

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA, INFORMÁTICA Y**  
**MECÁNICA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**



**TESIS**

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR DE**  
**ORIENTACIÓN, BASADO EN LA TÉCNICA BACKSTEPPING Y**  
**CONTROL EN MODO DESLIZANTE APLICADO A UN**  
**VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO**

**PRESENTADO POR:**

**Br. HENRY SALLO HUALLPAYUNCA**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL**  
**DE INGENIERO ELECTRÓNICO**

**ASESOR:**

**Dr.Ing. ROGER J. COAQUIRA CASTILLO**

**CUSCO - PERÚ**

**2025**

# INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro. CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, Asesor del trabajo de investigación/tesis titulada: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR DE ORIENTACIÓN, BASADO EN LA TÉCNICA BACKSTEPPING Y CONTROL EN MODO DESLIZANTE APLICADO A UN VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO.

Presentado por: HENRY SAULO HUALLPAYUNCA DNI N° 48314436

presentado por: ..... DNI N°: .....

Para optar el título profesional/grado académico de INGENIERO ELECTRÓNICO

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 02 veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 09 %.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto las primeras páginas del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 08 de Setiembre de 2025

  
.....  
Firma

Post firma Dr. Ing. Roger Jesus Coaguira Castillo.

Nro. de DNI 01333608

ORCID del Asesor 0000 - 0003 - 3791 - 110X

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: oid: 27259:494521978

# Henry Sallo Huallpayunca

## VOLUMEN\_Henry\_Sallo\_H.pdf

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

---

### Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:494521978

Fecha de entrega

8 sep 2025, 1:43 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

8 sep 2025, 2:08 p.m. GMT-5

Nombre del archivo

VOLUMEN\_Henry\_Sallo\_H.pdf

Tamaño del archivo

7.5 MB

151 páginas

28.798 palabras

148.581 caracteres

# 9% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

## Filtrado desde el informe

- ▶ Bibliografía
- ▶ Texto citado
- ▶ Texto mencionado
- ▶ Coincidencias menores (menos de 9 palabras)

## Fuentes principales

- 7%  Fuentes de Internet
- 3%  Publicaciones
- 6%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

## Marcas de integridad

### N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

—*Felizmente aún no perdemos la esperanza.*  
—*Es la que nos levanta del suelo, sí. . . pero no olvides que también puede hundirte.*  
—*¿A qué te refieres esta vez?*  
—*A que la esperanza es buena para dar el primer paso, pero si te agarras de ella como un náufrago, acabarás flotando en ilusiones que nunca llegarán a puerto.*  
—*Entonces, ¿qué se supone que hagamos?*  
—*Usarla. Usarla mientras sirva. Y soltarla cuando se vuelva un canto de sirena.*  
—*Bonita analogía. . . aunque sigo pensando en lo que me dijo aquella mujer tuareg:*  
*«No dejes que tus ilusiones te consuman si no quieres perder el camino.»*  
*Aun no entiendo a que camino se refería, si aquí solo hay arena.*  
—*Creo que se refería a la Vida.*

**Diálogos en el desierto.**  
*Mactub*

# Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme completar un objetivo tan importante para mí. Agradezco a mi madre, quien desde que tengo uso de razón —y quizá sin darse cuenta— alentó mi curiosidad por la ciencia y la investigación. Agradezco a mi padre, que me ha estado ayudando a superar obstáculos desconocidos para los demás, y haberme cuidado de peligros desconocidos, incluso para mí. Querido *viejo*, quizá algún día volvamos a vernos; solo espero que no sea muy pronto. Agradezco a mis hermanos mayores, de quienes he aprendido todo lo que sé, y de quienes seguiré aprendiendo hasta que Dios lo decida. Gracias por ayudarme y enseñarme a pesar de las adversidades que tiene la vida.

El presente trabajo no habría sido posible sin la confianza y la paciencia que tuvieron dos personas: Mi asesor, el Dr. Ing. Roger Jesus Coaquira Castillo, quien me brindó la posibilidad de desarrollar este tema de investigación e invitarme a trabajar en el laboratorio institucional **LIECAR**; y el Dr. Ing. Facundo Palomino Quispe, quien me brindó su confianza y las facilidades, como director del laboratorio, para que pueda investigar dentro de sus instalaciones durante todo este tiempo. A ambos agradezco la paciencia que tuvieron durante los años que duró la investigación, a sus ideas y sus palabras de aliento que me ayudaron a completar el presente proyecto.

*Gracias mamá,  
la vida es corta, pero me gustaría que la tuya fuese eterna.*

**Henry S.H.**

# Resumen

La versatilidad de los Vehículos Aéreos no Tripulados (VANT), más conocidos como “*Drones*”, para ser usados en múltiples áreas de trabajo, y la implementación de un VANT por la Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio (NASA) para sobrevolar la superficie de otro planeta en el año 2021, evidencian la importancia de esta tecnología y, en particular, de sus sistemas de control. Por ello, este proyecto se centra en investigar la implementación de un controlador de orientación aplicado a un VANT de cuatro motores, empleando técnicas modernas de control: Backstepping y Control en Modo Deslizante (SMC). El software de control fue implementado en el microcontrolador ESP32. Para el desarrollo del modelo matemático del VANT se utilizó el método Newton-Euler, mientras que las simulaciones de vuelo se realizaron en Matlab®. La estructura del VANT empleada tiene dimensiones de 0.16m x 0.16m. Se desarrolló un sistema de instrumentación que integra acelerómetro, giroscopio y microcontrolador, diseñado para determinar la orientación del VANT y controlar, mediante señales PWM, sus cuatro motores. En la etapa de implementación, el procesamiento de datos de los sensores se efectuó mediante el filtro de Kalman (KF). Las pruebas en laboratorio muestran que el controlador diseñado e implementado regula los ángulos de orientación roll y pitch. Para el ángulo roll se obtuvo un sobreimpulso máximo del 18 % con un tiempo de estabilización de  $\sim 3,95s$ , mientras que para pitch se alcanzó un sobreimpulso máximo del 8,5 % con un tiempo de estabilización de  $\sim 2,22s$ .

**Palabras clave:** Backstepping; Control en Modo Deslizante (SMC); Vehículo Aéreo no Tripulado (VANT); Unidad de Medición Inercial (IMU).

# Abstract

The versatility of Unmanned Aerial Vehicles (UAVs), better known as “Drones”, to be used in multiple areas of work, and the implementation of a UAV by the National Aeronautics and Space Administration (NASA) to fly over the surface of another planet in 2021, highlight the importance of this technology and, in particular, of its control systems. Therefore, this project focuses on investigating the implementation of an attitude controller applied to a four-motor UAV, employing modern control techniques: Backstepping and Sliding Mode Control (SMC). The control software was implemented on the ESP32 microcontroller. For the development of the UAV mathematical model, the Newton-Euler method was used, while flight simulations were carried out in Matlab®. The UAV structure employed has dimensions of  $0,16m \times 0,16m$ . An instrumentation system was developed that integrates an accelerometer, a gyroscope, and a microcontroller, designed to determine the UAV’s orientation and control its four motors through PWM signals. In the implementation stage, sensor data processing was performed using the Kalman Filter (KF). Laboratory tests show that the designed and implemented controller regulates the roll and pitch orientation angles. For the roll angle, a maximum overshoot of 18 % was obtained with a settling time of  $\sim 3,95s$ , while for the pitch angle, a maximum overshoot of 8,5 % was achieved with a settling time of  $\sim 2,22s$ .

**Keywords:** Backstepping; Sliding Mode Control (SMC); Unmanned Aerial Vehicle (UAV); Inertial Measurement Unit (IMU).

# Introducción

En este proyecto de investigación se diseñó e implemento experimentalmente un controlador de orientación aplicado a un VANT utilizando las técnicas de control Backstepping y Control en Modo Deslizante. Teniendo como objetivo el desarrollo de nuevas tecnologías para el control de orientación en vehículos aéreos no tripulados, utilizando técnicas de control modernos y no lineales. El trabajo se estructura en seis capítulos, en donde se exponen las diversas etapas del proyecto.

- **Capítulo 1:** Se desarrolla los aspectos generales de la investigación, presentando la importancia del proyecto y definiendo sus delimitaciones espaciales y temporales.
- **Capítulo 2:** Muestra los conceptos necesarios para comprender las teorías matemáticas y tecnologías clave para implementar un sistema de control en un vehículo VANT.
- **Capítulo 3:** Explica los detalles de la investigación, abarcando el tipo de investigación que se esta realizando, su diseño, los alcances, limitaciones y los aspectos éticos que rige en el presente proyecto.
- **Capítulo 4:** Se enfoca en el desarrollo y la implementación del sistema propuesto en este trabajo. Detalla el trasfondo teórico matemático, su simulación en Matlab®, la implementación del hardware y nos muestra el desarrollo del software de control.
- **Capítulo 5:** Se muestran los resultados obtenidos con respecto a los objetivos específicos planteados en el presente proyecto.
- **Capítulo 6:** Describe los hallazgos mas relevantes y significativos que se dieron en el desarrollo del trabajo y compara los resultados obtenidos en el presente volumen con la literatura existente.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>V</b>
<b>Índice general</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>X</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>1. Aspectos generales</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción de la realidad problemática. . . . .	1
1.2. Formulación del problema. . . . .	4
1.2.1. Problema general . . . . .	4
1.2.2. Problemas específicos . . . . .	4
1.3. Justificación . . . . .	4
1.3.1. Implicaciones practicas . . . . .	4
1.3.2. Relevancia social . . . . .	5
1.3.3. Valor teórico . . . . .	5
1.3.4. Utilidad metodológica . . . . .	5

1.4.	Objetivos . . . . .	6
1.4.1.	Objetivo general . . . . .	6
1.4.2.	Objetivos específicos . . . . .	6
1.5.	Delimitación del estudio . . . . .	6
1.5.1.	Delimitación espacial . . . . .	6
1.5.2.	Delimitación temporal . . . . .	7
<b>2.</b>	<b>Marco teórico</b>	<b>8</b>
2.1.	Antecedentes de estudios . . . . .	8
2.1.1.	Trabajos internacionales . . . . .	8
2.1.2.	Trabajos nacionales . . . . .	9
2.2.	Bases teóricas . . . . .	10
2.2.1.	Inicios tecnológicos de los vehículos VANT . . . . .	11
2.2.2.	Configuraciones de los vehículos VANT . . . . .	13
2.2.3.	Componentes principales de los vehículos VANT . . . . .	15
2.3.	Variables e indicadores . . . . .	20
2.3.1.	Identificación de variables . . . . .	20
2.3.2.	Operacionalización de variables . . . . .	20
2.4.	Definición de términos básicos . . . . .	21
2.4.1.	Vehículo aéreo no tripulado . . . . .	21
2.4.2.	Modelamiento matemático de un VANT . . . . .	21
2.4.3.	Backstepping . . . . .	25
2.4.4.	Control en Modo Deslizante (Sliding Mode Control) . . . . .	31
2.4.5.	El filtro de Kalman . . . . .	36
2.4.6.	MATLAB® . . . . .	41
2.4.7.	Método del Péndulo Bifilar . . . . .	43
2.4.8.	Teorema de los ejes perpendiculares . . . . .	45

<b>3. Método</b>	<b>47</b>
3.1. Tipo de investigación. . . . .	47
3.2. Alcance de investigación. . . . .	47
3.3. Diseño de investigación. . . . .	47
3.4. Limitaciones de la investigación . . . . .	48
3.5. Aspectos éticos . . . . .	48
<b>4. Implementación del Sistema de Control</b>	<b>49</b>
4.1. Descripción y desarrollo del modelo dinámico de un VANT de cuatro rotores. . .	50
4.1.1. Descripción del VANT . . . . .	51
4.1.2. Utilizando el método de Newton-Euler . . . . .	52
4.2. Desarrollo del sistema de control y simulación . . . . .	69
4.2.1. Ecuaciones de espacio de estados del VANT . . . . .	69
4.2.2. Backstepping . . . . .	71
4.2.3. Control en Modo Deslizante (SMC) . . . . .	72
4.2.4. Desarrollo de las leyes de control . . . . .	73
4.2.5. Simulación en Matlab® . . . . .	76
4.3. Desarrollo del hardware . . . . .	78
4.3.1. La estructura del VANT . . . . .	78
4.3.2. Sistema de instrumentación . . . . .	80
4.3.3. Diseño electrónico . . . . .	85
4.3.4. Momentos de inercia del VANT . . . . .	88
4.4. Desarrollo del Software de control . . . . .	92
4.4.1. El software de control . . . . .	92
<b>5. RESULTADOS</b>	<b>95</b>
5.1. Resultados respecto a los objetivos específicos. . . . .	95

5.1.1.	Resultados obtenidos con respecto a la elección de la técnica matemática para desarrollar el modelamiento matemático del VANT, utilizando el método del péndulo bifilar para hallar la matriz de inercia del VANT. . . . .	95
5.1.2.	Resultados obtenidos con respecto a la implementación de un sistema de instrumentación, compuesto por sensores y procesador, para obtener la orientación del VANT. . . . .	99
5.1.3.	Resultados obtenidos con respecto al diseño e implementación de un controlador basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante para un VANT enfocado a controlar su orientación. . . . .	101
5.2.	Resultados respecto al objetivo general. . . . .	107
<b>6.</b>	<b>DISCUSIÓN</b>	<b>113</b>
6.1.	Descripción de hallazgos relevantes y significativos. . . . .	113
6.1.1.	Problemas del manejo de señales PWM dentro del microcontrolador ESP32-S . . . . .	113
6.2.	Comparación crítica con la literatura existente. . . . .	114
6.2.1.	Comparación cualitativa en el control de los ángulos roll y pitch del sistema de control basado en la técnica Backstepping y el sistema de control desarrollado, basado en las técnicas Backstepping + SMC. . . . .	115
	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>117</b>
	<b>RECOMENDACIONES</b>	<b>118</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>121</b>
	<b>Anexos</b>	<b>122</b>
A.	Desarrollo de las ecuaciones en espacio de estados . . . . .	122
B.	Calibración del sensor de medición inercial, <i>MPU-6050</i> . . . . .	125
C.	Códigos implementados. . . . .	129
D.	Hoja de datos o especificaciones técnicas . . . . .	131

# Índice de tablas

4.1. Evaluación comparativa de tres estructuras de VANT . . . . .	80
4.2. Comparación de microcontroladores. . . . .	82
4.3. Comparación de sensores IMU. . . . .	82
4.4. Comparación de transistores para utilizarlos como driver para los motores. . . .	83

# Índice de figuras

1.1. Modelos de VANT investigados. . . . .	2
1.2. Áreas investigadas de los VANT. . . . .	2
2.1. Tornillo Aéreo . . . . .	10
2.2. Fotografía del primer vehículo volador de ala fija, controlado a distancia. . . . .	11
2.3. Fotografía del autogiro modelo Cierva C.8. . . . .	12
2.4. Modelos de vehículos VANT. . . . .	13
2.5. Vehículos VANT de uso principalmente civil. . . . .	14
2.6. Estructura modular comercial de la marca DJI. . . . .	15
2.7. ESP32-DevKitC. . . . .	16
2.8. Sensor IMU, MPU6050. . . . .	17
2.9. Controlador de Velocidad Electrónico de 30A. . . . .	18
2.10. Motor Brushless (BLDC), para hélices de 7 - 8 pulgadas. . . . .	18
2.11. Hélices compuestas de nylon y fibra de carbono. . . . .	19
2.12. Tercera ley de Newton. . . . .	23
2.13. Superficie deslizante ( $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ ). . . . .	31
2.14. Apollo 11, Misión de aterrizaje lunar. . . . .	36
2.15. Descripción detallada del algoritmo del Filtro de Kalman. . . . .	37
2.16. Cleve Moler, Matemático Principal de MathWorks®. . . . .	41
2.17. Esquema del péndulo bifilar. . . . .	44
4.1. Esquema de los marcos inerciales y la estructura simplificada del VANT. . . . .	51

4.2.	Principios básicos para el manejo de un VANT de cuatro motores. . . . .	52
4.3.	Representación de los marcos de referencia. . . . .	53
4.4.	Descomposición de vectores en la rotación ${}^R\vec{\omega}^{R_1}$ . . . . .	54
4.5.	Descomposición de vectores en la rotación ${}^{R_1}\vec{\omega}^{R_2}$ . . . . .	55
4.6.	Descomposición de vectores en la rotación ${}^{R_2}\vec{\omega}^{R_3}$ . . . . .	56
4.7.	Diagrama de flujo del sistema de control implementado en Matlab®. . . . .	79
4.8.	VANT comercial HotSpeed de la marca Helic Max. . . . .	80
4.9.	Diagrama de bloques del hardware desarrollado para el VANT. . . . .	81
4.10.	Esquema electrónico del circuito de instrumentación implementado. . . . .	86
4.11.	Placa de circuito impreso (PCB) del sistema de instrumentación. . . . .	87
4.12.	Soporte de acero inoxidable instalado para realizar las pruebas experimentales del péndulo bifilar. . . . .	88
4.13.	Estructura implementada del VANT, suspendida para hallar el momento de inercia en su eje $x$ . . . . .	89
4.14.	Estructura implementada del VANT, suspendida para hallar el momento de inercia en su eje $y$ . . . . .	90
4.15.	Estructura implementada del VANT, suspendida para hallar el momento de inercia en su eje $z$ . . . . .	91
4.16.	Diagrama de bloques del sistema de control implementado. . . . .	92
4.17.	Diagrama de flujo del software de control desarrollado. . . . .	93
4.18.	Diagrama de flujo del aplicativo móvil desarrollado, el cual, se encarga de encender y apagar el software de control. . . . .	94
5.1.	Sistema de instrumentación implementado en la estructura del VANT. . . . .	99
5.2.	Drivers de los motores DC-Coreless. . . . .	100
5.3.	Resultados de la simulación del controlador basado en <b>Backstepping</b> y <b>SMC</b> , el cual, muestra el rendimiento de control en la <b>orientación</b> y la <b>altitud</b> . . . . .	102
5.4.	Evaluación de los errores de nuestro sistema de control, en cada uno de los ejes de coordenadas. . . . .	102
5.5.	Señales PWM de los cuatro motores ( $M_i$ ) del VANT, entregado por el sistema de control diseñado en base a la técnicas de control <b>Backstepping</b> y <b>Control en Modo Deslizante</b> . . . . .	103

5.6.	Comprobación de la sincronía de las señales PWM de los motores $M_1$ y $M_3$ , a través del uso de los cursores de medición del osciloscopio. . . . .	104
5.7.	Comprobación de la sincronía de las señales PWM de los motores $M_2$ y $M_4$ , a través del uso de los cursores de medición del osciloscopio. . . . .	105
5.8.	Medición del desfase temporal que existe entre las señales PWM de los motores $M_{1/3}$ y $M_{2/4}$ . . . . .	106
5.9.	Fotografía del VANT implementado, cuando al sistema de control se le asigna un valor de referencia de $10^\circ$ en pitch. . . . .	107
5.10.	Respuesta del sistema de control, para los ángulos Roll y Pitch del VANT, con un valor de referencia igual a cero grados sexagesimales ( $0^\circ$ ) para ambos. . . .	108
5.11.	Respuesta del sistema de control, para el ángulo Roll del VANT, con un valor de referencia de $10^\circ$ . . . . .	109
5.12.	Respuesta del sistema de control, para el ángulo Pitch del VANT, con un valor de referencia de $10^\circ$ . . . . .	111
6.1.	Respuesta, del sistema de control basado en la técnica de Backstepping, para el ángulo Roll y Pitch de un VANT de cuatro motores, obtenido por el Dr. Samir Bouabdallah. . . . .	114
A.1.	Diagrama de flujo del software de calibración desarrollado para el sensor MPU-6050. . . . .	125
A.2.	Montaje del sensor inercial MPU-6050 en una superficie nivelada. . . . .	126
A.3.	Medición del ángulo roll y pitch con un ángulo de referencia de $0^\circ$ , realizado en un superficie nivelada. . . . .	127
A.4.	Medición del ángulo roll con una referencia de $-90^\circ$ , realizada en un superficie nivelada. . . . .	127
A.5.	Medición del ángulo pitch con una referencia de $90^\circ$ , realizada en un superficie nivelada. . . . .	128

# Capítulo 1

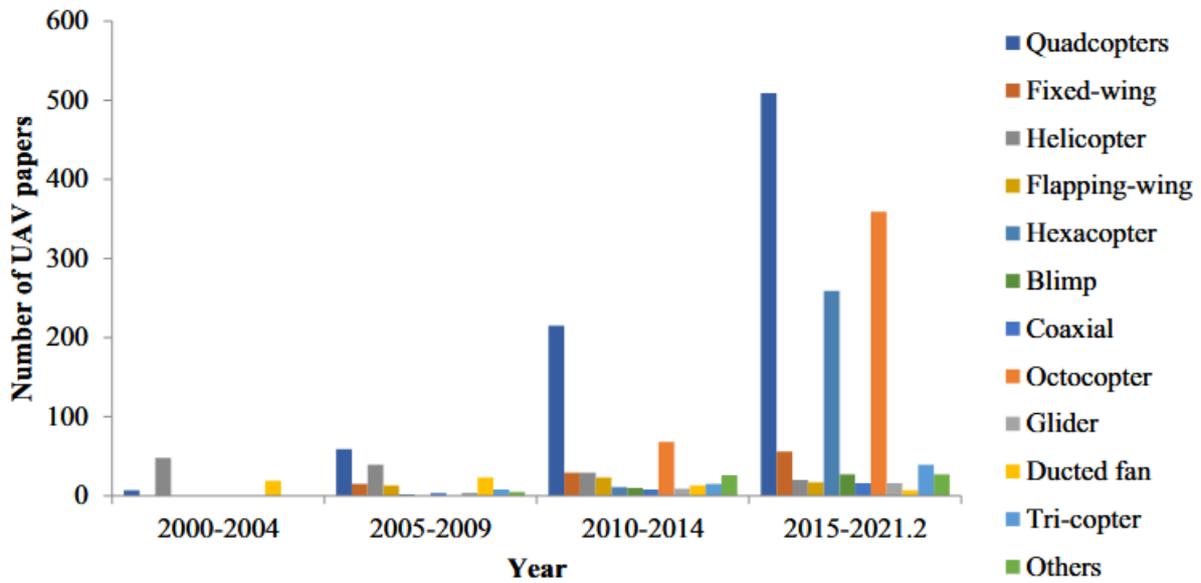
## Aspectos generales

### 1.1. Descripción de la realidad problemática.

Los vehículos aéreos no tripulados (VANT), popularmente conocidos como “*Drones*”, en la actualidad son usados en múltiples áreas académicas y entornos geográficos para distintos fines, y no solo en ámbitos militares como fue creado en sus inicios (Imperial War Museums, 2024).

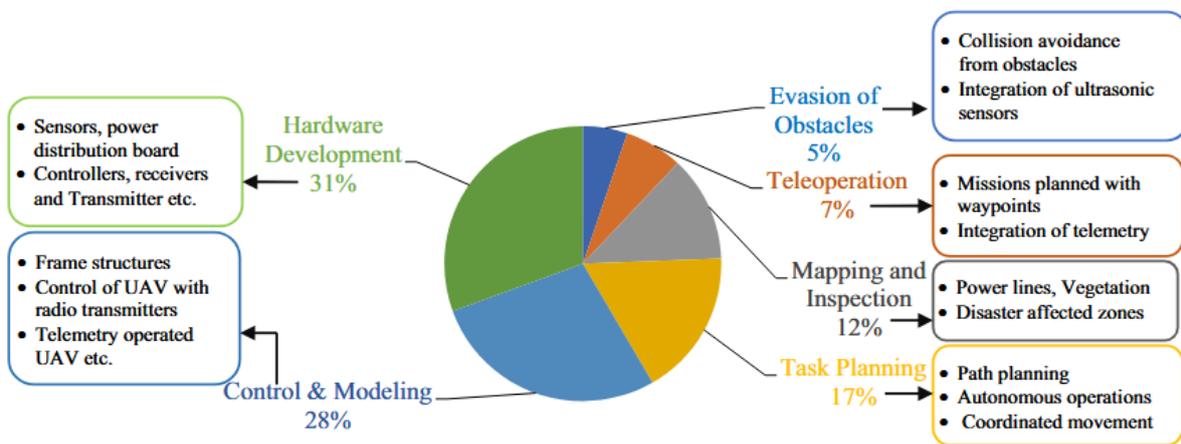
Ma et al. (2022) nos muestran en la Figura 1.1 que las investigaciones llevadas a cabo sobre los VANT de cuatro motores crece en mayor medida a comparación de los otros modelos y los autores explican que este modelo de VANT tomó mayor relevancia debido a que tiene varios atributos, entre los cuales destacan su flexibilidad de diseño y las múltiples funciones en las que pueden ser utilizados. Ma et al. (2022) también nos ofrece datos sobre las áreas en donde se realizaron mayores artículos de investigación sobre el desarrollo de vehículos aéreos no tripulados. En la Figura 1.2 se puede observar que el desarrollo de hardware y la investigación sobre el control y modelado de vehículos VANT toman mayor relevancia, sumando en conjunto un 59 % del total de las investigaciones realizadas del año 2000 hasta el segundo mes del año 2021.

**Figura 1.1**  
Modelos de VANT investigados.



*Nota.* Resumen de la cantidad de investigaciones realizadas por modelo de VANT a lo largo de los años 2000 al 2021 (Ma et al. 2022).

**Figura 1.2**  
Áreas investigadas de los VANT.



*Nota.* Porcentaje de las áreas investigadas sobre el desarrollo de vehículos aéreos no tripulados a lo largo de los años 2000 al 2021 (Ma et al. 2022).

Sobre el diseño de sistemas de control de vuelo para VANT de cuatro motores, investigadores de la facultad de ingeniería eléctrica y tecnologías de la información, de la Universidad Tecnológica de Eslovaquia desarrollaron la implementación, a nivel de simulación, nueve técnicas de control utilizando como base los controladores PID, Backstepping y LQR (Regulador Lineal Cuadrático) (Chovancová et al., 2016).

Entre las técnicas de control PID, Backstepping y LQR, destaca la técnica Backstepping debido a que fue desarrollada para abordar sistemas no lineales complejos, los cuales podrían ser difíciles de manejar utilizando técnica de control mas convencionales. Chovancová et al. (2016) llega a la conclusión de que las mejores respuestas se dan usando un controlador basándose en la técnica de control Backstepping.

Tomando en consideración que las investigaciones desarrolladas hasta la fecha, sobre las técnicas de control Backstepping y Control en Modo Deslizante, se puede ver que no cuentan con una implementación experimental y además observando el creciente uso de los vehículos VANT en distintos campos de la investigación científica, el ámbito militar y con el objetivo de poder generar mayores conocimientos dentro del desarrollo de vehículos VANT, es que se plantea investigar el diseño e implementación de un controlador de orientación para un VANT de cuatro motores, basándose en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante.

El proyecto se enfoca en los aspectos de mayor relevancia según mostrado por (Ma et al., 2022), que es el desarrollo del hardware electrónico y el software de control.

## **1.2. Formulación del problema.**

### **1.2.1. Problema general**

Es necesario una implementación experimental de un controlador enfocado al manejo de la orientación de un VANT, utilizando las técnicas de control Backstepping y el Control en Modo Deslizante, para conocer el comportamiento que tendrá en un entorno real.

### **1.2.2. Problemas específicos**

- Desconocimiento del modelo matemático del VANT y de su respectiva simulación.
- Existe la necesidad de diseñar e implementar un sistema de sensores para obtener la orientación del VANT.
- Falta un diseño del sistema de control basado en las técnicas de Backstepping y el Control en Modo Deslizante para el control de orientación de un VANT.

## **1.3. Justificación**

### **1.3.1. Implicaciones practicas**

El desarrollo de un controlador basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante aplicado a controlar la orientación de un VANT, se presenta con el objetivo de generar mayores conocimientos sobre las técnicas de control modernas aplicables a este tipo de vehículos. Es importante poder implementarlos de forma experimental, fuera de herramientas computacionales, porque es la única forma de salir del plano “*ideal*” y poder observar el comportamiento del controlador con todas las incertidumbres que intervienen en un entorno real. Y en caso que el controlador no tenga un comportamiento similar con respecto a la simulación, nos ayudará a conocer sus posibles causas por las cuales sucedió y ello nos mostrará

el camino para avanzar en el desarrollo de esta tecnología.

### **1.3.2. Relevancia social**

Al desarrollar la implementación de controles avanzados, en este caso basados en la técnicas de Backstepping y el Control en Modo Deslizante, se facilita el desarrollo de sistemas de control para vehículos aéreos no tripulados haciéndolos mas accesibles para utilizarlos en diferentes aplicaciones. Esto podrá potenciar la creación de proyectos sociales y educativos dentro de universidades e institutos, promoviendo el aprendizaje en áreas tecnológicas emergentes, lo que a largo plazo contribuye al desarrollo humano.

### **1.3.3. Valor teórico**

Las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante, ofrecen herramientas teóricas avanzadas para abordar problemas de control en sistemas complejos y no lineales. El valor teórico radica en el análisis y la implementación experimental de estas técnicas que fortalecen la comprensión teórica de como diseñar sistemas de control para modelos de múltiples grados de libertad, como los VANT.

### **1.3.4. Utilidad metodológica**

El presente proyecto se expondrá como uno de los primeros estudios en la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, sobre el modelamiento de un vehículo aéreo no tripulado para el diseño de un controlador de orientación basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante, y como los temas a tratar guardan relación con los cursos de Control I, Control II, Robótica, Instrumentación Electrónica, entre otros. Podrá ser utilizado como material de apoyo para realizar nuevas investigaciones científicas, y proyectos relacionados.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Desarrollar un sistema de control basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante e implementarlo para poder observar su desempeño en el control de la orientación de un VANT, en un entorno real.

### 1.4.2. Objetivos específicos

- Elegir de una técnica matemática para desarrollar el modelamiento matemático del VANT, utilizando el método del *péndulo bifilar*<sup>1</sup> para hallar la matriz de inercia del VANT.
- Implementar un sistema de instrumentación, compuesto por sensores y procesador, para obtener la orientación del VANT.
- Diseñar e implementar un controlador basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante para un VANT enfocado a controlar su orientación.

## 1.5. Delimitación del estudio

### 1.5.1. Delimitación espacial

El espacio de pruebas esta ubicado dentro del laboratorio institucional LIECAR, lo que proporcionara un entorno seguro para la operación del VANT. Las pruebas experimentales se realizaron utilizando una estructura de un VANT de 0.16m de largo por 0.16m de ancho, utilizando un área de  $1m^2$  para las pruebas de control. Para garantizar que el VANT se mantuviera

---

<sup>1</sup>El método del **Péndulo bifilar** es útil para hallar el momento de inercia de objetos irregulares o muy complejos de realizar mediante un modelamiento analítico, la teoría de este método se desarrolla mas ampliamente en la sección: 2.4.7.

dentro del área designada para las pruebas y maniobras, se utilizó una cuerda conectada a su centro geométrico.

