis complejo y varios resultados relacionados con la compacidad de operadores integrales.

Teorema 3.3.1 Si una sucesión equicontinua de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplemente en un subconjunto denso $D \subset X$, entonces f_n converge uniformemente en cada parte compacta $K \subset X$.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, se afirma que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para todo $x \in K$. En efecto, para todo $d \in D$ existe $n_d \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_d \Rightarrow |f_m(d) - f_n(d)| < \frac{\epsilon}{3}$. Además, para todo $y \in K$, existe un intervalo abierto J_y, de centro y, tal que $x, z \in X \cap J_y \Rightarrow |f_n(x) - f_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}$,$\forall n \in \mathbb{N}$. Como K es compacto, de la cobertura $K \subset \bigcup_y J_y$ se puede extraer una subcubierta finita $K \subset J_1 \cup \cdots \cup J_p$. Como D es denso en X, de cada uno de los intervalos J_i se puede escoger un número $d_i \in J_i \cap D$. Dado $n_0 = \max\{n_{d_1}, \cdots, n_{d_p}\}$. Entonces, si $m, n \geq n_0$ y $x \in K$, debe existir i tal que $x \in J_i$. Luego

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f(d_i)| + |f(d_i) - f_n(d_i)| + |f_n(d_i) - f_n(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto $m, n \geq n_0$, $x \in K \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Así, f_n converge uniformemente en K, por el Teorema 3.2.1 $\square$

Definición 3.3.1 (Lima (2013)) Un subconjunto de funciones $E \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ se dice simplemente limitado (o puntualmente limitado) cuando para cada $x \in X$ existe un número $c_x > 0$ tal que $|f(x)| \leq c_x$ para toda $f \in E$.

Definición 3.3.2 (Lima (2013)) Un subconjunto de funciones $E \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ se dice uniformemente limitado cuando existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para toda $f \in E$ y todo $x \in X$.

Teorema 3.3.2 (Teorema de Cantor-Tychonov): Sea $X \subset \mathbb{R}$ numerable. Toda sucesión simplemente limitada de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ posee una subsucesion simplemente convergente.

Demostración: Sea $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ un subconjunto numerable.
Considere la sucesión numérica $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$, y como es limitada, posee una subsucesión convergente. Así, se puede obtener un subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que existe el limite

$$a_1 = \lim_{n\in\mathbb{N}_1} f_n(x_1)$$

También es limitada la sucesión $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}_1}$. Luego es posible encontrar un subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que o limite

$$a_2 = \lim_{n\in\mathbb{N}_2} f_n(x_2)$$

existe. Prosiguiendo análogamente, se consigue, para cada $i \in \mathbb{N}$, un subconjunto infinito $\mathbb{N}_i \subset \mathbb{N}$, de tal forma que

$$\mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_i \supset \cdots$$

y, para cada i, existe el limite

$$a_i = \lim_{n \in \mathbb{N}_i} f_n(x_i)$$

Entonces se define un subconjunto infinito $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ tomando como i-esimo elemento de $\mathbb{N}^*$ el i-esimo elemento de $\mathbb{N}_i$. De esta manera, para cada $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}^*}$ es, a partir de su i-esimo elemento, una subsucesión de $(f_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}_i}$ y, por tanto, converge. Esto prueba que la subsucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en cada punto $x_i \in X$, lo que demuestra el Teorema. $\square$

Teorema 3.3.3 Sea (f_n) una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas en un dominio compacto K. Entonces, f es limitada e f_n es una sucesión uniformemente limitada.

Demostración: Primero se vera que f es limitada. Como f_n converge uniformemente a f en K, dado $\epsilon = 1 > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < 1 \quad \forall \quad x \in K$$

Lo que implica que

$$-1 < |f_n(x)| - |f(x)| < 1 \tag{3.1}$$

En particular, siendo f_{n_0} limitada, implica que f es limitada, ya que

$$|f(x)| < |f_{n_0}| + 1$$

Por tanto, dado $c > 0$ se tiene que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in K$.

Por otro lado, de (3.1) se tiene que

$$|f_n(x)| < |f(x)| + 1$$

luego $|f_n(x)| < c + 1$ para todo $n \geq n_0$.

Ahora, al ser cada $f_1, \cdots, f_{n_0-1}$ limitadas por c en K. Tomando

$$c = \max\{c_1, \cdots, c_{n_0-1}\}$$

donde $|f_n(x)| \leq c_n$ para $n < n_0$.

Luego para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|f_n(x)| \leq c < c+1 \quad \forall x \in K$$

De esta manera, la sucesión (f_n) es uniformemente limitada. $\square$

Teorema 3.3.4 (Arzela-Ascoli) Sea X un espacio normado, $K \subset X$ compacto y $E \subset C(K, \mathbb{R})$ entonces E es compacto si solo si E es cerrado, limitado y equicontinuo.

