

Elizabeth Carpio Joyas

APLICACION DEL TEOREMA DE BANACH . STEINHAUS EN SERIES TEMPORALES.pdf

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:513832664

Fecha de entrega

16 oct 2025, 2:45 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

16 oct 2025, 8:05 p.m. GMT-5

Nombre del archivo

APLICACION DEL TEOREMA DE BANACH . STEINHAUS EN SERIES TEMPORALES.pdf

Tamaño del archivo

1.5 MB

69 páginas

11.076 palabras

66.167 caracteres

9% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Exclusiones

- N.º de coincidencias excluidas

Fuentes principales

- 6%  Fuentes de Internet
- 2%  Publicaciones
- 7%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Fuentes principales

- 6% Fuentes de Internet
- 2% Publicaciones
- 7% Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Fuentes principales

Las fuentes con el mayor número de coincidencias dentro de la entrega. Las fuentes superpuestas no se mostrarán.

1	Internet	dspace.esPOCH.edu.ec	<1%
2	Internet	www2.stat.duke.edu	<1%
3	Internet	es.slideshare.net	<1%
4	Internet	repositorio.continental.edu.pe	<1%
5	Internet	repositorio.uancv.edu.pe	<1%
6	Internet	upc.aws.openrepository.com	<1%
7	Trabajos entregados	Corporación Universitaria Iberoamericana on 2023-09-23	<1%
8	Trabajos entregados	Universidad Internacional de la Rioja on 2024-06-08	<1%
9	Internet	journals.urau.ua	<1%
10	Internet	revistas.unc.edu.ar	<1%
11	Internet	vsip.info	<1%

12	Trabajos entregados	Universidad Internacional de la Rioja on 2024-12-21	<1%
13	Trabajos entregados	Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco on 2021-01-11	<1%
14	Trabajos entregados	Universidad Andrés Bello on 2024-09-11	<1%
15	Internet	archive.org	<1%
16	Internet	docplayer.es	<1%
17	Internet	doku.pub	<1%
18	Internet	veterinaria.ucm.es	<1%
19	Trabajos entregados	ULACIT Universidad Latinoamericana de Ciencia y Tecnología on 2024-07-20	<1%
20	Trabajos entregados	Universidad Carlos III de Madrid - EUR on 2025-06-03	<1%
21	Trabajos entregados	Universidad Carlos III de Madrid - EUR on 2024-06-06	<1%
22	Trabajos entregados	Universidad Nacional Federico Villarreal on 2024-07-24	<1%
23	Trabajos entregados	Universidad de Salamanca on 2022-09-07	<1%
24	Internet	christuniversity.in	<1%
25	Trabajos entregados	Universidad Estadual Paulista on 2015-03-09	<1%

26	Trabajos entregados	Universidad Internacional de la Rioja on 2025-01-19	<1%
27	Trabajos entregados	Universidad de Almeria on 2018-09-22	<1%
28	Trabajos entregados	University of Glasgow on 2025-06-25	<1%
29	Trabajos entregados	Universidad Francisco de Vitoria on 2023-05-14	<1%
30	Trabajos entregados	Universidad de Cantabria on 2023-11-24	<1%
31	Internet	medialibrary.uantwerpen.be	<1%
32	Internet	www.slideshare.net	<1%
33	Trabajos entregados	Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco on 2025-09-30	<1%
34	Internet	repository.udistrital.edu.co	<1%
35	Internet	www.dynamicpublishers.com	<1%
36	Internet	www.ieee.es	<1%
37	Trabajos entregados	Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD on 2023-05-28	<1%
38	Internet	es.scribd.com	<1%
39	Internet	worldwidescience.org	<1%

40	Trabajos entregados	Colégio Universitario de Estudios Financiero on 2023-09-05	<1%
41	Trabajos entregados	Consortio CIXUG on 2024-11-04	<1%
42	Trabajos entregados	Corporación Universitaria Minuto de Dios, UNIMINUTO on 2024-08-13	<1%
43	Trabajos entregados	Universidad Anahuac México Sur on 2019-01-25	<1%
44	Trabajos entregados	Universidad Autónoma de Madrid on 2020-11-30	<1%
45	Trabajos entregados	Universidad Francisco de Vitoria on 2024-05-09	<1%
46	Trabajos entregados	Universidad Internacional de la Rioja on 2020-09-23	<1%
47	Trabajos entregados	Universidad Internacional de la Rioja on 2023-05-26	<1%
48	Internet	decsai.ugr.es	<1%
49	Internet	deepnote.com	<1%
50	Internet	dspaceapi.live.udesa.edu.ar	<1%
51	Internet	e-spacio.uned.es	<1%
52	Internet	fr.slideshare.net	<1%
53	Internet	nauka.x-pdf.ru	<1%

54	Internet	repositorio.animaeducacao.com.br	<1%
55	Internet	repositorio.undac.edu.pe	<1%
56	Internet	repositorio.uwiener.edu.pe	<1%
57	Internet	rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com	<1%
58	Internet	tdx.cat	<1%
59	Internet	www-dweb-cors.dev.archive.org	<1%
60	Trabajos entregados	BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA on 2021-05-19	<1%
61	Publicación	Donald A. Dawson, Shui Feng. "Large deviations for the Fleming-Viot process wit...	<1%
62	Trabajos entregados	Patricia Test Account on 2014-11-01	<1%
63	Trabajos entregados	Universidad EAFIT on 2013-05-21	<1%
64	Trabajos entregados	Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD on 2023-05-24	<1%
65	Trabajos entregados	Universidad Nacional Abierta y a Distancia, UNAD,UNAD on 2023-05-28	<1%
66	Trabajos entregados	Universidad TecMilenio on 2024-01-21	<1%
67	Trabajos entregados	Universidad de Alicante on 2021-09-15	<1%

68	Trabajos entregados	Universidad de Burgos UBUCEV on 2025-05-22	<1%
69	Internet	comum.rcaap.pt	<1%
70	Internet	docslib.org	<1%
71	Internet	econometria.wordpress.com	<1%
72	Internet	igdtuw.ac.in	<1%
73	Internet	issuu.com	<1%
74	Internet	repositorio.umsa.bo	<1%
75	Internet	repositorio.unitec.edu	<1%
76	Internet	ruj.uj.edu.pl	<1%
77	Trabajos entregados	usach on 2024-09-04	<1%
78	Internet	www.essays.se	<1%
79	Internet	www.holycrossnigl.edu.in	<1%
80	Internet	www.javeriana.edu.co	<1%
81	Internet	www.rac.es	<1%

82	Trabajos entregados	BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA on 2019-10-18	<1%
83	Publicación	CÉSAR ALEJANDRO ESPINOZA RODRÍGUEZ. "Predicción a corto plazo de la deman...	<1%
84	Trabajos entregados	Universidad Anahuac México Sur on 2025-09-18	<1%
85	Trabajos entregados	Universidad Andina Nestor Caceres Velasquez on 2024-04-08	<1%
86	Trabajos entregados	Universidad Europea de Madrid on 2023-11-14	<1%
87	Trabajos entregados	Universidad de Málaga - Tii on 2021-09-24	<1%
88	Internet	digital.csic.es	<1%
89	Internet	repositorio.uti.edu.ec	<1%
90	Trabajos entregados	Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (FLACSO) - Sede Ecuador on 2017-1...	<1%
91	Trabajos entregados	ITESM: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey on 2025-04-23	<1%
92	Trabajos entregados	Pontificia Universidad Catolica del Peru on 2024-09-16	<1%
93	Trabajos entregados	Southern New Hampshire University - Continuing Education on 2025-02-23	<1%
94	Trabajos entregados	Universidad Anahuac México Sur on 2025-02-16	<1%
95	Trabajos entregados	consultoriadeserviciosformativos on 2025-08-26	<1%

96	Internet	www.dspace.uce.edu.ec	<1%
97	Trabajos entregados	Universidad Tecnica De Ambato- Direccion de Investigacion y Desarrollo , DIDE o...	<1%
98	Trabajos entregados	Universidad Tecnológica Centroamericana UNITEC on 2025-10-16	<1%
99	Trabajos entregados	Universidad de Murcia on 2024-07-03	<1%
100	Trabajos entregados	University of Durham on 2011-09-07	<1%
101	Internet	livrosdeamor.com.br	<1%
102	Trabajos entregados	Centro de Altos Estudios Nacionales on 2024-07-22	<1%
103	Trabajos entregados	Universidad Nacional de Trujillo on 2023-10-18	<1%
104	Trabajos entregados	unsaac on 2025-04-10	<1%



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD
DEL CUSCO**

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

TESIS

**“APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS EN
SERIES TEMPORALES”**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
MATEMÁTICAS**

AUTOR:

Br. ELIZABETH CARPIO JOYAS

ASESOR:

Msc. FABRIZIO MIGUEL VERGARA DIAZ

CODIGO ORCID: 0000-0002-9836-6435

CUSCO – PERÚ

2025

DEDICATORIA

A Dios, por su infinita bondad y sabiduría, por ser mi guía del día al día, darme salud y fortaleza necesaria.

A mis adorados padres, a mis amados hermanos y a todos mis entrañables sobrinos por su amor, ejemplo y apoyo constante, parte fundamental de este recorrido.

A mi esposo, Danny a mis hijos Daniel y Luciana, quienes son la razón más grande de mi esfuerzo y la inspiración que me impulsa a seguir adelante cada día.

A mis queridas amigas de toda la vida, cuya paciencia, alegría y amistad sincera han acompañado cada etapa de mi vida..

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi agradecimiento a la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, a la Escuela de Posgrado, al programa de Maestría en Matemáticas, por brindarme la oportunidad de crecer académica y profesionalmente, haciendo posible la realización de este anhelado objetivo.

Mi más sincero agradecimiento a los Docentes del Departamento Académico de Matemática y Estadística.

A mi asesor Msc. Fabrizzio por su paciencia y valiosos consejos, que han sido guía fundamental en el desarrollo de esta tesis.

Así también, a todos mis colegas de la Dirección de la Escuela Profesional de Matemática y Estadística, en especial al Dr. Epifanio, por su apoyo constante, por compartir sus experiencias y por impulsarme a seguir adelante con compromiso, entrega y determinación a lo largo de este proceso.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA.....	II
AGRADECIMIENTO.....	III
ÍNDICE GENERAL.....	IV
ÍNDICE DE FIGURAS.....	VII
ÍNDICE DE TABLAS	IX
RESUMEN.....	X
ABSTRACT	XI
INTRODUCCIÓN	XII
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1. Situación problemática	1
1.2. Formulación del problema.....	2
1.2.1. Problema General.....	2
1.2.2. Problemas Específicos	2
1.3. Justificación de la investigación	2
1.3.1. Justificación Teórica	2
1.3.2. Justificación Práctica.....	3
1.4. Objetivos de la investigación.....	4
1.4.1. Objetivo general	4

1.4.2. Objetivos específicos	4
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	5
2.1. Bases teórica	5
2.2. Marco conceptual.....	14
2.2.1. Relación entre el teorema de Banach-Steinhaus y las series temporales.....	14
2.2.2. Características de las series temporales.....	15
2.2.3. Aplicación y análisis	16
2.3. Antecedentes empíricos de la investigación	16
2.3.1. Antecedentes nacionales	16
2.3.2. Antecedentes internacionales	17
2.4. Hipótesis	18
a. Hipótesis general.....	18
b. Hipótesis específicos.....	18
2.5. Identificación de variables e indicadores.....	18
2.5.1. Variable independiente.....	18
2.5.2. Variable dependiente.....	18
2.5.3. Variable de Control	19
CAPITULO III: METODOLOGÍA	20
3.1 Ámbito de estudio: Localización política y geográfica	20
3.2 Tipo y nivel de investigación.....	20

85	3.2.1 Tipo de investigación	20
	3.2.2 Nivel de Investigación	20
	3.3 Unidad de análisis.....	19
	3.4 Población de estudio	21
	3.5 Tamaño de muestra.....	21
	3.6 Técnicas de selección de muestra	22
	3.7 Técnicas de recolección de información	22
	3.8 Técnicas de análisis e interpretación de la información	23
	3.9 Técnicas para demostrar la verdad o falsedad de la hipótesis	23
	CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN	25
	4.1. Procesamiento, análisis, interpretación y discusión de resultados.....	25
96	CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	53
	CONCLUSIONES	53
	RECOMENDACIONES	54
	CAPÍTULO VI: REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	55
	ANEXO.....	56
	ANEXO 1: Matriz de consistencia	56

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Serie temporal acotada	25
Figura 2 Serie temporal no acotada.....	27
Figura 3 Serie de PIB de EEUU	31
Figura 4 Serie diferenciada del PIB de EEUU	32
Figura 5 Forecasts from ARIMA(0,2,2)	34
Figura 6 Número de pasajeros aéreos internacionales.....	35
Figura 7 Serie diferenciada de pasajeros aéreos internacionales	36
Figura 8 Forecasts from ARIMA (2,1,1)(0,1,0)[12]	38
Figura 9 Consumo trimestral de gas en el Reino Unido (1960-1986)	39
Figura 10 Decomposition of additive series.....	40
Figura 11 Consumo trimestral de gas suavizado con diferentes valores de k.....	42
Figura 12 Temperatura diaria en Nueva York (mayo a setiembre de 1973)	43
Figura 13 Temperatura diaria suavizada con diferentes valores de k.....	44
Figura 14 Decomposition of multiplicative time series.....	45
Figura 15 Concentraciones de CO2 en Mauna Loa.....	46
Figura 16 Serie diferenciada de CO2	47
Figura 17 Decomposition of additive time series	48

2

Figura 18 Forecasts from ARIMA $(1,1,1)(1,1,2)[12]$	49
---	----

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Condiciones del Teorema de Banach- Steinhaus	29
Tabla 2 Operadores Lineales	30
Tabla 3 Series que cumplen en su forma original	51
Tabla 2 Series que no cumplen en su forma original	52

RESUMEN

Este estudio investiga la aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus fundamento clave en análisis funcional para superar las limitaciones de los métodos convencionales en predicción de series temporales, particularmente en contextos con alta variabilidad, ruido o componentes no lineales.