### **1.5.2. Delimitación temporal**

La implementación experimental del sistema de control de orientación, conjuntamente con su diseño teórico y simulado del VANT, se llevó a cabo durante un periodo de diez meses, iniciando en el mes de noviembre del 2024 y finalizando en el mes de agosto del 2025.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Antecedentes de estudios

#### 2.1.1. Trabajos internacionales

- **Comparación de métodos de control para el cuadrotor real en un banco de pruebas innovador (artículo).** (Anežka Chovancová, Tomáš Fico, František Duchon, Martin Dekan, L'uboš Chovanec and Martina Dekanová, 2020)

Este documento se realiza en la Universidad Tecnológica de Eslovaquia en el año 2022, en donde se desarrolla un banco de pruebas, donde evalúan los controladores *PD*, *LQR* y el *Backstepping* enfocados a simular el desempeño de un cuadricóptero. Se tiene que resaltar que las evaluaciones de las técnicas de control no se desarrollaron en un cuadricóptero real. En este artículo se realizó la comparación de las tres técnicas de control que tuvieron un mejor rendimiento: El *PD*, el *LQR* y el *Backstepping*. La principal contribución de este artículo es una comparación del rendimiento de los controladores, que se basó en el error de cuaternión absoluto (posicionamiento) y el consumo de energía (Chovancová et al., 2020, marzo).

- **Diseño y control de quadrotores con aplicación en vuelos autónomos (Tesis para optar el título de Doctor en Ciencias). (Samir Bouabdallah, 2007)**

Desarrollado en la Escuela Politécnica Federal de Lausanne - Suiza. Se centra en el modelado, diseño y control de robots voladores pequeños, específicamente en sistemas de despegue y aterrizaje vertical. El autor presenta un modelo matemático para la simulación y el control de estos sistemas. En cuanto a las técnicas de control, en este trabajo se implementa cinco estrategias diferentes: Un controlador basado en la teoría de Lyapunov, controlador basado en PID, controlador óptimo lineal cuadrático, controlador basado en Backstepping y por último en un controlador basado en modos deslizantes. Este trabajo ofrece contribuciones significativas en el campo de la robótica aérea autónoma a pequeña escala. Siendo relevante por la metodología utilizada y los resultados presentados.

### **2.1.2. Trabajos nacionales**

- **Comparación de Modelos Matemáticos y Controladores PID vs LQR, para un Cuadricóptero. (Ricardo Rodríguez Torres, 2016)**

Tesis desarrollada en la Universidad de Piura en el año 2016, para optar el grado de Máster en Ingeniería Mecánica – Eléctrica con mención en Automática y Optimización, en donde desarrollaron un estudio virtual de un *dron*, para luego desarrollar un modelo mecánico. El modelo mecánico que desarrolla el autor, es un módulo de cuadricóptero, el cual lo implementa en el laboratorio de automática de la Universidad de Piura, y es allí en donde experimenta con las técnicas de control PID y LQR desarrolladas para comparar su desempeño en el control del vehículo (Torres, 2016, marzo).

- **Modelado y Control de un Cuadricóptero. (Ernesto Paiva Peredo, 2016)**

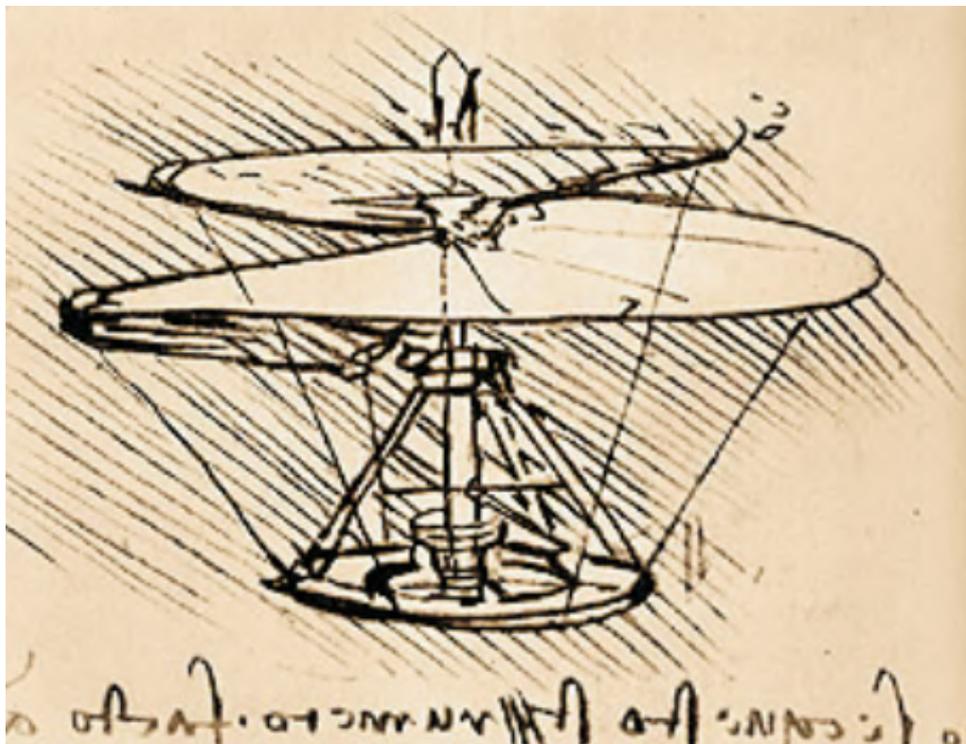
Tesis desarrollada en la Universidad de Piura en el año 2016, para optar el grado de Máster en ingeniería Mecánico-Eléctrica con mención en Automática y Optimización, en donde el autor realizó un viaje de investigación a la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla con el propósito de realizar estudios de nuevas técnicas de

transporte a través de cuadricopteros. En el trabajo de tesis presentado por el autor, se detalla una simulación de un cuadricóptero utilizando una herramienta computacional y además la implementa para posteriormente realizar mediciones y calibraciones (Peredo, 2016, noviembre).

## 2.2. Bases teóricas

Desde los inicios de la historia humana, el hombre ha mostrado una profunda fascinación por volar, evidenciada en mitos, leyendas y relatos religiosos, como los escritos en la Biblia. Muchos de los primeros aparatos ingeniosos creados no tuvieron el éxito esperado, e incluso algunos estuvieron envueltos en trágicos acontecimientos. No obstante, estos esfuerzos sentaron las bases para la creación de las primeras aeronaves, allanando el camino para la conquista del cielo y, eventualmente, del espacio.

**Figura 2.1**  
*Tornillo Aéreo*



*Nota.* Boceto de un tornillo aéreo, predecesora de los vehículos aéreos modernos. Grafico realizado por Leonardo da Vinci, a finales del siglo XV (Biblioteca Ambrosiana, 2024)

### 2.2.1. Inicios tecnológicos de los vehículos VANT

Para identificar los inventos que precedieron a los VANT modernos, y dado el gran número de modelos y tipos de vehículos voladores desarrollados a lo largo de la historia, nos centraremos en dos aspectos: primero, exploraremos los desarrollos iniciales de los vehículos aéreos controlados de forma remota; y segundo, examinaremos la tecnología precursora de las hélices diseñadas para su uso vertical.

#### *The Aerial Target, 1917.*

Desarrollado por la *Royal Flying Corps* (RFC) a finales de la Primera Guerra Mundial, el diseño del primer vehículo aéreo controlado a distancia estuvo a cargo del Dr. Archibald Low. Su funcionamiento fue comprobado con éxito en marzo de 1917, aunque no fue utilizado en el campo de batalla debido a diferentes desperfectos (Imperial War Museums, 2024).

#### **Figura 2.2**

*Fotografía del primer vehículo volador de ala fija, controlado a distancia.*



*Nota. Imagen extraída de la colección del profesor Low Archibald Montgomery. (Imperial War Museums, 2024)*

## El Autogiro Cierva C.1, 1920.

Creado por el ingeniero español Juan de la Cierva, el autogiro, según las propias palabras del inventor, *«fue creado para lograr vuelos más seguros, ayudando al desarrollo de la aviación civil»* (BBVA OpenMind, 2024). La hélice del autogiro no estaba conectada a ningún tipo de motor o mecanismo; fue diseñada exclusivamente para girar cuando el aire empujaba cada una de sus palas durante el descenso de la nave. Esto permitía un aterrizaje más suave y eliminaba la necesidad de una amplia pista de aterrizaje. Aunque el desarrollo del autogiro no perduró en el tiempo, fue pionero en el desarrollo tecnológico de la hélice para su uso vertical con éxito. Uno de sus logros históricos más destacados ocurrió en 1928, cuando realizó el primer vuelo a través del Canal de la Mancha, pilotando él mismo el modelo experimental Cierva C.8.

### Figura 2.3

*Fotografía del autogiro modelo Cierva C.8.*



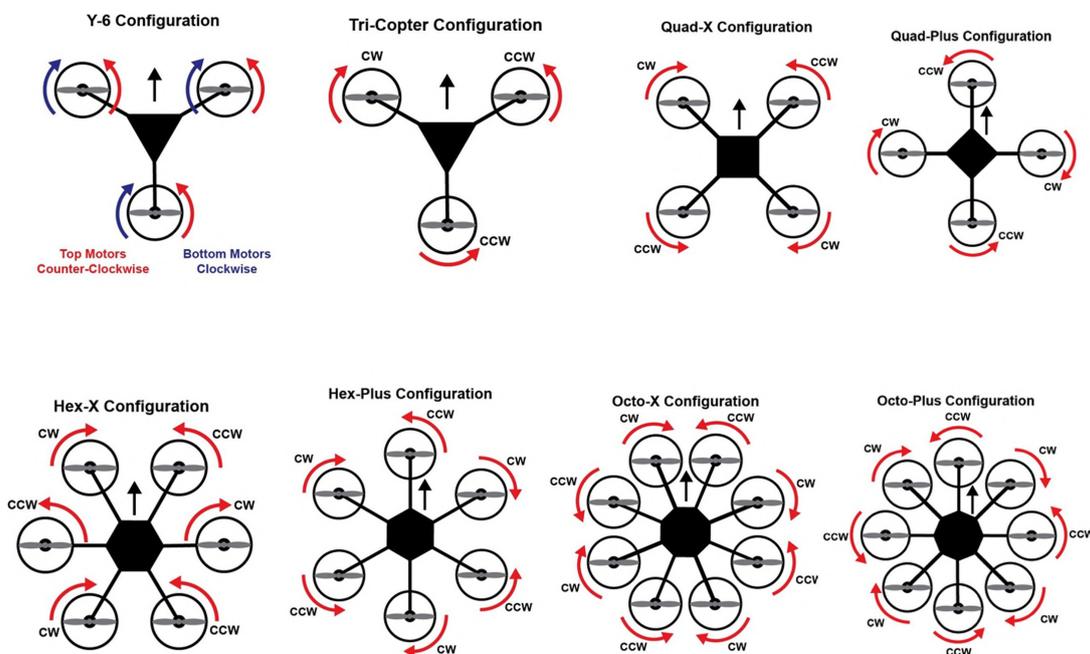
*Nota. Fotografía tomada cuando cruzó el Canal de la Mancha pilotado por Juan de la Cierva, llevando como único pasajero a un periodista francés. Adaptado de (BBVA OpenMind, 2024).*

## 2.2.2. Configuraciones de los vehículos VANT

A lo largo de los años y debido a diversas necesidades, especialmente en los conflictos bélicos entre las potencias mundiales, se han desarrollado en secreto distintos tipos y configuraciones de vehículos VANT. Entre estos tipos se encuentran helicópteros, VANT de ala fija y VANT de múltiples rotores. Las configuraciones varían desde helicópteros de una hélice y de dos hélices con giro inverso, hasta VANT de ala fija con propulsores o un solo motor, y VANT multirrotores con cuatro, seis y ocho motores dispuestos en diversas formas.

**Figura 2.4**

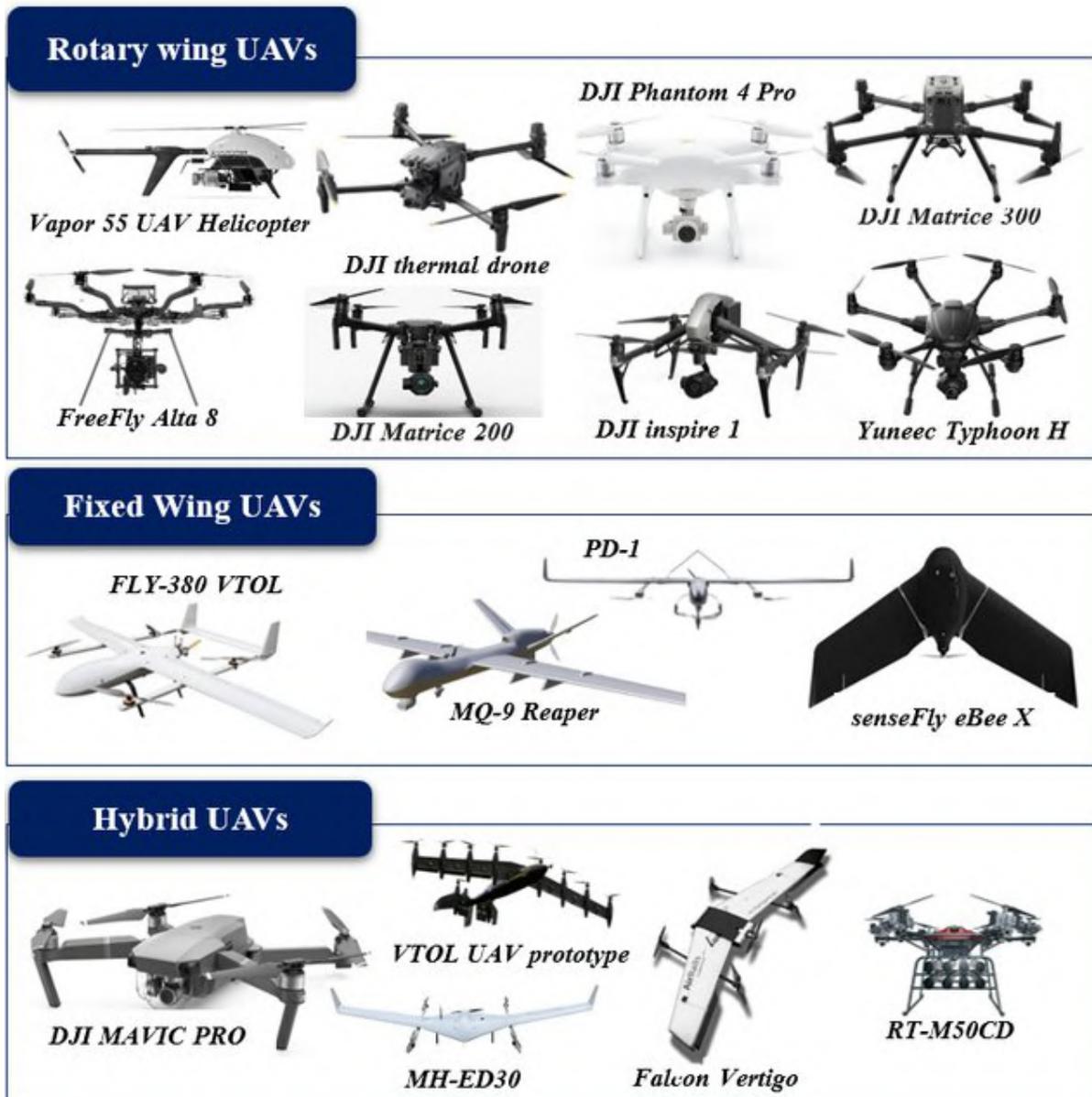
*Modelos de vehículos VANT.*



*Nota.* Modelos de vehículos aéreos no tripulados multirrotores, estos vehículos además de diferenciarse por la cantidad de motores que utilizan, también se diferencian por la orientación de sus motores. Adaptado de (Derhab et al., 2023).

En los últimos años, gracias al auge tecnológico de los microcontroladores, baterías y a la mayor accesibilidad a la tecnología de VANT en general, impulsada en gran medida por la empresa DJI<sup>®</sup>, el desarrollo de estos vehículos se ha orientado hacia áreas fuera de su propósito inicial. Hoy en día, los VANT se utilizan en la investigación científica, la producción industrial de alimentos, el monitoreo de flora y fauna silvestre y los servicios de mensajería.

**Figura 2.5**  
*Vehículos VANT de uso principalmente civil.*



*Nota.* Clasificación de los vehículos aéreos no tripulados por el tipo de vuelo que utilizan: Hélices giratorias, ala fija e híbridos. Adaptado de (Partheepan et al., 2023, enero).

### 2.2.3. Componentes principales de los vehículos VANT

Para listar los componentes principales de un VANT, primero debemos analizar el funcionamiento básico de un vehículo aéreo no tripulado. En primer lugar, un requisito fundamental para que un vehículo sea clasificado como un VANT es que pueda volar. Para ello, necesita una estructura, motores y hélices entre otros. En segundo lugar, debemos asegurar que el VANT sea capaz de mantener su vuelo de forma autónoma. Para esto, a nivel de hardware, es indispensable una Unidad de Medición Inercial (IMU) y un microcontrolador que manipule de forma autónoma su vuelo. Los componentes principales de un VANT son:

#### 1. Marco

La estructura mecánica<sup>2</sup>, es el componente físico que soporta e integra todos los elementos del sistema, incluyendo los motores, hélices, controladores electrónicos, baterías, sensores y sistemas de comunicación. Su diseño debe garantizar rigidez estructural, ligereza, y estabilidad, permitiendo un vuelo eficiente y seguro.

#### Figura 2.6

*Estructura modular comercial de la marca DJI.*



*Nota.* Estructura modular de un vehículo aéreo no tripulado de la marca DJI, modelo: F450. Los motores y las hélices son referenciales. Adaptado de (DJI Innovations, 2023).

---

<sup>2</sup>También conocido como **marco** de un vehículo aéreo no tripulado en español o *frame* en inglés.

## 2. Controlador de vuelo

El controlador de vuelo es el centro de procesamiento de datos donde se ejecuta nuestro sistema de control (software). Este procesador debe tener la capacidad plena de adquirir y enviar señales con la resolución requerida, además de contar con suficiente memoria para almacenar y procesar el algoritmo de control.

**Figura 2.7**  
*ESP32-DevKitC.*



*Nota. Adaptado de (Electronics, 2024).*

## 3. Sensores

El sensor, es un dispositivo que detecta y responde a algún tipo de entrada del entorno físico. La entrada específica podría ser luz, calor, movimiento, humedad, presión, sonido o cualquier otra cantidad ambiental. La salida generalmente es una señal que se convierte para uso en sistemas electrónicos, a menudo en un procesador o como para nuestro caso en un sistema de control. Los sensores que utilizaremos serán los siguientes:

### ■ Acelerómetro

El acelerómetro es un sensor que mide la aceleración lineal en una o más direcciones. Detecta cambios en la velocidad a lo largo de los ejes X, Y y Z. Además, puede medir la aceleración debida a la gravedad, lo que permite determinar la inclinación y la orientación de un objeto. Los acelerómetros se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones, incluyendo dispositivos electrónicos, vehículos aéreos no tripulados (VANT), y sistemas de navegación.

## ■ Giroscopio

Un giroscopio es un sensor que mide la velocidad angular o la rotación alrededor de los ejes de un objeto. Proporciona información sobre cómo un vehículo u objeto está girando o inclinándose en tres dimensiones (ejes X, Y y Z). Los giroscopios son cruciales para el control y la estabilización en aplicaciones como aeronaves, vehículos, y dispositivos electrónicos, ayudando a mantener la orientación y estabilidad.

### Figura 2.8

*Sensor IMU, MPU6050.*



*Nota. Adaptado de (Mechatronics, 2024).*

## 4. Controlador electrónico de velocidad

Un controlador de velocidad electrónico (*ESC*, por sus siglas en inglés) es un dispositivo que regula la velocidad y dirección de un motor eléctrico de acuerdo a las señales que recibe del *controlador de vuelo*. Los *ESC* son especialmente utilizados en aplicaciones que requieren un control preciso de motores sin escobillas (*brushless*), como en vehículos aéreos no tripulados (*VANT*) de tamaño mediano, automóviles de control remoto y otros dispositivos robóticos. Su función principal es recibir señales de un controlador de vuelo y ajustar la potencia enviada al motor, permitiendo cambios en la velocidad y dirección de manera eficiente y controlada.

## Figura 2.9

Controlador de Velocidad Electrónico de 30A.



*Nota.* Adaptado de (Electropro, 2024).

## 5. Motores Brushless

Un motor brushless (sin escobillas) es un tipo de motor eléctrico que no utiliza escobillas para conmutar el flujo de corriente. En su lugar, emplea un controlador electrónico para conmutar la corriente en los devanados del motor, lo que resulta en un funcionamiento más eficiente, duradero y silencioso. Estos motores son ampliamente utilizados en aplicaciones que requieren alta eficiencia y precisión, como vehículos aéreos no tripulados (VANT), automóviles eléctricos y dispositivos industriales de tamaño medio a mas grandes.

## Figura 2.10

Motor Brushless (BLDC), para hélices de 7 - 8 pulgadas.



*Nota.* Adaptado de (HiFiSac, 2024).

## 6. Hélices

Las hélices son componentes que consisten en palas giratorias montadas sobre un eje, diseñadas para generar empuje o tracción en un fluido, generalmente aire o agua, estas pueden estar compuestas por dos o tres palas. En el contexto de los vehículos aéreos no tripulados, las hélices convierten la energía del motor en empuje, permitiendo al vehículo elevarse, moverse hacia adelante, atrás, o girar en el aire. La eficiencia y el rendimiento de un VANT dependen en gran medida del diseño y la calidad de sus hélices. Específicamente para el uso en vehículos aéreos no tripulados las hélices se diferencian por el sentido de giro: CW (giro en sentido horario) y CCW (giro en sentido antihorario).

**Figura 2.11**

*Hélices compuestas de nylon y fibra de carbono.*



*Nota. Adaptado de (HiFiSac, 2024).*

## 7. Fuente de energía

Los VANT así como cualquier otro equipo electrónico, funcionan en base a energía eléctrica, lo que para este caso, puede otorgarse a través de baterías o fuentes de energía estacionarias (utilizados para casos experimentales). Por lo general y para uso en zonas exteriores, los VANT están equipadas con baterías compuestas por celdas de polímeros de litio (baterías LiPo), ideales para estos equipos, ya que ofrecen alta densidad energética y pueden proporcionar corrientes elevadas de energía, limitadas solamente por su factor de descarga. Sin embargo requieren un manejo cuidadoso, debido a que son sensibles a su sobrecarga y a la descarga excesiva.

## 2.3. Variables e indicadores

### 2.3.1. Identificación de variables

- **Variable Independiente**

*Señal de referencia:* Esta señal sera la orden o tarea a cumplir por el VANT en la regulación de la orientación.

- **Variable Dependiente**

*Orientación:* Esta determinado por la variación de los ángulos Tait-Brayan, y para el caso del VANT, esta variable dependerá de la señal de control.

### 2.3.2. Operacionalización de variables

- **Variable Independiente**

La señal de referencia estará conformada por los ángulos Roll y Pitch designados manualmente, y cada uno de los ángulos están expresados en grados sexagesimales.

- **Variable Dependiente**

La orientación del VANT se expresará en los ángulos Roll y Pitch donde sus valores serán el resultado del procesamiento de la señal de referencia a través del sistema de control diseñado. La unidad a utilizar será el grado sexagesimal y el rango de medición esperado es de  $-180^\circ$  a  $+180^\circ$ .

## 2.4. Definición de términos básicos

### 2.4.1. Vehículo aéreo no tripulado

Un vehículo aéreo no tripulado, comúnmente conocido como drones o UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*), son aeronaves que operan sin la necesidad de un piloto humano a bordo. Son controlados de forma remota o pueden volar de manera autónoma mediante el uso de software de control de vuelo en combinación con sensores y sistemas de posicionamiento.

#### ■ *Tipos más comunes de VANTs*

- VANTs de ala fija.
- VANTs de hélices rotatorias.
- VANTs híbridas.

### 2.4.2. Modelamiento matemático de un VANT

#### Conceptos y generalidades

En términos generales, un modelo matemático es una representación abstracta de un sistema real utilizando el lenguaje y los conceptos matemáticos. Se emplean ecuaciones, funciones, matrices, y otros elementos matemáticos para describir y analizar el comportamiento de un sistema bajo ciertas condiciones. Los modelos matemáticos permiten simular, predecir y optimizar el comportamiento de sistemas en diversos campos como la física, la ingeniería, entre otros. Estos modelos son esenciales para comprender mejor los fenómenos complejos y tomar decisiones basadas en datos cuantitativos.

En la literatura actual, existen diferentes métodos matemáticos para poder obtener la dinámica de distintos sistemas o fenómenos naturales. Cada uno de estos métodos tienen sus

propias características y aplicaciones específicas. Para lograr nuestro objetivo, nos enfocaremos en el estudio del modelo matemático del VANT utilizando el método<sup>3</sup> de Newton-Euler, debido a que es una técnica con aplicación más intuitiva porque se centra en las fuerzas y torques que actúan sobre el sistema, basándose en las leyes de Newton y utilizando las ecuaciones de Euler para la rotación.

## El método de Newton-Euler

El método de Newton-Euler es una de las técnicas fundamentales en la dinámica de sistemas mecánicos, utilizada para describir el desplazamiento de cuerpos rígidos. Esta formulación combina las leyes del movimiento de Newton con las ecuaciones de Euler para abordar tanto la dinámica traslacional como la rotacional de un cuerpo.

- **Leyes de Newton:** Son leyes físicas por las cuales se rige la mecánica clásica, ya que cada una de ellas describe como interactúan las fuerzas y los cuerpos. Aunque inicialmente fue expuesta tomando como ejemplo una partícula (objeto con masa pero sin volumen), años después diferentes matemáticos entre los cuales destaca **L. Euler**, lograron generalizar las leyes de Newton a cuerpos rígidos. Estableciendo la base para el estudio del movimiento de objetos. Son tres, y cada una se describe de la siguiente manera:

- **Primera Ley (Inercia):** Si la fuerza resultante sobre una partícula es cero durante un intervalo de tiempo  $F(t) = 0$ , entonces la velocidad de la partícula relativa a un sistema de referencia inercial se mantiene constante en ese intervalo de tiempo (Ardema, 2010):  $v(t) = \text{constante}$

- **Segunda Ley (Fuerza y aceleración):** La aceleración de una partícula en un sistema de referencia inercial en un instante de tiempo es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre ella en ese instante. La constante de proporcionalidad es la masa, la cual es una propiedad de la partícula (Ardema, 2010). Así, en el instante  $t$ :

$$F(t) = ma(t)$$

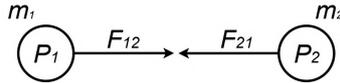
---

<sup>3</sup>Nótese que, en este contexto, se emplea el término **método** como traducción del inglés *formalism*, ya que su traducción literal "formalismo" no resultaría adecuada en este caso.

- **Tercera Ley (Acción y reacción):** Dadas dos partículas  $P_1$  y  $P_2$  con masas  $m_1$  y  $m_2$ , la fuerza ejercida por  $P_1$  sobre  $P_2$ , denotada como  $F_{12}$ , es igual y opuesta a la fuerza ejercida por  $P_2$  sobre  $P_1$ , denotada como  $F_{21}$ . Estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que une ambas partículas (Ardema, 2010); es decir:  $F_{21} = -F_{12}$ .

**Figura 2.12**

*Tercera ley de Newton.*



*Nota.* Representación gráfica de la tercera ley de Newton, mediante la interacción de dos partículas.

- **Ecuaciones de Euler:** Se utiliza para definir matemáticamente el movimiento de un cuerpo rígido y se utiliza introduciendo un sistema de referencia que este fijo al centro de masa del cuerpo y que además sus ejes de referencia coincidan con los ejes de referencia inercial del objeto.

Una de las representaciones de las ecuaciones de Euler es la siguiente:

$$M_{Bx} = I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z$$

$$M_{By} = I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x$$

$$M_{Bz} = I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y$$

donde:

- $M_{Bx}$ ,  $M_{By}$ ,  $M_{Bz}$  representan los componentes del momento de fuerzas externas (también llamado torque o momento resultante) con respecto al punto  $\mathbf{B}$  en los ejes de un sistema de referencia ligado al cuerpo.
- $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  son los momentos principales de inercia respecto a los ejes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ .
- $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  son las componentes de la velocidad angular en los ejes del sistema de referencia ligado al cuerpo.

Para su uso se debe tener en cuenta que solo se aplican a ejes principales de inercia fijos al cuerpo, con origen inmóvil o en el centro de masa (Ardema, 2010).

- **Dinámica Traslacional:** Estudia el movimiento lineal de un objeto en el espacio, mientras el objeto, no presente giros en su propio eje. Utiliza principalmente las Leyes de Newton para describir como una fuerza neta produce una aceleración en el objeto.
  
- **Dinámica Rotacional:** En términos generales, estudia el movimiento de rotación de un cuerpo al rededor de un eje. Enfocándose en como los cuerpos giran o rotan bajo la influencia de torques. Para su análisis se utilizan conceptos como el momento de inercia, el torque y la velocidad angular.

### **Pasos Generales para la Aplicación en Vehículos Aéreos No Tripulados (VANT)**

En el contexto de los vehículos aéreos no tripulados, la formulación Newton-Euler se utiliza para modelar tanto la dinámica del cuerpo principal del vehículo y sus componentes móviles, como hélices y rotores. Los pasos genéricos en la aplicación de esta formulación es la siguiente:

1. **Definición de los sistemas de coordenadas:** Consiste en especificar o establecer dos sistemas de coordenadas inerciales, uno aplicado en un punto en el espacio y otro asociado al centro de gravedad del VANT.
2. **Identificación de fuerzas y torques:** Determinamos todas las fuerzas y torques que actúan sobre el VANT (por ejemplo: Empuje de los motores, peso del fuselaje, sentido de giro de las hélices, etc.).
3. **Cálculo de las aceleraciones:** En esta etapa utilizamos las leyes de Newton y las ecuaciones de Euler para calcular la aceleración lineal del centro de masa y la aceleración angular.
4. **Integración de las ecuaciones del movimiento:** Por ultimo, resolvemos las ecuaciones diferenciales resultantes de la anterior etapa para obtener la posición, velocidad, orientación y velocidad angular del VANT, todo ello en función al tiempo.

### 2.4.3. Backstepping

#### Definiciones básicas y teorías

El control Backstepping es un método de diseño recursivo propuesto al inicio de la década del 1990 por Krstic, Kanellakopoulos y Kokotovic (Jing Zhou, 2008), el cual vincula la elección de una función de control de Lyapunov con el diseño de un controlador de retroalimentación, garantizando la estabilidad asintótica global de sistemas de retroalimentación estricta. Este método es particularmente exitoso en la estabilización de sistemas dinámicos y es ampliamente utilizado en campos como la ingeniería mecánica, robótica, ingeniería eléctrica, sistemas de energía, sistemas termomecánicos, redes neuronales y sistemas caóticos (Sundarapandian Vaidyanathan, 2020).