Demostración:

($\Rightarrow$) Suponga que E es compacto entonces es cerrado y limitado, se afirma que E es equicontinuo. En efecto, sea $\epsilon > 0$ entonces

$$\{B(f, \frac{\epsilon}{3}) \, : \, f \in E\}$$

es un cubrimiento abierto de E. Como E es compacto existen $f_1, \cdots, f_n \in E$ tales que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, \frac{\epsilon}{3})$$

Sea $j \in \{1, \cdots, n\}$, como f_j es continua y K es compacto, se tiene que f_j es uniformemente continua entonces existe $\delta_j > 0$ tal que si $x, y \in K$ con $\|x - y\| < \delta_j$ implica

$$|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Sea $f \in E$ para algún $k \in \{1, \cdots, n\}$ se tiene que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Ahora bien, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$, si $\|x - y\| < \delta$ y $f \in E$ entonces

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(y) + f_k(y) - f(y)| \\
&\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\
&\leq \sup_{x \in X} |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + \sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

luego E es equicontinua. Por tanto E es cerrado, limitado y equicontinuo.

($\Leftarrow$) Suponga que E es cerrado, limitado y equicontinuo. Sea (f_n) una sucesión de funciones de E; como E es limitado, existe $M > 0$ tal que $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K es un subconjunto compacto de un espacio normado, contiene un subconjunto denso y numerable $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$. Ahora bien, sea $(f_n(x_1))$ una sucesión en $\mathbb{R}$, se vera que es limitada

$$\begin{aligned} |f_n(x_j)| &\leq \sup_{x\in X} |f_n(x)| \\ &\leq M \end{aligned}$$

luego existe una subsucesión convergente de $(f_n(x_1))$, es decir, la subsucesión $(f_{1n}(x_1))$ es convergente, nuevamente $(f_{1n}(x_2))$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ acotada, entonces existe una subsucesión $(f_{2n}(x_2))$ convergente, así sucesivamente se puede definir $g_j = f_{jj}$, entonces (g_n) es una subsucesión de (f_n) tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $g_n(x_k)$ converge.

Ahora, dado $\epsilon > 0$, por equicontinuidad existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para todo $f \in E$ lo que implica que esta condición también se aplique para la subsucesión (g_n) de (f_n).

Por otro lado se tiene que el conjunto $\{B(x_n, \delta) : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto de K, y como K es compacto existen $x_1, \cdots, x_N \in K$ tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, \delta)$$

dado para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $(g_n(x_k))$ converge, y por tanto (g_n) es de Cauchy, es decir, para cada $j \in \{1, \cdots, N\}$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_j$

$$|g_m(x_j) - g_n(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Luego tomando $n_0 = \text{máx}\{n_1, \cdots, n_N\}$ se tiene que

$$|g_m(x_j) - g_n(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para $m, n \geq n_0$ y para todo $j \in \{1, \cdots, N\}$.

Sea $x \in K$ y sean $m, n \geq n_0$, existe $k_0 \in \{1, \cdots, N\}$ tal que para

$$\|x - x_{k_0}\| < \delta$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
|g_m(x) - g_n(x)| &= |g_m(x) - g_m(x_{k_0}) + g_m(x_{k_0}) - g_n(x_{k_0}) + g_n(x_{k_0}) - g_n(x)| \\
&\leq |g_m(x) - g_m(x_{k_0})| + |g_m(x_{k_0}) - g_n(x_{k_0})| + |g_n(x_{k_0}) - g_n(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

Luego (g_n) es una sucesión de Cauchy, como E es cerrado y $C(K, \mathbb{R})$ es completo se tiene que E es completo, es decir que la sucesión (g_n) de Cauchy es convergente y converge a un punto de E, así (f_n) tiene una subsucesión convergente. Lo que prueba que E es secuencialmente compacto, y por el Teorema 3.1.7 se tiene que E es compacto. $\square$

Corolario 3.3.1 Sea X un espacio normado, en particular si $X = \mathbb{R}$, $K \subset X$ compacto y $(f_n) \subset C(K, \mathbb{R})$ sucesión limitada y equicontinua entonces (f_n) tiene una subsucesión que converge uniformemente.

Demostración: Por el Teorema 2.2.1.17 se obtiene un subconjunto numerable $Y \subset K$, denso en K. Luego por el Teorema 3.1.9 (f_n) posee una subsucesión que converge simplemente en Y. Finalmente por el Teorema 3.3.1 esta misma sucesión convergerá uniformemente en K. $\square$

Teorema 3.3.5 Sea E un conjunto de funciones continuas definidas en el compacto $K \subset \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. E es equicontinuo e uniformemente limitado
2. E es equicontinuo e simplemente limitado
3. Toda sucesión de funciones $(f_n) \in E$ posee una subsucesion uniformemente convergente

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) Como E un conjunto uniformemente limitado, esto implica que E es simplemente limitado.

(2) $\Rightarrow$ (3) Por el Corolario 3.3.1 se tiene que $f \in E \subset C(K, \mathbb{R})$ posee una subsucesión (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \to f$ uniformemente.

(3) $\Rightarrow$ (1) Suponga que toda sucesión de funciones de E posee una subsucesión uniformemente convergente.

Primero se mostrara por el absurdo que E es equicontinuo. Suponga que E no es equicontinua en algún punto $x_0 \in K$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n \in K$ y $f_n \in E$ tal que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f_n(x_n) - f_n(x_0)| \geq \epsilon \tag{3.2}$$

Luego, por hipótesis existe $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ infinito tal que a subsucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformemente a f en K. Entonces la sucesión (f_n) es equicontinua en K. Así, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in K, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

En particular, tomando $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > \dfrac{1}{\delta}$, se tiene que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f_n(x_n) - f_n(x_0)| < \epsilon$$

lo que contradice (3.2).