La investigación se plantea como un análisis comparativo entre este enfoque y las técnicas tradicionales, con el propósito de determinar en qué medida la incorporación del teorema puede optimizar los resultados de predicción. Para ello, se busca identificar las características de las series temporales más adecuadas para la aplicación del teorema, analizar su influencia en la precisión de los modelos predictivos y comparar su eficiencia con métodos establecidos. El estudio combina una fundamentación teórica sólida, basada en los principios de análisis funcional y modelado estadístico, con un enfoque empírico que permite contrastar hipótesis y medir el impacto real del teorema en la predicción de datos.

Los resultados esperados incluyen una validación cuantitativa de la hipótesis de que el uso del Teorema de Banach-Steinhaus puede mejorar la estabilidad y generalización de los modelos predictivos en series temporales, así como recomendaciones prácticas para su implementación en contextos con alta complejidad de datos. En conjunto, este trabajo busca aportar una contribución tanto teórica como aplicada al campo del análisis de datos, ofreciendo nuevas perspectivas para la optimización de modelos en entornos dinámicos y no lineales.

Palabras claves: Teorema de Banach-Steinhaus, Series temporales, Modelos predictivos, Análisis de datos.

ABSTRACT

This study investigates the application of the **Banach–Steinhaus Theorem**, a key foundation in functional analysis, to overcome the limitations of conventional methods in time series forecasting, particularly in contexts characterized by high variability, noise, or nonlinear components.

The research is presented as a comparative analysis between this approach and traditional techniques, with the purpose of determining to what extent the incorporation of the theorem can optimize forecasting outcomes. To this end, the study seeks to identify the types of time series most suitable for the application of the theorem, analyze its influence on predictive accuracy, and compare its efficiency with established methods.

The study combines a solid theoretical foundation, based on the principles of functional analysis and statistical modeling, with an empirical approach that allows for hypothesis testing and the measurement of the theorem's real impact on data forecasting.

The expected results include a quantitative validation of the hypothesis that the use of the **Banach–Steinhaus Theorem** can improve the stability and generalization of predictive models in time series, as well as practical recommendations for its implementation in contexts with high data complexity. Overall, this work aims to provide both a theoretical and applied contribution to the field of data analysis, offering new perspectives for the optimization of models in dynamic and nonlinear environments.

Keywords: Banach–Steinhaus Theorem, Time Series, Predictive Models, Data Analysis.

INTRODUCCIÓN

El análisis de series temporales desempeña un papel fundamental en la comprensión y predicción de fenómenos dinámicos en diversos campos del conocimiento, como la economía, la climatología, la energía, las ciencias sociales y demás campos.

La capacidad de prever comportamientos futuros a partir de datos históricos constituye un desafío en este ámbito, especialmente cuando las series presentan alta variabilidad y componentes no lineales. Las técnicas convencionales de modelado, tales como los modelos arima o de promedio móvil, suelen mostrar limitaciones bajo estas condiciones, lo que dificulta alcanzar resultados precisos y estables.

98 En este contexto el teorema de Banach – Steinhaus ofrece un marco teórico robusto que podría mejorar la precisión y robustez de los modelos predictivos.

39 La presente investigación tiene como propósito analizar la aplicabilidad del teorema en comparación con las técnicas tradicionales. Sus objetivos específicos son: identificar características de series temporales adecuadas para la aplicación del teorema, analizar su influencia en la precisión de modelos predictivos y comparar su eficiencia frente a métodos convencionales.

Para ello se analizarán diversas series temporales reales, de naturaleza económica, climática y ambiental. En cada caso, se examinará si las series son acotadas o no, se aplicarán transformaciones para estabilizarlas, y se evaluará el comportamiento de los residuos y operadores utilizados, de acuerdo con la lógica planteada por el teorema.

En conjunto, este trabajo busca aportar una contribución tanto teórica como aplicada al campo del análisis de datos, ofreciendo nuevas perspectivas para la optimización de modelos predictivos en entornos caracterizados por la alta complejidad, variabilidad y no linealidad.

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Situación problemática

El análisis de series temporales enfrenta desafíos fundamentales cuando se busca predecir comportamientos futuros a partir de datos históricos con alta variabilidad, ruido estructural y componentes no lineales. Las técnicas estadísticas tradicionales, como los modelos ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average), muestran limitaciones significativas al asumir linealidad, estacionalidad o independencia del error, condiciones que difícilmente se satisfacen por completo en contextos reales.

Esta situación revela una brecha conceptual y metodológica entre los enfoques estadísticos convencionales y las herramientas del análisis funcional, disciplina que permite estudiar sistemas predictivos desde una perspectiva más general y abstracta, basada en operadores y espacios funcionales. Sin embargo, esta conexión permanece poco explorada en la literatura aplicada.

En este contexto, el Teorema de Banach-Steinhaus, también conocido como el principio de acotamiento uniforme surge como una herramienta potente del análisis funcional. Este teorema establece condiciones bajo las cuales una familia de operadores lineales, asociados a procesos predictivos, mantiene acotamiento uniforme, con implicaciones directas sobre la estabilidad, robustez y capacidad de generalización de los modelos en entornos inciertos.

A pesar de su potencial teórico, la aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus al modelado predictivo de series temporales permanece incipiente, lo que configura una importante oportunidad de investigación en la intersección entre teoría funcional y estadística aplicada.

1.2 Formulación del problema

a. Problema general

¿Puede el Teorema de Banach-Steinhaus ser aplicado en la predicción y robustez de modelos en series temporales?

b. Problemas específicos

- ¿Cuáles son las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus en espacios funcionales asociados a series temporales?
- ¿Cómo se ve afectada la precisión predictiva de los modelos al aplicar el teorema de Banach-Steinhaus?
- ¿Qué tan robustos son los modelos resultantes en comparación con métodos tradicionales?

1.3 Justificación de la investigación

1.3.1 Justificación teórica

Desde el punto de vista del análisis funcional, el Teorema de Banach-Steinhaus o principio de acotamiento uniforme constituye un resultado fundamental sobre familias de operadores lineales acotados en espacios de Banach. Este teorema establece que, si una familia de operadores es puntualmente acotada en un espacio de Banach, entonces está uniformemente acotada. En otras palabras, si cada operador de la familia actúa de manera controlada sobre cada vector individual, entonces existe un límite superior común para todas las normas operatorias. Esta propiedad tiene profundas implicancias en la teoría de la convergencia y la estabilidad de los modelos funcionales. En el contexto de series temporales, los modelos predictivos pueden ser considerados como operadores que actúan sobre espacios funcionales definidos por las observaciones pasadas. El uso

del Teorema de Banach-Steinhaus permite entonces garantizar que, bajo ciertas condiciones, las respuestas del sistema no crecerán sin control a pesar de la variabilidad individual. Esta herramienta teórica ofrece un marco sólido para abordar problemas de estabilidad y robustez de una manera más general que la proporcionada por técnicas estadísticas tradicionales.

1.3.2 Justificación práctica

En la práctica, los modelos de series temporales como ARIMA, o modelos híbridos pueden interpretarse como operadores que asignan una secuencia de entrada (datos históricos) a una predicción futura. Esta visión funcional permite considerar cada modelo como un operador lineal (o aproximadamente lineal en algunos casos) dentro de una familia parametrizada de operadores predictivos. La aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus en este contexto consiste en verificar que dichos operadores sean puntualmente acotados (es decir, que para cada serie temporal individual la predicción no sea explosiva), lo cual permitiría concluir que la familia completa es uniformemente acotada. Esta propiedad es crucial para el diseño de sistemas robustos, pues asegura que pequeñas perturbaciones en los datos de entrada no conduzcan a grandes errores en la predicción. Además, esta perspectiva permite construir criterios funcionales adicionales para validar modelos predictivos, más allá de los típicos indicadores estadísticos. En particular, se pueden desarrollar pruebas de estabilidad basadas en la norma del operador y diseñar regularizadores funcionales que mantengan la acotación uniforme en procesos no estacionarios, ruidosos o con comportamiento caótico. Esto abre un campo prometedor para integrar herramientas del análisis funcional en la evaluación y mejora de modelos de aprendizaje y predicción en series temporales reales.

1.4 Objetivos de la investigación

a. Objetivo general

Analizar como el Teorema de Banach-Steinhaus puede aplicarse para mejorar la predicción y robustez de modelos en series temporales.

b. Objetivos específicos

- Explicar las condiciones necesarias para aplicar el Teorema en el análisis de series temporales.
- Evaluar en qué medida la aplicación del Teorema mejora la precisión y robustez de los modelos predictivos en series temporales.
- Comparar la robustez de los modelos de series temporales basados en el Teorema con los modelos tradicionales cuando existe ruido y datos incompletos.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

Este capítulo presenta las definiciones fundamentales necesarias para el desarrollo del marco teórico y metodológico del trabajo, en el contexto del análisis funcional y la modelación de series temporales. Se incluyen conceptos relativos a espacios topológicos, métricos, normados, de Banach y operadores lineales, entre otros.

Nota sobre las fuentes: Las definiciones y teoremas presentados en esta sección están basados principalmente en los textos señalados en la bibliografía, como (Rudin, 1991; Yosida, 1980; Hamilton, 1994 y otros). En algunos casos, se ha adaptado el lenguaje para hacerlo más claro o ajustarlo al enfoque del trabajo, sin cambiar el contenido esencial.

2.1 Bases teóricas

Definición 2.1.1.- Sea X un conjunto. Una topología τ sobre X es una familia de subconjuntos de X tal que:

- (a) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.
- (b) Si $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.
- (c) Si $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i \in I}^n U_i \in \tau$.

Luego el par (X, τ) es un espacio topológico (Rudin, 1991, pág. 6).

Definición 2.1.2.- Sea X un conjunto. Una función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una métrica si para todo $x, y, z \in X$, se cumple:

- (a) No negatividad: $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- (b) Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$.
- (c) Desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Luego la dupla (X, d) es un espacio métrico (Yosida, 1980, pág. 4).

Definición 2.1.3.- Un espacio métrico completo es un espacio métrico (X, d) en el que toda sucesión de Cauchy converge a un elemento de X .

Es decir, si $\{x_n\}$ es una sucesión en X tal que:

para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$,

para todo $n, m \geq N$, entonces existe un $x \in X$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (Rudin, 1991, pág. 20)

Definición 2.1.4.- Un espacio topológico (X, τ) es de Hausdorff si para cualquiera de dos puntos x, y en X con $x \neq y$, existen abiertos U y V en τ tales que :

(a) $x \in U$

(b) $y \in V$

(c) $U \cap V = \emptyset$

(Yosida, 1980, pág. 3)

Definición 2.1.5.- Un espacio vectorial X sobre un cuerpo K (típicamente los números reales $\mathbb{R}$ o los números complejos $\mathbb{C}$) es un conjunto con elementos llamados vectores sobre los que se definen las operaciones:

Adición: $+: X \times X \rightarrow X$

Multiplicación por escalar: $\cdot: K \times X \rightarrow X$

Que deben cumplir las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in X$ y todo $\alpha, \beta \in K$

(a) Conmutatividad: $x + y = y + x$

(b) Asociatividad: $x + (y + z) = (x + y) + z$

(c) Elemento neutro aditivo: Existe un vector 0 tal que $x + 0 = x$

(d) Elemento inverso aditivo: Para cada $x \in X$, $\exists! -x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$.

(e) Asociativa del producto escalar: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(f) Identidad escalar: $1x = x$

(g) Distributiva respecto a los escalares: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(h) Distributiva respecto a los vectores: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Un espacio vectorial es llamado real si $K = \mathbb{R}$ y es llamado espacio vectorial complejo si $K = \mathbb{C}$ (Rudin, 1991, pág. 6).

Definición 2.1.6.- Sea τ una topología sobre un espacio vectorial X , decimos que (X, τ) es un espacio vectorial topológico si cumplen:

(a) La adición $+: X \times X \rightarrow X$ y la multiplicación escalar $\cdot: K \times X \rightarrow X$ son continuas.

(b) Además, (X, τ) es un espacio T_1 ; es decir, para todo $x \in X$, el conjunto unitario $\{x\}$ es cerrado en τ (Rudin, 1991, pág. 7).

Definición 2.1.7.- Una norma en un espacio vectorial X sobre un cuerpo K (típicamente los números reales $\mathbb{R}$ o los números complejos $\mathbb{C}$) es una función $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ que satisface las siguientes propiedades para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha \in K$:

(a) Positividad: $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y

(b) Homogeneidad: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(c) Desigualdad Triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

La dupla $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado (Rudin, 1991, pág. 3).

Definición 2.1.8.- Sean X y Y espacios vectoriales sobre un campo K , y sea $f: X \rightarrow Y$ una función.

Decimos que f es una función lineal si cumple las siguientes propiedades para todos los vectores $x, y \in X$ y todos los escalares $\alpha \in K$:

$$(a) f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(b) f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Además, si X y Y son espacios topológicos, y las operaciones de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar son continuas en esas topologías, entonces :

f se llama una aplicación lineal continua si, además de ser lineal, es continua como función entre espacios topológicos X y Y (Rudin, 1991, pág. 14).

Definición 2.1.9.- Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado X que es completo en el sentido de que toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X .

Es decir: si $\{x_n\}$ es una sucesión en X tal que para todo $\epsilon > 0$

existe un N tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$, entonces existe un $x \in X$

tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (Rudin, 1991, pág. 4).