El Backstepping se diferencia de otros métodos de control en que no persigue la asignación precisa de los valores propios de un sistema, sino que logra la estabilización de Lyapunov al desplazar colectivamente todos los valores propios en una dirección favorable en el plano complejo. Esto se realiza de manera estructurada y sistemática, facilitando el cálculo de las ganancias de control de manera simbólica y numérica (Krstic & Smyshlyaev, 2008).

En este apartado se expondrá de manera formal y breve, las definiciones de funciones y estabilidad con que se trabajara para explicar de manera concisa la teoría básica del Backstepping.

#### Definición de funciones

Iniciaremos con las definiciones formales de las funciones. Examinaremos la función  $V(\mathbf{x})$ . Decimos que  $V(\mathbf{x})$  es:

- **positiva definida** si  $V(0) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) > 0$  con  $\mathbf{x} \neq 0$ .
- **positiva (semi)definida** si  $V(0) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  con  $\mathbf{x} \neq 0$ .

- **negativa (semi)definida** si  $-V(\mathbf{x})$  es positiva (semi)definida.
- **radialmente no acotada** si  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  cuando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

## Definiciones de Estabilidad

Para entender de mejor forma los siguientes conceptos, consideraremos un sistema con estado  $\mathbf{x}$  y dinámica  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ , y una función  $\mathbf{x}(t)$  con un estado inicial conveniente  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , el cual satisface la dinámica del sistema siendo esta la respuesta o solución (Aerostudents, s.f., traducción propia). Entonces el sistema sera:

- **Estable** si, para un  $\epsilon > 0$  dado, existe un  $\delta(\epsilon) > 0$  tal que todas las soluciones con condiciones iniciales  $|\mathbf{x}(0)| < \delta$  satisfacen  $|\mathbf{x}(t)| < \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ . En otros términos, si perturbamos el sistema dentro de los límites dado por  $\delta(\epsilon)$ , el sistema permanecerá dentro de una región específica ( $\epsilon$ ) y no divergerá.
- **Asintóticamente estable (AS)** si es estable y se puede encontrar un  $\delta$  tal que todas las soluciones con  $|\mathbf{x}(0)| < \delta$  satisfacen  $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Explicado de forma más sencilla, podríamos decir que si perturbamos el sistema dentro de los límites dados por  $\delta(\epsilon)$  el sistema no solo permanecerá dentro de la región específica dada por  $\epsilon$ , sino que también volverá a su estado de equilibrio  $\mathbf{x}(0) = 0$ .
- **Global asintóticamente estable (GAS)** si es asintóticamente estable para cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(0)$ . Este término es utilizado para sistemas robustos, es decir que no importa si perturbamos el sistema fuera del límite dado por  $\delta(\epsilon)$ , el sistema siempre regresará a su estado de equilibrio.

## La Teoría de Lyapunov

Supongamos que tenemos un sistema invariante en el tiempo con estado  $\mathbf{x}$  y dinámica  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ . ¿Cómo demostramos que el sistema es estable? Para eso, podemos usar la teoría de Lyapunov.

Lo primero que necesitamos es una función de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$ . Esta función debe ser positiva definida<sup>4</sup> en una región  $\Gamma$  cerca de  $\mathbf{x} = 0$ .

Segundo, examinaremos  $\dot{V}$ . Podemos reescribir esto como

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}).$$

La teoría de Lyapunov ahora establece que...

- Si  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es negativa semidefinida en la región  $\Gamma$ , entonces la solución es estable.
- si  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es definida negativa en la región  $\Gamma$ , entonces la solución es asintóticamente estable.
- si  $V(\mathbf{x})$  es definida positiva y radialmente no acotada para todo  $\mathbf{x}$ , y si  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es definida negativa para todo  $\mathbf{x}$ , entonces la solución es globalmente asintóticamente estable.

La teoría de Lyapunov es en realidad bastante lógica. Si se tiene una función que siempre está disminuyendo, entonces eventualmente debe alcanzar cero. Por lo tanto, no hay forma de que el sistema diverja: tiene que ser estable (Aerostudents, s.f., traducción propia).

---

<sup>4</sup>Es útil pensar en la función  $V$  como una especie de energía. Nunca es negativa y solo puede ser cero en el estado cero.

## Un ejemplo de Backstepping

La dificultad del control se intensifica si la entrada  $u$  no tiene un impacto directo en  $x$ . Por ejemplo, podríamos tomar en cuenta un sistema que incluya un integrador, tal como:

$$\dot{x} = x - x^3 + \xi, \quad (2.1)$$

$$\dot{\xi} = u. \quad (2.2)$$

Para empezar, analicemos solamente la primera ecuación, haciendo como si  $\xi$  fuese nuestra entrada de control, y para hallar su valor adecuado. La función candidata de Lyapunov será:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (2.4)$$

su respectiva derivada sera:

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} \quad (2.5)$$

La forma de  $\dot{x}$  se designa para asegurar que la función  $V(x)$  decrezca y el valor de su derivada  $\dot{V}(x)$  sea negativo para cualquier valor que tome  $x$  y que sea 0 para  $x = 0$ . La constante  $k$  se coloca para poder ajustar la proporción con la que se corrige el error.

$$\dot{x} = -kx - x^3, \quad \text{con } k > 0 \quad (2.6)$$

ahora, si reemplazamos la ecuación (2.6) en (2.5), obtendremos un nuevo valor para  $\dot{V}(x)$  en el cual se cumple la condición de estabilidad de Lyapunov.

$$\dot{V} = x(-kx - x^3) = -kx^2 - x^4 \quad (2.7)$$

Entonces, para hallar el valor de  $\xi$  deseado ( $\xi_d$ ) igualamos la ecuación (2.1) con la ecuación (2.6).

$$-kx - x^3 = x - x^3 + \xi_d \quad (2.8)$$

despejando  $\xi_d$  obtendremos:

$$\xi_d = -(k + 1)x \quad (2.9)$$

El valor encontrado para  $\xi_d$  sera nuestro *control virtual* ya que no lo podemos manipular directamente y la variación de  $\xi$  a  $\xi_d$  sera nuestro *error de estado* ( $z$ ), el cual esta definido de la siguiente forma:

$$z = \xi - \xi_d = \xi + (k + 1)x \Rightarrow \xi = z - x(k + 1) \quad (2.10)$$

Podemos usar este valor de  $\xi$  hallado en (2.10) y reemplazarlo en la ecuación (2.1) para reescribirlo de la siguiente forma:

$$\dot{x} = x - x^3 + z - kx = -x^3 - kx + z \quad (2.11)$$

ademas, la derivada del error de estado sera igual a:

$$\dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\xi}_d = u - \dot{\xi}_d = u - (k + 1)\dot{x} = u - (k + 1)(-kx - x^3 + z) \quad (2.12)$$

Ahora necesitamos incorporar  $z$  en nuestra función de Lyapunov. Una alternativa sería:

$$V(x, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\xi + (k + 1)x)^2 \quad (2.13)$$

y el desarrollo de la derivada de nuestra nueva función de Lyapunov sera:

$$\dot{V}(x, z) = x\dot{x} + z\dot{z} = x(-kx - x^3 + z) + z(u - (k + 1)(-kx - x^3 + z)) \quad (2.14)$$

$$= -kx^2 - x^4 + zx + z(u + (k + 1)(-kx - x^3 + z))$$

$$\dot{V}(x, z) = -kx^2 - x^4 + z(x + u + (k + 1)(-kx - x^3 + z)) \quad (2.15)$$

Lo que buscamos es que el sistema se estabilice, y para que ello se cumpla, tenemos que asegurarnos de que  $\dot{V}(x, z)$  tenga valores negativos, o 0 (cuando  $x = 0$  y  $z = 0$ ). Entonces, la

forma que  $\dot{V}(x, z)$  debería tener sería:

$$\dot{V}(x, z) = -kx^2 - x^4 - cz^2, \quad \text{con } c > 0 \quad (2.16)$$

para lograr que  $\dot{V}(x, z)$  tome siempre un valor negativo, se tiene que escoger adecuadamente el valor de  $u$ . Entonces, para obtenerlo igualaremos las ecuaciones (2.16) y (2.15), quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -kx^2 - x^4 - cz^2 &= -kx^2 - x^4 + z \left( x + u + (k + 1)(-kx - x^3 + z) \right) \\ -cz &= x + u - (k + 1)(z - xk - x^3) \\ \Rightarrow u &= -cz - x + (k + 1)(z - xk - x^3) \end{aligned} \quad (2.17)$$

el valor obtenido de  $u$  hace que  $\dot{V}(x, z)$  sea negativa definida, por lo tanto el sistema sera estabilizado.

Ahora, ¿qué hemos hecho? Queríamos estabilizar  $x$ . Para lograrlo, proporcionamos un valor deseado para  $\xi$  que lo conseguiría. Continuamos definiendo una señal de error  $z$ , que necesitaba ser estabilizada también. Para ello, fijamos el valor de  $u$ . Si el sistema tuviera más ecuaciones, podríamos continuar retrocediendo a través de ecuaciones como estas. Este procedimiento se llama **Backstepping** (Aerostudents, s.f., traducción propia).

## 2.4.4. Control en Modo Deslizante (Sliding Mode Control)

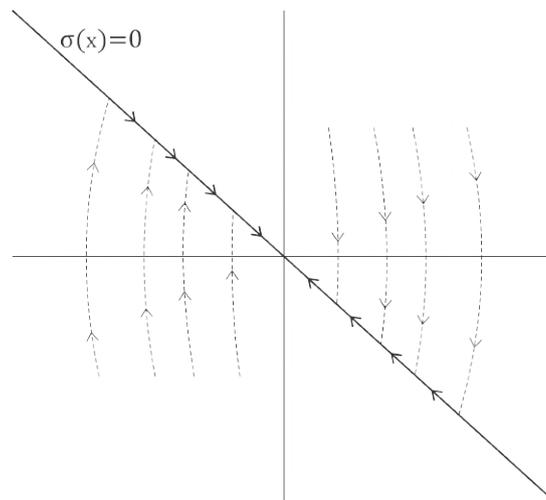
### Definiciones básicas y teorías

El Control en Modo Deslizante (*SMC*, por sus siglas en inglés) es una técnica robusta de control no lineal basada en el concepto de forzar la dinámica del sistema hacia una superficie deseada llamada *superficie de deslizamiento* y mantenerla sobre esta mediante una ley de control discontinua. Fue desarrollado en la Unión Soviética durante la década de 1950, con importantes contribuciones de Emelyanov y Utkin (Utkin, 1992). Esta técnica es especialmente eficaz frente a incertidumbres, perturbaciones externas y variaciones paramétricas.

El enfoque principal del SMC es diseñar una ley de control, tal que, el sistema alcance una superficie definida  $\sigma(\mathbf{x}) = 0$  en un tiempo finito y luego se mantenga sobre esta superficie. Una vez en dicha superficie, el sistema se desliza a lo largo de ella, siguiendo una dinámica reducida que es insensible a ciertas perturbaciones.

### Figura 2.13

*Superficie deslizante ( $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ ).*



*Nota.* Representación típica de una superficie deslizante, dentro de un eje de coordenadas aleatorio.

Este método ha sido ampliamente adoptado en robótica, sistemas eléctricos, electrónica de potencia, aeronáutica y control de vehículos autónomos, debido a su simplicidad de diseño y robustez inherente (Edwards & Spurgeon, 1998).

## Definición de funciones

Al igual que en otras técnicas de control, la estabilidad del sistema en SMC se evalúa a través del uso de funciones de Lyapunov. Para ello, se define una función escalar  $\sigma(\mathbf{x})$  llamada *función de deslizamiento* o *variable de superficie*. La función de Lyapunov  $V(\sigma)$  generalmente se elige como:

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2,$$

la cual es:

- **Positiva definida:** ya que  $V(0) = 0$  y  $V(\sigma) > 0$  para  $\sigma \neq 0$ .
- **Radialmente no acotada:** pues  $V(\sigma) \rightarrow \infty$  cuando  $|\sigma| \rightarrow \infty$ .

## Condición de estabilidad de Lyapunov

Para asegurar estabilidad asintótica o convergencia en tiempo finito hacia la superficie de deslizamiento, se diseña una ley de control tal que la derivada de la función de Lyapunov cumpla:

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma \dot{\sigma} < 0,$$

lo cual implica que  $\sigma$  converge a cero. Una condición típica que garantiza esto es:

$$\dot{\sigma} = -q \operatorname{sign}(\sigma), \quad q > 0,$$

donde  $\operatorname{sign}()$  es la función signo. Esta ley de control discontinua asegura que  $\sigma(t) \rightarrow 0$  en tiempo finito. Una vez que el sistema entra en la superficie de deslizamiento, la dinámica reducida está dada por:

$$\sigma(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\sigma}(\mathbf{x}) = 0.$$

## Definición de la superficie de deslizamiento

La superficie de deslizamiento puede definirse en función de las variables de estado. Por ejemplo, para un sistema de segundo orden con estado  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ , una superficie típica es:

$$\sigma(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + x_2,$$

donde  $c_1 > 0$  es un parámetro de diseño. Esta superficie define una relación deseada entre los estados del sistema que debe mantenerse una vez que el sistema la alcanza.

## Ley de control de modo deslizante

Suponiendo que el sistema tiene la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u,$$

y que  $\sigma(\mathbf{x})$  es diferenciable, se puede diseñar la ley de control como:

$$u = u_{eq} - q \operatorname{sign}(\sigma),$$

donde  $u_{eq}$  es el control equivalente que mantiene  $\dot{\sigma} = 0$  (cuando el sistema ya está en modo deslizante) y  $-q \operatorname{sign}(\sigma)$  es el término discontinuo que garantiza el alcance de la superficie.

## Un ejemplo de Control en Modo Deslizante (SMC)

El Control en Modo Deslizante (SMC) se basa en el diseño de una superficie de deslizamiento  $\sigma(x)$ , sobre la cual el sistema forzado presenta una dinámica deseable. El objetivo es diseñar una ley de control que lleve al sistema hacia esa superficie y luego lo mantenga allí.

Consideremos el siguiente sistema no lineal de segundo orden:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 + u.\end{aligned}\tag{2.18}$$

El sistema es controlable a través de la entrada  $u$ . Deseamos estabilizar el sistema en el origen  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Para aplicar la técnica SMC, primero se define una *superficie de deslizamiento* como una combinación lineal de los estados:

$$\sigma(x) = c_1 x_1 + x_2, \quad \text{con } c_1 > 0.\tag{2.19}$$

La dinámica deseada será que el sistema evolucione de forma tal que  $\sigma(x) \rightarrow 0$ . Para ello, derivamos  $\sigma$  respecto al tiempo:

$$\dot{\sigma} = c_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_1 x_2 + (-x_1 - 2x_2 + u) = -x_1 + (c_1 - 2)x_2 + u.\tag{2.20}$$

La ley de control de tipo SMC tiene como propósito forzar a  $\sigma$  a cumplir con una dinámica del tipo:

$$\dot{\sigma} = -q \operatorname{sign}(\sigma), \quad \text{con } q > 0.\tag{2.21}$$

Esto implica que la señal de control  $u$  debe satisfacer:

$$-x_1 + (c_1 - 2)x_2 + u = -q \operatorname{sign}(\sigma),\tag{2.22}$$

de donde se puede despejar el valor de  $u$ :

$$u = x_1 + (2 - c_1)x_2 - q \operatorname{sign}(\sigma).\tag{2.23}$$

Esta es la ley de control discontinua del SMC. Para analizar la estabilidad del sistema bajo esta ley de control, consideramos una función candidata de Lyapunov:

$$V(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^2,\tag{2.24}$$

cuya derivada temporal es:

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \sigma(-q \operatorname{sign}(\sigma)) = -q|\sigma|. \quad (2.25)$$

Esta expresión es negativa definida para todo  $\sigma \neq 0$ , lo que garantiza que  $\sigma \rightarrow 0$  en tiempo finito. Es decir, el sistema alcanza la superficie de deslizamiento en un tiempo limitado.

Una vez en la superficie  $\sigma = 0$ , se puede observar que esta impone una relación entre los estados:

$$\sigma = c_1 x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -c_1 x_1. \quad (2.26)$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación original del sistema, se obtiene la dinámica restringida sobre la superficie:

$$\dot{x}_1 = x_2 = -c_1 x_1, \quad (2.27)$$

la cual es lineal y estable, ya que  $c_1 > 0$ . Por lo tanto, una vez que el sistema alcanza la superficie, también converge al origen.

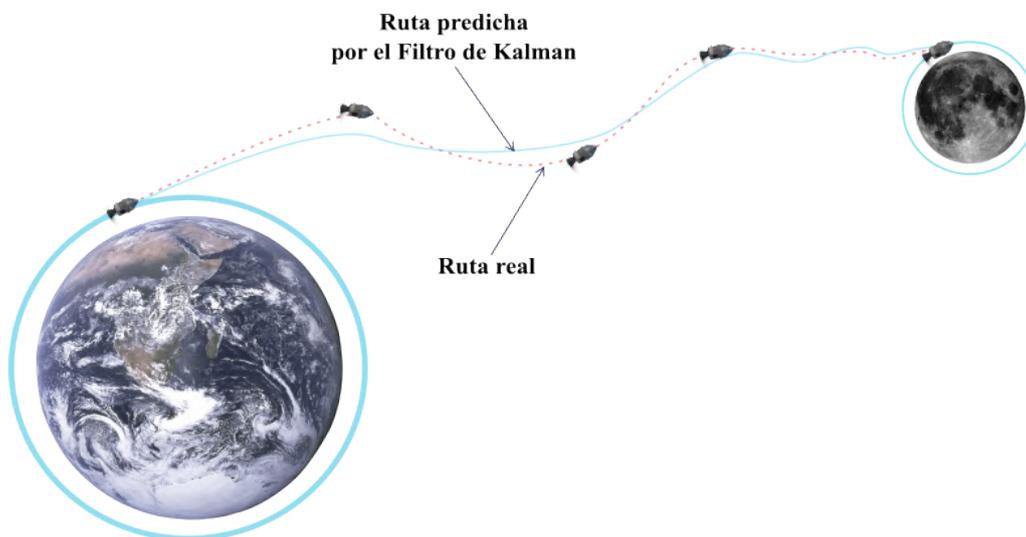
Este ejemplo ilustra cómo la técnica de SMC permite diseñar leyes de control robustas que garantizan la estabilidad del sistema incluso ante perturbaciones e incertidumbres, siempre que se maneje adecuadamente el compromiso entre exactitud y suavidad en la señal de control (Edwards y Spurgeon, 1998; Utkin, 1992).

## 2.4.5. El filtro de Kalman

Desarrollado por **Rudolf E. Kálmán** para abordar los tres problemas planteados por **Norbert Wiener**. El Dr. Kálmán se enfocó en la aplicación de métodos bien conocidos en la teoría de la probabilidad, pero que hasta ese momento, no habían sido utilizados ampliamente en la ingeniería. Como resultado de sus investigaciones, en el año 1960 publicó su artículo titulado: *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, lo que más adelante sería conocido como el **Filtro de Kalman**. El cual consiste en una herramienta matemática con la capacidad de estimar el cambio más probable del estado de un sistema a través del tiempo, tomando como datos las incertidumbres inicialmente supuestas. Esta contribución ganó gran reconocimiento en el mundo científico y tecnológico, especialmente por su aplicación en la misión del **Apolo 11** en el año 1969, durante la histórica llegada del ser humano a la Luna, demostrando su utilidad en la aplicación de sistemas no lineales y su eficiencia en la implementación.

### Figura 2.14

*Apollo 11, Misión de aterrizaje lunar.*



Actualmente, muchos avances tecnológicos no habrían sido posibles sin la ayuda del filtro de Kalman. Desde la navegación espacial hasta la robótica moderna, el Filtro de Kalman ha demostrado ser una herramienta fundamental. Su uso se ha extendido más allá de la ingeniería, encontrando aplicaciones en campos como la economía, donde es utilizado para estimar varia-

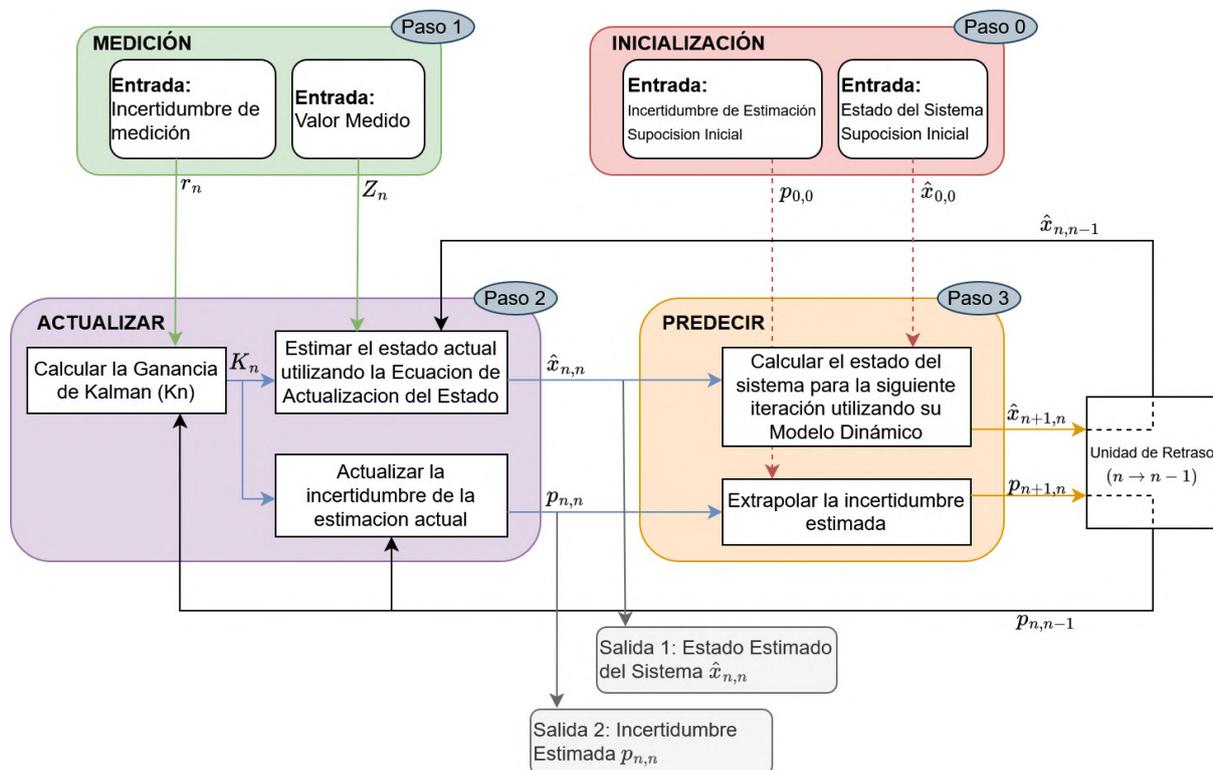
bles no observables o inciertas. Esta versatilidad se debe a su capacidad para estimar valores ocultos de un sistema, incluso cuando las mediciones están afectadas por ruido, y para predecir estados futuros basándose en estimaciones pasadas.

## Modelo del sistema

Para un mejor entendimiento del proceso de funcionamiento del filtro de Kalman, nos apoyaremos de la Figura 2.15. El cual nos muestra un detallado diagrama de bloques sobre el funcionamiento del filtro de Kalman para una sola dimensión ( $x$ ).

**Figura 2.15**

*Descripción detallada del algoritmo del Filtro de Kalman.*



*Nota. Adaptado de (Becker, 2023).*

La **Inicialización** (*Paso 0*) se realiza solo una vez, y únicamente al inicio del proceso. Este valor inicial puede ser proporcionado por otro sistema, por un sensor diferente o incluso por un experto con experiencia en el fenómeno que se desea observar. La importancia de este paso radica en que el Filtro de Kalman realiza sus cálculos a partir de un valor previo del parámetro

a estimar. Por ello, la precisión de esta primera estimación tendrá un impacto significativo en los primeros pasos del filtro. Si el valor inicial está muy alejado del valor real, puede generar grandes errores en las primeras iteraciones o causar una inestabilidad temporal en la estimación.

La **Medición** (*Paso 1*) se ejecuta en cada ciclo de actualización. En esta etapa, se obtienen dos elementos fundamentales: el valor medido y la incertidumbre asociada a dicha medición, representada por la varianza  $r_n$ . Esta varianza nos indica cuán confiable es el dato medido: a mayor varianza, menor será la confianza del filtro en esa medición. En consecuencia, el filtro se reajustará automáticamente en el *Paso 2*, ponderando menos la información proveniente de mediciones poco confiables, hasta alcanzar un equilibrio donde la incertidumbre tienda a estabilizarse.

**Actualización** (*Paso 2*). Esta etapa puede considerarse el corazón del Filtro de Kalman, ya que en ella se realiza el ajuste del estado estimado en función de la nueva medición. En cada iteración, se actualizan tres componentes fundamentales: la estimación del estado ( $\hat{x}_{n,n}$ ), la incertidumbre de estimación actual o covarianza del error ( $p_{n,n}$ ) y la ganancia de Kalman ( $K_n$ ). Estas variables se recalculan constantemente, incorporando la retroalimentación obtenida en el *Paso 3*, lo que permite refinar progresivamente la estimación del parámetro deseado.

**Predicción** (*Paso 3*). Aunque la salida del filtro se obtiene en el *Paso 2*, la predicción juega un rol esencial al anticipar el comportamiento del sistema en la siguiente iteración. En esta etapa se proyecta el valor estimado del estado hacia el futuro ( $\hat{x}_{n+1,n}$ ), utilizando el modelo dinámico del sistema, y se extrapola también la incertidumbre asociada (covarianza del error  $p_{n+1,n}$ ). Esta información será utilizada en la próxima actualización, permitiendo que el filtro pueda reajustarse continuamente y converger hacia el valor real del parámetro observado.

Con estos cuatro pasos se resume el funcionamiento básico de un Filtro de Kalman. Es importante aclarar que, para la explicación desarrollada, no se ha considerado el tratamiento del ruido de proceso, y además, el análisis se ha realizado asumiendo únicamente una dimensión espacial ( $x$ ). Una extensión a múltiples dimensiones o la inclusión del ruido de proceso requerirá una formulación matricial más general.

## Ecuaciones generales del Filtro de Kalman

A continuación, se presentan las ecuaciones del Filtro de Kalman en su forma generalizada. En esta formulación, se hace uso de matrices que permiten modelar sistemas en múltiples dimensiones, a diferencia del caso unidimensional que emplea únicamente constantes escalares. Además, se incluye explícitamente la incorporación de la covarianza del ruido del proceso ( $\mathbf{Q}_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) y de medición ( $\mathbf{R}_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ), lo cual permite representar con mayor fidelidad la incertidumbre inherente al sistema.

### Fase de Predicción (Paso 3):

$$\hat{\mathbf{x}}_{n,n-1} = \mathbf{A}_{n-1} \hat{\mathbf{x}}_{n-1,n-1} + \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}$$
$$\mathbf{P}_{n,n-1} = \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{P}_{n-1,n-1} \mathbf{A}_{n-1}^\top + \mathbf{Q}_{n-1}$$

### Fase de Actualización (Paso 2):

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_{n,n-1} \mathbf{H}_n^\top (\mathbf{H}_n \mathbf{P}_{n,n-1} \mathbf{H}_n^\top + \mathbf{R}_n)^{-1}$$
$$\hat{\mathbf{x}}_{n,n} = \hat{\mathbf{x}}_{n,n-1} + \mathbf{K}_n (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \hat{\mathbf{x}}_{n,n-1})$$
$$\mathbf{P}_{n,n} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{P}_{n,n-1}$$

donde:

- $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^s$ : vector de estado del sistema (dimensión  $s$ )
- $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^c$ : vector de entrada de control (dimensión  $c$ )
- $\mathbf{z}_n \in \mathbb{R}^m$ : vector de observaciones o mediciones (dimensión  $m$ )
- $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{s \times s}$ : matriz de transición de estados
- $\mathbf{B}_n \in \mathbb{R}^{s \times c}$ : matriz de entrada de control

- $\mathbf{H}_n \in \mathbb{R}^{m \times s}$ : matriz de observación
- $\mathbf{Q}_n \in \mathbb{R}^{s \times s}$ : matriz de covarianza del ruido del proceso
- $\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$ : matriz de covarianza del ruido de medición
- $\mathbf{P}_{n,n} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ : matriz de covarianza del error de estimación
- $\mathbf{K}_n \in \mathbb{R}^{s \times m}$ : ganancia de Kalman
- $\hat{\mathbf{x}}_{n,n}$ : estimación óptima del estado en el instante  $n$

### Interpretación y ventajas

El filtro de Kalman puede interpretarse como una herramienta que minimiza el error cuadrático medio de la estimación. Algunas de sus ventajas son:

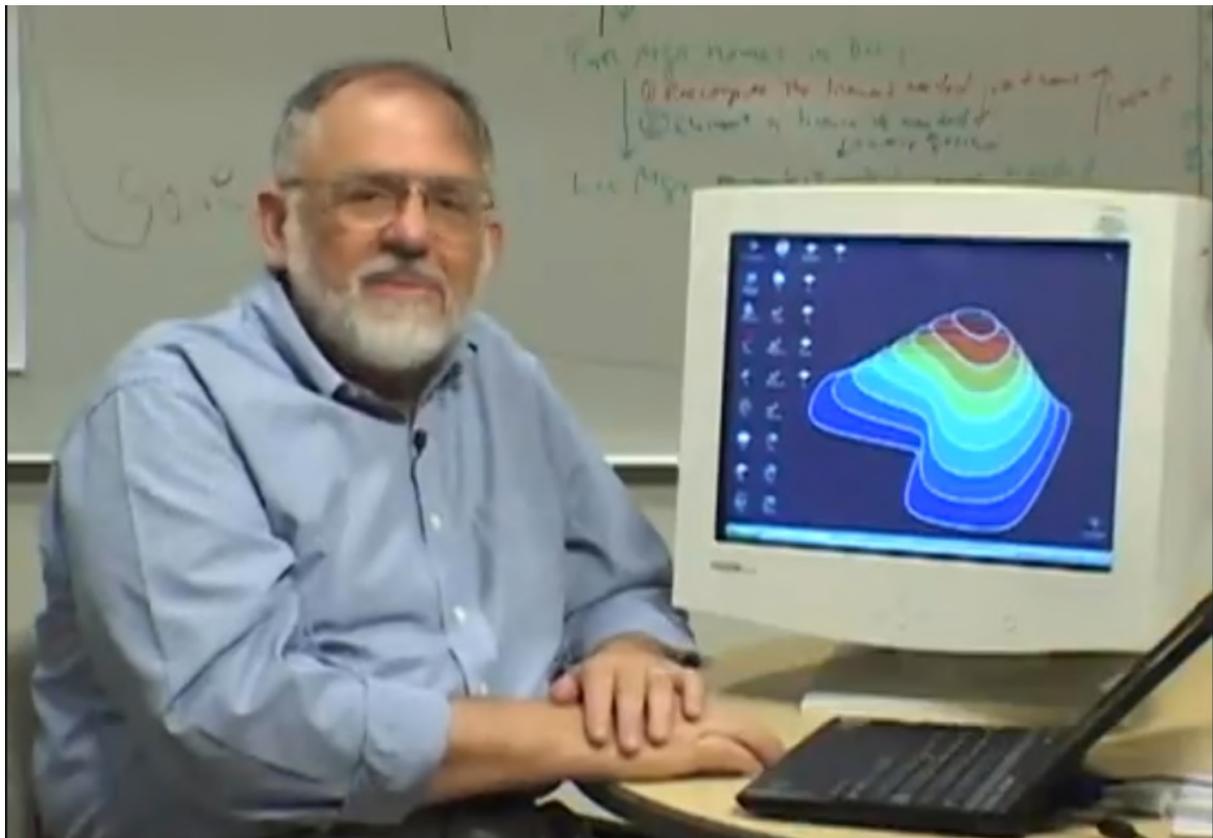
- Proporciona estimaciones óptimas bajo ciertas condiciones (linealidad y ruido gaussiano).
- Opera en tiempo real y con baja carga computacional.
- Permite estimar variables no observables directamente.
- Puede adaptarse a diversas aplicaciones mediante modificaciones como el filtro de Kalman extendido (EKF) y el filtro de Kalman unscented (UKF), que trabajan con sistemas no lineales.