Finalmente se prueba que E es uniformemente limitado, entonces suponga, por el absurdo, que E no es uniformemente limitado. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in E$ tal que

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)| > n$$

Por hipótesis, existe $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ infinito tal que a subsucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es uniformemente convergente en K. Entonces, como cada función $f : K \to \mathbb{R}$ es limitada, porque f_n es continua en un compacto, y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es uniformemente convergente en K, en vista Teorema 3.3.3, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es uniformemente limitada, lo que es una contradicción. Por tanto, se implica que E es uniformemente limitada. $\square$

Capítulo 4

APLICACIONES DEL TEOREMA DE ARZELA-ASCOLI

La aplicación directa del teorema de Arzela-Ascoli no siempre resulta simple, es por ello que se da a conocer algunos lemas previos, los cuales serán necesarios para demostrar las aplicaciones tales como la existencia de solución de una ecuación diferencial de primer orden y en la sucesión de funciones continuas con dominio compacto.

4.1. Variable Compleja

Teorema 4.1.2 Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Sea $(f_n) \subset H$, donde H es una familia de funciones $\mathbb{C}$-diferenciables, una sucesión de funciones $\mathbb{C}$-diferenciables definidas en un conjunto compacto $K \subset U$. Si existe una constante $c_k > 0$ tal que $|f_n(z)| \leq c_k$ para todo $z \in K$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces existe una subsucesión la cual converge uniformemente a una función $\mathbb{C}$-diferenciable en el conjunto compacto $K \subset U$.

Demostración: La sucesión de funciones $\mathbb{C}$-diferenciables en K es uniformemente limitada, ya que $|f_n(z)| \leq c_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in K$.

Dados $z_1, z_2 \in K$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\begin{aligned}
|f_n(z_1) - f_n(z_2)| &= |\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(z)}{z-z_1}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(z)}{z-z_2}\,dz| \\
&= \frac{1}{2\pi}|\int_\gamma (\frac{f_n(z)}{z-z_1} - \frac{f_n(z)}{z-z_2})\,dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma |\frac{f_n(z)}{z-z_1} - \frac{f_n(z)}{z-z_2}|\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma |f_n(z)|\,|\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}|\,dz \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma c_k\,|\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}|\,dz \\
&= \frac{c_k}{2\pi}\int_\gamma |\frac{z_2-z_1}{(z-z_1)(z-z_2)}|\,dz \\
&= \frac{c_k}{2\pi}\,|z_2-z_1|\int_\gamma \frac{1}{|z-z_1|\,|z-z_2|}\,dz \\
&\leq \frac{c_k}{2\pi}\,|z_2-z_1|\int_\gamma \frac{1}{2}(\frac{1}{|z-z_1|^2} + \frac{1}{|z-z_2|^2})\,dz \\
&= \frac{c_k}{4\pi}\,|z_2-z_1|(\int_\gamma (\frac{dz}{|z-z_1|^2} + \frac{dz}{|z-z_2|^2}) \\
&= \frac{c_k}{4\pi}\,|z_2-z_1|(\int_{|z-z_1|=r_1} \frac{dz}{|z-z_1|^2} + \int_{|z-z_2|=r_2} \frac{dz}{|z-z_2|^2}) \\
&= \frac{c_k}{4\pi}\,|z_2-z_1|(\int_{|z-z_1|=r_1} \frac{dz}{r_1^2} + \int_{|z-z_2|=r_2} \frac{dz}{r_2^2}) \\
&= \frac{c_k}{4\pi}\,|z_2-z_1|(\frac{2\pi r_1}{r_1^2} + \frac{2\pi r_2}{r_2^2}) \\
&= \frac{c_k}{2}\,|z_2-z_1|(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) \\
&= \frac{c_k}{2}\,|z_2-z_1|\frac{2}{r} \\
&= \frac{c_k}{r}\,|z_2-z_1|
\end{aligned}$$

donde $r = \min\{r_1, r_2\}$. Sea $\epsilon > 0$ basta con tomar $\delta = \dfrac{r}{c_k}$ y se tiene equicontinuidad.

Luego por el teorema de Arzela-Ascoli, existe $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de (f_n) que converge uniformemente, es decir, existe una f tal que $f_{n_k} \to f$ cuando $k \to \infty$. Se afirma que f es $\mathbb{C}$-diferenciable en K. En efecto, sea $z_0 \in K$ entonces existe un $r > 0$ tal que

$$f'_{n_k} = \lim_{z\to y} \frac{f_{n_k}(z) - f_{n_k}(y)}{z - y}$$

existe para todo $y \in B(z_0, r) - \{z_0\}$ y para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Además

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} = \lim_{k\to\infty} \frac{f_{n_k}(z) - f_{n_k}(y)}{z - y}$$

para todo $y, z \in B(z_0, r) - \{z_0\}$. tomando $z \to y$.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to y} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} &= \lim_{z\to y} \lim_{k\to\infty} \frac{f_{n_k}(z) - f_{n_k}(y)}{z - y} \\
&= \lim_{k\to\infty} \lim_{z\to y} \frac{f_{n_k}(z) - f_{n_k}(y)}{z - y} \\
&= \lim_{k\to\infty} f'_{n_k}(y) \\
&= (\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(y))' \\
&= f'(y)
\end{aligned}$$

así $f'(y)$ existe para todo $y \in B(z_0, r) - \{z_0\}$, por tanto f es $\mathbb{C}$-diferenciables en K. $\square$

4.2. Teorema de Peano

Teorema 4.2.1 (Teorema de aproximación de Weierstrass) Dada una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, existe una sucesión de polinomios P_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

uniformemente en $[a, b]$.