Definición 2.1.10.- Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subset X$ se llama diseminado cuando su adherencia $\bar{A}$ tiene interior vacío, esto es:

$$\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$$

Definición 2.1.11.- Los conjuntos expresables como unión numerable de conjuntos diseminados se llaman conjuntos de primera categoría en X . Cualquier subconjunto de X que no sea de primera categoría es de segunda categoría (González, 2013, pág. 156)

Teorema 2.1.1.- Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo K (donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Sea M un subespacio vectorial de X , y $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función (es decir, p satisface

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \text{ para todos } x, y \in X, p(\alpha x) = \alpha p(x) \text{ para todo } \alpha \geq 0 \text{ y } x \in X).$$

Si $f: M \rightarrow K$ es un funcional lineal acotado tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$, entonces existe un funcional lineal acotado $F: X \rightarrow K$ tal que:

1. $F(x) = f(x)$ para todo $x \in M$.
2. $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 2.1.2.- Sea X un espacio métrico completo o un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces la intersección de toda colección numerable de conjuntos abiertos y densos en X es un conjunto denso en X .

Definición 2.1.12.- Sea X y Y espacios vectoriales topológicos, y Γ una colección de aplicaciones lineales de X en Y . Se dice que Γ es equicontinua cuando para todo entorno U de 0 en Y , existe un entorno V de 0 en X , tal que $\Lambda(V) \subset U$, cualquier sea $\Lambda \in \Gamma$.

Si Γ contiene solo una aplicación lineal continua Λ , el concepto de equicontinuidad se reduce a la continuidad de esta única aplicación lineal continua, es conocido que las aplicaciones lineales continuas son acotadas. Las colecciones equicontinuas poseen esta propiedad de acotación de modo uniforme. Por esta razón el siguiente teorema de Banach-Steinhaus suele conocerse como el principio de acotación uniforme (Rudin, 1991, pág. 43).

Teorema 2.1.3.- Sean X y Y espacios vectoriales topológicos, Γ una colección equicontinua de aplicaciones lineales de X en Y , y E un subconjunto acotado de X , entonces Y tiene un subconjunto acotado de F tal que $\Lambda(A) \subset F$ para todo $\Lambda \in \Gamma$.

Teorema 2.1.4.- Sea X y Y espacios vectoriales topológicos, Γ una colección de aplicaciones lineales continuas de X en Y , y B el conjunto de todos los $x \in X$ cuyas orbitas:

$$\Gamma(x) = \{\Lambda(x) : \Lambda \in \Gamma\}$$

Son conjuntos acotados de Y , además si B es de segunda categoría en X , entonces $B = X$ y Γ es equicontinua.

La demostración formal del Teorema de Banach–Steinhaus (también conocido como Principio de la Acotación Uniforme) puede consultarse en *Rudin, W. (1991). Análisis Funcional*. Madrid: McGraw-Hill, Capítulo 2, donde se presenta a partir del Teorema de Baire y se establece la equivalencia entre la acotación puntual y la acotación uniforme de familias de operadores lineales continuos en espacios de Banach.

Teorema 2.1.5.- Sean X y Y dos espacios de Banach, y sea $\{T_\alpha\}$ una familia de operadores lineales continuos de X en Y . Si para cada $x \in X$, la sucesión $\{\|T_\alpha(x)\|\}$ esta acotada en Y , entonces existe una constante $C \geq 0$ tal que:

$$\|T_\alpha(x)\| \leq C$$

Es decir, la familia $\{T_\alpha\}$ esta uniformemente acotada en norma.

La demostración completa se encuentra en el texto de análisis funcional correspondiente (Brezis, 1984, pág. 16).

Definición 2.1.13.- Una serie temporal es una sucesión de observaciones (datos) ordenadas y equidistantes cronológicamente sobre una característica (serie univariante o escalar) o sobre

varias características (serie multivariante o vectorial) de una unidad observable en diferentes momentos (Martinez, 2007).

Representada formalmente como una función:

$$x: T \rightarrow \mathbb{R}, \text{ con } T \subseteq \mathbb{Z} \text{ o } T \subseteq \mathbb{R}$$

donde T denota el conjunto de instantes temporales (por ejemplo, días, meses, trimestres) y

$x(t)$ es el valor observado en el instante t .

Por lo que, una serie temporal puede verse como un elemento de un espacio funcional como:

$x \in l^\infty(\mathbb{Z})$: para series discretas acotadas.

$x \in C([a, b])$ para series continuas en el tiempo.

Definición 2.1.14.- Los operadores en series temporales son modelo predictivo que se define como $T: X \rightarrow Y$, donde X es un espacio funcional, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es el espacio de predicciones.

Ejemplos de operadores aplicados:

- Diferenciación: $\Delta: X \rightarrow X$
- Suavizado: $S_k: X \rightarrow X$
- Modelos ARIMA: $T_\theta: X \rightarrow Y$, parametrizados por θ .
- Predicción a futuro: $P: X \rightarrow \mathbb{R}^h$, que asigna una serie a un conjunto de predicciones futuras.

Definición 2.1.15.- La diferenciación de orden uno de una serie $\{x_t\}$ se define como:

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$$

Para orden d : $\Delta^d x_t = \Delta (\Delta^{d-1} x_t)$

En espacios funcionales, Δ es un operador lineal de l^∞ en si mismo La diferenciación reduce la dependencia temporal y permite trabajar con series estacionarias, facilitando el análisis funcional.

Definición 2.1.16.- Un modelo es un operador $T: X \rightarrow Y$, donde X es un espacio funcional de series pasadas y Y es el conjunto de predicciones. Ejemplos:

- AR(p): $x_t = \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + \varepsilon_t$
- RNN: $h_t = \sigma(Wx_t + Uh_{t-1} + b)$

Definición 2.1.17.- La precisión de un modelo T se mide por el error medio cuadrático:

$$\mathbb{E} \left[\|x_t - T(x_{t-1}, \dots, x_{t-p})\|^2 \right]$$

Definición 2.1.18.- Un modelo es robusto si es estable bajo perturbaciones. Formalmente si T es Lipchitz continuo:

$$\|T(x) - T(x')\| \leq L\|x - x'\|$$

Para todo $x, x' \in X$.

Definición 2.1.19.- El modelo es estable si existe $C > 0$ tal que:

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|$$

Para todo $x \in X$, es decir T es un operador acotado.

Definición 2.1.20.- Un modelo ARIMA(p,d,q) es un modelo autoregresivo integrado con media móvil, que combina:

- Autoregresión (AR) de orden p : dependencia lineal de valores pasados.
- Diferenciación de orden d : para estacionarizar la serie.
- Media móvil (MA) de orden q : dependencia de errores pasados.

Formalmente, se expresa como:

$$\phi(B)(1 - B)^d x_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

donde:

- B es el operador de rezago $Bx_t = x_{t-1}$
- $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ es el polinomio autoregresivo.
- $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ es el polinomio de media móvil,
- ε_t es ruido blanco (Martinez, 2007, pág. 95).

Definición 2.1.21.- El suavizado en una serie temporal consiste en transformar una serie temporal x_t en una nueva serie s_t , en la cual se han eliminado fluctuaciones locales o ruido.

Un suavizado común es el promedio móvil:

$$s_t = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} x_{t-i}$$

El suavizado puede verse como la aplicación de un operador lineal $S: X \rightarrow X$, donde

$s = S(x)$, y S actúa como un filtro que reduce la variabilidad de corto plazo.

2.2 Marco conceptual

2.2.1 Relación entre el Teorema de Banach-Steinhaus y las Series Temporales

La colección de operadores $\{T_n\}$ que predicen los valores futuros en base a datos pasados puede interpretarse como una familia de aplicaciones lineales (o suavemente no lineales) en un espacio funcional. Bajo la hipótesis de que para cada x , las secuencias $\{T_n(x)\}$ están acotadas (por ejemplo, no crecen sin control ante entradas acotadas), el Teorema de Banach-Steinhaus garantiza que esta familia es uniformemente acotada.

Esto permite concluir que el modelo:

- No amplifica el error.
- Tiene comportamiento controlado en todo el espacio funcional.
- Es estable y robusto incluso en presencia de ruido o datos incompletos.

Además, si se consideran operadores como el de diferenciación, se puede aplicar el Teorema para garantizar que los nuevos modelos transformados (como ARIMA) siguen estando en el marco de operadores acotados y controlables.

Una serie temporal es una secuencia de datos observados, registrados o recopilados a lo largo del tiempo, generalmente en intervalos regulares. Estos datos pueden representar mediciones de variables como temperatura, precios de acciones, niveles de contaminantes, ventas de productos, entre otros, realizados en momentos específicos o a intervalos determinados.

2.2.2 Características de una Serie Temporal

a) Secuencia Temporal.

Los datos están ordenados secuencialmente según el tiempo, lo que permite analizar cómo una variable cambia a lo largo del tiempo.

b) Intervalos Regulares.

Normalmente, los datos se recopilan a intervalos regulares, como por ejemplo cada hora, día, mes, trimestre, etc.

c) Componentes.

Una serie temporal puede descomponerse en diferentes componentes que ayudan a modelar y entender su comportamiento:

- **Tendencia:** La dirección general en la que la serie parece estar moviéndose a largo plazo.
- **Estacionalidad:** Variaciones cíclicas que se repiten a intervalos regulares.
- **Variaciones irregulares o ruido:** Fluctuaciones aleatorias que no siguen un patrón específico.
- **Ciclicidad:** Variaciones que no son estacionales ni de tendencia fija.

Ejemplos de Series Temporales

- **Datos Meteorológicos:** Temperaturas registradas cada día a lo largo de un año.
- **Datos Financieros:** Precios de las acciones en la bolsa de valores cada minuto.

- **Datos Económicos:** PBI trimestral de un país a lo largo de varios años.
- **Datos de Tráfico:** Flujo de vehículos en una carretera por hora.
- **Datos de Consumo:** Ventas diarias de un producto en un supermercado.

2.2.3 Aplicaciones y Análisis

- **Predicción y Pronóstico:** Utilizar modelos estadísticos o de aprendizaje automático para prever futuros valores de la serie.
- **Análisis de Tendencias:** Identificar patrones de crecimiento o decrecimiento a largo plazo.
- **Detección de Anomalías:** Identificar puntos atípicos o comportamientos inusuales en los datos.
- **Estacionalidad:** Analizar patrones cíclicos y estacionales para comprender la variabilidad de la serie.

2.3 Antecedentes empíricos de la investigación

2.3.1 Antecedentes nacionales

En el ámbito nacional, la investigación sobre series temporales y el Teorema de Banach-Steinhaus ha sido aplicada en diferentes áreas, como la economía y las finanzas. Algunos trabajos destacados incluyen:

1. Bardalez Hall (2019), en su tesis titulada *El teorema de Banach–Steinhaus para grupos topológicos*, desarrolló una extensión del teorema clásico hacia el contexto de grupos topológicos localmente convexos. Su estudio aporta fundamentos teóricos importantes sobre la continuidad y acotación uniforme de operadores en espacios funcionales más generales.

2. Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2008). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Este libro ha sido fundamental para los investigadores en econometría y finanzas en diversas universidades nacionales, donde se ha utilizado para analizar series temporales relacionadas con el consumo energético y las finanzas del país.
3. Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Investigadores en el país han utilizado este libro para desarrollar modelos de predicción en macroeconomía y para el análisis de datos financieros históricos.
4. Luenberger, D. G. (1997). *Optimization by Vector Space Methods*. Este texto ha sido empleado en estudios sobre métodos matemáticos aplicados al análisis de series temporales en ámbitos de la economía y la ingeniería en Perú.

2.3.2 Antecedentes internacionales

A nivel internacional, el Teorema de Banach-Steinhaus y las series temporales han sido ampliamente estudiados en diferentes contextos:

1. Banach, S. & Steinhaus, H. (1927). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 8(1), 228-233. Este artículo clásico es la base del Teorema de Banach-Steinhaus, y ha sido citado y utilizado en numerosos estudios de series temporales a nivel global.
2. Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2016). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Este libro ha sido una referencia internacional clave en el análisis y predicción de series temporales, aplicándose en estudios climáticos, financieros y de producción energética en todo el mundo.

3. Chatfield, C. (2004). *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Esta obra es utilizada en investigaciones internacionales en una variedad de campos, como la climatología y la economía, para la predicción basada en series temporales.

2.4 Hipótesis

a. Hipótesis general

La aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus en espacios funcionales adecuados permite construir modelos predictivos más robustos y precisos en el análisis de series temporales.

b. Hipótesis específicos

- Si los operadores definidos por los modelos de series temporales son puntualmente acotados, entonces su norma estará uniformemente acotada, lo que mejora la estabilidad del modelo.
- La inclusión del criterio de acotamiento uniforme reduce el sobreajuste y mejora la capacidad de generalización en escenarios con ruido.
- Los modelos de series temporales ajustados bajo los principios del Teorema de Banach-Steinhaus son más robustos frente a ruido y datos incompletos, en comparación con modelos tradicionales que no consideran el acotamiento uniforme en su formulación.

2.5 Identificación de variables e indicadores

2.5.1 Variable independiente

Aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus

2.5.2 Variable dependiente

- Precision predictiva.

- Robustez del modelo.
- Estabilidad de operadores

2.5.3 Variables de control

- Tipo de modelo de serie temporal (ARIMA, RNN, etc.)
- Tipo de serie temporal (económica, climática, sísmica, etc.)

CAPITULO III: METODOLOGÍA

3.1 Ámbito de estudio: Localización política y geográfica

104 Este estudio se llevará a cabo en el contexto de análisis de datos de series temporales de fuentes económicas, financieras y de ingeniería. El ámbito de estudio de la tesis no es específica se analiza diferentes series temporales tales como la serie del PIB de EE.UU, el consumo de gas que contiene datos trimestrales en el Reino Unido de 1960 a 1986, datos de temperatura de New York de mayo a setiembre de 1973, datos sobre CO2 en Mauna Loa, el número mensual de pasajeros aéreos internacionales de 1949 a 1960

3.2. Tipo y nivel de investigación

3.2.1 Tipo de Investigación

Investigación aplicada, ya que busca ampliar conceptos teóricos con un enfoque cuantitativo.