## 2.4.6. MATLAB®

MATLAB (*MATrix LABoratory*) es un entorno de cálculo numérico y simulación ampliamente utilizado en ingeniería y ciencias aplicadas. Inicialmente ideado por el profesor de matemáticas **Cleve Moler** como un software para que sus alumnos pudiesen utilizar las bibliotecas de álgebra lineal LINPACK y EISPACK sin tener que aprender Fortran. Con el paso de los años y el apoyo de **Jack Little** fundaron la empresa MathWorks® y en 1984 MATLAB fue oficialmente lanzado como un producto comercial. Desde entonces, gracias a su capacidad de procesamiento y su amplia colección de herramientas especializadas, MATLAB se ha consolidado como una herramienta importante para el análisis, diseño y simulación de sistemas dinámicos (The MathWorks, Inc., 2023).

### Figura 2.16

*Cleve Moler, Matemático Principal de MathWorks®.*



*Nota. Fotografía tomada del primer video de presentación del software Matlab®. Adaptado de (MathWorks, 2024).*

## Principales características de MATLAB

Entre sus principales características podemos consignar las siguientes:

- **Lenguaje de alto nivel y entorno integrado de desarrollo (*IDE por sus siglas en ingles*):**

Tiene su propio lenguaje de programación el cual está diseñado para realizar operaciones matemáticas de forma intuitiva y además su IDE permite autocompletar variables ya conocidas, detectar errores en mediante la opción de puntos de interrupción (*breakpoints*) y visualizar las variables al momento de la ejecución del programa.

- **Capacidades gráficas avanzadas y herramientas especializadas (*Toolboxes*):**

Te permite realizar gráficos en 2D/3D, crear interfaces gráficas de usuario (*GUI por sus siglas en ingles*) y además nos permite utilizar herramientas pre-diseñadas con dominios específicos: control, robótica, procesamiento de señales, resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (*ODE por sus siglas en ingles*), entre otras.

- **Simulación y modelado (*Simulink*):**

Nos ofrece una alternativa para desarrollar simulaciones de sistemas dinámicos a través del uso de bloques predefinidos y bibliotecas especializadas. Estas simulaciones pueden ser enfocadas en las áreas de mecánica, electrónica, hidráulica (*utilizando Simscape*), por mencionar algunas.

- **Comunidad y Recursos:**

MATLAB es una herramienta que ya lleva 41 años en el mercado, y gracias a su utilidad en el mundo académico y en el entorno de investigación industrial, creció extendiendo el desarrollo de ejemplos y tutoriales para el uso de nuevas funciones y herramientas (*toolbox*) que facilitan la investigación científica y experimentación.

## Aplicaciones

Aunque en sus inicios solo contaba con 80 funciones y trabajaba como una simple *calculadora de matrices*, en la actualidad gracias a las múltiples herramientas y funciones que se han ido desarrollando, MATLAB se utiliza para realizar trabajos en distintos campos, como por ejemplo:

- Machine learning
- Procesamiento de señales
- Deep Learning
- **Sistemas de control**
- Mantenimiento predictivo
- Prueba y medición
- Robótica
- Procesamiento de imágenes y visión artificial
- Comunicaciones inalámbricas

### 2.4.7. Método del Péndulo Bifilar

Para la obtención experimental de los momentos de inercia, uno de los métodos empleados es el péndulo bifilar, que permite determinar el momento de inercia en un plano específico midiendo el periodo de oscilación (Craig, 2006). Esta técnica es especialmente útil cuando la geometría del objeto es difícil de modelar analíticamente.

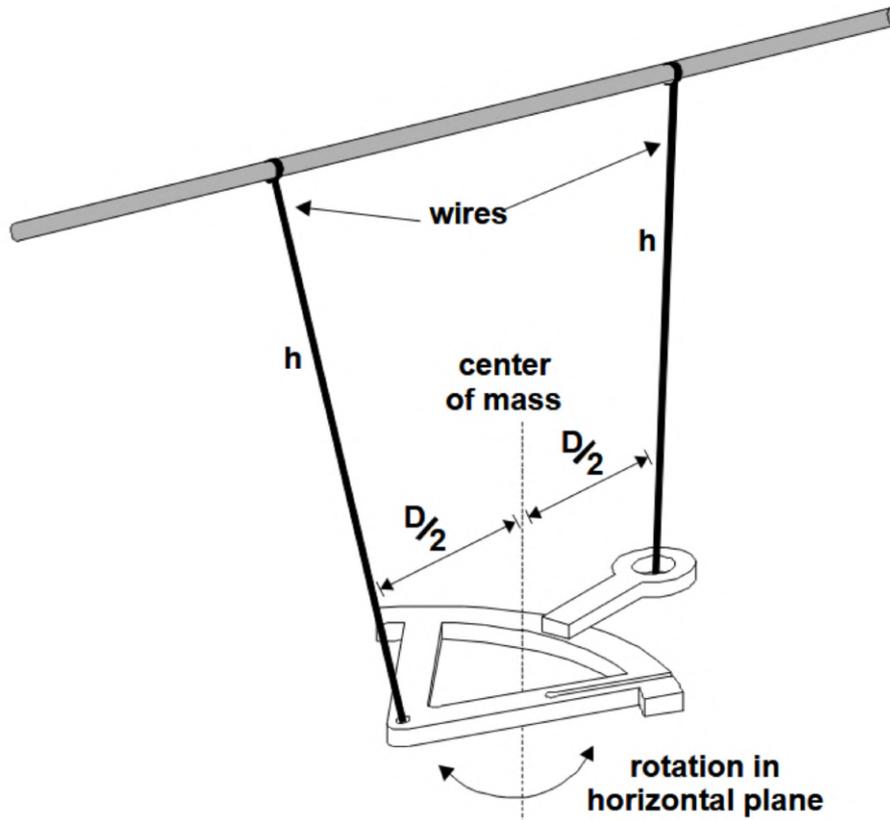
#### Descripción del sistema

El sistema consiste en un cuerpo suspendido mediante dos hilos paralelos, de igual longitud  $h$ , separados por una distancia  $D$ , tal como se muestra en la Figura 2.17. Este montaje permite al cuerpo oscilar libremente en torno a un eje horizontal perpendicular al plano definido

por los hilos.

**Figura 2.17**

*Esquema del péndulo bifilar.*



*Nota.* Diagrama del péndulo bifilar aplicado a un cuerpo irregular. Adaptado de (Richard et al., 1997).

### Fundamento teórico

Cuando el cuerpo se somete a pequeñas oscilaciones, el sistema puede analizarse como un oscilador armónico. El período  $T$  de oscilación está relacionado con el momento de inercia  $I$  del cuerpo por la siguiente expresión:

$$I = \frac{D^2 mgT^2}{16\pi^2 h} \quad (2.3)$$

donde:

- $I$ : Momento de inercia respecto al eje de oscilación [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ],

- $m$ : Masa del cuerpo [kg],
- $g$ : Aceleración de la gravedad ( $9,81 \text{ m/s}^2$ ),
- $h$ : Longitud de los hilos [m],
- $D$ : Distancia entre los puntos de suspensión [m],
- $T$ : Período de oscilación [s].

Todos los datos de la ecuación 2.3, a excepción del período  $T$ , pueden obtenerse directamente. Para determinar el período y, con ello, calcular el momento de inercia  $I$ , es necesario realizar oscilaciones horizontales del cuerpo en estudio. Se debe anotar la cantidad de oscilaciones realizadas por el objeto ( $N_{osc}$ ) y medir el tiempo total que tarda en completar dicho número de oscilaciones ( $t_{osc}$ ), de esta forma, el periodo ( $T$ ) será igual a la división de  $t_{osc}$  entre  $N_{osc}$ . Consideraciones a tomar en cuenta para la medición del período  $T$ :

- No es necesario medir el ángulo de las oscilaciones con respecto al eje de evaluación del cuerpo en estudio.
- Las oscilaciones deben iniciarse con un ángulo de rotación menor a  $90^\circ$  con respecto al eje de evaluación.
- Para obtener un valor preciso del período de oscilación, es recomendable realizar el promediado de tres mediciones independientes, cada una con un número diferente de oscilaciones.

#### **2.4.8. Teorema de los ejes perpendiculares**

En cuerpos simétricos o semisimétricos, las propiedades geométricas implican que los momentos de inercia principales cumplen relaciones particulares. En el caso de estructuras con simetría respecto a dos ejes ortogonales, se cumple que  $I_x = I_y$ , y para el eje perpendicular al plano de simetría se tiene  $I_z = I_x + I_y$  (Craig, 2006). Estas relaciones son de gran utilidad en el modelado de vehículos aéreos no tripulados, especialmente en configuraciones de cuatro motores, donde la distribución de masa es aproximadamente uniforme respecto a dos ejes principales.

## Cuerpos con simetría rotacional en un plano

Si un cuerpo es simétrico con respecto a dos ejes perpendiculares en el mismo plano (por ejemplo, un disco o una cruz simétrica), se cumple:

$$I_x = I_y$$

donde:

- $I_x$  e  $I_y$  son los momentos de inercia respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  que pasan por el centro de masa. Esto ocurre porque la distribución de masa es idéntica en ambas direcciones.

## Teorema de los ejes perpendiculares

Para un cuerpo plano que se ubica en el plano  $xy$ , el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a este plano ( $z$ ) se calcula como:

$$I_z = I_x + I_y$$

Esto es conocido como el teorema de los ejes perpendiculares. Es válido cuando el eje  $z$  pasa por el mismo punto (comúnmente el centro de masa) que los ejes  $x$  y  $y$ , y además todos los ejes son mutuamente perpendiculares.

## Aplicación en cuerpos semi-simétricos

En estructuras semi-simétricas (como un VANT de cuatro motores con brazos ligeramente desiguales en peso, pero con simetría en dos ejes principales), por simetría se cumple que,  $I_x \approx I_y$  y por el teorema de ejes perpendiculares se cumple que,  $I_z \approx I_x + I_y$ .

# Capítulo 3

## Método

### 3.1. Tipo de investigación.

El presente proyecto es del tipo *experimental de laboratorio*, porque se realizará las pruebas en un entorno controlado, dentro de un espacio restringido y se podrá manipular la variable independiente.

### 3.2. Alcance de investigación.

El alcance del proyecto es *explicativo* porque busca establecer una relación de causa-efecto entre el sistema de control que se implementó, y el comportamiento de la orientación del VANT en un entorno controlado.

### 3.3. Diseño de investigación.

El diseño de la investigación corresponde a un estudio experimental de laboratorio, donde se implementa y valida un sistema de control de orientación para un VANT basado en las técnicas de control Backstepping y Control en Modo Deslizante.

El experimento se desarrolló en condiciones controladas para garantizar la precisión en las pruebas. Para su implementación, se utilizó un entorno de laboratorio con una estructura de VANT, en una estación de pruebas que restrinja su movimiento en un espacio controlado. Se empleó sensores de orientación para monitorear los ángulos de Tait-Bryan durante el experimento.

### **3.4. Limitaciones de la investigación**

El presente proyecto está enfocado en el desarrollo de un sistema capaz de controlar los ángulos de orientación roll y pitch de un VANT, utilizando las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante. Para lograrlo, el trabajo se centró más en el desarrollo de las técnicas de control a un nivel teórico para poder usarlo, tanto en un sistema computacional como en su posterior implementación en un hardware específico. Por lo tanto, no se desarrolló el hardware embebido del sistema electrónico de control, sino más bien se usó módulos electrónicos existentes en el mercado. No se realizó un estudio mecánico de la estructura del VANT a utilizar, ya que dicho estudio corresponde a otras áreas de investigación, ajenas a la naturaleza del título profesional al que se está optando.

### **3.5. Aspectos éticos**

Para el desarrollo de la presente investigación se adoptó medidas de seguridad adecuadas para mitigar los riesgos asociados a la manipulación de los dispositivos experimentales, garantizando la integridad física del investigador y la seguridad de los equipos utilizados. El estudio se realizó con un alto grado de responsabilidad social, reconociendo el impacto potencial que un sistema de control de un VANT puede tener en diversas aplicaciones tecnológicas. Finalmente, el proceso de investigación se guía por los principios de integridad y honestidad científica, reportando fielmente los resultados obtenidos y respetando la propiedad intelectual de las fuentes consultadas.

# Capítulo 4

## Implementación del Sistema de Control

### Consideraciones previas a la implementación

Para empezar con la implementación del sistema de control de orientación, se debe considerar la ejecución de diferentes pasos o etapas en cada una de las cuales se ira desarrollando de manera ordenada y sistemática nuestro proyecto.

#### 1. Descripción y desarrollo del modelo dinámico de un VANT de cuatro rotores:

Esta es la primera tarea a cumplir, el desarrollo del modelo dinámico de un VANT que, para este caso, ocupa cuatro motores. Realizar este trabajo no es algo nuevo para la literatura actual, así que el trabajo se centra mas en el entendimiento de dicha tarea y el poder adaptarlo de acuerdo a los objetivos del proyecto.

#### 2. Desarrollo del sistema de control y simulación:

En esta etapa se desarrolla el sistema de control utilizando las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante aplicado al modelo dinámico del VANT, y para validarlo se realizo una simulación del sistema diseñado.

### **3. Desarrollo del Hardware:**

Aquí se desarrolla el circuito embebido en el cual se implementó el sistema de control experimental, y también en seleccionar el chasis y demás componentes físicos necesarios para lograr los objetivos.

### **4. Desarrollo del Software de control:**

Para lograr la correcta ejecución del sistema de control experimental en el circuito embebido desarrollado, se tomo en cuenta las características de todos los componentes mecánicos, eléctricos y electrónicos que son parte del VANT y se enfocó el programa del controlador desarrollado y simulado, a un software de entorno práctico y de implementación.

### **5. Pruebas del sistema de control experimental:**

Ya para finalizar el trabajo, se realizó las pruebas del sistema de control de orientación, evaluando los parámetros de la curva de respuesta en la orientación del VANT, el cual se desarrollo dentro de un área controlada y bajo estricta supervisión.

## **4.1. Descripción y desarrollo del modelo dinámico de un VANT de cuatro rotores.**

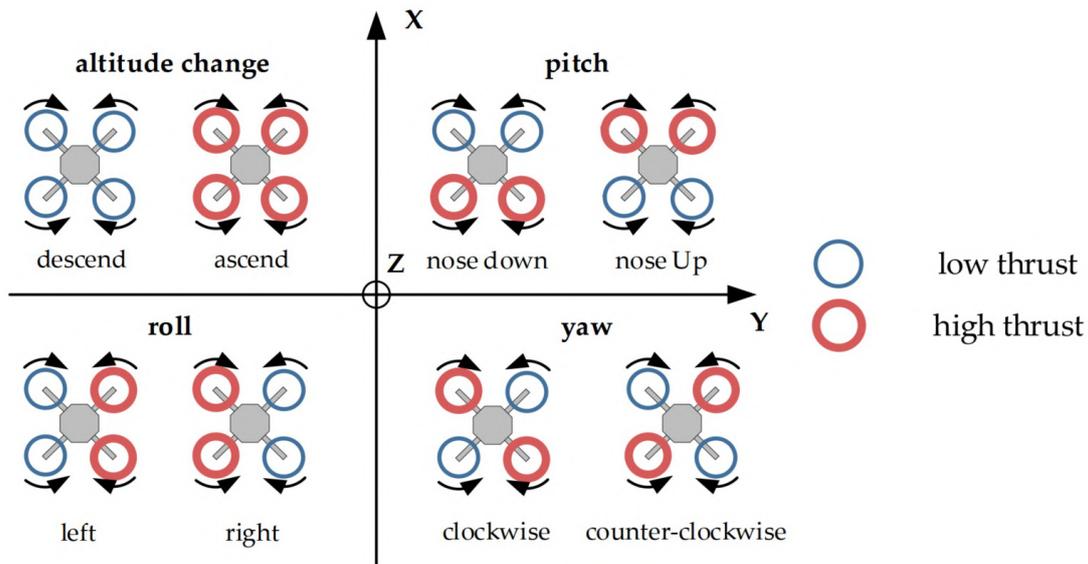
Revisando la literatura existente sobre el desarrollo del modelo dinámico del VANT, se encontraron varios métodos para modelar la dinámica de sistemas mecánicos, entre los cuales se puede mencionar los siguientes: El método de Newton-Euler, el método de Euler-Lagrange, el método de Kane, el método de Hamilton, entre otros.

Para el desarrollo del presente trabajo se utilizo el método Newton-Euler por las razones que se dio en la sección 2.4.2.



**Figura 4.2**

*Principios básicos para el manejo de un VANT de cuatro motores.*



*Nota. Adaptado de (Waliszkiewicz et al., 2020).*

La Figura 4.2 grafica de manera simple pero didáctica la forma en como se pueden generar los movimientos de rotación: Roll, Pitch, Yaw y cambio de altitud a través de la variación de velocidad del giro de los motores.

#### 4.1.2. Utilizando el método de Newton-Euler

Para iniciar con el moldeamiento del VANT, se asumirán condiciones que simplifiquen su modelo físico.

- Se asumirá que la estructura del VANT es rígida y simétrica.
- Las hélices serán rígidas.
- El centro de masa del VANT coincide con su centro geométrico.
- La masa del momento de inercia de cada motor se asumirá como pequeño y despreciable.
- La tierra se asumirá como plana y se considerara como el marco referencial inercial.
- La fuerza de empuje y arrastre son proporcionales al cuadrado de la velocidad de las hélices.

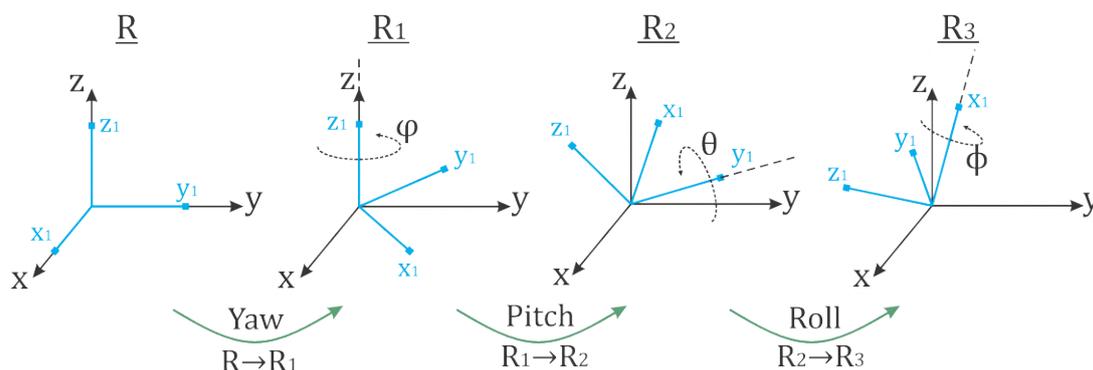
Después de haber realizado las simplificaciones pertinentes, se describe las ecuaciones dinámicas (4.1) que gobiernan el comportamiento del VANT (Bouadi et al., 2007).

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= v \\
 Sm\ddot{\xi} &= F_f + F_t + F_g \\
 \dot{R} &= RS(\Omega) \\
 J\dot{\Omega} &= -\Omega \times J\Omega + \Gamma_f - \Gamma_a - \Gamma_g
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

El desarrollo de cada una de las componentes de las ecuaciones dinámicas, se inicia con el hallazgo de la matriz de rotación del VANT con respecto al marco referencial inercial. Para lograrlo se ha tomado como referencia la Figura 4.3.

**Figura 4.3**

*Representación de los marcos de referencia.*



*Nota.* El marco de referencia  $X, Y, Z$  representa al marco de referencia inercial, y los marcos de referencia  $x_1, y_1, z_1$  representan a las posiciones que va tomando el VANT de acuerdo a cada rotación producida.

La Figura 4.3 muestra cuatro marcos inerciales. El primer marco inercial ( $R$ ) representa nuestro marco referencial inercial ubicado en la tierra, el cuarto marco referencial ( $R_3$ ) representa al marco referencial fijado en el cuerpo del VANT en su posición final y los marcos referenciales  $R_1$  y  $R_2$  representan los movimientos intermedios que realizó el VANT para poder llegar a la orientación representada por  $R_3$ .

## Definiciones de referencia

Según se observa en la Figura 4.3 para cada rotación producida en los ángulos: Roll ( $\phi$ ), Pitch ( $\theta$ ) y Yaw ( $\psi$ ), se cumplen las condiciones:

- $R \rightarrow R_1$ : Yaw ( $\psi$ ),  $\hat{k} = \hat{k}_1$
- $R_1 \rightarrow R_2$ : Pitch ( $\theta$ ),  $\hat{j}_1 = \hat{j}_2$
- $R_2 \rightarrow R_3$ : Roll ( $\phi$ ),  $\hat{i}_2 = \hat{i}_3$

Donde la matriz de rotación completa del VANT (ubicación representada por el marco referencial  $R_3$ ) respecto a  $R$ , sera igual al producto punto de las matrices que describen los movimientos de rotación: *Roll*, *Pitch* y *Yaw*.

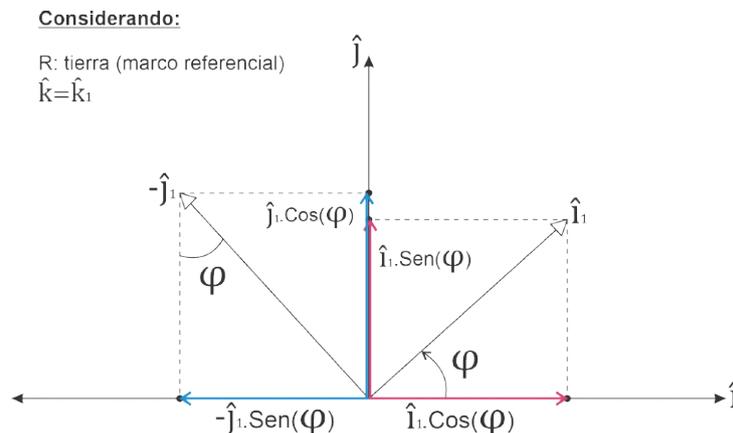
$$\mathbf{R}_{R \rightarrow R_3} = \mathbf{R}(z, \psi) \cdot \mathbf{R}(y, \theta) \cdot \mathbf{R}(x, \phi) \quad (4.2)$$

Para lograr hallar la velocidad de rotación del VANT ( ${}^R\vec{\omega}^{R_3}$ ), se desarrolla los elementos que la componen de la siguiente manera:

- Rotación de  $R \rightarrow R_1$  ( ${}^R\vec{\omega}^{R_1}$ , ángulo Yaw):

**Figura 4.4**

*Descomposición de vectores en la rotación  ${}^R\vec{\omega}^{R_1}$ .*



De la Figura 4.4, podemos desarrollar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\hat{i} &= \hat{i}_1 \cdot \cos \psi - \hat{j}_1 \cdot \sin \psi \\ \hat{j} &= \hat{i}_1 \cdot \sin \psi + \hat{j}_1 \cdot \cos \psi \\ \hat{k} &= \hat{k}_1\end{aligned}\tag{4.3}$$

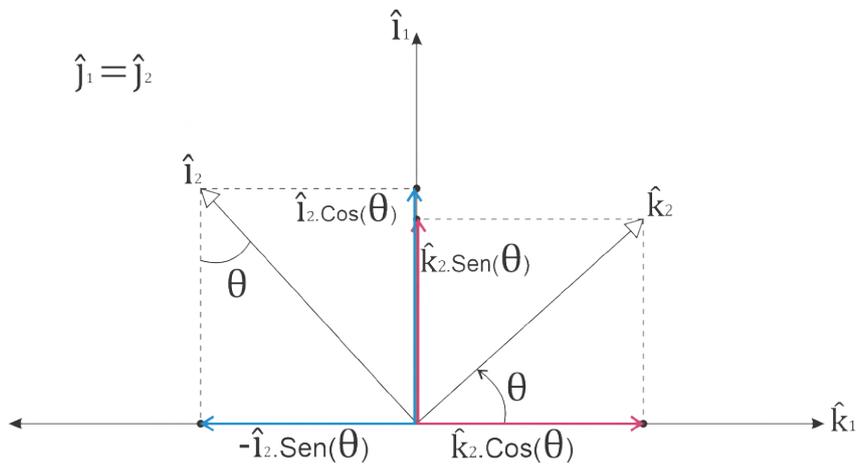
y poniéndolo en formato matricial, tendríamos:

$$\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{bmatrix}\tag{4.4}$$

- Rotación de  $R_1 \rightarrow R_2$  ( $R_1 \vec{\omega} R_2$ , ángulo Pitch):

#### Figura 4.5

Descomposición de vectores en la rotación  $R_1 \vec{\omega} R_2$ .



De la Figura 4.5, podemos desarrollar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\hat{i}_1 &= \hat{k}_2 \cdot \sin \theta + \hat{i}_2 \cdot \cos \theta \\ \hat{j}_1 &= \hat{j}_2 \\ \hat{k}_1 &= \hat{k}_2 \cdot \cos \theta - \hat{i}_2 \cdot \sin \theta\end{aligned}\tag{4.5}$$

y poniéndolo en formato matricial, tendríamos:

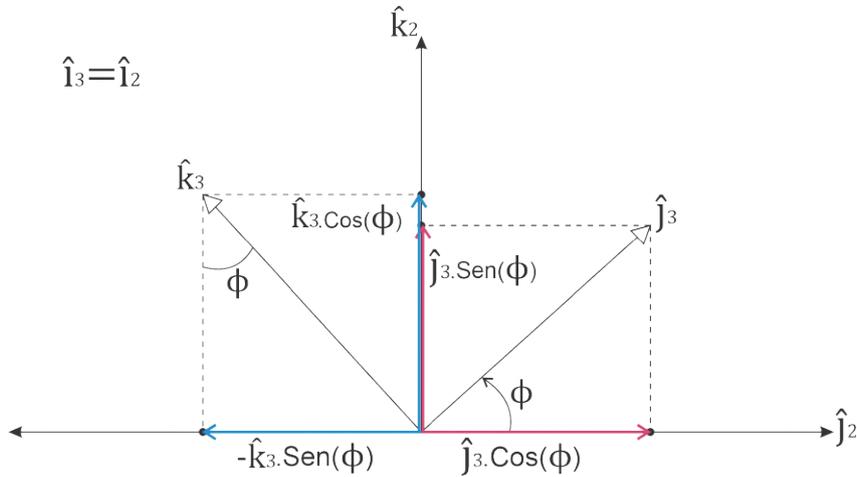
$$\begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

- Rotación de  $R_2 \rightarrow R_3$  ( $R_2 \vec{\omega} R_3$ , ángulo Roll):

De la Figura 4.6, podemos desarrollar las siguientes ecuaciones:

**Figura 4.6**

*Descomposición de vectores en la rotación  $R_2 \vec{\omega} R_3$ .*



$$\hat{i}_2 = \hat{i}_3$$

$$\hat{j}_2 = \hat{j}_3 \cdot \cos \phi - \hat{k}_3 \cdot \sin \phi \quad (4.7)$$

$$\hat{k}_2 = \hat{j}_3 \cdot \sin \phi + \hat{k}_3 \cdot \cos \phi$$

y poniéndolo en formato matricial, tendríamos:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_2 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_3 \\ \hat{j}_3 \\ \hat{k}_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Una vez hallado los valores que representan las tres rotaciones sucesivas que realiza el VANT en el espacio, se definirán las respectivas matrices de rotación.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(z, \psi) &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}(y, \theta) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \\
\mathbf{R}(x, \phi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Reemplazando las matrices de 4.9 en 4.2, nos quedaría:

$$\mathbf{R}_{R \rightarrow R_3} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Y resolviendo la ecuación 4.10 se tiene como resultado la **matriz de rotación** representado por la ecuación 4.11 generado por las tres rotaciones, *Roll*, *Pitch* y *Yaw*, del VANT.

$$\mathbf{R}_{R \rightarrow R_3} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

## Fuerza total en la estructura del VANT ( $x_1, y_1, z_1$ )

Los motores del VANT generan fuerzas principalmente en el eje  $z_1$  (eje vertical del VANT). Por tanto, la fuerza total en su estructura estará expresada por la ecuación 4.12:

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 F_i \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

donde  $F_i = K_p \omega_i^2$  y  $K_p$  es la constante de elevación (Bouadi et al., 2007).

## Transformación al marco inercial (ejes $X, Y, Z$ ).

La matriz de rotación  $\mathbf{R}_{R \rightarrow R_3}$  (ecuación 4.11) proyecta  $F_b$  al marco inercial:

$$\mathbf{F}_f = \mathbf{R}_{R \rightarrow R_3} \cdot F_b = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^4 F_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \sum_{i=1}^4 F_i \\ (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) \sum_{i=1}^4 F_i \\ (\cos \theta \cos \phi) \sum_{i=1}^4 F_i \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

En la ecuación 4.13, se observa en la tercera fila, la componente vertical inercial ( $Z$ ).  $R_{33} = \cos \theta \cos \phi$ , es la proyección de la fuerza total de los motores en el eje  $Z$  del marco inercial (*la Tierra*), siendo atenuada por los ángulos roll ( $\phi$ ) y pitch ( $\theta$ ).

Las primeras dos filas son las componentes horizontales ( $X$  y  $Y$ ) en el marco inercial. Aparecen cuando el VANT se inclina ( $\phi \neq 0$  o  $\theta \neq 0$ ), describiendo la parte de la fuerza de los motores que se dirige horizontalmente.