Demostración: Se define la expresión $c_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n \, dt$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y la función $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_n}(1 - t^2)^n & \text{si } t \in (-1, 1) \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$

donde cada φ_n es continua, y se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \varphi_n(t)\,dt = 1$$

El teorema de Weierstrass resulta de los lemas que se enuncian a continuación:

Lema 4.2.1 Si $0 < \delta < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$ uniformemente para $\delta \leq |x|$.

Demostración: Como

$$c_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-t^2)^n\,dt \geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nt^2)\,dt = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Luego

$$\delta \leq |x| \Rightarrow \varphi_n(x) \leq (1-\delta^2)^n.\sqrt{n}$$

Como $(1-\delta^2)$ es menor un número positivo menor que 1, se tiene que $\lim_{n\to\infty}(1-\delta^2)^n.\sqrt{n} = 0$.

Lema 4.2.2 Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(0) = f(1) = 0$, considere f definida en todo $\mathbb{R}$ poniendo $f(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$.

Para todo $x \in [0,1]$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se define

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\varphi_n(t)\,dt$$

Entonces $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es un polinomio.

Demostración: Haciendo un cambio de variable $y = x+t$ resulta, cuando $0 \leq x \leq 1$

$$p_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(y)\varphi_n(y-x)\,dy = \int_0^1 f(y)\varphi_n(y-x)\,dy$$

La segunda igualdad es valida ya que, para todo $x \in [0,1]$ se tiene $[x-1, x+1] \supset [0,1]$ y f es nula fuera del intervalo $[0,1]$.

Como $x, y \in [0,1]$ se tiene que $y - x \in [-1,1]$, luego

$$\varphi_n(y-x) = \frac{1}{c_n}[1-(y-x)^2]^n = \sum_{i=0}^{2n} \varsigma_i(y)x^i$$

Poniendo para cada $i = 0, 1, \cdots, 2n$, $a_i = \int_0^1 f(y)\cdot\varsigma_i(y)\,dy$, resulta que $p_n(x) =$

$\sum_{i=0}^{2n} a_i \cdot x^i$ si $0 \leq x \leq 1$.

Lema 4.2.3 Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(0) = f(1) = 0$, y considerando f definida en todo $\mathbb{R}$ poniendo $f(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$.

Para todo $x \in [0,1]$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se define

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\varphi_n(t)\, dt$$

se tiene que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ uniformemente en $[0,1]$.

Demostración: Como $\int_{-1}^{1} \varphi_n(t)\, dt = 1$ se tiene que $f(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\varphi_n(t)\, dt$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0,1]$ vale

$$f(x) - p_n(x) = -\int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]\varphi_n(t)\, dt$$

Como f es uniformemente continua, $\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que $|t| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in [0,1]$.

Sea $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Por el Lema 4.2.1, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ y para todo $x \in [0,1]$, se tiene que $|f(x) - p_n(x)| \leq M + N + P$ donde

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < 2M \cdot \frac{\epsilon}{6M} = \frac{\epsilon}{3} \\ N &= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < \frac{\epsilon}{3}\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\, dt \leq \frac{\epsilon}{3} \\ P &= \int_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|\varphi_n(t)\, dt < 2M \cdot \frac{\epsilon}{6M} = \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Luego $|f(x) - p_n(x)| < \epsilon$ siempre que $n > n_0$ y $x \in [0,1]$.

Así, toda función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(1) = 0$ es limite uniforme de una sucesión de polinomios $\square$

Teorema 4.2.3 (Peano) Si $f : I_a[t_0] \times B_b[x_0] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua entonces existe por lo menos una solución del P.V.I

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

definida en el intervalo $I_\alpha[t_0]$, donde $0 < \alpha = \min\{a, \dfrac{b}{M'}\}$ y $M' > N = \max\{|f(t,x)|,\ (t,x) \in$

$I_a[t_0] \times B_b[x_0]\}$.

Demostración: Por el teorema de aproximación de Weierstrass, existe una sucesión (f_n) de funciones polinomiales tales que $f_n \to f$ uniformemente en $I_a[t_0] \times B_b[x_0]$.