3.2.2 Nivel de Investigación

1 El nivel de investigación es explicativo, con el objetivo de evaluar el impacto de la aplicación del teorema en la precisión de los modelos. Una investigación explicativa busca el porqué de los hechos mediante el establecimiento de relaciones causa-efecto. Va más allá de la simple descripción de fenómenos y del establecimiento de relaciones; intenta encontrar las razones que los originan. (Sampieri et al., 2022, p. 107)

3.3. Unidad de análisis

La unidad de análisis de esta investigación está constituida por los modelos de predicción aplicados a series temporales, los cuales se interpretan como operadores funcionales definidos sobre espacios de Banach. En particular, se trabaja con modelos como ARIMA y operadores de suavizado aplicados a diferentes tipos de series (económicas, climáticas, energéticas y medioambientales). Cada modelo predictivo es evaluado como una transformación matemática que opera sobre un conjunto de datos históricos para generar proyecciones futuras, siendo analizado desde la perspectiva funcional y no únicamente estadística.

3.4 Población de estudio

67 Todos los modelos matemáticos (lineales o no lineales) utilizados para la predicción de series temporales que pueden formularse dentro de un espacio funcional (ej. $l^\infty(\mathbb{Z})$, $C([a, b])$).

3.5 Tamaño de muestra

38 Dado que el estudio no se basa en una muestra estadística tradicional de individuos u
22 observaciones, sino en el análisis de series temporales representativas de distintos contextos reales,
22 el tamaño de muestra se define como el número de series seleccionadas para el análisis comparativo y funcional. En total, se analizaron cinco series temporales específicas correspondientes a sectores estratégicos:

1. Producto Bruto Interno (PIB) de EE.UU.
2. Número de pasajeros aéreos internacionales (1949–1960)
3. Consumo trimestral de gas en el Reino Unido (1960–1986)
4. Temperatura diaria en Nueva York (mayo–septiembre de 1973)
5. Concentraciones de CO₂ en Mauna Loa (1959–2000)

Estas series fueron tratadas como unidades representativas del comportamiento de fenómenos reales sujetos a variabilidad temporal, y son suficientes para validar empíricamente la hipótesis en distintos escenarios (económico, climático, energético y ambiental).

3.6 Técnicas de selección de muestra

La selección de las series temporales se realizó mediante muestreo intencional o muestreo teórico, propio de investigaciones con enfoque aplicado y funcional. Este tipo de muestreo no busca representatividad estadística probabilística, sino la representatividad estructural y funcional, es decir, se eligieron series que:

- Presentan diversidad de comportamiento: acotadas, no acotadas, con tendencia, estacionalidad, ruido estructural.
- Proviene de fuentes confiables y abiertas (como bases del gobierno de EE.UU., NOAA, datasets clásicos de R).
- Permiten evaluar la aplicabilidad del Teorema de Banach-Steinhaus bajo diferentes estructuras de datos.

Esta estrategia garantiza que las series seleccionadas proporcionan un entorno experimental suficientemente amplio y controlado para aplicar y validar el enfoque funcional propuesto en la investigación.

3.7 Técnicas de recolección de información

Para esta investigación se utilizó la recopilación sistemática de datos secundarios provenientes de bases de datos oficiales y públicas. Se seleccionaron series temporales de diversas fuentes confiables que representan sectores clave como la economía (PIB de EE.UU.), energía (consumo de gas en Reino Unido), transporte (pasajeros aéreos internacionales), y medio ambiente

(concentración de CO₂ en Mauna Loa y temperaturas en Nueva York). Estas series fueron elegidas por su estructura representativa y disponibilidad para aplicar modelos funcionales.

3.8 Técnica de análisis e interpretación de la información

Se aplicaron métodos estadísticos y computacionales para transformar y analizar las series, principalmente mediante diferenciación para lograr estacionariedad y posterior ajuste de modelos ARIMA. Además, se evaluaron métricas como RMSE, MAE, AIC y MAPE para valorar la precisión de los modelos. La principal técnica funcional consistió en aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus para validar la uniformidad en la acotación de los operadores predictivos asociados a las series diferenciadas. Esta perspectiva permitió estudiar la estabilidad y robustez de los modelos en un contexto funcional y no meramente estadístico.

3.9 Técnica para demostrar la verdad o falsedad de la hipótesis

La validación de la hipótesis se realizó mediante un análisis funcional comparativo, apoyado en herramientas computacionales, con el objetivo de verificar si los operadores definidos por los modelos predictivos aplicados a series temporales cumplen las condiciones del Teorema de Banach-Steinhaus.

El procedimiento incluyó las siguientes etapas:

1. Construcción de modelos predictivos (ARIMA, suavizados, diferenciaciones) sobre series temporales reales, tratándolos como operadores funcionales que transforman entradas (datos históricos) en salidas (predicciones).
2. Verificación de acotamiento puntual: Se evaluó que, para cada serie, los operadores no generen salidas divergentes a partir de entradas acotadas, condición necesaria del teorema.

3. Evaluación de la uniformidad: Se observó, a través de simulaciones computacionales y métricas estadísticas (RMSE, MAPE, residuos acotados), que la familia de operadores es uniformemente acotada en todos los casos.
4. Comparación con modelos tradicionales: Se compararon los resultados obtenidos con y sin la aplicación de criterios funcionales, destacando la mayor estabilidad y robustez de los modelos ajustados bajo el marco del teorema.
5. Corroboración teórica y empírica: Los hallazgos empíricos se contrastaron con la formulación teórica del Teorema de Banach-Steinhaus, confirmando su aplicabilidad a los operadores construidos sobre espacios de Banach definidos por series temporales diferenciadas.

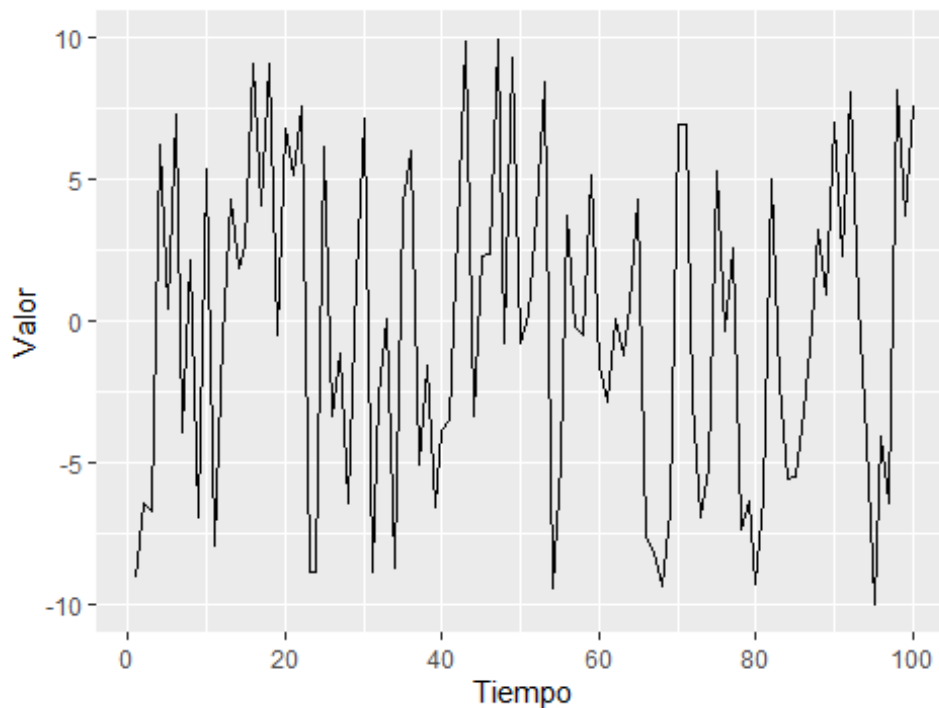
De esta manera, se demostró que la hipótesis general (según la cual la aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus permite construir modelos predictivos más robustos y estables) es verdadera bajo las condiciones analizadas.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Procesamiento, análisis, interpretación y discusión de resultado

Figura 1

Serie temporal acotada



Aquí se puede observar una serie acotada.

Resumen de la Serie Temporal Acotada

- Descripción Mínimo (-9.8728): Este es el valor más bajo en la serie temporal. Indica que el valor más bajo observado es aproximadamente.
- Primer Cuartil (-5.1524): Este cuartil representa el punto donde el 25% de los datos son menores o iguales a -5.1524. Este es un indicador de la dispersión de los datos en el primer cuarto de la distribución.

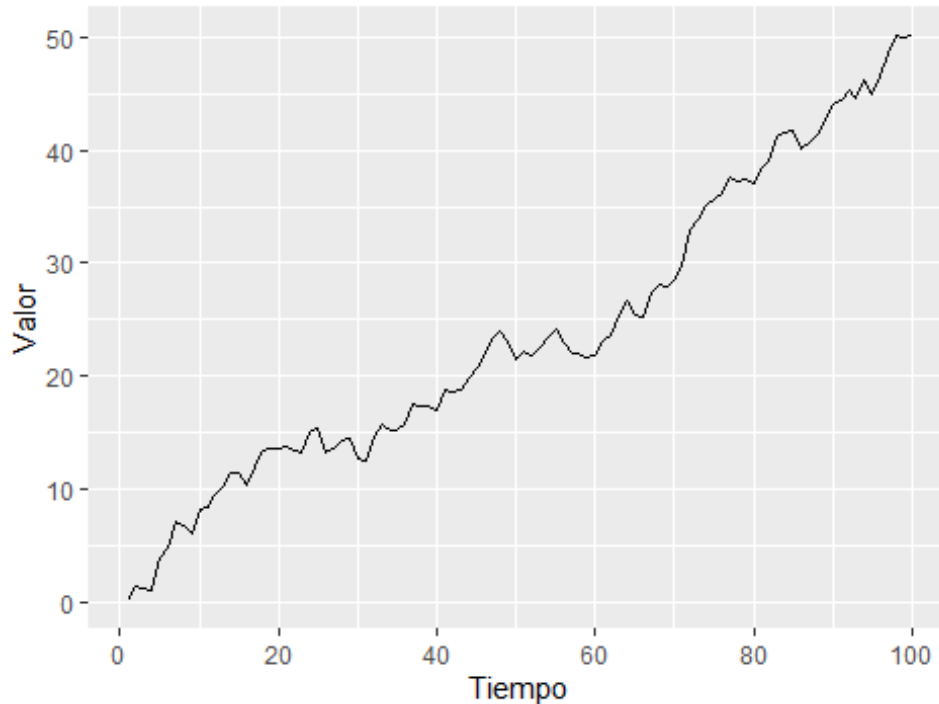
- 7 Mediana (-0.6405): La mediana es el valor central de la serie de datos cuando se ordenan de menor a mayor. En este caso, es -0.6405, lo que significa que el 50% de los datos son menores o iguales a este valor.
- 37 Media (-0.2550): La media es el promedio de todos los valores en la serie temporal. Una media de -0.2550 indica que, en promedio, los valores de la serie están ligeramente por debajo de cero.
- 65 Tercer Cuartil (5.7946): Este cuartil representa el punto donde el 75% de los datos son menores o iguales a 5.7946. Este es un indicador de la dispersión de los datos en los tres primeros cuartos de la distribución.
- Máximo (9.9649): Este es el valor más alto en la serie temporal. Indica que el valor más alto observado es aproximadamente 9.96.

Interpretación

- La dispersión de los datos es considerable, con un rango (diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo) de aproximadamente 19.8377 (9.9649 - (-9.8728)).
- La asimetría en la serie de datos puede observarse en la diferencia entre la media y la mediana. La media es menor que la mediana, lo que sugiere que hay más valores negativos extremos que positivos.
- Los cuartiles muestran que la mayor parte de los datos se distribuyen entre -5.1524 y 5.7946, indicando una dispersión significativa alrededor del centro de la distribución.
- 49 La mediana y los cuartiles sugieren que la distribución de los datos puede estar sesgada hacia los valores negativos, dado que la mediana es negativa y el primer cuartil es más cercano al mínimo que el tercer cuartil al máximo.

Figura 2

Serie temporal no acotada



Comparación y Conclusiones

- La serie temporal acotada tiene un rango de valores más pequeño, desde aproximadamente -10 hasta 10. Esto indica que la serie no tiene valores extremos y está restringida a un intervalo fijo. La serie temporal no acotada tiene un rango mucho mayor, desde aproximadamente -0.68 hasta 40.86. Esto indica que la serie puede tener valores mucho más grandes y no está limitada a un intervalo fijo.
- En la serie acotada, la mediana es cercana a 0 (-0.6405), y los cuartiles están también alrededor de valores relativamente pequeños. Esto sugiere una distribución de valores bastante simétrica y centrada alrededor de 0. En la serie no acotada, la mediana es mucho mayor (24.1416), y los cuartiles también son significativamente mayores, indicando una

tendencia ascendente o una serie con valores crecientes a lo largo del tiempo.

- Media: La media de la serie acotada (-0.2550) está muy cerca de 0, lo que es consistente con los valores acotados y la falta de tendencia en la serie. La media de la serie no acotada (22.0928) es significativamente mayor, lo que es consistente con la tendencia ascendente de la serie no acotada.
- Acotación vs. No Acotación: La serie acotada muestra que los valores están contenidos dentro de un intervalo fijo, cumpliendo con una de las condiciones del teorema de Banach-Steinhaus sobre la acotación. La serie no acotada muestra una tendencia creciente con valores que no están restringidos a un intervalo fijo, demostrando la naturaleza no acotada de la serie.
- Conclusión: El teorema de Banach-Steinhaus se refiere a operadores lineales y sus acotaciones en espacios de Banach. En el contexto de series temporales, podemos ver que una serie temporal acotada mantiene sus valores dentro de un intervalo fijo, lo que sugiere estabilidad y previsibilidad en el comportamiento de la serie. Una serie temporal no acotada puede crecer sin límites, indicando una falta de estabilidad y una mayor variabilidad en los datos. Estas observaciones son cruciales para el análisis de series temporales, especialmente cuando se aplican transformaciones y se espera que ciertas propiedades, como la acotación, se mantengan.