## Fuerzas de arrastre aerodinámico.

Cuando un vehículo aéreo no tripulado se mueve por el aire, experimenta fuerzas de resistencia aerodinámica opuestas a su movimiento. Tomando en cuenta que la estructura del VANT es simétrica y asumiendo que realizara movimientos dentro del laboratorio, estas fuerzas serán proporcionales a:

- **La velocidad lineal del VANT ( $\dot{\xi}$ ):** Donde  $\dot{\xi} = [\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1]^T$  es el vector de velocidades en los ejes  $X, Y, Z$  del marco inercial.
- **Coefficientes de arrastre ( $K_{ftx}, K_{fity}, K_{ftz}$ ):** Cada uno de estos coeficientes dependerán de la forma del VANT, la densidad del aire y el área. Se hace una aproximación lineal de la fuerza de arrastre ( $\mathbf{F}_t$ ) con respecto a la velocidad  $\dot{\xi}$  (Beard & McLain, 2012).

$$\mathbf{F}_t \approx -K_{ft} \cdot \dot{\xi} \quad (4.14)$$

La ecuación 4.15 es una simplificación que modela el arrastre aerodinámico como una fuerza lineal con respecto a la velocidad. Donde los términos  $-K_{ftx}, -K_{fity}, -K_{ftz}$  capturan el arrastre en cada eje, el signo negativo indica que la fuerza se opone al movimiento y los términos fuera de la diagonal son cero por que se asume que el arrastre en un eje no acopla fuerzas en otros ejes por la simetría de la estructura del VANT (Beard & McLain, 2012).

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} -K_{ftx} & 0 & 0 \\ 0 & -K_{fity} & 0 \\ 0 & 0 & -K_{ftz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ftx} \cdot \dot{x}_1 \\ -K_{fity} \cdot \dot{y}_1 \\ -K_{ftz} \cdot \dot{z}_1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

## Momentos generados por las fuerzas de los motores ( $\Gamma_f$ )

$\Gamma_f$  representa los momentos generados por las fuerzas de los motores en el marco de referencia de la estructura del VANT. El momento  $\Gamma_f$  captura como las fuerzas de los motores ( $\mathbf{F}_i$ ) generan rotaciones (*roll*, *pitch*, *yaw*) en la estructura del VANT, donde estas fuerzas dependen de:

- **Distancia ( $d$ ):** Medida de espacio que existe entre el centro de masa del VANT y el eje de rotación de la hélice.
- **Fuerzas de los rotores ( $\mathbf{F}_i$ ):** Empuje generado por cada motor, el cual es proporcional al cuadrado de su velocidad angular ( $\mathbf{F}_i = K_p \omega_i^2$ ).
- **Coefficiente de arrastre ( $K_d$ ):** Esta relacionado con el torque aerodinámico de los motores y se define como el producto del coeficiente de arrastre ( $C_Q$ ), la densidad del aire ( $\rho$ ) y el diámetro y geometría de la hélice (Beard & McLain, 2012).

Los componentes del momento generado por el VANT con respecto a su estructura ( $\Gamma_f$ ), esta compuesto por los:

- **Momentos en roll ( $\Gamma_x$ ) y pitch ( $\Gamma_y$ )**

$$\Gamma_x = d(F_3 - F_1) \tag{4.16}$$

$$\Gamma_y = d(F_4 - F_2)$$

En donde los motores 1 y 3 están alineados en el eje  $x$  del marco de referencia del VANT ( $x_1$ ) y los rotores 2 y 4 en el eje  $y$  ( $y_1$ ). La diferencia de fuerzas ( $\mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_1$ ) crea un par de torsión alrededor de  $x_1$  (*roll*), y las fuerzas ( $\mathbf{F}_4 - \mathbf{F}_2$ ) los crea a su vez alrededor de  $y_1$  (*pitch*). La distancia  $d$  hace de brazo de palanca desde el centro de masa del VANT hasta el eje de rotación de cualquiera de las hélices (asumiendo la simetría de la estructura).

■ **Momento en yaw ( $\Gamma_z$ )**

$$\Gamma_z = K_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \quad (4.17)$$

En este caso se combina el giro de los motores en sentidos opuestos<sup>6</sup>. El torque de reacción (debido al arrastre aerodinámico) es proporcional a  $\omega_i^2$  y al coeficiente  $K_d$ . La combinación  $\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2$  representa el momento neto en el eje yaw. En condiciones de equilibrio, esta suma es cero, evitando rotaciones no deseadas. Sin embargo, al variar ligeramente las velocidades de las hélices que giran en sentidos opuestos, es posible controlar activamente la rotación en *yaw*.

Uniando las ecuaciones 4.16 y 4.17 y escribiéndolo en formato matricial, se tiene como resultado la ecuación 4.18 el cual representa al momento generado por el VANT con respecto a su marco de referencia ( $R_3$ ).

$$\Gamma_f = \begin{bmatrix} d(F_3 - F_1) \\ d(F_4 - F_2) \\ K_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

**Pares aerodinámicos de fricción ( $\Gamma_a$ )**

Cuando el VANT gira alrededor de sus ejes ( $x_1, y_1, z_1$ ), experimenta fuerzas de fricción aerodinámica que se oponen a su movimiento rotacional. Según la *ecuación general de arrastre rotacional*<sup>7</sup>, estas fuerzas generan pares (torques) que dependen de la velocidad angular y los coeficientes de fricción:

<sup>6</sup>Por ejemplo, en nuestro caso, haremos que los motores  $M_1$  y  $M_3$  ubicados en el eje  $x$  del marco inercial del VANT ( $x_1$ ) giren en sentido horario y los motores  $M_2$  y  $M_4$  ubicados en el eje  $y$  ( $y_1$ ) giren en sentido antihorario.

<sup>7</sup>La fuerza de arrastre se expresa como  $F_d = \frac{1}{2}C_d A \rho u^2$ , donde:  $F_d$  es la fuerza de arrastre,  $C_d$  es el coeficiente adimensional de arrastre,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $A$  es el área del objeto que choca con el fluido y  $u$  es la velocidad promedio (Beard & McLain, 2012).

■ **Velocidad angular ( $\Omega$ )**

Es la velocidad definida en el marco inercial del VANT y se halla sumando las velocidades simples que se dan en cada rotación (velocidades en *roll*, *pitch*, *yaw*). Para obtener la velocidad angular del VANT, usaremos la Figura 4.3 como guía para desglosar las *velocidades angulares relativas*<sup>8</sup> que se dan en cada rotación.  ${}^R\vec{\omega}^{R_3} = {}^{R_2}\vec{\omega}^{R_3} + {}^{R_1}\vec{\omega}^{R_2} + {}^R\vec{\omega}^{R_1}$ .

donde:

$$\begin{aligned} {}^R\vec{\omega}^{R_1} &= \dot{\psi} \hat{k}_1 \\ {}^{R_1}\vec{\omega}^{R_2} &= \dot{\theta} \hat{j}_2 \\ {}^{R_2}\vec{\omega}^{R_3} &= \dot{\phi} \hat{i}_3 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Reemplazando los valores de la ecuación 4.19 en la velocidad angular del VANT ( ${}^R\vec{\omega}^{R_3}$ ), tendríamos:

$$\Omega = {}^R\vec{\omega}^{R_3} = \dot{\phi} \hat{i}_3 + \dot{\theta} \hat{j}_2 + \dot{\psi} \hat{k}_1 \quad (4.20)$$

Como lo que estamos buscando es la ecuación de la velocidad angular del VANT cuando ya ha finalizado las tres rotaciones relativas, tenemos que poner la ecuación 4.20 en términos de las direcciones finales de cada uno de sus ejes inerciales fijados a la estructura del VANT ( $\hat{i}_3, \hat{j}_3, \hat{k}_3$ ). Por lo tanto, para poder realizar dicha tarea, nos serviremos de las ecuaciones 4.5 y 4.7 para reemplazar los valores necesarios dentro de la ecuación 4.20.

Reemplazando valores, tendremos:

$$\begin{aligned} {}^R\vec{\omega}^{R_3} &= \dot{\phi} \hat{i}_3 + \dot{\theta} \hat{j}_2 + \dot{\psi} \hat{k}_1 \\ {}^R\vec{\omega}^{R_3} &= \dot{\phi} \hat{i}_3 + \dot{\theta} (\hat{j}_3 \cos \phi - \hat{k}_3 \sin \phi) + \dot{\psi} (\hat{k}_2 \cos \theta - \hat{i}_2 \sin \theta) \\ {}^R\vec{\omega}^{R_3} &= \dot{\phi} \hat{i}_3 + \dot{\theta} (\hat{j}_3 \cos \phi - \hat{k}_3 \sin \phi) + \dot{\psi} [(\hat{j}_3 \sin \phi + \hat{k}_3 \cos \phi) \cos \theta - \hat{i}_3 \sin \theta] \\ {}^R\vec{\omega}^{R_3} &= \dot{\phi} \hat{i}_3 + \dot{\theta} \hat{j}_3 \cos \phi + \dot{\psi} \hat{j}_3 \sin \phi \cos \theta - \dot{\theta} \hat{k}_3 \sin \phi + \dot{\psi} \hat{k}_3 \cos \phi \cos \theta - \dot{\psi} \hat{i}_3 \sin \theta \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Cada *velocidad angular relativa*, estará definida como el producto de la tasa de cambio de su ángulo y la dirección de su eje de rotación.

Obteniendo como resultado la ecuación 4.21:

$${}^R\vec{\omega}^{R_3} = \hat{i}_3(\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) + \hat{j}_3(\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta) + \hat{k}_3(-\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta) \quad (4.21)$$

La ecuación 4.21 representa a la velocidad angular de la estructura del VANT expresado en su marco inercial. Aunque es popularmente mas conocido y mucho mas fácil de entenderlo en su formato matricial, asi como se muestra en la ecuación 4.22.

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_{roll} \\ \omega_{pitch} \\ \omega_{yaw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Si los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  son pequeños (ceranos a cero)<sup>9</sup>, se pueden hacer las siguientes aproximaciones:

$$\sin \phi \approx \phi, \quad \sin \theta \approx \theta, \quad \cos \phi \approx 1, \quad \cos \theta \approx 1.$$

Tomando en cuenta las aproximaciones, nuestra ecuación 4.22 se simplifica, dándonos como resultado la ecuación 4.23.

$$\mathbf{\Omega} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

■ **Coeficientes de fricción** ( $K_{fax}$ ,  $K_{fay}$ ,  $K_{faz}$ )

Son los que representan la fricción aerodinámica en cada eje del marco inercial del VANT, y agrupa a todas las constantes de la *ecuación general de arrastre rotacional*.

$$\mathbf{K}_{fai} = \frac{1}{2} \rho C_d A \quad (4.24)$$

---

<sup>9</sup>Esta es una aproximación útil para simplificar ecuaciones de control o estimación estable, pero no debe generalizarse. Para maniobras acrobáticas la no-linealidad de la ecuación 4.22 no puede ignorarse.

Adaptando la *ecuación general de arrastre rotacional* a nuestras necesidades, utilizando las ecuaciones 4.22 y 4.24, quedaría la ecuación 4.25.

$$\mathbf{\Gamma}_a = \begin{bmatrix} K_{fax} & 0 & 0 \\ 0 & K_{fay} & 0 \\ 0 & 0 & K_{faz} \end{bmatrix} \Omega^2 \quad (4.25)$$

Los términos fuera de la diagonal son cero porque se asume que la fricción en un eje no acopla torques en otros ejes, esto debido a la estructura simétrica del VANT.

### Par giroscópico total en un VANT ( $\mathbf{\Gamma}_g$ )

Cuando un motor gira a alta velocidad ( $\omega_i$ ), su momento angular producido ( $L_i = J_r \omega_i$ ) puede llegar a interactuar con el movimiento angular del VANT ( $\Omega_i$ ), generando un par perpendicular <sup>10</sup> ( $\tau$ ) a ambos *vectores*. La ecuación 4.26, describe de forma general este fenómeno.

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \Omega \times L. \quad (4.26)$$

Para poder adaptarlo a nuestros intereses, tenemos que tomar en cuenta que  $L_i = J_r \omega_i$ , y  $J_r$  representa a la inercia del rotor.

$$\mathbf{\Gamma}_g = \sum_{i=1}^4 \Omega \times J_r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^{i+1} \omega_i \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

La ecuación 4.27 representado por  $\mathbf{\Gamma}_g$  es la resultante de los pares de torque debido a los efectos giroscópicos que se producen en el VANT. La velocidad de los motores están multiplicados por  $(-1)^{i+1}$  para distinguir el sentido de giro de cada motor y están puestas en la tercera fila de su matriz debido a que los ejes de los motores estarán siempre alineados al eje  $z$  ( $z_1$ ) del marco inercial del VANT.

---

<sup>10</sup>La dirección de esta fuerza o par se puede hallar mediante la regla de la mano derecha, ya que se trata de un producto cruz vectorial.

La solución de  $\Gamma_g$  para  $\Omega = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]$  (asumiendo ángulos pequeños) y  $L_i = J_r(-1)^{i+1}\omega_i$ , se muestra en la ecuación 4.28.

$$\mathbf{\Gamma}_g = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} -\dot{\theta}L_i \\ \dot{\phi}L_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

### Ecuación de la fuerza gravitacional ( $\mathbf{F}_g$ )

La fuerza gravitacional ( $\mathbf{F}_g$ ) se deriva de la ley de Newton de gravitación universal.

$$\mathbf{F}_g = m \cdot g \quad (4.29)$$

donde:

$m$  : Masa del objeto (en kg).

$g$  : Aceleración de la gravedad ( $\approx 9,81m/s^2$  en la Tierra).

La fuerza gravitacional es un vector que actúa verticalmente y esta direccionada hacia la Tierra, tomando como referencia nuestro marco inercial propuesto ( $R$ ) y debido a su dirección, la gravedad tomara un valor negativo. Nosotros utilizaremos la representación vectorial de la fuerza gravitacional 4.30, ya que esta forma nos ayuda a observar como actúa sobre un sistema en un marco inercial (que en nuestro caso es el VANT).

$$\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

## Matriz de inercia (J)

La ecuación 4.31 representa la matriz de inercia de un VANT en su sistema de coordenadas principal  $x_1, y_1, z_1$ .

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

La matriz  $J$  es diagonal porque los ejes  $x, y, z$  se elijen como ejes principales de inercia, lo cual hace que los productos de inercia  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  sean cero (no existe acoplamiento inercial entre ejes), simplificando las ecuaciones dinámicas.

## Resolución de la operación $-\Omega \times J\Omega$

El término  $-\Omega \times J\Omega$  lo vemos en la ecuación 4.1, proviene de las ecuaciones de Euler para la rotación de cuerpos rígidos y representa el acoplamiento giroscópico entre los ejes (Bouabdallah, 2007, enero). Para nuestra matriz de inercia diagonal  $J$  y la velocidad angular  $\Omega = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ , se desarrolla como se muestra en la ecuación 4.32.

$$-\Omega \times J\Omega = - \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_x \dot{\phi} \\ I_y \dot{\theta} \\ I_z \dot{\psi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (I_z - I_y) \dot{\theta} \dot{\psi} \\ (I_x - I_z) \dot{\phi} \dot{\psi} \\ (I_y - I_x) \dot{\phi} \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

## Modelo dinámico completo del VANT

El modelo dinámico que gobernara el comportamiento del VANT estará definido por sus seis grados de libertad que contiene y se obtendrá reemplazando los valores de las ecuaciones 4.15, 4.30, 4.13 en la ecuación 4.1 para hallar componentes de su dinámica traslacional (tres grados de libertad  $3-DOF^{11}$ ) y se reemplazara las ecuaciones 4.31, 4.23, 4.32, 4.28, 4.25 y 4.18

---

<sup>11</sup>La abreviatura *DOF* es muy utilizada en los libros que tratan temas de dinámica, robótica, aeronáutica, entre otros. Proviene del inglés *Degrees of Freedom*, que significa **Grados de Libertad**.

en 4.1 para hallar los componentes de su dinámica rotacional (tres grados de libertad *3-DOF*). Obteniendo en total los seis grados de libertad (*6-DOF*) que gobiernan al VANT.

■ **Dinámica traslacional (*3-DOF*)**

La ecuación del método Newton-Euler que describe la dinámica traslacional es:

$$m\ddot{\xi} = F_f + F_t + F_g.$$

Reemplazando valores nos quedaría las ecuaciones 4.33:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi)(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{ftx}\dot{x} \\ m\ddot{y} &= (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi)(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{fty}\dot{y} \\ m\ddot{z} &= (\cos \theta \cos \phi)(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{ftz}\dot{z} - mg \end{aligned} \quad (4.33)$$

■ **Dinámica rotacional (*3-DOF*)**

La ecuación del método Newton-Euler que describe la dinámica rotacional es:

$$J\dot{\Omega} = -\Omega \times J\Omega + \Gamma_f - \Gamma_a - \Gamma_g$$

Reemplazando valores nos quedaría las ecuaciones 4.34:

$$\begin{aligned} I_x\ddot{\phi} &= (-I_z + I_y)\dot{\theta}\dot{\psi} + d(F_3 - F_1) - K_{fax}\dot{\phi}^2 - \dot{\theta}J_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ I_y\ddot{\theta} &= (-I_x + I_z)\dot{\phi}\dot{\psi} + d(F_4 - F_2) - K_{fay}\dot{\theta}^2 - \dot{\phi}J_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ I_z\ddot{\psi} &= (-I_y + I_x)\dot{\theta}\dot{\phi} + K_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - K_{faz}\dot{\psi} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Obtenidas las ecuaciones del modelo dinámico del VANT, se procede a realizar el reconocimiento de las entradas de control virtual ( $U_i$ ) en cada una de ellas.

En las ecuaciones 4.33 se observa que la suma total de las fuerzas, el cual lo identificaremos con  $U_1$ , representa la fuerza total de empuje generado por los cuatro motores. Esta fuerza controla directamente la altura ( $\ddot{z}$ ) y, a través de la orientación (ángulos  $\phi$  y  $\theta$ )<sup>12</sup>, controla los movimientos horizontales  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{x}$  respectivamente.

$$U_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (4.35)$$

<sup>12</sup>Hay que aclarar que el VANT solo tiene cuatro entradas de control efectivas, las cuales corresponden a sus cuatro motores. Los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  se controlan a través del manejo de estas únicas cuatro entradas que dependerán a su vez de los valores de  $U_i$ .

Para las ecuaciones 4.34 que describen la dinámica rotacional del VANT, las entradas de control virtual son las que se muestran en la ecuación 4.36.

$$\begin{aligned}
 U_2 &= F_3 - F_1 \\
 U_3 &= F_4 - F_2 \\
 U_4 &= K_d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

La elección de los controladores virtuales de 4.36 se basan en las ecuaciones de los momentos generados por las fuerzas de los motores ( $\Gamma_f$ ).

Se justifica por que la diferencia de  $F_3$  y  $F_1$  crea un desequilibrio de fuerzas, generando un par alrededor del eje  $x$  (*roll*).

Sucede de forma similar para los motores  $M_4$  y  $M_2$ , las diferencias de fuerzas de  $F_4 - F_2$  genera un par alrededor del eje  $y$  (*pitch*)

En  $U_4$  se muestra como los rotores giran en pares contrarrotativos (por ejemplo:  $\omega_1, \omega_3$  en sentido antihorario y  $\omega_2, \omega_4$  en sentido horario), haciendo que la combinación  $\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2$  produzca un par neto en el eje  $z$  (*yaw*).

Para tener un mejor entendimiento de estas ecuaciones de control (4.35 y 4.36), se desglosara los valores de las fuerzas  $F_i = K_p \omega_i^2$  y se pondrá las cuatro entradas de control virtual en formato matricial (4.37).

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p \omega_1^2 & K_p \omega_2^2 & K_p \omega_3^2 & K_p \omega_4^2 \\ -K_p \omega_1^2 & 0 & K_p \omega_3^2 & 0 \\ 0 & -K_p \omega_2^2 & 0 & K_p \omega_4^2 \\ K_d \omega_1^2 & -K_d \omega_2^2 & K_d \omega_3^2 & -K_d \omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & K_p & K_p & K_p \\ -K_p & 0 & K_p & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & K_p \\ K_d & -K_d & K_d & -K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}
 \tag{4.37}$$

## 4.2. Desarrollo del sistema de control y simulación

Para el desarrollo del sistema de control del VANT, el primer objetivo es hallar su modelo en ecuaciones de espacio de estado<sup>13</sup>. Utilizando estas ecuaciones de espacio de estado, se implementara el controlador propuesto para posteriormente simularlo en una herramienta computacional.

### 4.2.1. Ecuaciones de espacio de estados del VANT

Las ecuaciones dinámicas 4.34 y 4.33 reescritas en formato de espacios de estados pueden ser representados por la ecuación 4.38 (Bouadi et al., 2007).

$$\dot{X} = f(X) + g(X, U) + \delta \quad (4.38)$$

donde:

- $X$ : Es el vector de estados, que incluye todas las variables dinámicas relevantes:

$$X = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T \quad (4.39)$$

- $f(X)$ : Términos no lineales inherentes a la dinámica del sistema (ejemplo: efectos giroscópicos).
- $g(X, U)$ : Términos dependientes de las entradas de control  $U_i$  (ejemplo: fuerzas o momentos generados por actuadores).
- $\delta$ : Perturbaciones o incertidumbres no modeladas.
- $\dot{X}$ : Representa la tasa de cambio instantánea de cada variable de estado:

$$\dot{X} = [\dot{\phi}, \ddot{\phi}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}, \dot{z}, \ddot{z}]^T = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5, \dot{x}_6, \dot{x}_7, \dot{x}_8, \dot{x}_9, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{11}, \dot{x}_{12}]^T \quad (4.40)$$

---

<sup>13</sup>Las ecuaciones de espacio de estado reformulan las ecuaciones dinámicas en un sistema de primer orden, ayudándonos a definir explícitamente las variables de estado (en nuestro caso: Posición, velocidad, ángulos de Euler) y sus derivadas (Ogata, 2003).

Tomando las ecuaciones dinámicas del VANT y la matriz 4.39, se obtendrán las ecuaciones de estado 4.41 (el desarrollo de las ecuaciones de estado, se muestran en el Anexo A.).

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{I_y - I_z}{I_x} x_4 x_6 + \frac{d}{I_x} U_2 - \frac{K_{fax}}{I_x} x_2^2 - x_4 \frac{(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) J_r}{I_x} \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{I_z - I_x}{I_y} x_2 x_6 + \frac{d}{I_y} U_3 - \frac{K_{fay}}{I_y} x_4^2 + x_2 \frac{(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) J_r}{I_y} \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{I_x - I_y}{I_z} x_4 x_2 + \frac{U_4}{I_z} - \frac{K_{faz}}{I_z} x_6 \\
\dot{x}_7 &= x_8 \\
\dot{x}_8 &= \frac{U_x}{m} U_1 - \frac{K_{ftx}}{m} x_8 \\
\dot{x}_9 &= x_{10} \\
\dot{x}_{10} &= \frac{U_y}{m} U_1 - \frac{K_{fty}}{m} x_{10} \\
\dot{x}_{11} &= x_{12} \\
\dot{x}_{12} &= \frac{(\cos x_3 \cos x_1)}{m} U_1 - \frac{K_{ftz}}{m} x_{12} - g
\end{aligned} \tag{4.41}$$

donde:

$$U_x = (\cos x_5 \sin x_3 \cos x_1 + \sin x_5 \sin x_1)$$

$$U_y = (\sin x_5 \sin x_3 \cos x_1 - \cos x_5 \sin x_1)$$

## 4.2.2. Backstepping

### Diseño de errores de seguimiento en el método Backstepping

El procedimiento para desarrollar las ecuaciones que definen los errores de seguimiento para todas las variables se basa en la aplicación recursiva del método Backstepping (Khalil, 2002).

**Paso 1:** Definimos el error básico para  $z_1$  (variación en roll):

$$z_1 = x_{1d} - x_1$$

**Paso 2:** Definimos el error compuesto<sup>14</sup>  $z_2$  (variación de velocidad en roll):

$$z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1$$

Las ecuaciones de error para  $z_3$  y  $z_4$  (variación en pitch y su velocidad) siguen la misma estructura que  $z_1$  y  $z_2$ :

$$z_3 = x_{3d} - x_3$$

$$z_4 = x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 z_3$$

De manera similar, para las variables restantes se define un patrón repetitivo. Por ello, se introduce la ecuación 4.42, la cual generaliza todas las expresiones de error obtenidas mediante el procedimiento recursivo del Backstepping:

$$z_i = \begin{cases} x_{id} - x_i, & i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ x_i - \dot{x}_{(i-1)d} - \alpha_{i-1} z_{i-1}, & i \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \end{cases} \quad (4.42)$$

donde  $\alpha_{i-1} > 0$  son parámetros de diseño positivos que contribuyen a la estabilidad del sistema. Su valor se selecciona de tal forma que la derivada de la función de Lyapunov,  $\dot{V}$ , garantice que el sistema sea estable.

---

<sup>14</sup>El error en el segundo paso está compuesto por el primer paso, ya que ambos están relacionados. El primer paso define el error en la variación en roll y el segundo paso define el error en la variación de velocidad en roll.

Cada error  $z_i$  se incorpora en una función de Lyapunov acumulativa, expresada en 4.43. Para los errores simples ( $z_1, z_3, \dots, z_9, z_{11}$ ), la función de Lyapunov presenta una estructura simple. En cambio, para los errores compuestos ( $z_2, z_4, \dots, z_{10}, z_{12}$ ), la función de Lyapunov se construye recursivamente:

$$V_i = \begin{cases} \frac{1}{2}z_i^2, & i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ \frac{1}{2}(V_{i-1} + z_i^2), & i \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \end{cases} \quad (4.43)$$

Este enfoque permite construir funciones de Lyapunov *positivas definidas* y derivadas *negativas definidas* de forma recursiva, lo cual garantiza la **estabilidad asintótica** del sistema.

### 4.2.3. Control en Modo Deslizante (SMC)

A partir de los errores de seguimiento  $z_i$ , definidos mediante Backstepping, ahora definimos superficies de deslizamiento dinámicas  $S_i$  que se usarán como base para diseñar un controlador SMC.

A partir de los errores compuestos ( $z_2, z_4, \dots, z_{10}, z_{12}$ ), se definen las superficies de deslizamiento de la siguiente forma:

$$S_i = z_i = x_i - \dot{x}_{(i-1)d} - \alpha_{i-1}z_{i-1}$$

Reemplazando los valores para cada error compuesto, tendremos como resultado las ecuaciones mostradas en 4.44

$$\begin{aligned} S_\phi &= z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1 \\ S_\theta &= z_4 = x_4 - \dot{x}_{3d} - \alpha_3 z_3 \\ S_\psi &= z_6 = x_6 - \dot{x}_{5d} - \alpha_5 z_5 \\ S_x &= z_8 = x_8 - \dot{x}_{7d} - \alpha_7 z_7 \\ S_y &= z_{10} = x_{10} - \dot{x}_{9d} - \alpha_9 z_9 \\ S_z &= z_{12} = x_{12} - \dot{x}_{11d} - \alpha_{11} z_{11} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Estas superficies dinámicas incorporan tanto el error en el estado actual como el error acumulado de pasos anteriores, heredando las propiedades de estabilidad del diseño Backstepping. Este procedimiento se fundamenta en la teoría de estabilidad de Lyapunov, al asegurar que las derivadas temporales de las funciones de Lyapunov (4.43) sean negativas definidas en presencia del control adecuado. Así, se construyen superficies de deslizamiento que no solo aseguran la convergencia, sino que también mejoran la respuesta dinámica del sistema frente a incertidumbres del propio sistema.

#### 4.2.4. Desarrollo de las leyes de control

El desarrollo de las leyes de control del VANT ( $U_i$ ), están basadas en las superficies deslizantes definidas en 4.44, y también se tiene que cumplir la condición necesaria de SMC ( $S\dot{S} < 0$ ).

##### Diseño de la ley de control para $U_2$ mediante SMC

Como ejemplo representativo para hallar las leyes de control del VANT, se desarrollo de forma explícita la ley de control para  $U_2$ .

La **superficie de deslizamiento** asociada al error en *roll* ( $\phi$ ) se define como:

$$S_\phi = z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} - \alpha_1 z_1 \quad (4.45)$$

Tomando la derivada temporal de  $S_\phi$ :

$$\dot{S}_\phi = \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1 \quad (4.46)$$

Sustituyendo el valor  $\dot{x}_2$  (4.41) en 4.46, obtendremos la ecuación 4.47:

$$\dot{S}_\phi = \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} x_4 x_6 + \frac{d}{I_x} U_2 - \frac{K_{fax}}{I_x} x_2^2 - x_4 \frac{(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) J_r}{I_x} \right) - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1 \quad (4.47)$$

Cumpliendo la condición de estabilización mediante deslizamiento ( $S\dot{S} < 0$ ), la superficie  $S_\phi$  deberá tener la forma:

$$\dot{S}_\phi = -q_1 \text{sign}(S_\phi) - k_1 S_\phi \quad (4.48)$$

Entonces, igualando 4.48 con 4.47:

$$\dot{S}_\phi = -q_1 \text{sign}(S_\phi) - k_1 S_\phi = \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} x_4 x_6 + \frac{d}{I_x} U_2 - \frac{K_{fax}}{I_x} x_2^2 - x_4 \frac{(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) J_r}{I_x} \right) - \ddot{x}_{1d} - \alpha_1 \dot{z}_1 \quad (4.49)$$

Ahora para finalizar, despejando  $U_2$  de 4.49 para hallar su ley de control, se obtiene:

$$U_2 = \frac{I_x}{d} (-q_1 \text{sign}(S_\phi) - k_1 S_\phi) - x_4 x_6 \frac{(I_y - I_z)}{d} + x_2^2 \frac{K_{fax}}{d} + \frac{J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{d} x_4 + \frac{I_x}{d} (\ddot{\phi}_d + \alpha_1 (\dot{\phi}_d - x_2)) \quad (4.50)$$

La ecuación 4.50 garantiza que la derivada de la superficie  $\dot{S}_\theta$  sea negativa definida, lo cual asegura la estabilidad en el sentido de Lyapunov y la convergencia del error de seguimiento en *roll* hacia cero.