Como $M' > N$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $M' \geq \epsilon + N$, luego por la convergencia uniforme debe existir un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ entonces $|f_n(t,x) - f(t,x)| < \epsilon$, $\forall (t,x) \in I_a[t_0] \times B_b[x_0]$. Observe que si $n \geq n_0$ se tiene

$$\begin{aligned} |f_n(t,x)| &\leq |f_n(t,x) - f(t,x)| + |f(t,x)| \leq \epsilon + N \\ &\leq M', \quad \forall x \in I_a[t_0] \times B_b[x_0] \end{aligned}$$

Para $n \geq n_0$, se considera el P.V.I

$$\begin{cases} x' = f_n(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Por el teorema de Picard, se tiene que el P.V.I (4.2) admite una única solución $\varphi_n : I_\alpha[t_0] \to B_b[x_0]$ donde $\alpha = \min\{a, \dfrac{b}{M'}\}$. De esta manera, se a construido una sucesión $(\varphi_n)_{n \geq n_0} \subset C(I_\alpha[t_0])$, la cual satisface las siguientes condiciones:

1. Dado cualquier $t \in I_\alpha[t_0]$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &= |x_0 + \int_{t_0}^{t} f_n(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f_n(\tau, \varphi_n(\tau))| d\tau \\ &\leq |x_0| + M'|t - t_0| \leq |x_0| + M'\alpha \leq |x_0| + b \end{aligned}$$

   y por lo tanto

$$\|\varphi_n\|_{C(I_\alpha[t_0])} \leq |x_0| + b, \quad \forall n \geq n_0$$

   Así la sucesion $\mathcal{F} = (\varphi_n)_{n \geq n_0}$ es limitada

2. Dados $t, s \in I_\alpha[t_0]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| &= |\int_{t_0}^{t} f_n(\tau, \varphi_n(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} |f_n(\tau, \varphi_n(\tau))d\tau| \\
&= |\int_{s}^{t} f_n(\tau, \varphi_n(\tau))d\tau| \\
&\leq \int_{s}^{t} |f_n(\tau, \varphi_n(\tau))|d\tau \\
&\leq M^{'}|t - s|
\end{aligned}$$

Luego, dado un $\epsilon > 0$, se considera $\delta = \dfrac{\epsilon}{M'} > 0$ tal que $t, s \in I_\alpha[t_0]$ y $|t-s| < \delta$ entonces $|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| < \epsilon$.

De esta manera la sucesión $\mathcal{F} = (\varphi_n)_{n \geq n_0}$ es equicontinua.

Por el teorema de Arzela-Ascoli, se concluye que existe (φ_{n_k}) subsucesión de $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ convergente en $C(I_\alpha[t_0], \| \|_{C(I_\alpha[t_0])})$ es decir existe un $\varphi \in C(I_\alpha[t_0])$ tales que $\varphi_{n_k} \to \varphi$ uniformemente en $I_\alpha[t_0]$.

Note que como $f_{n_k} \to f$ uniformemente en $I_\alpha[t_0] \times B_b[x_0]$ y $\varphi_{n_k} \to \varphi$ uniformemente en $I_\alpha[t_0]$ entonces

$$f_{n_k} \circ (id, \varphi_{n_k}) \to f \circ (id, \varphi) \quad \text{uniformemente en} I_\alpha[t_0]$$

Por otro lado, desde que

$$\varphi_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_{n_k}(\tau, \varphi_{n_k}(\tau))d\tau, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall t \in I_\alpha[t_0]$$

tomando limite cuando $k \to \infty$ a la igualdad anterior, se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_{n_k}(t) = x_0 + \lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t} f_{n_k}(\tau, \varphi_{n_k}(\tau))d\tau$$

es decir

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$$

Por lo tanto φ es solución del P.V.I (4.1)

CONCLUSIONES

1. El teorema de Arzela-Ascoli garantiza que una sucesión de funciones continuas (f_n), definidas en un conjunto compacto K, posee una subsucesión uniformemente convergente.

2. El teorema de Arzela-Ascoli garantiza la existencia de al menos una solución en un subconjunto compacto K para una ecuación diferencial de primer orden.

3. El teorema de Arzela-Ascoli garantiza que, para un conjunto de funciones $\mathbb{C}$-diferenciables H, existe una subsucesión uniformemente convergente a una función $\mathbb{C}$-diferenciable en un conjunto compacto K.

RECOMENDACIONES

Después de estudiar el Teorema de Arzelà-Ascoli, hay tres recomendaciones que se pueden tener en cuenta:

1. Analizar y resolver ejercicios sobre sucesiones de funciones ayudaran a familiarizarse con el proceso de verificación de las condiciones del teorema de Arzela-Ascoli, así como también la construcción de conceptos análogos en otros campos de la matemática como la Teoría de la medida.

2. Se recomienda impartir la enseñanza de las sucesiones de funciones y el teorema de Arzela-Ascoli, a los estudiantes de la Escuela Profesional de Matemática de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, como un complemento a las sucesiones de números reales por ahora.

3. Se recomienda continuar las generalizaciones y extensiones del teorema de Arzela-Ascoli, en topología, que valen la pena explorar y detallar.

APÉNDICE A

Definición A.1: (Narasimhan y Nievergelt (2012)) Sea f(z) definida en una vecindad de un punto a. La función $f(z)$ es diferenciable en el punto a si existe el límite finito

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(a+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(a)$$

que se llama la derivada de $f(z)$ en a.

Teorema A.1 Sea U abierto en $\mathbb{C}$ y sea f una función continua en U. Suponga que existe una función $\mathbb{C}$-diferenciable F en U tal que $F' = f$. Entonces, para cualquier curva diferenciable por partes cerrada γ en U, se tiene

$$\int_\gamma f\, dz = 0$$

Demostración: Sea $\gamma : [a,b] \to U$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ una curva diferenciable por partes cerrada. Se tiene

$$\begin{aligned} \int_\gamma f\, dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0 \end{aligned}$$

ya que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Corolario A.1 Si f es un polinomio en z y γ es cualquier curva diferenciable por partes cerrada en $\mathbb{C}$, se tiene

$$\int_\gamma f\, dz = 0 \tag{4.3}$$

Demostración: Si $f(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$ y $F(z) = \sum_{n=0}^{d} [\frac{a_n}{n+1}] z^{n+1}$, se tiene $F' = f$.