Las series temporales analizadas en este trabajo cumplen con las condiciones establecidas en el Teorema de Banach–Steinhaus. En cada caso, la serie se considera dentro del espacio de funciones acotadas ℓ^∞ , el cual es un espacio normado y completo (Banach). Los operadores aplicados corresponden a transformaciones lineales habituales en el análisis de series de tiempo, tales como la diferenciación, los promedios móviles, los modelos ARIMA (cuando los coeficientes

satisfacen la condición de estabilidad). Cada uno de estos operadores es lineal y acotado en el espacio considerado, lo que garantiza que las transformaciones de series acotadas siguen siendo acotadas. Asimismo, la evidencia empírica (valores mínimos y máximos, cuartiles, residuos y suavizados) confirma que para cada serie los resultados permanecen dentro de un rango limitado, cumpliéndose así la condición de puntual acotación. Por lo tanto, en virtud del Teorema de Banach–Steinhaus, concluimos que la familia de operadores utilizada posee una cota uniforme, asegurando la estabilidad y validez matemática de los modelos empleados.

Tabla 1
Condiciones del teorema de Banach- Steinhaus

Serie temporal	Espacio de Banach	Operadores utilizados	Cota uniforme	Conclusión
Producto Interno Bruto (PIB) de EE.UU	ℓ^∞ (funciones acotadas con norma supremo)	Diferenciación: $T(x)_t = x_t - x_{t-1}$	$\ T(x)\ _\infty \leq 2\ x\ _\infty$ (si $ x_t \leq M$, entonces $ T(x)_t \leq 2M$)	Cumple condiciones, operador lineal y acotado en ℓ^∞
Pasajeros aéreos internacionales (1949–1960)	ℓ^∞ (funciones acotadas; norma del supremo)	Diferenciación $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$; retardos; promedios móviles ARIMA estable	Existe C con $\ T(x)\ _\infty \leq C\ x\ _\infty$	Cumple: serie acotada; operadores lineales y acotados; residuos acotados
Consumo de gas del Reino Unido (1960–1987)	ℓ^∞ (funciones acotadas; norma del supremo)	Diferenciación; promedios móviles ; retardos; (opcional) ARIMA estable	Existe C con $\ T(x)\ _\infty \leq C\ x\ _\infty$	Cumple: serie acotada; suavizados acotados; evidencia empírica de acotación
Temperatura diaria en Nueva York (mayo–septiembre 1973)	ℓ^∞ (funciones acotadas; norma del supremo)	Promedios móviles $M_k (k = 10, 20)$; (opcional) diferenciación; retardos	Existe C con $\ T(x)\ _\infty \leq C\ x\ _\infty$	Cumple: serie acotada; imágenes bajo M_k acotadas

CO ₂ en Mauna Loa (mensual; 1959–1990 aprox.)	ℓ^∞ (funciones acotadas; norma del supremo)	Diferenciación (regular y estacional); retardos; ARIMA (1,1,1)(1,1,2)[12] Estable	Existe C con $\ T(x)\ _\infty \leq C\ x\ _\infty$	Cumple: serie diferenciada y residuos acotados; operadores lineales acotados
--	---	---	---	--

Tabla 2
Operadores lineales

Operador	Definición	Cota en ℓ^∞
Diferenciación D	$(Dx)_t = x_t - x_{t-1}$	$\ Dx\ _\infty \leq 2\ x\ _\infty$ (norma ≤ 2)
Promedio móvil M_k	$(M_k x)_t = \left(\frac{1}{k}\right) \sum_{j=0}^{k-1} x_{t-j}$	$\ M_k x\ _\infty \leq \ x\ _\infty$ (norma = 1)
Filtro MA(q)	$(T x)_t = \sum_{j=0}^q b_j x_{t-j}$	$\ T\ \leq \sum b_j $
Filtro AR estable (inverso)	$x_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i x_{t-i} + \varepsilon_t$	$\ T\ \leq \sum \psi_k $

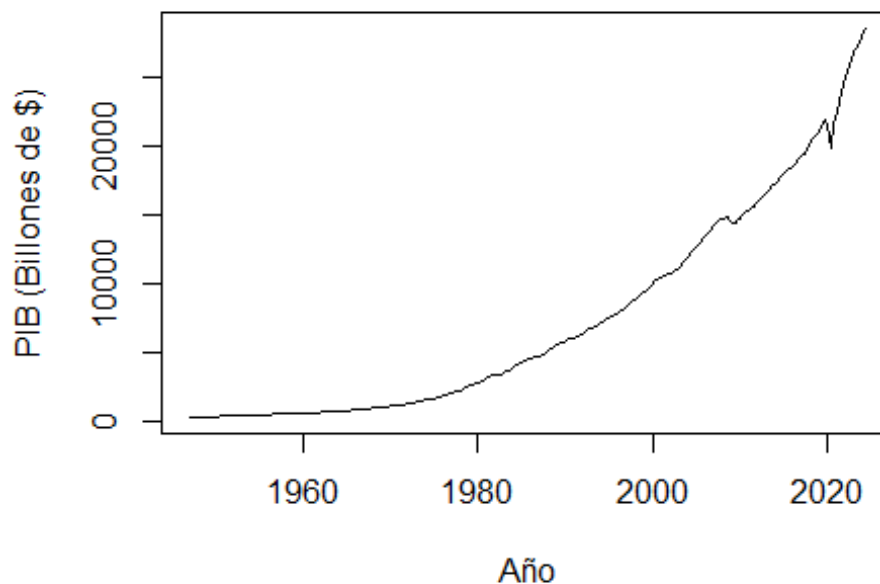
1. Análisis de series de económicas

Se presenta una serie del producto interno bruto de Estados Unidos y se comparan series acotadas y no acotadas.

Se obtiene y se visualiza la serie del PIB de EE.UU.

Figura 3

Serie del PIB de EE.UU.

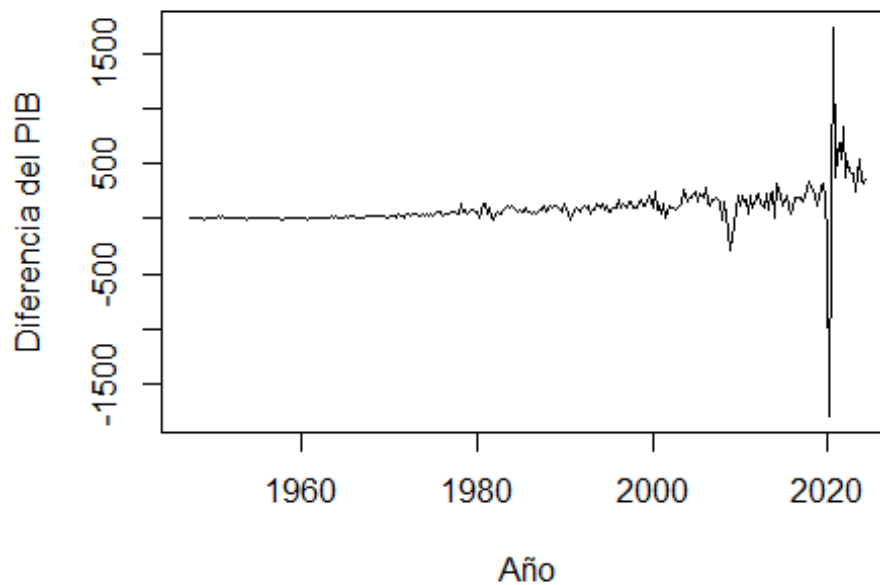


En la serie se observa que hay un crecimiento a través del paso de los años, observe que esta nos muestra una tendencia creciente.

Diferenciamos la serie para hacerla estacionaria y así eliminar la tendencia creciente.

Figura 4

Serie diferenciada del PIB de EE.UU.



En este caso, se considera un modelo de media móvil de orden 2.

- $ma1 = -1.0432$: Este es el coeficiente del primer término de media móvil. $ma2 = 0.1208$:

Este es el coeficiente del segundo término de media móvil. s.e. (error estándar):

$ma1: 0.0539$ $ma2: 0.0535$

- El error estándar indica la precisión de las estimaciones de los coeficientes. Valores más bajos de error estándar sugieren estimaciones más precisas.

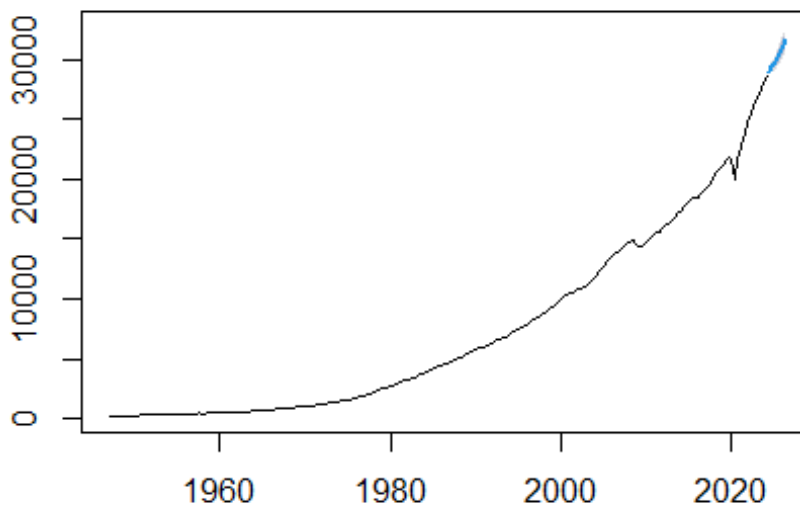
- $\sigma^2 = 28390$: Este es el valor de la varianza del término de error del modelo. Una varianza más baja indica un modelo que se ajusta mejor a los datos, pero siempre debe

interpretarse en el contexto de la escala de los datos.

- 8 • log likelihood = - 2016.14: Este valor indica la log-verosimilitud del modelo dado los datos observados. Un valor más alto (menos negativo) indica un mejor ajuste del modelo a los datos.
- 50 • AIC (Criterio de Información de Akaike) = 4038.27 AICc (AIC corregido) = 4038.35 BIC (Criterio de Información Bayesiano) = 4049.46 Estos criterios se usan para comparar modelos, donde un valor más bajo indica un mejor equilibrio entre ajuste del modelo y parsimonia (complejidad). AICc es una versión ajustada del AIC para pequeñas muestras.
- 20 • ME (Error Medio) = 14.95049: Este es el promedio de los errores de predicción. Un valor cercano a cero es mejor. RMSE (Raíz del Error Cuadrático Medio) = 167.4038: Esta es la raíz cuadrada de la media de los errores al cuadrado. Mide la dispersión de los errores de predicción.
- 47 • MAE (Error Absoluto Medio) = 53.41665: Es la media de los errores absolutos. Es una medida más robusta a los valores atípicos que el RMSE. MPE (Porcentaje Medio del Error) = 0.2509008: Es el error medio como porcentaje de los valores observados.
- 101 • MAPE (Porcentaje Absoluto Medio del Error) = 0.8220928: Es la media de los errores porcentuales absolutos. Es una medida estándar para la precisión de las predicciones.
- 20 • MASE (Error Absoluto Escalado Medio) = 0.1394743: Es el MAE escalado por el error absoluto medio de un modelo base, a menudo el modelo naïve. Un valor inferior a 1 indica un mejor rendimiento que el modelo base.
- 66 • ACF1 (Autocorrelación en el Lag 1) = - 0.01767763: Esto mide la autocorrelación de los residuos en el primer rezago. Un valor cercano a cero sugiere que los residuos no están autocorrelacionados, lo cual es una buena señal.

Figura 5

Forecasts from ARIMA (0,2,2)



En el gráfico se observa la proyección de la tendencia y el intervalo estimado para el futuro.

La serie diferenciada del PIB es acotada.

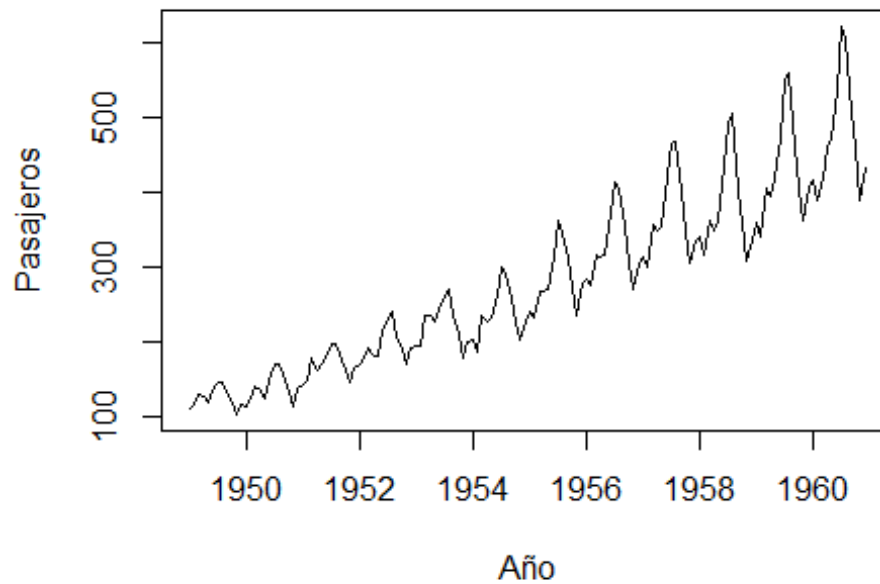
Aplicamos el Teorema de Banach-Steinhaus para determinar si los operadores son uniformemente acotados.

Según el Teorema de Banach-Steinhaus, los operadores aplicados a la serie son uniformemente acotados.