De manera similar se logra desarrollar las leyes de control para  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_5$ ,  $U_x$ ,  $U_y$  y  $U_1$ :

**Para  $U_3$ :**

$$U_3 = \frac{I_y}{d} (-q_2 \text{sign}(S_\theta) - k_2 S_\theta) - x_2 x_6 \frac{(I_z - I_x)}{d} + x_4^2 \frac{K_{fay}}{d} + \frac{J_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{d} x_2 + \frac{I_y}{d} (\ddot{\theta}_d + \alpha_3(\dot{\theta}_d - x_4))$$

**Para  $U_4$ :**

$$U_4 = I_z \left( -q_3 \text{sign}(S_\psi) - k_3 S_\psi - \frac{I_x - I_y}{I_z} x_4 x_2 + \frac{K_{faz}}{I_z} x_6^2 + \ddot{\psi}_d + \alpha_5(\dot{\psi}_d - x_6) \right)$$

**Para  $U_x$ :**

$$U_x = \frac{m}{U_1} \left( -q_4 \text{sign}(S_x) - k_4 S_x + \frac{K_{ftx}}{m} x_8 + \ddot{x}_d + \alpha_7(\dot{x}_d - x_8) \right)$$

**Para  $U_y$ :**

$$U_y = \frac{m}{U_1} \left( -q_5 \text{sign}(S_y) - k_5 S_y + \frac{K_{fty}}{m} x_{10} + \ddot{y}_d + \alpha_9(\dot{y}_d - x_{10}) \right)$$

**Para  $U_1$ :**

$$U_1 = \frac{m}{\cos x_3 \cos x_1} \left( -q_6 \text{sign}(S_z) - k_6 S_z + \frac{K_{ftz}}{m} x_{12} + g + \ddot{z}_d + \alpha_{11}(\dot{z}_d - x_{12}) \right)$$

Ordenando todas las ecuaciones mostradas, quedaría:

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{I_x}{d} (-q_1 \text{sign}(S_\phi) - k_1 S_\phi) - x_4 x_6 \frac{(I_y - I_z)}{d} + x_2^2 \frac{K_{fax}}{d} + \frac{J_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{d} x_4 + \frac{I_x}{d} (\ddot{\phi}_d + \alpha_1(\dot{\phi}_d - x_2)) \\
U_3 &= \frac{I_y}{d} (-q_2 \text{sign}(S_\theta) - k_2 S_\theta) - x_2 x_6 \frac{(I_z - I_x)}{d} + x_4^2 \frac{K_{fay}}{d} + \frac{J_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{d} x_2 + \frac{I_y}{d} (\ddot{\theta}_d + \alpha_3(\dot{\theta}_d - x_4)) \\
U_4 &= I_z \left( -q_3 \text{sign}(S_\psi) - k_3 S_\psi - \frac{I_x - I_y}{I_z} x_4 x_2 + \frac{K_{faz}}{I_z} x_6^2 + \ddot{\psi}_d + \alpha_5(\dot{\psi}_d - x_6) \right) \\
U_x &= \frac{m}{U_1} \left( -q_4 \text{sign}(S_x) - k_4 S_x + \frac{K_{fTx}}{m} x_8 + \ddot{x}_d + \alpha_7(\dot{x}_d - x_8) \right) \\
U_y &= \frac{m}{U_1} \left( -q_5 \text{sign}(S_y) - k_5 S_y + \frac{K_{fTy}}{m} x_{10} + \ddot{y}_d + \alpha_9(\dot{y}_d - x_{10}) \right) \\
U_1 &= \frac{m}{\cos x_3 \cos x_1} \left( -q_6 \text{sign}(S_z) - k_6 S_z + \frac{K_{fTz}}{m} x_{12} + g + \ddot{z}_d + \alpha_{11}(\dot{z}_d - x_{12}) \right)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

#### 4.2.5. Simulación en Matlab®

En el presente trabajo se optó por implementar la simulación del vehículo aéreo no tripulado mediante un enfoque basado en funciones programadas en el entorno MATLAB®, en lugar del uso de bloques gráficos en Simulink®. Esta decisión se sustenta tanto en criterios de **flexibilidad computacional** como en la **naturaleza de las técnicas de control** aplicadas.

El modelo dinámico del VANT se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) no lineales, las cuales fueron resueltas numéricamente utilizando el integrador ode45. Esta función permite integrar sistemas de la forma general:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

donde  $x(t)$  representa el vector de estado del sistema en el tiempo  $t$ , y  $f()$  contiene la dinámica completa del VANT, incluyendo la interacción entre la planta y el controlador.

Dentro de la función que se definió (`function dx = VANT(t, x)`), se incorporo de manera explícita:

- Las constantes físicas y parámetros estructurales del VANT<sup>15</sup> (masa, inercia, distancia entre hélices, gravedad, etc.).
- Las ecuaciones que describen el comportamiento de los motores.
- Las leyes de control diseñadas mediante técnicas no lineales como *Backstepping* y *Control en Modo Deslizante (SMC)*.
- Y finalmente, las ecuaciones dinámicas del sistema, que devuelven el vector derivada  $\dot{x}$ .

Este enfoque permite tener un control directo sobre cada etapa del modelo, facilitando la implementación precisa de las leyes de control y el análisis detallado de la dinámica del sistema bajo distintas condiciones. Si bien Simulink® ofrece una interfaz gráfica amigable y modular, su uso puede resultar menos eficiente cuando se requiere trabajar con expresiones matemáticas complejas o realizar pruebas sobre múltiples configuraciones de control en el mismo entorno. El uso de funciones escritas en MATLAB® favorece la flexibilidad de código, la validación numérica de los controladores y la integración directa con herramientas de análisis simbólico o numérico.

En consecuencia, la simulación desarrollada en este trabajo mediante funciones de MATLAB® constituye una representación válida y precisa del comportamiento dinámico del VANT, siendo plenamente equiparable a una simulación desarrollada en Simulink® en términos de fidelidad, pero con una mayor flexibilidad para propósitos de investigación.

---

<sup>15</sup>El valor de las constantes físicas como la inercia, masa, medidas del VANT, inercia del rotor, etc. Serán extraídas de la planta diseñada en Bouabdallah, 2007, para realizar las pruebas de simulación de nuestro sistema.

## Diagrama de flujo de la simulación del VANT en Matlab®

A fin de representar de manera estructurada la lógica del algoritmo de simulación, se presenta el diagrama de flujo en la Figura 4.7. Este diagrama describe las etapas principales que se siguen desde la definición de las condiciones iniciales, pasando por la integración numérica del modelo mediante una función externa que contiene las ecuaciones del sistema y las leyes de control, hasta la obtención y visualización de los resultados. La función  $VANT(t, x)$  actúa como un subproceso dentro del cual se define la dinámica del sistema, las ecuaciones de los motores y la estrategia de control. La representación gráfica permite visualizar el orden lógico de ejecución del código y facilita la comprensión del proceso de simulación desarrollado. En el Anexo C, se muestra el código implementado en Matlab®.

### 4.3. Desarrollo del hardware

El desarrollo del hardware se divide en dos partes fundamentales: La estructura del VANT y el sistema de instrumentación.

#### 4.3.1. La estructura del VANT

La estructura del VANT abarca todos los componentes mecánicos, incluyendo los motores, hélices y posibles engranajes. Además, es en esta parte donde se instalarán los elementos electrónicos, tales como los sensores de orientación, el microcontrolador, el driver de los motores, entre otros. Para su selección, se considerarán estructuras o vehículos aéreos no tripulados comerciales disponibles en el mercado para la fecha en la que se está realizando el presente proyecto.

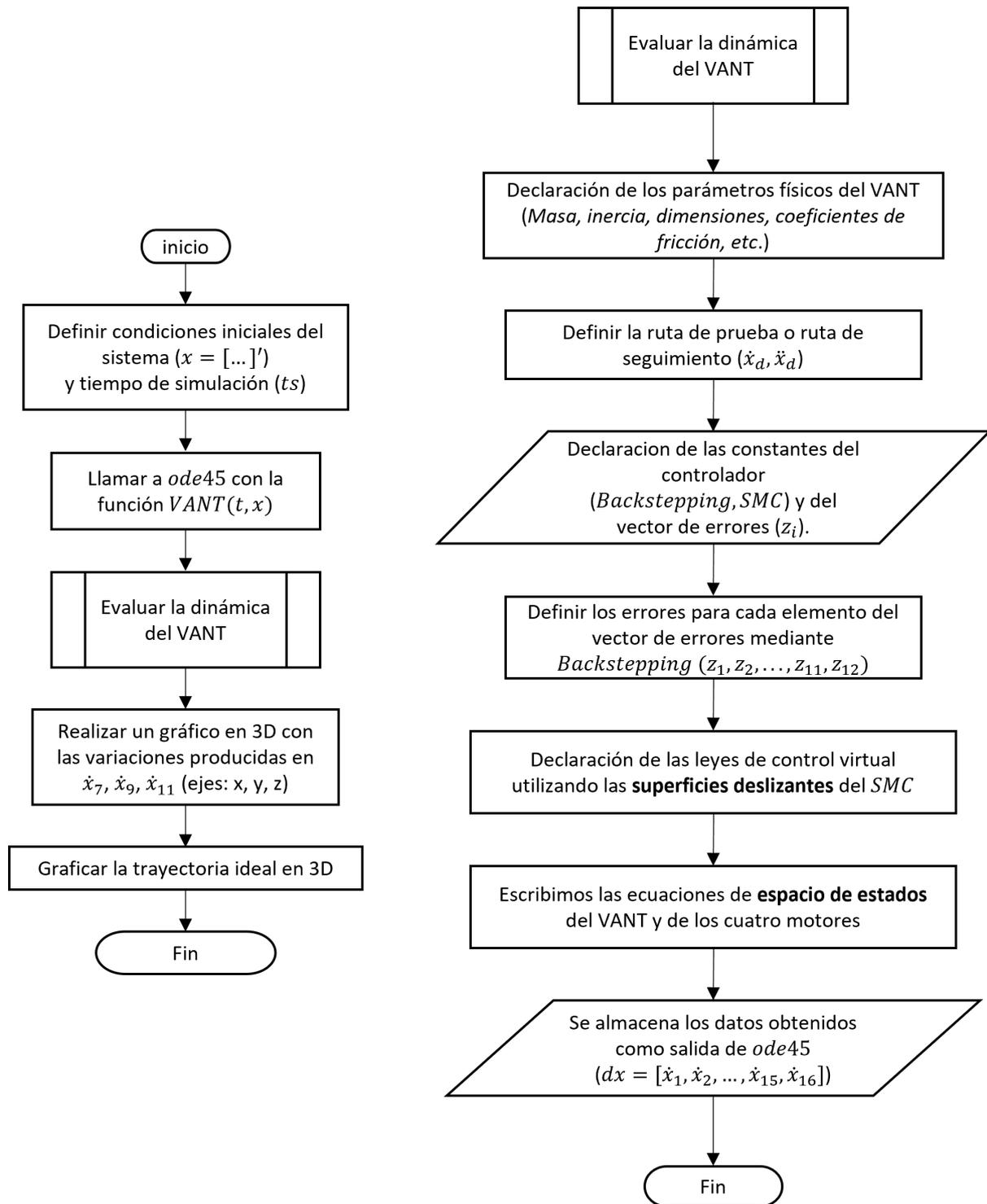
Los principales criterios considerados para su elección, serán: la **seguridad**<sup>16</sup> que ofrece, y la **confiabilidad del diseño**<sup>17</sup>, entendida como el funcionamiento comprobado de la estructura

<sup>16</sup>Es decir, qué tan seguro resulta para el operador y su entorno realizar pruebas del sistema diseñado.

<sup>17</sup>Este criterio se comprueba si la estructura fue utilizada satisfactoriamente con algún otro sistema de control.

**Figura 4.7**

Diagrama de flujo del sistema de control implementado en Matlab®.



**Nota.** El sistema de control implementado utiliza las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante, aplicado a las ecuaciones dinámicas del VANT.

física, los motores y las hélices.

**Tabla 4.1:** *Evaluación comparativa de tres estructuras de VANT*

Criterio	F450 (DJI)	Helic Max	E99Pro
Seguridad	Baja	Alta	Media
Confiabledad	Media	Alta	Media

De acuerdo a la información proporcionada por la Tabla 4.1, se observa que la mejor opción para elegir como estructura para nuestro proyecto es la **Helic Max**, la cual viene con una estructura de protección integrada para las hélices, tiene un tamaño razonable para poder realizar pruebas dentro de un ambiente controlado y al ser un VANT comercial funcional nos asegura que su diseño mecánico es el adecuado (véase la Figura 4.8). Como se diseñó nuestro sistema de instrumentación, retiraremos todo el sistema embebido que integra este equipo.

#### **Figura 4.8**

*VANT comercial HotSpeed de la marca Helic Max.*



*Nota.* Estructura mecánica de un VANT comercial elegida para realizar la implementación del sistema de instrumentación. Adaptado de (Falabella, 2024).

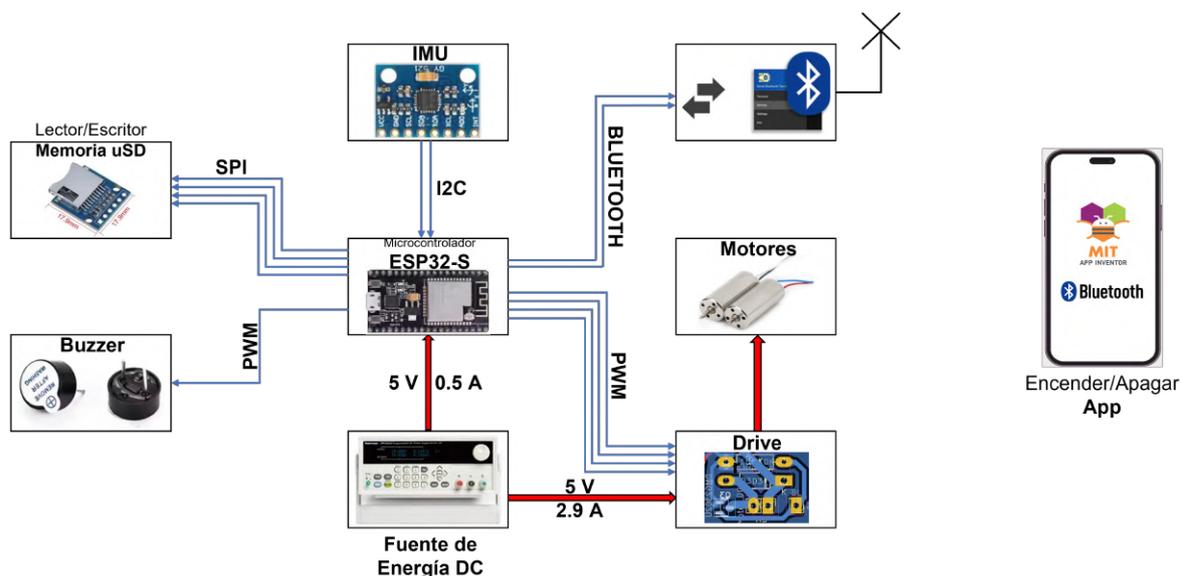
### **4.3.2. Sistema de instrumentación**

El sistema de instrumentación está compuesto por los elementos que se describen en la Figura 4.9, el cual nos muestra las interacciones que tendrán entre cada uno de ellos y también nos muestra que habrá una conexión mediante el protocolo Bluetooth el cual servirá solamente

para encender o apagar el sistema diseñado. A continuación se muestra a detalle la elección de cada componente mostrado en la Figura 4.9.

**Figura 4.9**

*Diagrama de bloques del hardware desarrollado para el VANT.*



*Nota.* En el diagrama de bloques presentado, también se incluye a la aplicación móvil desarrollada en AppInventor para el encendido y apagado del sistema.

## El Microcontrolador

Para la elección del microcontrolador se consideraron las necesidades expuestas en la Figura 4.9, priorizando que cuente con los protocolos de comunicación requeridos y con la cantidad de puertos *GPIO* necesarios para la interacción con los componentes del diseño. Asimismo, se tomó en cuenta las dimensiones físicas de su módulo comercial, de manera que fueran compatibles con las dimensiones de la estructura mecánica seleccionada para el VANT.

Según se observa en la Tabla 4.2, los microcontroladores *ESP32* y *MX RT1062* son los únicos que cumplen con las cualidades necesarias para implementar el sistema. Sin embargo, el *ESP32* presenta una ventaja adicional: integra el protocolo de comunicación *Bluetooth*, el cual es importante para la implementación del proyecto. Por esta razón, se selecciona el *ESP32*, empleando su módulo comercial.

**Tabla 4.2:** Comparación de microcontroladores.

Modelo	GPIO y flexibilidad	Protocolos de comunicación	Memoria (RAM / ROM)	Frecuencia	Dimensiones	Precio (S/)
ATmega328P	14 digitales, 6 PWM, 6 analógicos	UART, SPI, I2C	2 KB / 32 KB	16 MHz	68.6 x 53.4 mm	70
ESP32	34 GPIO multifunción, incluye ADC, DAC y PWM	UART, SPI, I2C, CAN, Bluetooth, Wi-Fi	520 KB / 4 MB	160–240 MHz	25.6 × 18 mm	150
MX RT1062	40 GPIO, ADC, PWM, y otros.	UART, SPI, I2C, CAN, USB Host, Audio	1024 KB / 2 MB	600 MHz	35.5 × 18 mm	250
ATmega2560	54 digitales, 15 PWM, 16 analógicos	4 UART, SPI, I2C	8 KB / 256 KB	16 MHz	101.5 × 53.3 mm	150

### Sensores de orientación

Para realizar la medición de los ángulos de orientación (ángulos Tait-Bryan), se necesita utilizar sensores del tipo IMU<sup>18</sup>, los cuales serán elegidos por los tipos de sensores que integran, grados de libertad que son capaces de medir, resolución de salida en bits y el precio en soles.

**Tabla 4.3:** Comparación de sensores IMU.

Sensor	Sensores integrados	DoF	Resolución	Precio(S/)
MPU6050	Acelerómetro + Giroscopio	6 DoF	16 bits en ambos sensores	18
MPU9250	Acelerómetro + Giroscopio + Magnetómetro	9 DoF	16 bits (acel/gyro), 13 bits (magnetómetro)	85
GY-91	MPU9250 + Barómetro (BMP280)	10 DoF	Igual al MPU9250 + 16–20 bits (barómetro)	90

Lo que principalmente interesa es la medición de la orientación del VANT y para realizarlo, solamente basta con seis grados de libertad. Por lo tanto, según los datos mostrados por la Tabla 4.3, se elige el sensor *MPU6050* por tener los requerimientos necesarios para el proyecto (6 DoF) y por que además tiene un precio bajo en comparación con los otros sensores. La calibración del sensor *IMU* seleccionado, se muestra en el Anexo B.

<sup>18</sup>Los **sensores IMU** (*Unidad de Medición Inercial*, por sus siglas en inglés) son dispositivos que integran dos o más sensores, como acelerómetros y giroscopios, con el fin de medir el movimiento y estimar los ángulos de Euler de un cuerpo en el espacio.

## Driver para los motores.

Antes de seleccionar un *driver*, se tiene que tomar en cuenta que los motores que integran la estructura elegida (sección 4.3.1), son los motores del tipo *DC-Coreless* con código 716, con una velocidad de  $\approx 48000\text{rpm}$  @  $3.7\text{v}$  @  $0.04\text{A}$  (en vacío), el cual, a pesar de sus particularidades (no tener núcleo de hierro laminado (Assun Motor, 2024, enero)) funcionan como un motor DC convencional. Tomando en cuenta la naturaleza de funcionamiento de los motores y sus características técnicas, se elige como su *driver* un transistor el cual pueda conducir la corriente adecuada para cada motor y que pueda manejar señales *PWM* en un amplio rango de frecuencias.

**Tabla 4.4:** Comparación de transistores para utilizarlos como driver para los motores.

Componente	Tipo	Corriente máxima (A)	Frecuencia máxima de trabajo	Precio (S/.)
TIP31	Transistor BJT	3 A	Hasta 3 kHz	0.80
SL2302	MOSFET - N	2.3 A continuo	Hasta 100 kHz	0.70
IRF9540N	MOSFET - P	23 A	Hasta 100 kHz	5.00

De la Tabla 4.4, se elige el transistor MOSFET de canal N *SL2302* por que cumple con las características necesarias, ya que tiene la capacidad de manejar corrientes de hasta 2.3 A (el motor *DC-Coreless* 716, utiliza  $\approx 0,58\text{A}$  @  $5\text{V}$ , con carga) y es capaz de trabajar con señales de hasta 100 kHz (lo que es útil, ya que se trabaja con señales *PWM* de  $5\text{kHz}$  @  $8\text{bits}$ <sup>19</sup>) y además tiene un precio razonable.

En la Figura 4.10 se muestra el *driver* diseñado, el cual está compuesto por dos resistencias de  $100\ \Omega$ ,  $10\ \text{k}\Omega$  y un diodo. La inclusión de estos componentes responde a las siguientes razones: La resistencia de  $100\ \Omega$  se encuentra conectada en serie con la señal *PWM* proveniente del microcontrolador. Su función principal es limitar la corriente de entrada a la compuerta del transistor *MOSFET* durante los cambios de estado de la señal, protegiendo así el puerto *GPIO* utilizado. Por otro lado, la resistencia de  $10\ \text{k}\Omega$  funciona como una resistencia *pull-down*, garantizando que la compuerta del *MOSFET* se mantenga en  $0\ \text{V}$  cuando el puerto *GPIO* no entrega señal alguna, evitando así activaciones no deseadas provocadas por ruido eléctrico.

<sup>19</sup>La elección de estos parámetros para la señal *PWM* se justifican en la sección 6.1.1.

Aunque ambas resistencias conforman un divisor de tensión, este no es su propósito principal. Por ello, se eligieron valores adecuados para minimizar el efecto de atenuación sobre la señal de compuerta. En este caso, se logró un factor de atenuación cercano a 0,99, asegurando así un valor de  $V_{GS}$  prácticamente igual al nivel lógico de la señal *PWM*.

Asimismo, el diodo conectado en paralelo a las bobinas del motor cumple la función de proteger el circuito general frente a la energía almacenada en dichas bobinas, la cual se libera en forma de picos de voltaje cuando se interrumpe la alimentación del motor.

### **Lector/Escritor de memoria micro SD (uSD)**

Para la elección del modulo lector/escritor de memoria uSD, el cual nos servirá para guardar los datos obtenidos de la medición de orientación para posteriormente observar los resultados del control, lo elegiremos unicamente por su disponibilidad comercial, ya que no afecta al sistema de control que se esta implementando.

### **Depurador**

Para verificar el correcto funcionamiento de todas las etapas del programa implementado en el microcontrolador y asegurarnos de su adecuada ejecución, se utilizará un *buzzer* como señal de confirmación. Este permitirá comprobar que cada una de las fases del sistema se está ejecutando según lo previsto.

### **Fuente de energía DC**

Todo el sistema desarrollado sera energizado con la fuente de alimentación *PWS4305* de la marca Tektronix<sup>®</sup>. Se elige utilizar esta fuente de alimentación por la precisión que ofrece, el cual tiene una resolución de ajuste de hasta 10mV y 1mA, y porque también es capaz de entregar un voltaje de 0-30V con una capacidad de corriente de hasta 5A (Tektronix, Inc., 2011).

## Aplicación para encender/apagar el sistema de control

Como el sistema evalúa y mide la orientación de la planta (VANT), y dado que se trata de un equipo que opera con hélices girando a altas velocidades ( $\approx 48000$  rpm), se diseñó una aplicación para celular capaz de comunicarse con el microcontrolador para encender o apagar el sistema de forma remota. Esto evita la intervención no autorizada o la inyección de datos falsos en la medición de la orientación, y además protege la integridad tanto del operador como del entorno en el que se realizan las pruebas.

### 4.3.3. Diseño electrónico

#### Esquema electrónico

El diagrama presentado en la Figura 4.10, fue realizado con el programa de diseño electrónico KiCad<sup>®</sup>, en donde se presentan los diferentes componentes utilizados para la implementación del sistema de instrumentación y también de sus conexiones. Se tiene que aclarar que el microcontrolador *ESP32* utilizado viene integrado internamente con un protocolo de comunicación Bluetooth y su antena.

#### Diseño del PCB

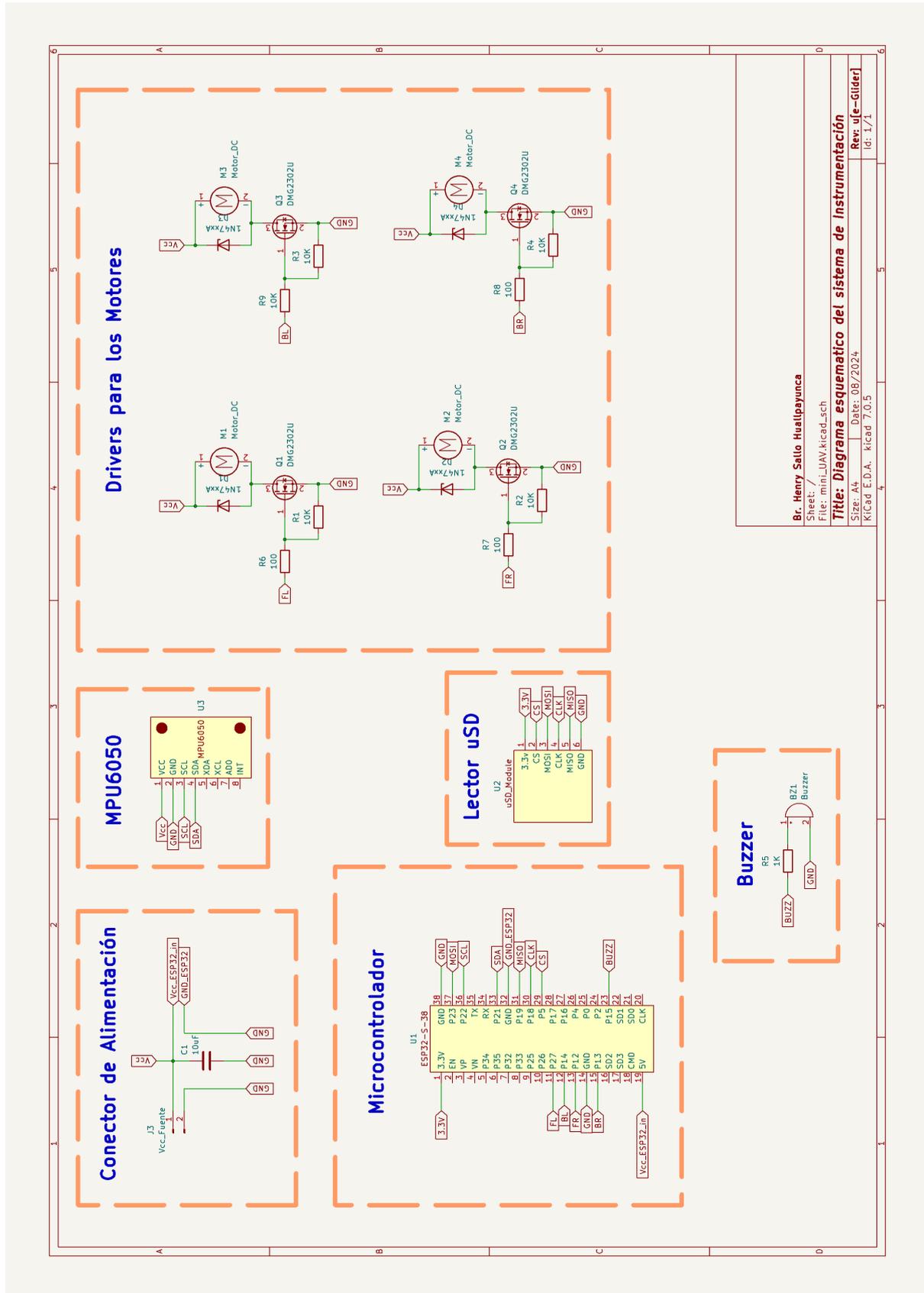
La Figura 4.11 muestra la representación física del circuito diseñado sobre una placa de circuito impreso (PCB, por sus siglas en inglés), así como sus dimensiones. La PCB ha sido diseñada con una sola capa de cobre, y los *MOSFET de canal N SL2302* son los únicos componentes que emplean encapsulado SMD<sup>20</sup>. Esta elección, de los transistores con encapsulamiento *SMD*, se realiza por la necesidad de optimizar el espacio disponible, permitiendo la correcta integración del circuito en la estructura mecánica del VANT seleccionado.

---

<sup>20</sup>Los dispositivos de montaje superficial (SMD, por sus siglas en inglés) son componentes electrónicos diseñados para ser ensamblados directamente sobre la superficie del PCB.

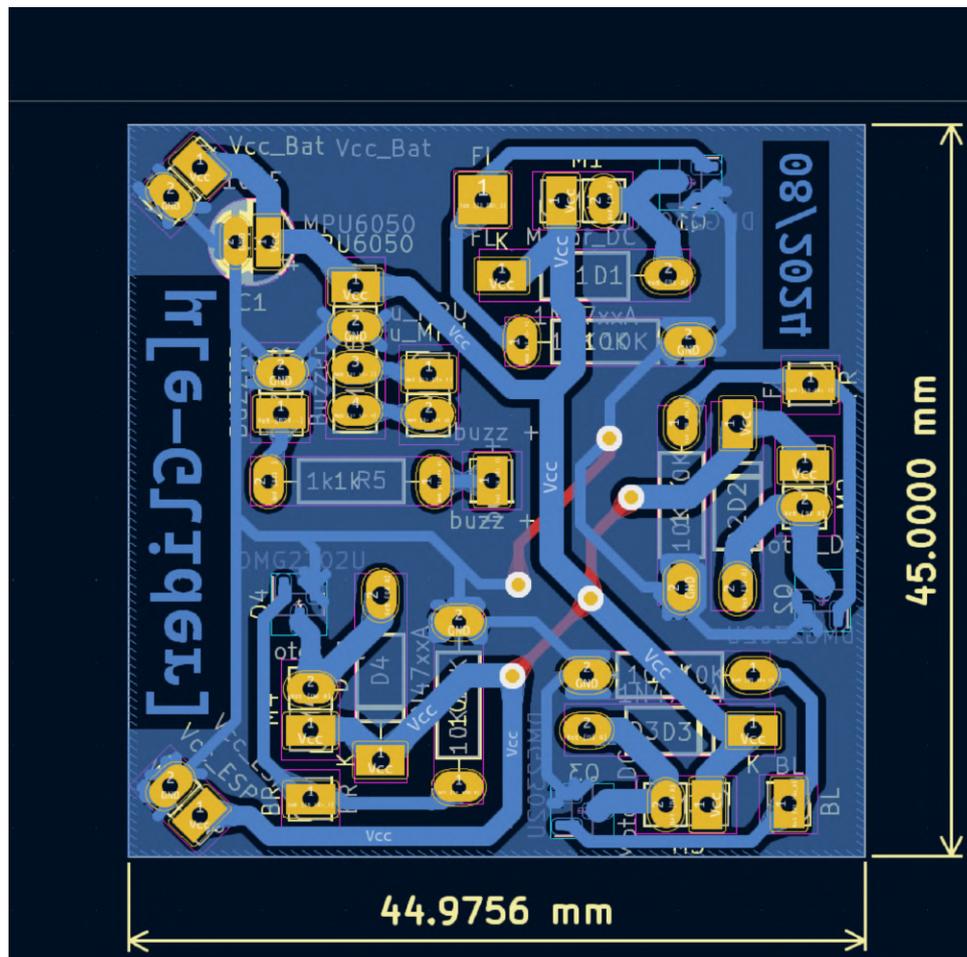
**Figura 4.10**

*Esquema electrónico del circuito de instrumentación implementado.*



**Figura 4.11**

*Placa de circuito impreso (PCB) del sistema de instrumentación.*



#### 4.3.4. Momentos de inercia del VANT

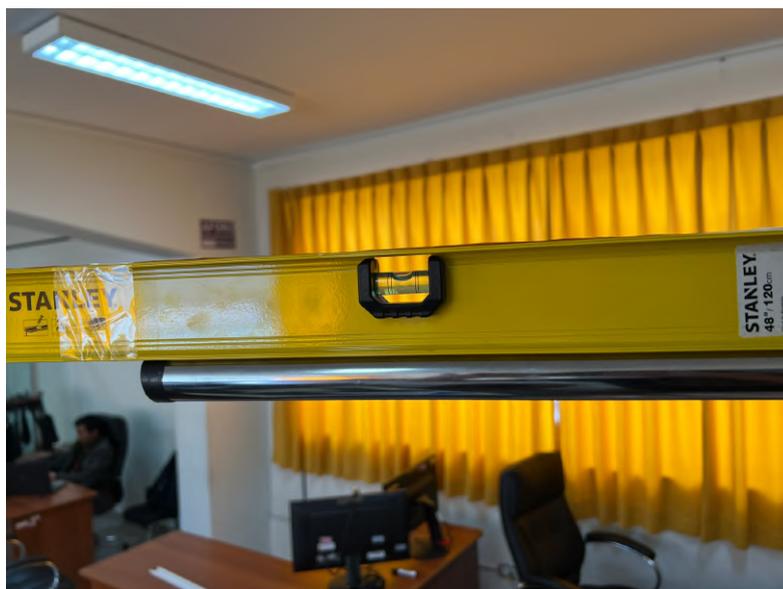
Para poder implementar de forma adecuada las ecuaciones de control desarrolladas en la sección 4.2.4, se tiene que hallar los momentos de inercia de la estructura del VANT implementado con todos sus elementos. Y el método que se utilizó para hallarlo es el péndulo bifilar, tomando como referencia para su implementación los conceptos presentados en la sección 2.4.7.