Teorema A.2 (El Teorema de Cauchy-Goursat). Sea U un conjunto abierto

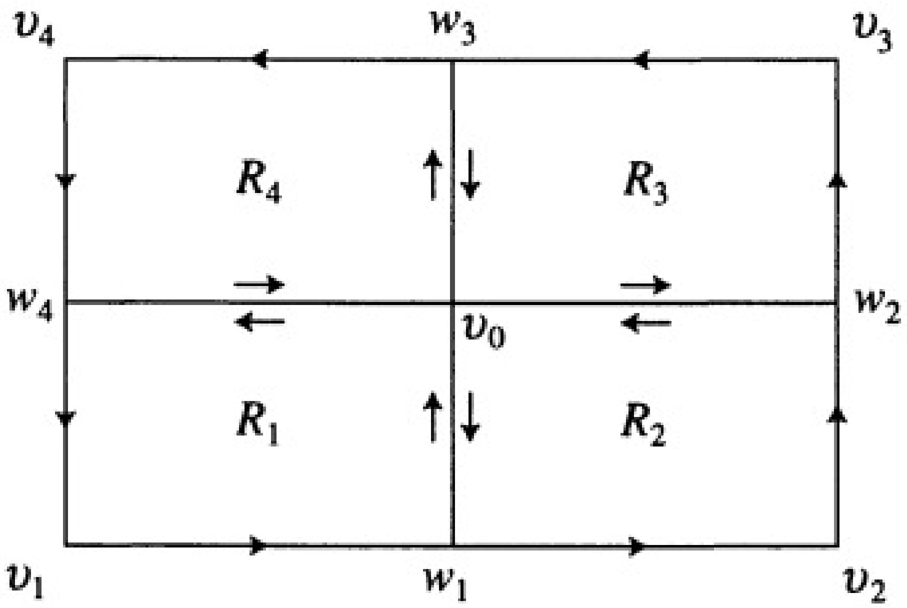


Figura 4.1

de $\mathbb{C}$ y sea f una función $\mathbb{C}$-diferenciable en U. Entonces, para cualquier rectángulo cerrado $R \subset U$, se tiene

$$\int_{\partial R} f\, dz = 0 \tag{4.4}$$

Demostración: Sean v_1, v_2, v_3, v_4 los vértices de R, y sean $v_0 = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$ y $w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, $w_2 = \frac{1}{2}(v_2 + v_3)$, $w_3 = \frac{1}{2}(v_3 + v_4)$, $w_4 = \frac{1}{2}(v_4 + v_1)$ (v_0 es el centro de R, y w_j son los "puntos medios" de γ_j respectivamente). Se divide R en cuatro rectángulos cerrados R_1, R_2, R_3, R_4 donde R_1 tiene vértices v_1, w_1, v_0, w_4 (en ese orden), R_2 los vértices w_1, v_2, w_2, v_0, R_3 los vértices v_0, w_2, v_3, w_3 y R_4 los vértices w_4, v_0, w_3, v_4. (Ver Figura 6.1)

Entonces, se comprueba que

$$\int_{\partial R} f\, dz = \sum_{v=1}^{4} \int_{\partial R_v} f\, dz$$

Sea $A = |\int_{\partial R} f\, dz|$. Como

$$A = |\sum_{v=1}^{4} \int_{\partial R_v} f\, dz| \leq \sum_{v=1}^{4} |\int_{\partial R_v} f\, dz|$$

existe un v_1 $(1 \leq v_1 \leq 4)$ tal que $|\int_{\partial R_{v_1}} f\, dz| \geq \frac{1}{4} A$.

Ahora se divide R_{v_1} en cuatro rectángulos $R_{v_1}\mu \quad \mu = 1, \cdots, 4$ como arriba, introduciendo su centro y los "puntos medios"de sus lados como nuevos vértices. Se tiene $\int_{\partial R_{v_1}} f\, dz = \sum_{v=1}^{4} \int_{\partial R_{v_1}\mu} f\, dz$ de modo que exista v_2, $1 \leq v_2 \leq 4$ tal que

$$|\int_{\partial Rv_1v_2} f\, dz| \geq \frac{1}{4}|||\int_{\partial Rv_1} f\, dz| \geq 4^{-2}A$$

Note que $L(\partial R_{v_1}) = \dfrac{1}{2}L(\partial R)$, $L(\partial R_{v_1v_2}) = 2^{-2}L(\partial R)$, mientras que $diam(R_{v_1}) = \dfrac{1}{2}diam(R)$, $diam(R_{v_1v_2}) = 2^{-2}diam(R)$. ($diam(E)$ es el diámetro del conjunto E.)