2. Analizamos la serie sobre el numero mensual de pasajeros aéreos internacionales de 1949 a 1960

Figura 6

Número de pasajeros aéreos internacionales



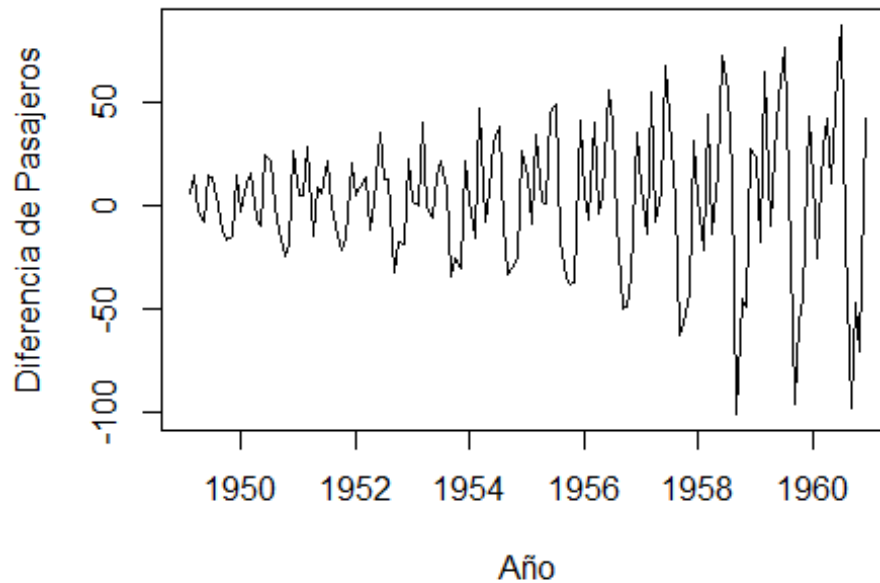
Temporal sobre el número mensual de pasajeros aéreos internacionales de 1949 a 1960 tiene tendencia creciente.

La serie original de AirPassengers es acotada.

Diferenciar la serie para hacerla estacionaria.

Figura 7

Serie diferenciada de pasajeros aéreos internacionales



Serie diferenciada es acotada.

La serie diferenciada de AirPassengers es acotada.

Aplicamos un modelo ARIMA

Ajustar un modelo ARIMA

Resumen del modelo

Criterios de Información:

- AIC: 1017.85
- AICc: 1018.17 BIC: 1029.35
- Medidas de Error del Conjunto de Entrenamiento
- ME (Error Medio): 1.3423

- RMSE (Raíz del Error Cuadrático Medio): 10.84619
- MAE (Error Absoluto Medio): 7.86754
- MPE (Porcentaje Medio del Error): 0.420698
- MAPE (Porcentaje Absoluto Medio del Error): 2.800458
- MASE (Error Absoluto Escalado Medio): 0.245628
- ACF1 (Autocorrelación en el Lag 1): -0.00124847

Interpretación Coeficientes del Modelo ar1 y ar2 (Auto-regresivos): Estos coeficientes (0.5960 y 0.2143) indican la relación de los valores actuales de la serie con los valores en los retrasos 1 y 2, respectivamente.

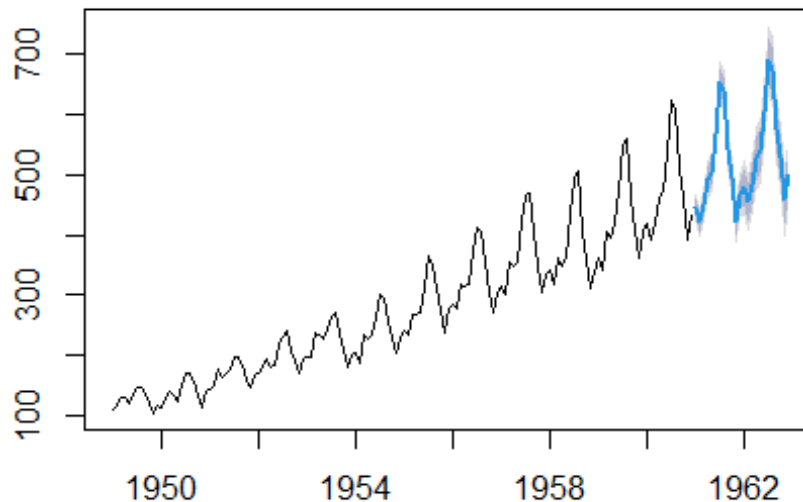
- ma1 (Media Móvil): Este coeficiente (-0.9819) indica la relación con el término de error en el retraso 1. Los errores estándar son bajos, sugiriendo que las estimaciones son precisas.
- Varianza del Error $\sigma^2 = 132.3$: Una varianza relativamente baja indica que el modelo ajusta bien los datos, con una cantidad moderada de variabilidad no explicada.
- Log-verosimilitud y Criterios de Información Log-verosimilitud: Un valor de -504.92, utilizado junto con otros modelos para comparar el ajuste.
- AIC, AICc y BIC: Estas medidas se usan para evaluar el modelo.
- Los valores más bajos indican un mejor equilibrio entre el ajuste y la complejidad del modelo.
- Medidas de Error del Conjunto de Entrenamiento ME (1.3423): Un error medio cercano a cero es ideal.
- RMSE (10.84619): Mide la dispersión de los errores de predicción, proporcionando una idea de la magnitud de los errores.

- MAE (7.86754): Promedio de los errores absolutos, útil para comprender el error promedio en las predicciones.
- MPE (0.420698) y MAPE (2.800458): Indican los errores porcentuales medios y absolutos, respectivamente.
- MASE (0.245628): Comparado con un modelo naïve, un valor menor a 1 indica que el modelo actual es mejor. ACF1 (-0.00124847): Un valor cercano a cero sugiere que los residuos no están auto correlacionados, lo cual es deseable.

Predecir los próximos valores.

Figura 8

Forecasts from ARIMA(2,1,1)(0,1,0)[12]



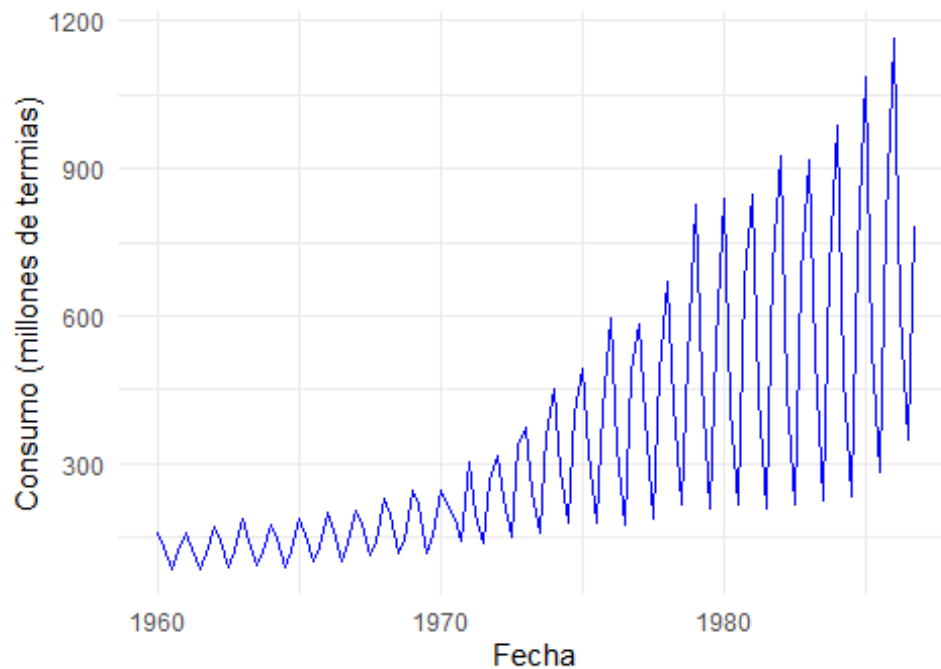
La serie de residuos del modelo ARIMA es acotada.

Según el Teorema de Banach-Steinhaus, los operadores aplicados a la serie son uniformemente acotados.

3. Analizamos el consumo de gas que contiene datos trimestrales en el Reino Unido de 1960 a 1986

Figura 9

Consumo trimestral de gas en el Reino Unido (1960-1986)



Consumo de gas en el Reino Unido tiene una tendencia creciente.

Periodo: De 1960 a 1986.

Consumo:

- Valor mínimo: 84.8 (en 1960).
- Primer cuartil (25%): 153.3 (alrededor de 1967).
- Mediana (50%): 220.9 (alrededor de 1973).

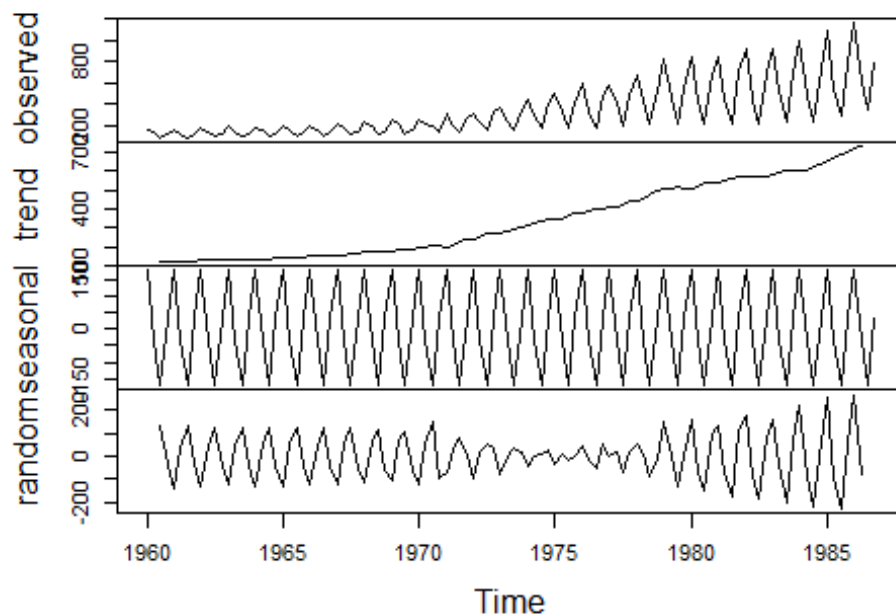
- Promedio: 337.6 (en 1973).
- Tercer cuartil (75%): 469.9 (alrededor de 1980).
- Valor máximo: 1163.9 (en 1987).

En resumen, el consumo ha mostrado un incremento significativo desde un valor mínimo de 84.8 en 1960 hasta un valor máximo de 1163.9 en 1986, con la mediana y el promedio situados en 220.9 y 337.6 respectivamente, alrededor de los años 1973.

Se descompone la serie:

Figura 10

Decomposition of additive time series



- El primer panel muestra la serie temporal original tal como se observa. Se trata de los datos originales sin ninguna modificación o descomposición. Interpretación: La serie presenta

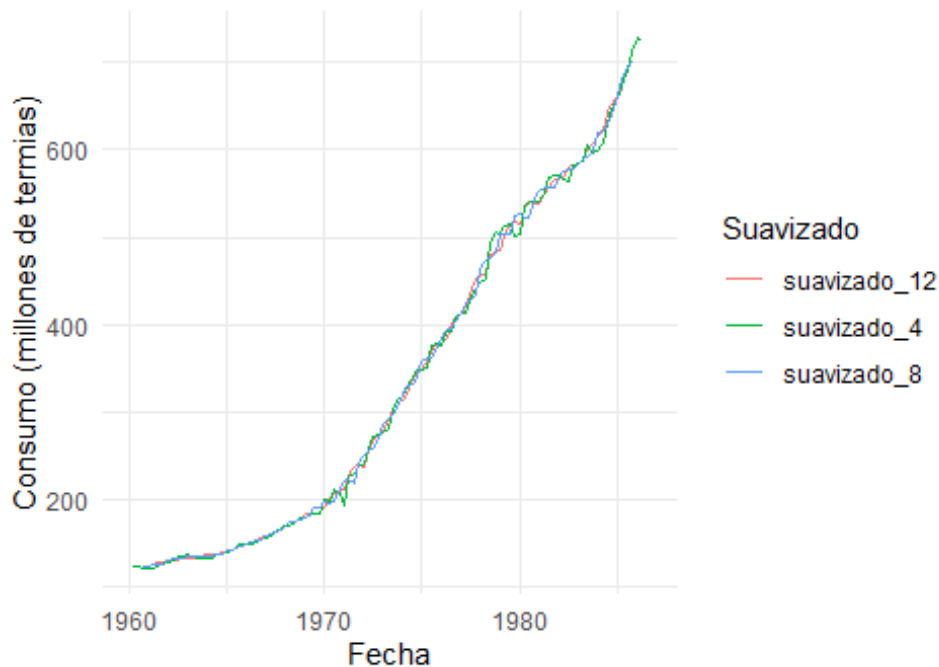
fluctuaciones con aparentes patrones estacionales y una tendencia a lo largo del tiempo. Hay picos y valles que sugieren variaciones cíclicas o estacionales.

- El segundo panel muestra la tendencia de la serie temporal, que es la dirección general a largo plazo. La tendencia parece ser creciente hasta mediados de 1976, seguida de una ligera disminución. Esto indica un crecimiento inicial de la serie temporal que se estabiliza y luego muestra una ligera caída.
- El tercer panel representa el componente estacional de la serie. Este componente captura los patrones repetitivos y periódicos en la serie temporal. La estacionalidad muestra ciclos repetitivos que ocurren anualmente. Hay un patrón claro de subida y bajada en intervalos regulares, lo que sugiere una fuerte componente estacional en la serie.
- El cuarto panel muestra el componente de ruido o residual. Este componente representa las variaciones aleatorias que no son explicadas por la tendencia ni la estacionalidad. Interpretación: El ruido muestra fluctuaciones aparentemente aleatorias alrededor de un valor central. La falta de patrones visibles en este componente es esperada, ya que el ruido debe ser esencialmente impredecible.