##### Implementación del péndulo bifilar

La prueba experimental del péndulo bifilar se llevó a cabo en las instalaciones del laboratorio institucional LIECAR. Para su implementación, se instaló a nivel (Figura 4.12) una varilla tubular de acero inoxidable como estructura de soporte, en la cual se fijaron dos hilos equidistantes que permitieron suspender el VANT de forma estable. El objetivo del ensayo fue determinar los momentos de inercia del VANT, para lo cual se realizaron tres configuraciones experimentales distintas. Cada una de ellas fue diseñada para evaluar el momento de inercia respecto a uno de los ejes principales de rotación:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.

##### Figura 4.12

*Soporte de acero inoxidable instalado para realizar las pruebas experimentales del péndulo bifilar.*



■ **Primera configuración (Momento de Inercia en el eje  $x$ ):**

En la figura 4.13, se observa la implementación del método del péndulo bifilar para hallar el momento de inercia de la estructura del VANT, la cual esta implementada con todos sus componentes de hardware, con respecto a su eje  $x$ . Teniendo como datos:

- Masa del cuerpo:  $0,06995\text{Kg}$
- Aceleración de la gravedad:  $9,81\text{m/s}^2$
- Longitud de los hilos:  $0,88\text{m}$
- Distancia entre puntos de suspensión:  $0,09\text{m}$

**Figura 4.13**

*Estructura implementada del VANT, suspendida para hallar el momento de inercia en su eje  $x$ .*



■ **Segunda configuración (Momento de Inercia en el eje y):**

La Figura 4.14, muestra la implementación del método del péndulo bifilar para hallar el momento de inercia con respecto al eje y del VANT. La implementación para esta configuración es similar al que se realizó para el eje x, por ello es que sus datos no varían significativamente. Datos de implementación:

- Masa del cuerpo:  $0,06995\text{Kg}$
- Aceleración de la gravedad:  $9,81\text{m/s}^2$
- Longitud de los hilos:  $0,87\text{m}$
- Distancia entre puntos de suspensión:  $0,09\text{m}$

**Figura 4.14**

*Estructura implementada del VANT, suspendida para hallar el momento de inercia en su eje y.*



■ **Tercera configuración (Momento de Inercia en el eje z):**

Para hallar el momento de inercia del VANT con respecto a su eje z, se instaló la estructura del VANT tal como se muestra en la Figura 4.15, adecuando la distancia entre los puntos de suspensión acorde a la configuración de la estructura del VANT. Los datos de esta configuración, son los siguientes:

- Masa del cuerpo:  $0,06995\text{Kg}$
- Aceleración de la gravedad:  $9,81\text{m/s}^2$
- Longitud de los hilos:  $0,875\text{m}$
- Distancia entre puntos de suspensión:  $0,20\text{m}$

**Figura 4.15**

*Estructura implementada del VANT, suspendida para hallar el momento de inercia en su eje z.*

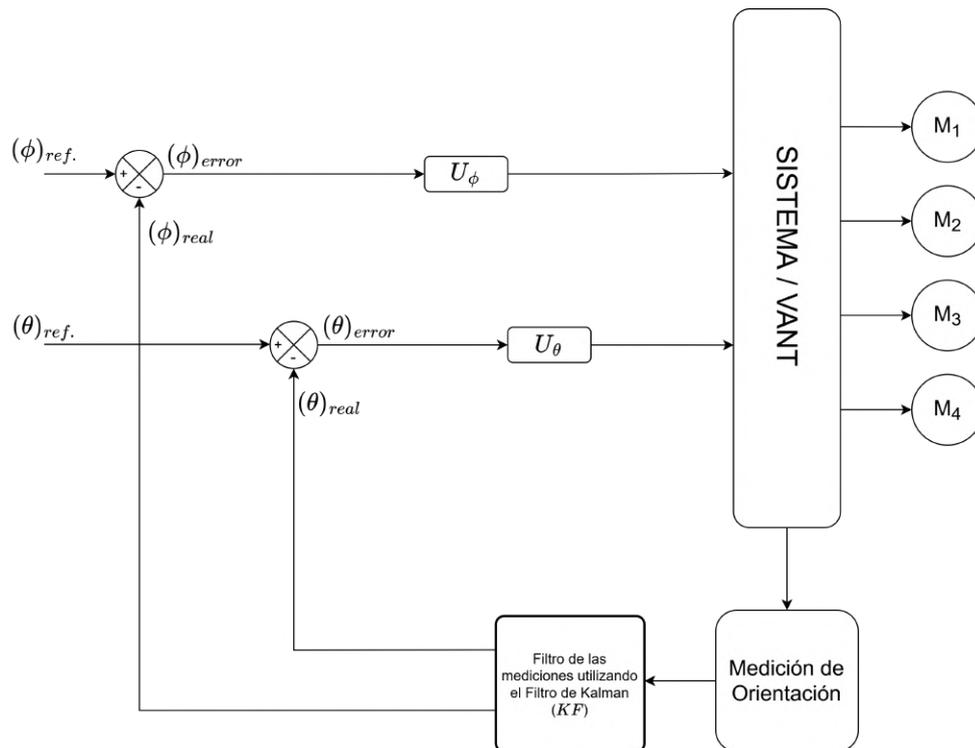


## 4.4. Desarrollo del Software de control

Para desarrollar el software de control, se tiene que tomar en cuenta la estructura lógica del sistema de control. La Figura 4.16, muestra de forma clara y simple la secuencia lógica del funcionamiento que tiene el sistema de control.

**Figura 4.16**

*Diagrama de bloques del sistema de control implementado.*

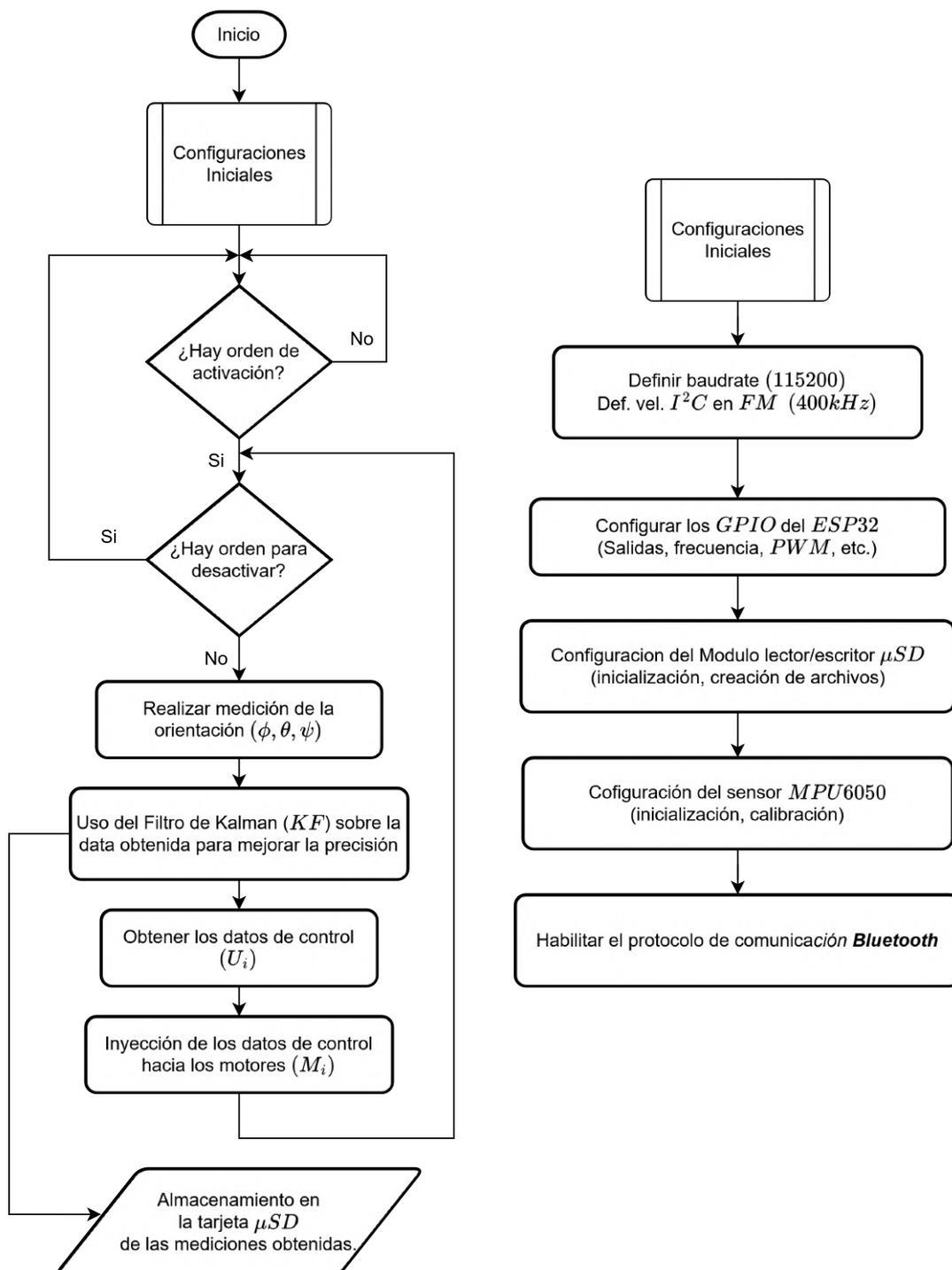


### 4.4.1. El software de control

El software que controla el sistema está compuesto por diversas etapas, entre las cuales se incluyen: la configuración de los dispositivos con los que se debe establecer comunicación, la habilitación de los puertos *GPIO* del *ESP32*, la activación de los protocolos de comunicación necesarios, el filtrado de la información proveniente del sensor inercial, el procesamiento de los datos de orientación obtenidos, así como su almacenamiento, entre otros procesos. La frecuencia de ejecución del lazo de control es de  $200\text{Hz}$ , el cual es un valor típico para un controlador de vuelo (Waliszkiewicz et al., 2020).

En la Figura 4.17 se muestra el diagrama de flujo que representa la secuencia lógica de cada una de las etapas del sistema. En el Anexo C, se muestra el código del software desarrollado.

**Figura 4.17**  
Diagrama de flujo del software de control desarrollado.

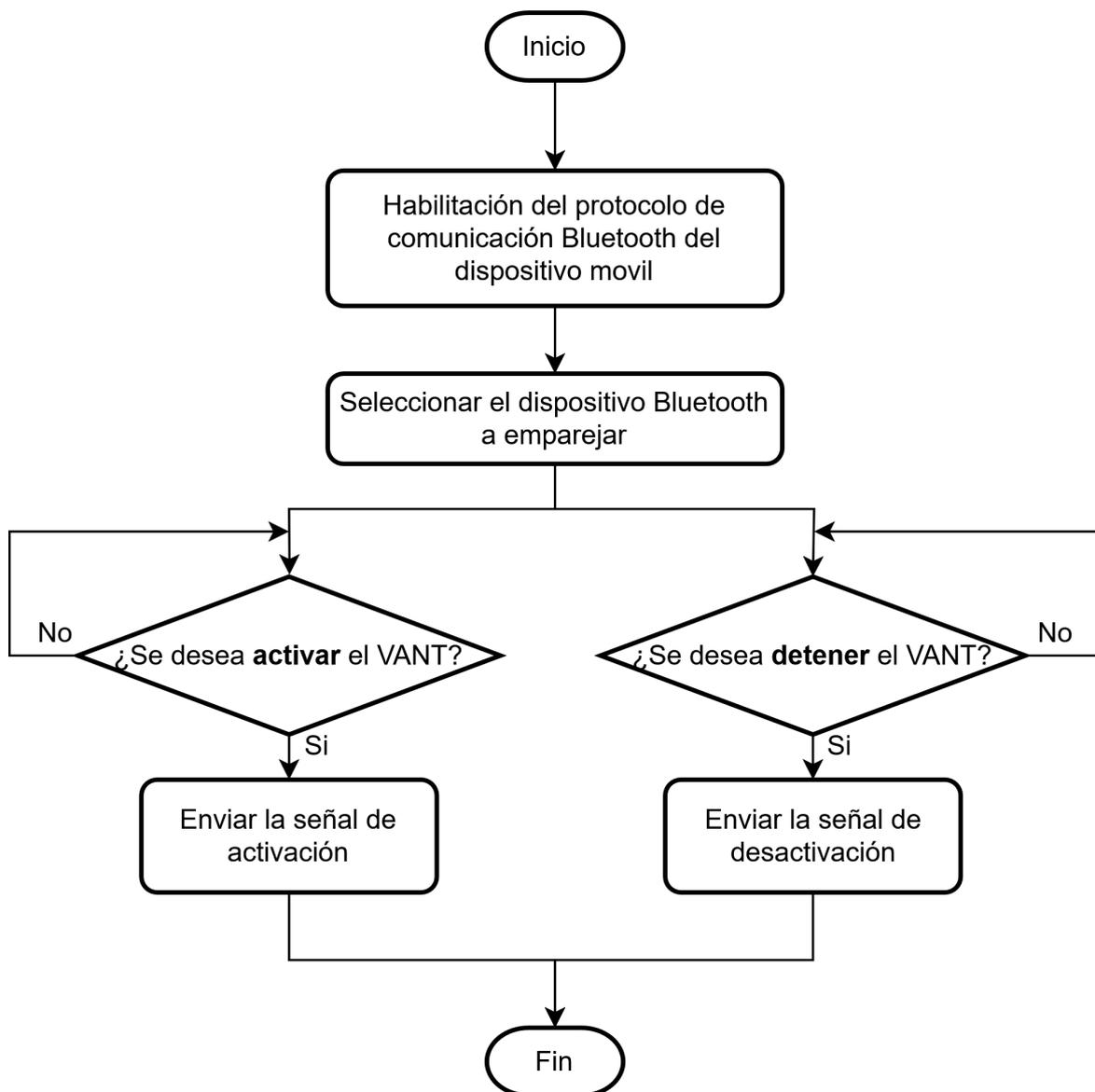


## Desarrollo del software para encender/apagar de forma remota

Para enviar los comandos de activación y desactivación al sistema, se realizó una aplicación móvil utilizando la plataforma de desarrollo *MIT-AppInventor*. Utiliza el protocolo de comunicación Bluetooth para enlazarse con el software de control. Los motivos por los cuales se decidió crear dicha interfaz de comunicación se trataron en la sección 4.3.2.

**Figura 4.18**

*Diagrama de flujo del aplicativo móvil desarrollado, el cual, se encarga de encender y apagar el software de control.*



## Capítulo 5

# RESULTADOS

### 5.1. Resultados respecto a los objetivos específicos.

#### 5.1.1. Resultados obtenidos con respecto a la elección de la técnica matemática para desarrollar el modelamiento matemático del VANT, utilizando el método del péndulo bifilar para hallar la matriz de inercia del VANT.

Los resultados con respecto al primer objetivo son dos: El primer resultado se da con respecto a la elección y el desarrollo del modelo matemático del VANT; y el segundo resultado responde al hallazgo de la matriz de inercia del VANT que se halló utilizando el método del péndulo bifilar.

#### **Resultado de la elección y desarrollo del modelo matemático del VANT**

Para el desarrollo del modelo matemático del VANT se ha seleccionado el método de Newton-Euler y se obtuvo de forma satisfactoria las ecuaciones dinámicas que gobiernan el sistema.

Las ecuaciones dinámicas del VANT (5.1) muestran la relación que existe entre las velocidades angulares ( $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ ) y lineales ( $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ), con respecto a las entradas efectivas del sistema ( $\omega_i$ )

$$\begin{aligned}
I_x \ddot{\phi} &= (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} + d(F_3 - F_1) - K_{fax} \dot{\phi}^2 - \dot{\theta} J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\
I_y \ddot{\theta} &= (I_z - I_x) \dot{\phi} \dot{\psi} + d(F_4 - F_2) - K_{fay} \dot{\theta}^2 - \dot{\phi} J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\
I_z \ddot{\psi} &= (I_x - I_y) \dot{\phi} \dot{\theta} + K_d (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - K_{faz} \dot{\psi} \\
m \ddot{x} &= (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{ftx} \dot{x} \\
m \ddot{y} &= (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{fity} \dot{y} \\
m \ddot{z} &= \cos \theta \cos \phi (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{ftz} \dot{z} - mg
\end{aligned} \tag{5.1}$$

La matriz que se muestra en 5.2, se realizo desglosando los valores que componen las fuerzas ( $F_i$ ) de cada entrada de control virtual ( $U_i$ ) descritas en las ecuaciones 4.35 y 4.36. La razón por la que se realizo dicho trabajo, es para tener un mejor entendimiento de la composición de las entradas virtuales y de su naturaleza.

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p \omega_1^2 & K_p \omega_2^2 & K_p \omega_3^2 & K_p \omega_4^2 \\ -K_p \omega_1^2 & 0 & K_p \omega_3^2 & 0 \\ 0 & -K_p \omega_2^2 & 0 & K_p \omega_4^2 \\ K_d \omega_1^2 & -K_d \omega_2^2 & K_d \omega_3^2 & -K_d \omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_p & K_p & K_p & K_p \\ -K_p & 0 & K_p & 0 \\ 0 & -K_p & 0 & K_p \\ K_d & -K_d & K_d & -K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

## Resultado de la matriz de inercia del VANT, utilizando el método del péndulo bifilar

Para hallar los valores de los momentos de inercia en los tres ejes ( $x, y, z$ ) del VANT, se utiliza la fórmula 2.3, los datos obtenidos en la sección 4.3.4 y las consideraciones expuestas en la sección 2.4.7.

Para la obtención del periodo, se utilizó la fórmula:  $T = \frac{t_{osc}}{N_{osc}}$ , donde:  $t_{osc}$  es el tiempo de oscilación; y  $N_{osc}$  es el número o cantidad de oscilaciones consideradas. Para el momento de inercia de cada eje, se consideró los valores de 10, 15 y 20 para la variable  $N_{osc}$  y se obtuvo como periodo final ( $T$ ) el promedio de los periodos  $T_{10}, T_{15}$  y  $T_{20}$ .

### ■ Resultados obtenidos para el momento de inercia en el eje $x$ del VANT:

Los datos de la implementación del péndulo bifilar para hallar el momento de inercia en el eje  $x$  del VANT son los siguientes:

- Masa del cuerpo ( $m$ ):  $0,06995Kg$
- Aceleración de la gravedad ( $g$ ):  $9,81m/s^2$
- Longitud de los hilos ( $h$ ):  $0,88m$
- Distancia entre puntos de suspensión ( $D$ ):  $0,09m$

El valor del periodo final para el eje  $x$  es:

$$T = \frac{1,446s + 1,496s + 1,482s}{3} = 1,4746s$$

- Periodo de las oscilaciones ( $T$ ):  $1,4746s$

Reemplazando los datos obtenidos, en la ecuación 2.3, obtendríamos:

$$I_x = \frac{(0,09m)^2 \cdot 0,06995Kg \cdot 9,81m/s^2 \cdot (1,4746s)^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot 0,88m}$$
$$I_x = 0,0000868850134Kg \cdot m^2 \tag{5.3}$$
$$I_x = 8,68850134 \cdot 10^{-5}Kg \cdot m^2$$

■ **Resultados obtenidos para el momento de inercia en el eje y del VANT:**

Para hallar el momento de inercia del VANT con respecto a su eje de rotación en y, en su implementación se obtuvieron los siguientes datos:

- Masa del cuerpo (m):  $0,06995Kg$
- Aceleración de la gravedad (g):  $9,81m/s^2$
- Longitud de los hilos (h):  $0,87m$
- Distancia entre puntos de suspensión (D):  $0,09m$
- Periodo de las oscilaciones (T):  $\frac{1,5330s+1,5380s+1,5630s}{3} = 1,5446s$

Reemplazando los datos obtenidos, en la ecuación 2.3, obtendríamos:

$$I_y = \frac{(0,09m)^2 \cdot 0,06995Kg \cdot 9,81m/s^2 \cdot (1,5446s)^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot 0,87m}$$

$$I_y = 0,0000965238921Kg \cdot m^2 \tag{5.4}$$

$$I_y = 9,65238921 \cdot 10^{-5}Kg \cdot m^2$$

■ **Resultados obtenidos para el momento de inercia en el eje z del VANT:**

Los datos obtenidos de la implementación del péndulo bifilar para hallar el momento de inercia en el eje z del VANT que desarrollamos, son los siguientes:

- Masa del cuerpo (m):  $0,06995Kg$
- Aceleración de la gravedad (g):  $9,81m/s^2$
- Longitud de los hilos (h):  $0,875m$
- Distancia entre puntos de suspensión (D):  $0,20m$
- Periodo de las oscilaciones (T):  $\frac{0,9560s+0,9833s+0,9825s}{3} = 0,97393s$

Reemplazando los datos obtenidos, en la ecuación 2.3, obtendríamos:

$$I_z = \frac{(0,20m)^2 \cdot 0,06995Kg \cdot 9,81m/s^2 \cdot (0,97393s)^2}{16 \cdot \pi^2 \cdot 0,875m}$$

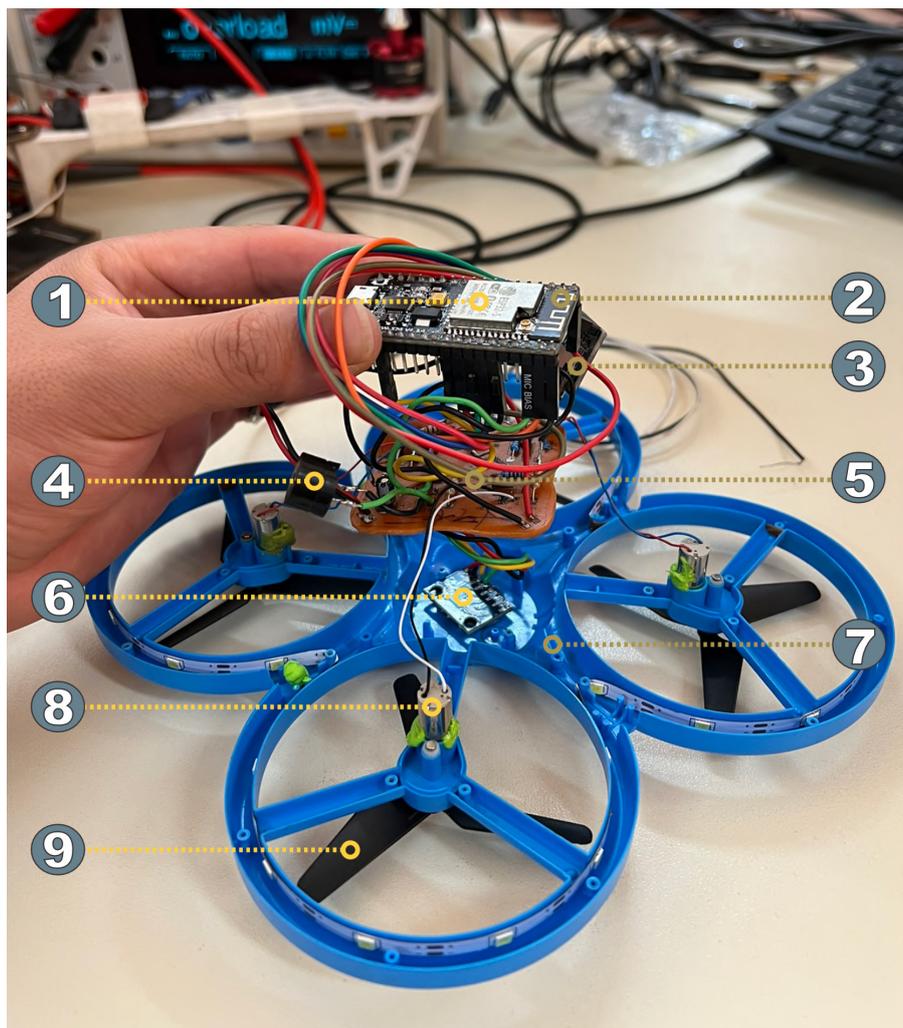
$$I_z = 0,0001882354827Kg \cdot m^2 \tag{5.5}$$

$$I_z = 18,82354827 \cdot 10^{-5}Kg \cdot m^2$$

### 5.1.2. Resultados obtenidos con respecto a la implementación de un sistema de instrumentación, compuesto por sensores y procesador, para obtener la orientación del VANT.

En la Figura 5.1 se muestra la integración del hardware utilizado para implementar el sistema de control en el VANT. Las hélices empleadas en el proyecto son de tres palas, lo que contribuye a una reducción significativa de las vibraciones generadas durante su giro. Esto es especialmente relevante, ya que las hélices convencionales de dos palas pueden producir vibraciones no deseadas que interfieren en las mediciones del sensor IMU, particularmente si no están correctamente equilibradas.

**Figura 5.1**  
*Sistema de instrumentación implementado en la estructura del VANT.*



En la figura 5.1, se enumera las partes visibles que componen el hardware del VANT. A continuación se detalla en una lista las descripciones correspondientes a cada uno de los componentes.

1. Modulo microcontrolador *ESP32-S*.
2. Antena utilizada para la comunicación Bluetooth.
3. Modulo lector/escritor de tarjetas de memoria *micro-SD*.
4. Buzzer instalado para utilizarlo como depurador.
5. *PCB* de instrumentación desarrollado para la integración del sistema.
6. Sensor *MPU6050* el cual mide la orientación del VANT.
7. Estructura del VANT hecha con material ABS.
8. Motores *DC-Coreless 716*.
9. Hélices de tres palas.

Como se menciona en la sección 4.3.2, los drivers utilizados para el control de los motores *DC-Coreless* emplean encapsulados del tipo *SMD*. Estos componentes pueden observarse en la Figura 5.2.

**Figura 5.2**  
*Drivers de los motores DC-Coreless.*



### **5.1.3. Resultados obtenidos con respecto al diseño e implementación de un controlador basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante para un VANT enfocado a controlar su orientación.**

Para lograr el cumplimiento de este objetivo, se tuvo que plantear dos tareas: La primera tarea consiste en desarrollar el diseño del controlador y comprobar su funcionamiento mediante el uso de una herramienta computacional; la segunda tarea consiste en la implementación de la técnica de control, antes validada mediante la simulación, en un entorno real.

#### **Resultados del *diseño* del controlador basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante**

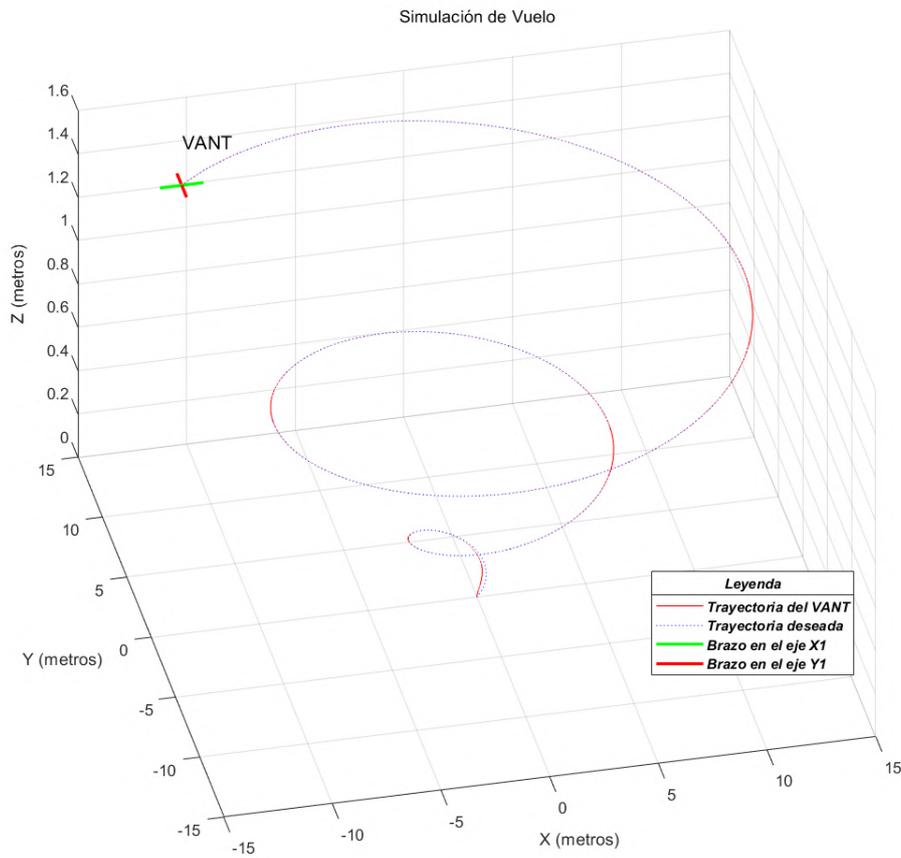
En esta etapa se ha simulado la técnica de control basado en Backstepping y Control en Modo Deslizante en la herramienta computacional Matlab®. La simulación se realizó para comprobar teóricamente el funcionamiento del controlador diseñado. Una vez desarrollada la simulación del sistema en Matlab®, y habiendo seguido la secuencia lógica presentada en el diagrama de flujo de la Figura 4.7, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura 5.3 y Figura 5.4. Estos reflejan la trayectoria del VANT bajo las condiciones iniciales y las leyes de control implementadas, permitiendo validar el comportamiento esperado del sistema frente a la trayectoria de referencia.