Ahora se itera este procedimiento y se encuentra una sucesión de rectángulos $\{R_{v_1\cdots v_k}\}_{k\geq 1}$, $1 \leq v_j \leq 4$, con las siguientes propiedades:

1. $R_{v_1\cdots v_k v_{k+1}} \subset R_{v_1\cdots v_k}$
2. $L(\partial R_{v_1\cdots v_k}) = 2^{-k}L(\partial R)$
3. $diam(R_{v_1\cdots v_k}) = 2^{-k}diam(R)$
4. $|\int_{\partial R_{v_1\cdots v_k}}| \geq 4^{-k}A$

Dado que cada $R_{v_1\cdots v_k}$ es compacto, (1) y (3) implican que $\cap_{k\geq 1}R_{v_1\cdots v_k} = \{a\}$ consiste de un solo punto a.

Se define $\epsilon(z)$ por

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \epsilon(z)$$

como f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a, se tiene $\dfrac{\epsilon(z)}{|z-a|} \to 0$ cuando $z \to a \quad (z \neq a)$. Por lo tanto, dado $\delta > 0$, hay $\lambda > 0$ tal que $|\epsilon(z)| \leq \delta|z-a|$ para $|z-a| \leq \lambda$. Además, por el Corolario A.1 se tiene

$$\int_{\partial R_{v_1\cdots v_k}} f\, dz = \int_{\partial R_{v_1\cdots v_k}} \epsilon\, dz$$

Suponga ahora que k se elige tan grande que $diam(R_{v_1\cdots v_k}) < \lambda$; entonces $|z-a| < \lambda$ para cualquier $z \in R_{v_1\cdots v_k}$ Esto da

$$\begin{aligned} 4^{-k}A &\leq |\int_{\partial R_{v_1\cdots v_k}} f\, dz| = |\int_{\partial R_{v_1\cdots v_k}} \epsilon\, dz| \\ &\leq \delta\, diam(R_{v_1\cdots v_k}).L(\partial R_{v_1\cdots v_k}) = \delta 2^{-k}\, diam(R),2^{-k}L(\partial R) \end{aligned}$$

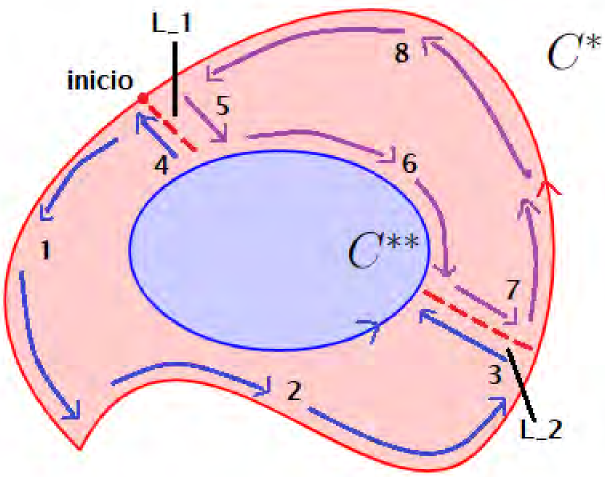


Figura 4.2

Así $A \leq \delta.dim(R).L(\partial R)$. Como $\delta > 0$ es arbitrario, se sigue que $A = 0$, lo que demuestra el teorema. $\square$

Teorema A.3 Sean C^* y C^{**} dos curvas cerradas simples (positivamente orientados) donde C^{**} es interior a C^*. Si f es $\mathbb{C}-$diferenciable en la región limitada por las dos curvas y sobre C^* y C^{**}, entonces

$$\int_{C^*} f(z)\,dz = \int_{C^{**}} f(z)\,dz$$

Demostración: Se construyen dos cortes transversales L_1 y L_2 de manera que se unan ambos contornos como se puede ver en la figura 4.2

Sean C^* y C^{**} los dos nuevos contornos cerrados indicados por las flechas (1-2-3-4) y (5-6-7-8) respectivamente, y como f es $\mathbb{C}-$diferenciable sobre y dentro de la región limitada por las dos curvas y sobre C^* y C^{**} luego, se tiene que

$$\int_{C^*} f(z)\,dz = 0 = \int_{C^{**}} f(z)\,dz$$

Teorema A.4 Sea U un abierto en $\mathbb{C}$. Sea f una función continua en U. Sea $a \in U$ y suponga que $U - \{a\}$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en $U - \{a\}$. Entonces, para cualquier rectángulo cerrado $R \subset U$, se tiene

$$\int_{\partial R} f\,dz = 0 \tag{4.5}$$

Demostración: Si $a \notin R$, se sigue inmediatamente del Teorema A.3, aplicado a $f|_{U-\{a\}}$. A continuación suponga que $a \in \partial R$. Se elige un rectángulo cerrado R_ϵ contenido en el interior de R y cuyos vértices convergen con los vértices de R cuando $\epsilon \to 0$. (Si $R = [a,b] \times [c,d]$, se puede, por ejemplo, tomar $R_\epsilon = [a+\epsilon, b-\epsilon] \times [c+\epsilon, d-\epsilon]$.) Entonces, como f es continuo, por lo tanto es uniformemente continuo en R, y se tiene

$$\int_{\partial R_\epsilon} f\,dz \to \int_{\partial R} f\,dz \quad \text{cuando} \quad \epsilon \to 0$$

pero por el Teorema A.3, $\int_{\partial R_\epsilon} f\,dz = 0$, se sigue que $\int_{\partial R} f\,dz = 0$.