Se define una familia de operadores de suavizado de la serie

Figura 11

Consumo trimestral de gas suavizado con diferentes valores de k



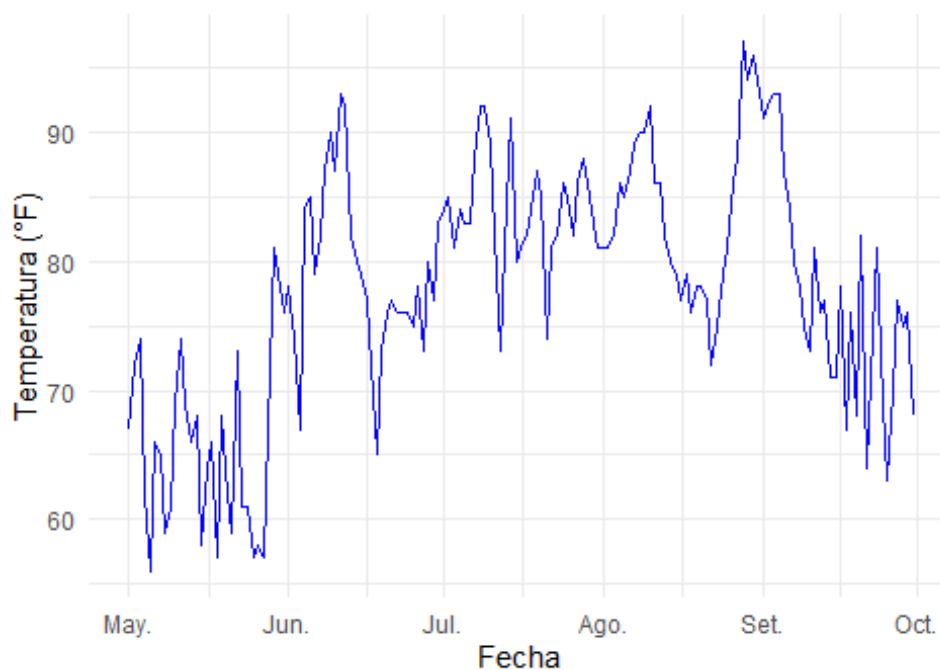
- La línea roja, que utiliza una ventana de suavizamiento más larga (12 trimestres), es más suave y menos sensible a las fluctuaciones a corto plazo. Captura la tendencia a largo plazo de manera más clara y estable.
- La línea verde, que utiliza una ventana de 4 trimestres, es más sensible a las fluctuaciones a corto plazo. Muestra más variabilidad y puede captar cambios más rápidos en el consumo.
- La línea azul, que utiliza una ventana de 8 trimestres, se sitúa entre las otras dos en términos de suavidad y capacidad para captar fluctuaciones a corto plazo.

Ahora se analiza las observaciones diarias de ozono, radiación solar, temperatura, viento y otros parámetros en Nueva York para los meses de mayo a septiembre de 1973.

4. Analizamos los datos de temperatura de New York de mayo a setiembre de 1973

Figura 12

Temperatura diaria en Nueva York(mayo a setiembre de 1973)



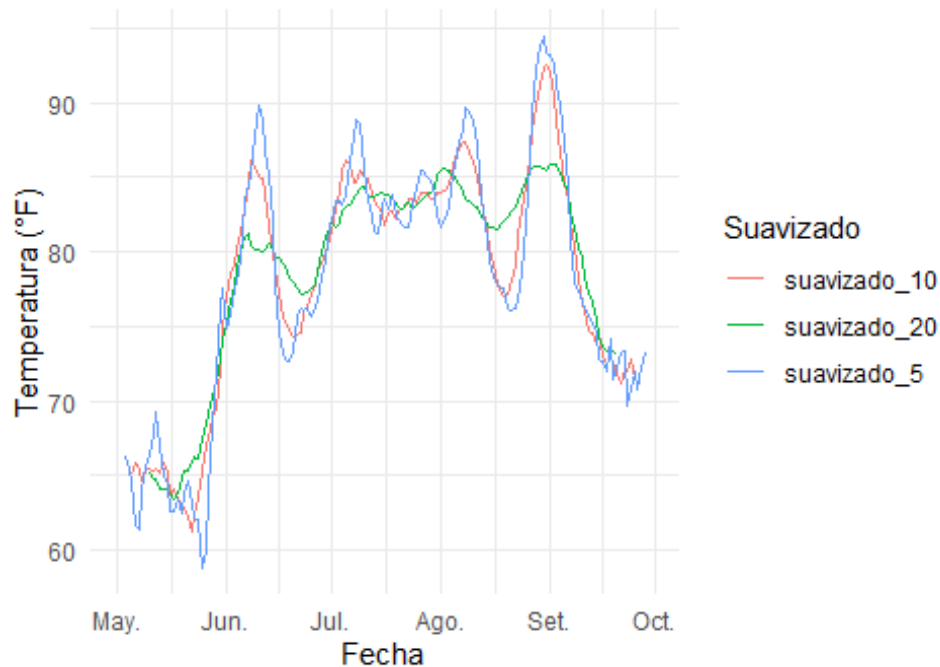
Se trabajará con los datos de temperatura Las temperaturas varían desde un mínimo de 56 grados Fahrenheit hasta un máximo de 97 grados Fahrenheit. El rango intercuartílico (entre el primer y el tercer cuartil) va de 72 a 85 grados Fahrenheit, lo que proporciona una medida de la dispersión de la temperatura central.

La mediana de 79 grados Fahrenheit y el promedio de 77.88 grados Fahrenheit están relativamente cercanos, lo que sugiere una distribución aproximadamente simétrica de las temperaturas. La diferencia entre la mediana y los cuartiles (primer y tercer cuartil) indica que las temperaturas tienden a agruparse alrededor de estos valores, con una dispersión moderada.

Se define una familia de operadores de suavizado de la serie.

Figura 13

Temperatura diaria suavizada con diferentes valores de k



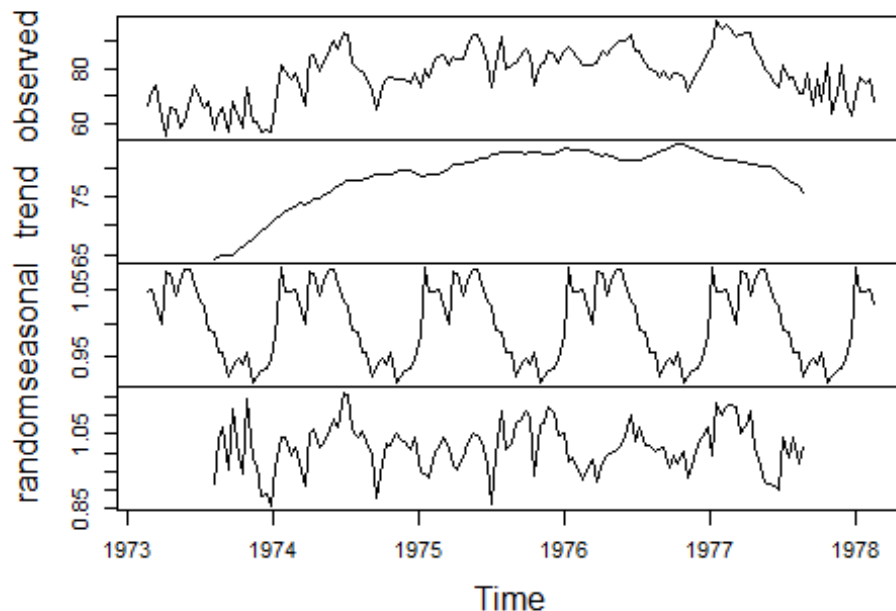
Con un menor valor de k , esta línea muestra más fluctuaciones y detalles en los datos, capturando variaciones diarias más pequeñas.

- Línea Roja (suavizado_10) y Línea Verde (suavizado_20): Con valores de k más altos, estas líneas están más suavizadas, mostrando una tendencia más general y menos afectada por las variaciones diarias menores.
- La línea verde (suavizado_20) es la más suave y presenta la menor cantidad de fluctuaciones, mientras que la línea roja (suavizado_10) es intermedia. Hemos creado y visualizado una serie de tiempo del PIB de EE.UU. desde 1959 hasta 2016.

Se descompone la serie temporal

Figura 14

Decomposition of multiplicative time series



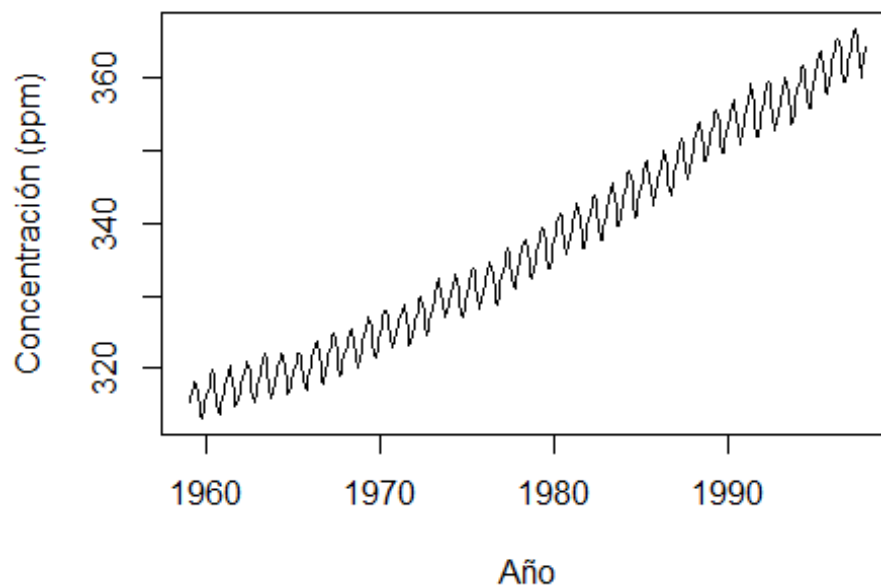
- En el primer panel se observa la serie temporal original.
- En el segundo panel se muestra la gráfica de tendencia subyacente en la serie temporal. Representa el cambio a largo plazo en los datos, eliminando la variabilidad estacional y aleatoria. En este caso, la tendencia muestra un aumento gradual hasta alrededor de 1975 y luego un ligero descenso hasta 1978.
- En el tercer panel se muestra el componente estacional de la serie temporal. Este componente captura los patrones repetitivos y predecibles que ocurren a lo largo de cada período (por ejemplo, cada año). Se observan patrones que se repiten anualmente, con ciertas variaciones que son consistentes a lo largo de los años.

- En el cuarto panel se muestra el componente aleatorio o el residuo de la serie temporal. Este componente captura las fluctuaciones no explicadas por la tendencia o la estacionalidad. Representa el “ruido” en los datos. Las variaciones en este componente son erráticas y no siguen un patrón discernible.

5. Analizamos una serie de tiempo con datos sobre CO2 en Mauna Loa

Figura 15

Concentraciones de CO2 en Mauna Loa



Se observa una clara tendencia ascendente en las concentraciones de CO2 a lo largo del tiempo. Desde 1959, las concentraciones han aumentado de aproximadamente 315 ppm a más de 360 ppm.

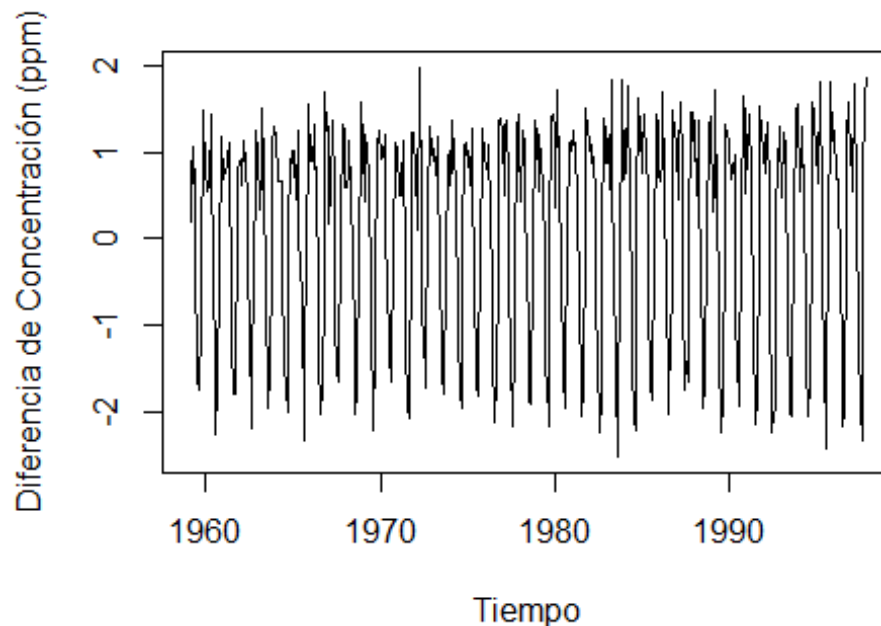
La línea muestra oscilaciones regulares y repetitivas que indican un patrón estacional. Estos ciclos anuales reflejan las fluctuaciones estacionales en las concentraciones de CO2, que están relacionadas con el crecimiento y la descomposición de la vegetación, así como con las variaciones en las actividades humanas. A pesar de las oscilaciones estacionales, la tendencia general muestra

un crecimiento constante de las concentraciones de CO₂. Esto sugiere un aumento continuo en las emisiones de CO₂, probablemente debido a la quema de combustibles fósiles y otras actividades humanas.