Finalmente, suponga que a está en el interior de R, con $a = \alpha + i\beta$. Sea R_1 el rectángulo de vértices v_1, $\alpha + iIm(v_1)$, $\alpha + iIm(v_3)$, v_4, R_2 el rectángulo de vértices $\alpha + iIm(v_1)$, v_2, v_3, $\alpha + iIm(v_3)$. Entonces se tiene $\int_{\partial R} f\,dz = \int_{\partial R_1} f\,dz + \int_{\partial R_2} f\,dz$. Como $a \in \partial R_1$, $a \in \partial R_2$, las dos últimas integrales son iguales a cero por el caso tratado anteriormente.

Teorema A.5 (Formula integral de Cauchy) Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y sea f una función $\mathbb{C}$-diferenciable en U. Sea R un rectángulo cerrado de U. Entonces para cualquier a en el interior de R, se tiene que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{4.6}$$

Demostración: Se define

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z-a}, \text{ si } z \in U,\ z \neq a \\ f'(a),\ z = a \end{cases}$$

Entonces g es continua en U y $g|_{U-\{a\}}$ es $\mathbb{C}$-diferenciable. Por el Teorema A.4

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial R} g(z)\,dz &= \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a)\int_{\partial R} \frac{1}{z-a}\,dz \\ &= \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - 2\pi i f(a) \end{aligned}$$

APÉNDICE B

<table>
<tr><td colspan="3">TEOREMA DE ARZELA-ASCOLI APLICADO EN LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN Y EN LA SUCESIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS CON DOMINIO COMPACTO</td></tr>
<tr><th>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</th><th>OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN</th><th>METODOLOGÍA</th></tr>
<tr><td>PROBLEMA GENERAL</td><td>OBJETIVO GENERAL</td><td rowspan="3">Tipo de Investigación:
Básica</td></tr>
<tr><td>■ ¿El teorema de Arzela-Ascoli garantiza que cualquier sucesión de funciones continuas (f_n), definidas en un conjunto compacto K posee una subsucesión uniformemente convergente?</td><td>■ Demostrar que el teorema de Arzela-Ascoli garantiza que cualquier sucesión de funciones continuas (f_n) con dominio compacto K posee una subsucesión uniformemente convergente.</td></tr>
<tr><td>PROBLEMAS ESPECÍFICOS</td><td>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</td></tr>
<tr><td>■ Dada una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, ¿El teorema de Arzela-Ascoli garantiza la existencia de al menos una solución en un subconjunto compacto K?
■ Dado un conjunto limitado y equicontinuo de funciones $\mathbb{C}$-diferenciables H. ¿Existirá una subsucesión la cual converge uniformemente a una función $\mathbb{C}$-diferenciable en un subconjunto compacto K?</td><td>■ Demostrar que el teorema de Arzela-Ascoli garantiza la existencia de por lo menos una solución en un subconjunto compacto K a una ecuación diferencial de primer orden.
■ Demostrar que dado un conjunto limitado y equicontinuo de funciones $\mathbb{C}$-diferenciables H, existe una subsucesión uniformemente convergente a una función $\mathbb{C}$-diferenciable en un conjunto compacto K.</td><td>Diseño de Investigación:
Descriptivo</td></tr>
</table>

Cuadro 4.1: Matriz de consistencia de la investigación

Referencias

Apostol, T. M. (2020). *Análisis matemático.* Reverté.

Bartle, R. G., y Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis.* John Wiley & Sons, Inc.

Cartan, H. (1995). *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables.* Courier Corporation.

Codognos, M. V. (2016). *Um estudo sobre o teorema de àrzela-ascoli* (B.S. thesis). Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Domingues, H. H. (1982). *Espaços métricos e introdução à topologia.* Atual.

Kelley, J. L. (2017). *General topology.* Courier Dover Publications.

Lang, S. (2013). *Undergraduate analysis.* Springer Science & Business Media.

Lima, E. L. (1983). *Espaços métricos* (Vol. 4). Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro.

Lima, E. L. (2004). *Análise real* (Vol. 1). Impa Rio de Janeiro.

Lima, E. L. (2013). Curso de análise vol. 1–14ª edição. *Rio de Janeiro: IMPA–Projeto Euclides.*

Little, C. H., Teo, K. L., y Van Brunt, B. (2015). *Real analysis via sequences and series.* Springer.

Munkres, J. R. (2000). *Topology.* Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.

Narasimhan, R., y Nievergelt, Y. (2012). *Complex analysis in one variable.* Springer Science & Business Media.

Ovchinnikov, S. (2021). *Real analysis: foundations.* Springer.

Pereira, G. T. (s.f.). O teorema de arzela-ascoli.

Pugh, C. C., y Pugh, C. (2002). *Real mathematical analysis* (Vol. 2011). Springer.

Sormani, C. (2018). Intrinsic flat arzela–ascoli theorems. *Communications in Analysis and Geometry*, *26*(6), 1317–1373. Descargado de `https://doi.org/10.4310%2Fcag.2018.v26.n6.a3` doi: 10.4310/cag.2018.v26.n6.a3

Sotomayor, J. (1979). Liçoes de equaçoes diferenciais ordinárias (vol. 11). *Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq*.

Ward Brown, J., Churchill, R. V., Abellanas, L., y cols. (2004). *Variable compleja y aplicaciones.*

Ziemer, W. P., y Torres, M. (2017). *Modern real analysis* (Vol. 278). Springer.