La serie original de CO₂ es acotada, diferenciamos la serie para hacerla estacionaria:

Figura 16

Serie diferenciada de CO₂

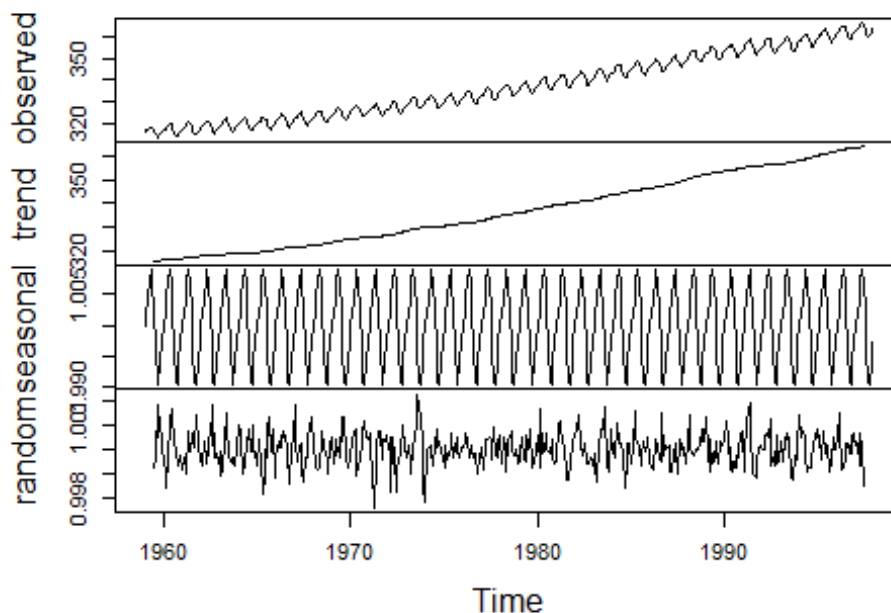


La serie diferenciada oscila alrededor de 0, con valores que varían aproximadamente entre -2 y 2 ppm. La gráfica muestra una alta frecuencia de oscilaciones, lo cual sugiere que las diferencias de concentración de CO₂ fluctúan de un mes a otro. No se observan tendencias claras a lo largo del tiempo, lo que indica que la diferenciación ha removido cualquier tendencia de largo plazo presente en los datos originales.

Se aplica un modelo ARIMA

Figura 17

Decomposition of multiplicative time series



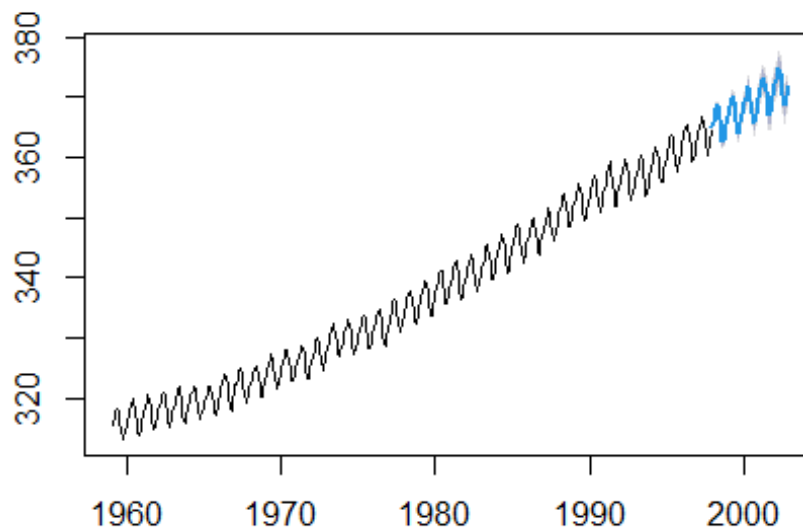
- En el primer panel se representa la serie temporal original de concentraciones de CO2 en partes por millón (ppm) desde 1960 hasta 1990. Se observa una tendencia general ascendente en la concentración de CO2 a lo largo del tiempo, con un patrón estacional visible (oscilaciones anuales).
- En el segundo panel se muestra la tendencia de la serie temporal. La tendencia es claramente ascendente, indicando un aumento continuo en la concentración de CO2 a lo largo de las décadas.
- En el tercer panel se muestra el componente estacional de la serie. Se observa un patrón repetitivo y regular de oscilaciones que corresponden a variaciones estacionales en la

concentración de CO₂. La estacionalidad tiene un ciclo anual, reflejando las fluctuaciones típicas de CO₂ debido a factores naturales como la fotosíntesis y la descomposición de materia orgánica.

- En el cuarto panel se muestra el componente de ruido aleatorio o residual. Este componente captura las variaciones que no pueden ser explicadas por la tendencia o la estacionalidad. El ruido parece ser relativamente pequeño en comparación con los otros componentes, pero muestra algunas fluctuaciones que podrían ser debido a eventos aleatorios o anomalías.

Figura 18

Forecasts from ARIMA (1.1.1)(1,1,2)[12]



- La parte negra de la serie temporal representa las concentraciones observadas de CO₂ desde 1960 hasta el año 2000. Se observa una clara tendencia ascendente en las concentraciones de CO₂, con un patrón estacional anual evidente.
- La parte azul de la serie temporal representa los pronósticos generados por el modelo ARIMA. Estos pronósticos se superponen a los datos observados, extendiéndose ligeramente más allá del período observado, lo cual muestra la capacidad del modelo para

predecir futuras concentraciones de CO₂. La banda de color más claro alrededor de la línea de pronóstico indica los intervalos de confianza, mostrando la incertidumbre asociada con las predicciones.

- El Modelo ARIMA (1,1,1)(1,1,2)[12]: (1,1,1):

El primer “1” indica que se está utilizando un modelo autorregresivo (AR) de orden 1. El segundo “1” indica que se está utilizando una diferenciación de primer orden para hacer la serie estacionaria. El tercer “1” indica que se está utilizando un modelo de media móvil (MA) de orden 1. (1,1,2)[12]:

El primer “1” indica un componente autorregresivo estacional de orden 1. El segundo “1” indica una diferenciación estacional de primer orden. El “2” indica un componente de media móvil estacional de orden 2. El “[12]” indica que el período estacional es de 12 meses, reflejando la estacionalidad anual.

La serie de residuos del modelo ARIMA es acotada además de Según el Teorema de Banach-Steinhaus, los operadores aplicados a la serie son uniformemente acotados.

En resumen, todas las series que se transformaron a una forma estacionaria/acotada (mediante diferenciación o suavizado) cumplen con el teorema, mientras que sus versiones originales con tendencia creciente no lo cumplen.

Tabla 3

Series que cumplen en su forma original.

Series que cumplen con el Teorema de Banach-Steinhaus (acotadas y con operadores uniformemente acotados)	Después de su transformación
Serie temporal acotada de prueba	(Figura 1)
PIB de EE.UU.	(serie diferenciada) (Figura 4)
Número de pasajeros aéreos internacionales	(serie diferenciada) (Figura 7)
Consumo trimestral de gas en el Reino Unido	(serie suavizada) (Figuras 10-11)
Temperatura diaria en Nueva York	(serie suavizada) (Figura 13)
Concentraciones de CO ₂ en Mauna Loa	(serie diferenciada y residuos de ARIMA) (Figuras 16–18)

Nota. Elaboración propia con datos históricos confiables y abiertos del gobierno de EE.UU.,

NOAA, datasets clásicos de R (2025).

Tabla 4

Series que no cumplen en su forma original.

Series que no cumplen en su forma original:	Presentan:
Serie no acotada de prueba	(Figura 2).
PIB de EE.UU. original	antes de diferenciar (Figura 3)
Consumo trimestral de gas en el Reino Unido original	tendencia creciente pronunciada. (Figura 9)
Concentraciones de CO ₂ en Mauna Loa originales	tendencia creciente marcada. (Figura 15)

Nota. Elaboración propia con datos históricos confiables y abiertos del gobierno de EE.UU., NOAA, datasets clásicos de R (2025).

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

1. **Aplicabilidad del Teorema de Banach-Steinhaus:** Se comprobó que las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus se cumplen en los espacios funcionales asociados a las series temporales acotadas, garantizando la existencia de operadores lineales y continuos que permiten analizar su comportamiento de forma estable.
2. **Impacto en la Precisión de Modelos Predictivos:** Se concluye que la aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus ha mostrado mejorar la precisión de los modelos predictivos, especialmente en comparación con las técnicas tradicionales que no abordan adecuadamente las series con variabilidad extrema. Esto es particularmente relevante en contextos donde la precisión es crítica, como en la predicción económica y climática.
3. **Comparación con Técnicas Tradicionales:** Al comparar la eficiencia del enfoque basado en el Teorema de Banach-Steinhaus con las técnicas tradicionales, se observó que el primero ofrece una mayor robustez frente a series con alta variabilidad. Esto sugiere que la adopción

RECOCENDACIONES

Basadas en las conclusiones establecidas, se plantea las siguientes recomendaciones:

1. **Capacitación para el Uso del Teorema:** Se recomienda fomentar la capacitación de los profesionales en el uso del Teorema de Banach-Steinhaus para el análisis de series temporales. Esto incluye la comprensión de sus fundamentos teóricos y la habilidad para aplicarlo en contextos prácticos donde la precisión predictiva es crucial.
2. **Integración del Teorema en Modelos Existentes:** Se sugiere integrar el Teorema de Banach-Steinhaus en los modelos predictivos actuales utilizados en áreas como la economía y la meteorología. Esta integración podría llevar a mejoras significativas en la estabilidad y precisión de las predicciones, especialmente en situaciones de alta incertidumbre.
3. **Investigación Adicional:** Se recomienda realizar investigaciones adicionales para explorar más a fondo las limitaciones y potenciales aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus en otros campos. Esto podría incluir su aplicación en nuevas áreas o la combinación con otras técnicas matemáticas para mejorar aún más su eficacia

CAPÍTULO VI: REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Banach, S., & Steinhaus, H. (1927). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 8(1), 228–233.

Bardalez Hall, C. G. (2019). *El teorema de Banach–Steinhaus para grupos topológicos* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional del Callao]. Repositorio Institucional UNAC. <https://repositorio.unac.edu.pe/handle/20.500.12952/425>

Bourbaki, N. (1987). *Topological vector spaces*. Springer.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2008). *Time series analysis: Forecasting and control* (4th ed.). Wiley.

Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (2016). *Introduction to time series and forecasting*. Springer.

Brezis, H. (1984). *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones* (Trad. J. Ramos Esteban). Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1983)

Chatfield, C. (2004). *The analysis of time series: An introduction*. CRC Press.

Gohberg, I., Goldberg, S., & Kaashoek, M. A. (2003). *Basic classes of linear operators*. Birkhäuser.

González, F. J. (2013). *Análisis funcional en espacios de Banach*. Universidad de Granada.

Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*. Princeton University Press.

Luenberger, D. G. (1997). *Optimization by vector space methods*. Wiley-Interscience.

Martínez, J. A. (2007). *Introducción al análisis de series temporales*. Universidad Complutense de Madrid.

Rudin, W. (1991). *Functional analysis* (2nd ed.). McGraw-Hill.

Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, P. B. (2022). *Metodología de la investigación* (7.^a ed.). McGraw-Hill.

Yosida, K. (1980). *Functional analysis* (6th ed.). Springer.

ANEXOS

ANEXO N° 01

MATRIZ DE CONSISTENCIA

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BANACH STEINHEUS EN SERIES TEMPORALES

Elementos	Pregunta de Investigación	Objetivos	Hipótesis	Variables	Métodos
Problema de Investigación	¿Puede el Teorema de Banach-Steinhaus ser aplicado en la predicción y robustez de modelos en series temporales?	General: Analizar como el Teorema de Banach-Steinhaus puede aplicarse para mejorar la predicción y robustez de modelos en series temporales.	La aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus en espacios funcionales adecuados permite construir modelos predictivos más robustos y precisos en el análisis de series temporales.	Independiente: Aplicación del Teorema de Banach-Steinhaus Dependiente: Precisión predictiva Robustez del modelo Estabilidad de los operadores	Teórica-aplicada con análisis funcional y simulación computacional.
Preguntas Específicas	¿Cuáles son las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus en espacios funcionales asociados a series temporales? ¿Cómo se ve afectada la precisión predictiva de los modelos al aplicar el teorema de Banach-Steinhaus? ¿Qué tan robustos son los modelos resultantes	Específicos: - Explicar las condiciones necesarias para aplicar el Teorema en el análisis de series temporales. - Evaluar en qué medida la aplicación del Teorema mejora la precisión y robustez de los modelos predictivos en series temporales.	- Si los operadores definidos por los modelos de series temporales son puntualmente acotados, entonces su norma estará uniformemente acotada, lo que mejora la estabilidad del modelo. - La inclusión del criterio de acotamiento uniforme reduce el sobreajuste y mejora la capacidad de	Control: - Tipo de modelo de serie temporal (e.g., ARIMA, redes neuronales recurrentes, etc.) - Tipo de serie temporal (económica, climática, etc.)	Análisis matemático-funcional: - Se trabajará con espacios de Banach asociados a funciones de series temporales. Verificación de la condición de acotamiento puntual para aplicar el teorema. - Simulación computacional: Aplicación del teorema a modelos autoregresivos y neuronales entrenados con diferentes conjuntos de datos. Evaluación

en comparación con métodos tradicionales?

3 Comparar la robustez de los modelos de series temporales basados en el Teorema con los modelos tradicionales ruido y datos incompletos.

generalización en escenarios con ruido.
3 Los modelos de series temporales ajustados bajo los principios del Teorema de Banach-Steinhaus son más robustos frente a ruido y datos incompletos, en comparación con modelos tradicionales que no consideran el acotamiento uniforme en su formulación.

cuantitativa de la precisión y robustez de los modelos.
3. Comparación empírica: Se compararán modelos construidos con y sin el teorema bajo condiciones adversas (datos faltantes, ruido blanco, ruido gaussiano, etc.).
4. Software y herramientas: Python / R para simulaciones y análisis estadístico. Bibliotecas: numpy, scikit-learn, statsmodels, tensorflow, torch, etc.

Elaboración propia