La Figura 5.3, muestra la trayectoria simulada que el VANT realiza al seguir una trayectoria espiral helicoidal ascendente de radio creciente.

La Figura 5.4, muestra las posiciones reales y deseadas en los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , para la misma trayectoria realizada en la Figura 5.3. Evaluando los errores en los tres ejes de coordenadas y hallando el error porcentual en cada uno de ellos.

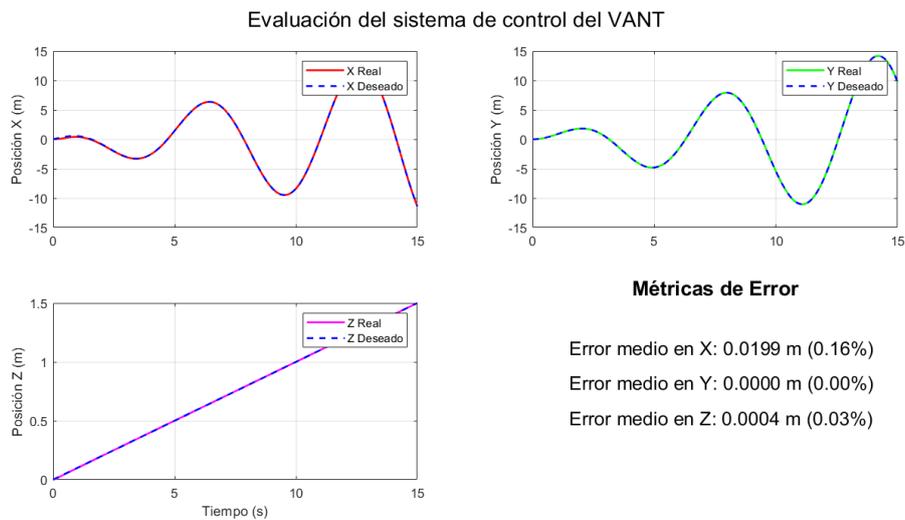
**Figura 5.3**

Resultados de la simulación del controlador basado en Backstepping y SMC, el cual, muestra el rendimiento de control en la **orientación** y la **altitud**.



**Figura 5.4**

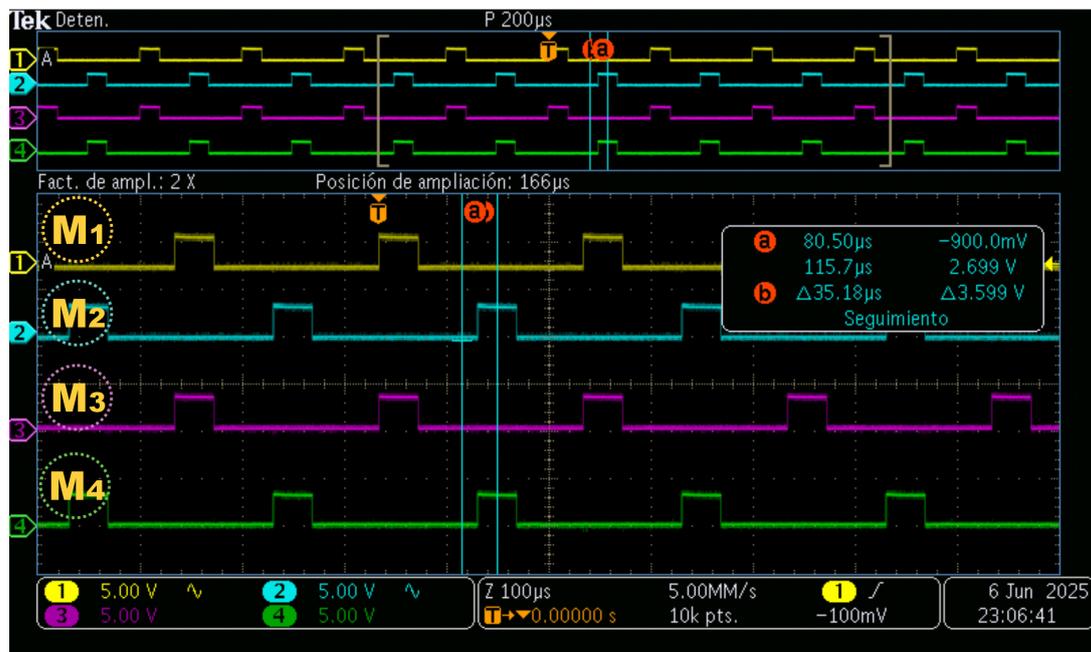
Evaluación de los errores de nuestro sistema de control, en cada uno de los ejes de coordenadas.



## Resultados de la *implementación* del controlador basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante

**Figura 5.5**

Señales *PWM* de los cuatro motores ( $M_i$ ) del VANT, entregado por el sistema de control diseñado en base a la técnicas de control Backstepping y Control en Modo Deslizante.



Como resultado de la implementación del controlador basado en las técnicas de Control en Modo Deslizante y Backstepping, debemos tener señales *PWM* para cada motor, las cuales guarden concordancia con la distribución física de los motores, en la estructura del VANT.

Esta concordancia de las señales *PWM* hacia los motores, se demostrará cuando las cuatro señales cumplan con los siguientes puntos:

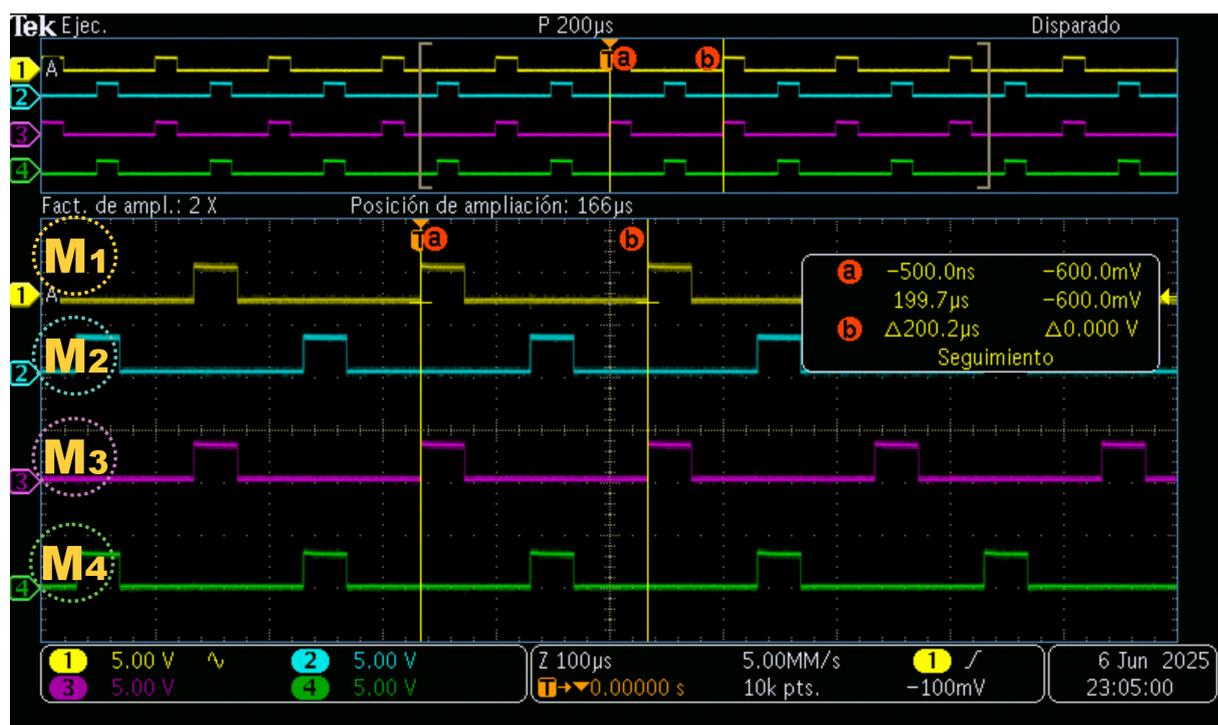
1. Todas las señales *PWM* tengan un mismo periodo ( $T$ ).
2. Las señales *PWM* de los motores  $M_1$  y  $M_3$  estén en sincronía entre si.
3. Las señales *PWM* de los motores  $M_2$  y  $M_4$  estén en sincronía entre si, pero desfasadas a las señales *PWM* de los motores  $M_1$  y  $M_3$ .
4. El desfase de las señales *PWM* de los motores  $M_{1/3}$  y  $M_{2/4}$  deberá ser igual a la mitad del periodo de las señales *PWM* ( $T/2$ ).

Para poder revisar si las señales de salida cumplen con cada uno de estos puntos, se utilizó un osciloscopio de laboratorio de cuatro canales de la marca Tektronix®, modelo: *MDO3034*.

- Para lograr cumplir el primer punto, se configuró en el microcontrolador que cada señal *PWM*, utilizado para el movimiento de los motores, trabaje con un mismo periodo de  $200\mu\text{s}$ . El cual se puede observar en la parte superior central de la Figura 5.5.
- Para el segundo punto se observa en la Figura 5.6 en donde, utilizando los cursores del osciloscopio, se comprueba que las señales *PWM* de los motores  $M_1$  y  $M_3$  están sincronizados.

**Figura 5.6**

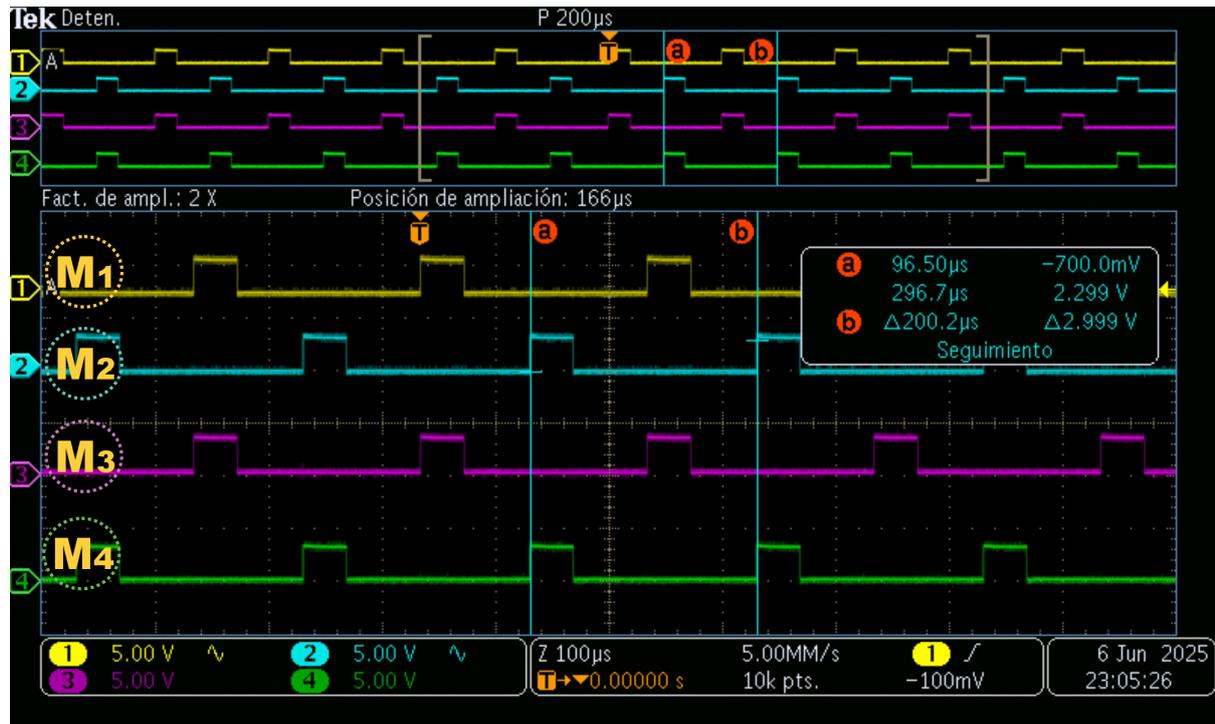
*Comprobación de la sincronía de las señales PWM de los motores  $M_1$  y  $M_3$ , a través del uso de los cursores de medición del osciloscopio.*



- Para el tercer punto también se utiliza los cursores de medición del osciloscopio para comprobar la sincronización de las señales *PWM* de los motores  $M_2$  y  $M_4$  (ver Figura 5.7).

**Figura 5.7**

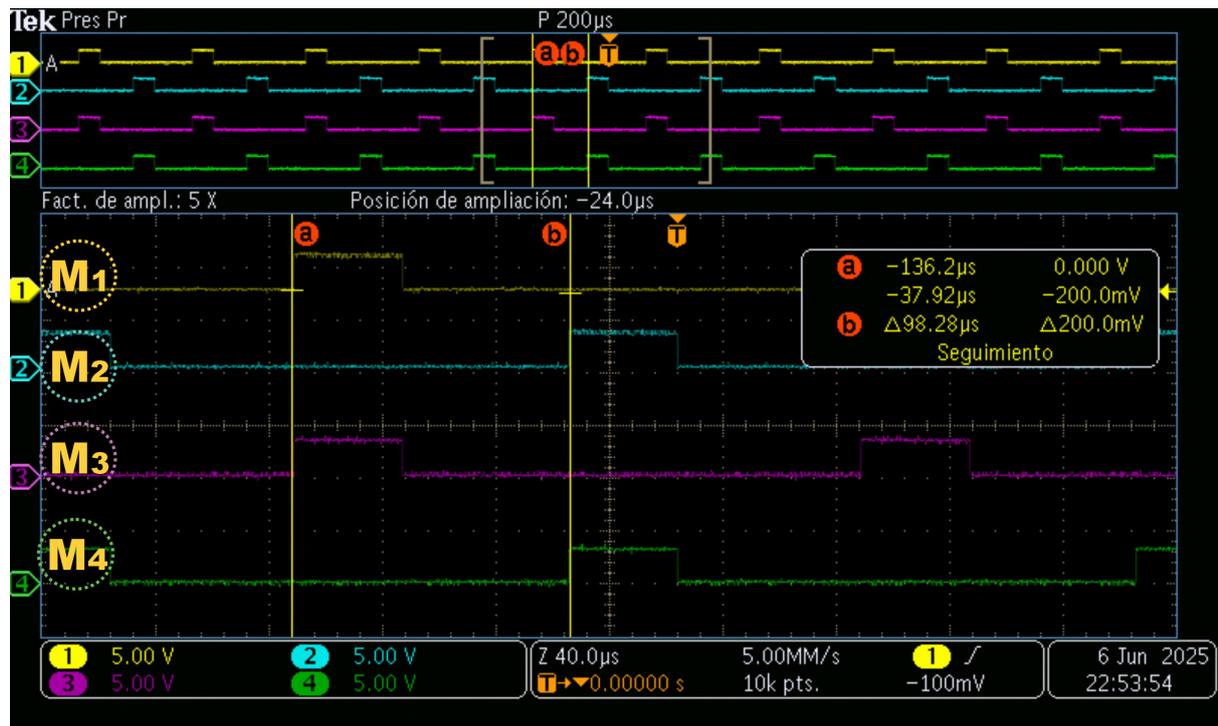
*Comprobación de la sincronía de las señales PWM de los motores  $M_2$  y  $M_4$ , a través del uso de los cursores de medición del osciloscopio.*



- Para el cuarto punto, también nos ayudaremos de los cursores de medición del osciloscopio, los cuales en este caso, medirán el desfase temporal que existe entre las señales *PWM* de los motores  $M_{1/3}$  y  $M_{2/4}$ . En la Figura 5.8 se observa que el desfase es de  $98\mu s$ , lo cual esta bien si tomamos en cuenta que nuestro periodo es de  $200\mu s$ .

**Figura 5.8**

Medición del desfase temporal que existe entre las señales PWM de los motores  $M_{1/3}$  y  $M_{2/4}$ .



Culminada la revisión y comprobación del cumplimiento de los puntos que demuestran la concordancia de las señales *PWM* obtenidas. Se demuestra que los resultados de la implementación del controlador basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante, son satisfactorias.

## 5.2. Resultados respecto al objetivo general.

El objetivo general del presente proyecto, es el desarrollo de un sistema de control basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante para implementarlo en un VANT y poder observar su desempeño en el control de la orientación. Para evaluar el desempeño del sistema implementado, se utilizó el análisis mediante la respuesta al escalón. Este análisis se implementó con el sistema encendido inicialmente en reposo, es decir, con valores de referencia en los ángulos roll y pitch en cero. La amplitud del escalón de referencia es de diez grados sexagesimales ( $10^\circ$ ), para ambos ángulos (roll y pitch). Los parámetros que se tomaron en consideración en cada prueba, son los siguientes: Tiempo de retardo ( $t_r$ ), tiempo de subida ( $t_s$ ), tiempo de pico ( $t_p$ ), sobre impulso máximo ( $M_p$ ) y el tiempo de estabilización ( $t_e$ ). Las bases teóricas para realizar esta experimentación y posteriormente evaluar los datos obtenidos, fueron tomadas del libro de Katsuhiko Ogata - Ingeniería de Control Moderno.

### Figura 5.9

*Fotografía del VANT implementado, cuando al sistema de control se le asigna un valor de referencia de  $10^\circ$  en pitch.*



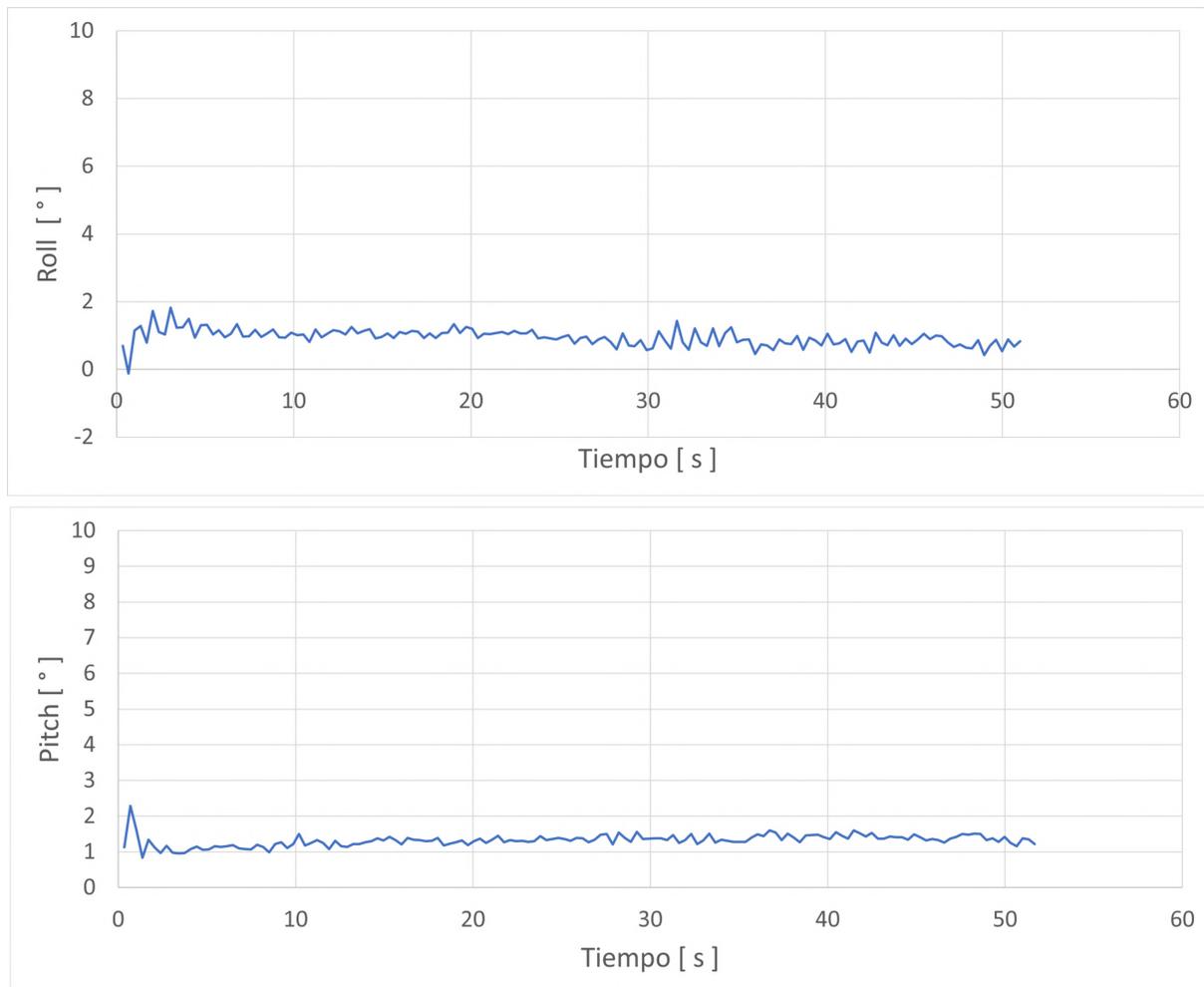
*Nota.* La línea azul es paralela al nivel que se encuentra en la superficie de referencia. La línea amarilla entrecortada representa a la variación en pitch del VANT, producido por el sistema de control diseñado. La estructura del VANT está siendo sujeta a un soporte mediante el uso de una cuerda, para limitar su área de maniobras.

## Respuesta del sistema de control con valores de referencia en $0^\circ$ en los ángulos Roll y Pitch.

En la Figura 5.10 se observa el comportamiento del sistema en el control del ángulo roll y pitch con respecto a una entrada de referencia de cero grados sexagesimales ( $0^\circ$ ) para ambos ángulos.

### Figura 5.10

*Respuesta del sistema de control, para los ángulos Roll y Pitch del VANT, con un valor de referencia igual a cero grados sexagesimales ( $0^\circ$ ) para ambos.*



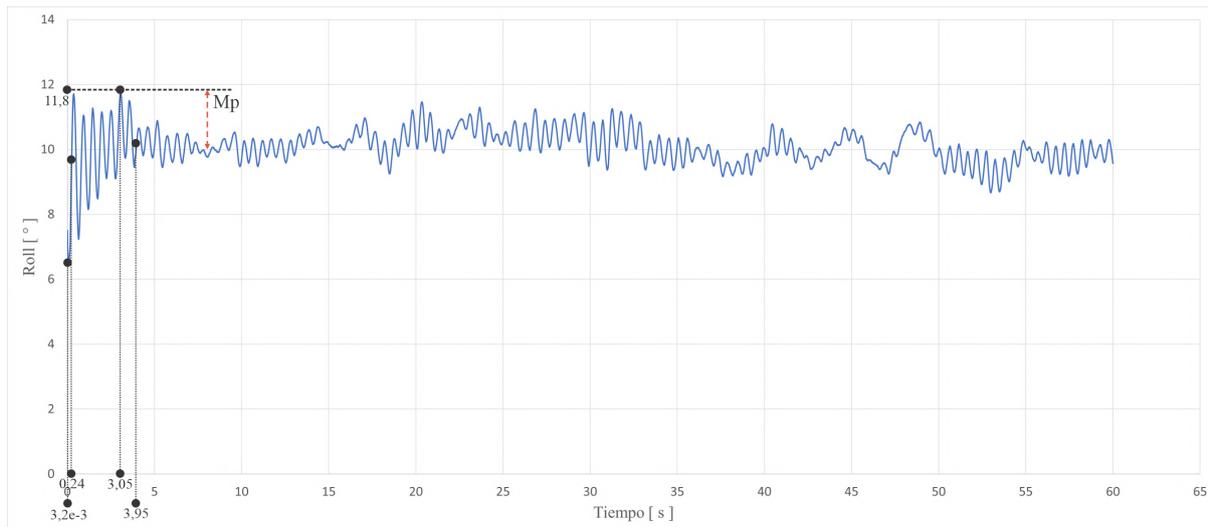
La obtención de los datos de la orientación en los ángulos roll y pitch, que se muestran en los resultados, fueron obtenidos mediante el uso del sensor inercial *MPU6050*, el cual a su vez se utiliza para realizar el control del sistema.

## Respuesta al escalón del sistema con respecto al ángulo Roll del VANT.

Esta prueba se realizó con una señal de referencia de diez grados sexagesimales ( $10^\circ$ ), fue evaluado en una ventana de tiempo de sesenta segundos (60s), a una frecuencia de 100Hz.

### Figura 5.11

Respuesta del sistema de control, para el ángulo Roll del VANT, con un valor de referencia de  $10^\circ$ .



Analizando los datos que se muestran en la Figura 5.11, hallaremos los cinco parámetros mencionados en la sección 5.2.

#### ■ Tiempo de retardo ( $t_r$ ):

Es el tiempo en que la respuesta alcanza el 50 % del valor de referencia.

$$0,5 \cdot 10^\circ = 5^\circ$$

De la Figura 5.11 se observa que a los  $0,0032s$ , ya está en  $\sim 6,85^\circ$ . Entonces se puede decir:

$$t_r \approx 0,0032s$$

■ **Tiempo de subida ( $t_s$ ):**

Es el tiempo que tarda en ir de 10 % a 90 % de la magnitud final.

$$10 \% = 1^\circ, 90 \% = 9^\circ$$

En la Figura 5.11 se observa que el sistema ya se encuentra dentro del rango. Así que el tiempo de subida es rápido. Aproximadamente cruza los  $9^\circ$  en un tiempo de 0,24s.

$$\therefore t_s \approx 0,24s$$

■ **Tiempo de pico ( $t_p$ ):**

Es cuando alcanza el máximo valor de los valores medidos. En la Figura 5.11, podemos ver que el máximo valor es de  $11,8^\circ$  alcanzado en un tiempo de 3,05s.

$$\therefore t_p \approx 3,05s$$

■ **Sobre impulso máximo ( $M_p$ ):**

La formula para hallarlo es el siguiente:

$$M_p = \frac{y_{max} - y_{ref}}{y_{ref}} \cdot 100 \% \quad (5.6)$$

Reemplazando los valores mostrados en la Figura 5.11, tendríamos:

$$M_p = \frac{11,8 - 10}{10} \cdot 100$$

$$M_p = 18 \%$$

■ **Tiempo de estabilización ( $t_e$ ):**

Para una tolerancia de  $\pm 5 \% = \pm 0,5^\circ$ , en promedio después de  $\sim 3,95s$  ya oscila en torno a  $10,5^\circ \pm 0,5^\circ$ .

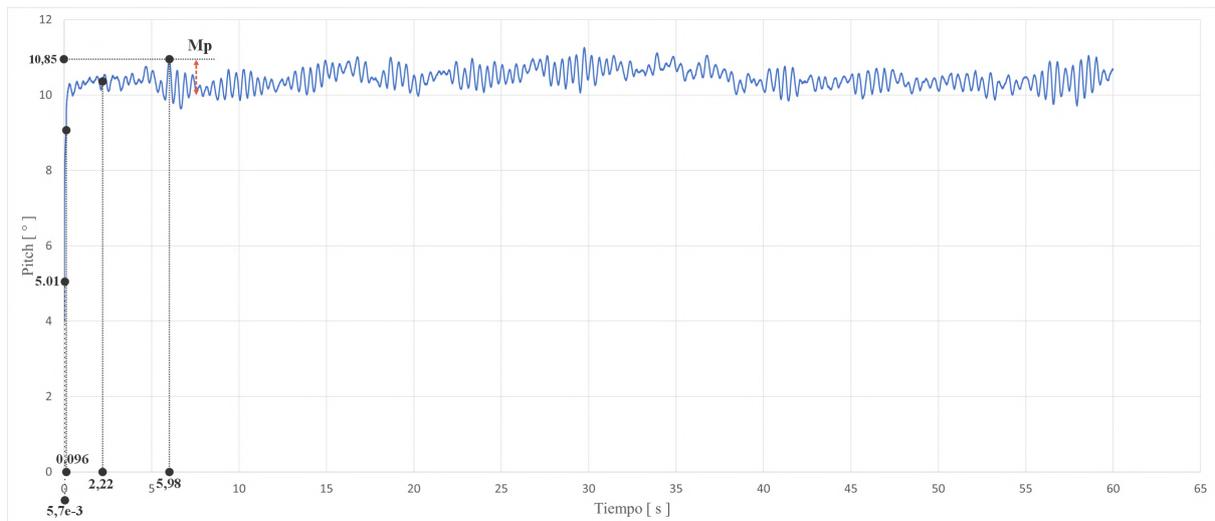
$$\therefore t_e \approx 3,95s (\pm 5 \%)$$

## Respuesta al escalón del sistema con respecto al ángulo Pitch del VANT

De forma similar al ángulo roll, para esta prueba, se tomo un valor de referencia de diez grados sexagesimales ( $10^\circ$ ) con un tiempo de evaluación de sesenta segundos (60s) a una frecuencia de 100Hz.

**Figura 5.12**

*Respuesta del sistema de control, para el ángulo Pitch del VANT, con un valor de referencia de  $10^\circ$ .*



Con los datos mostrados en la Figura 5.12, procedemos a desarrollar los parámetros mencionados en la sección 5.2.

### ■ Tiempo de retardo ( $t_r$ ):

Tiempo en el que tarda el sistema en alcanzar el 50% del valor de referencia, en este caso sería equivalente al valor de  $5^\circ$ . En la Figura 5.12, se observa que el sistema alcanza el valor de  $5,01^\circ$  en un tiempo de  $\sim 0,0057s$ . Es inmediato.

$$\therefore t_r \approx 0,0057s$$

■ **Tiempo de subida ( $t_s$ ):**

Tiempo en el que el sistema va desde el 10 % ( $1^\circ$ ) al 90 % ( $9^\circ$ ) del valor de referencia. En la Figura 5.12 se observa que el primer valor mas cercano a  $9^\circ$  es  $9,02^\circ$  en un tiempo de  $0,096s$

$$\therefore t_s \approx 0,096s$$

■ **Tiempo de pico ( $t_p$ ):**

En la Figura 5.12, observamos que el pico mas alto de la curva de respuesta es de  $10,85^\circ$ , y este valor lo alcanza en un tiempo de:

$$t_p = 5,98s$$

■ **Sobre impulso máximo ( $M_p$ ):**

Si reemplazamos los valores mostrados en la Figura 5.12, en la ecuación 5.6, se tendrá:

$$M_p = \frac{10,85 - 10}{10} \cdot 100 \%$$

$$M_p = 8,5 \%$$

■ **Tiempo de estabilización ( $t_e$ ):**

Considerando una tolerancia de  $\pm 5 \%$ , se observa que el sistema se mantiene entre  $9,5^\circ$  y  $10,5^\circ$ , a partir de  $2,22s$ , aunque tiene picos que superan dicho margen<sup>21</sup>.

$$\therefore t_e \approx 2,22s$$

---

<sup>21</sup>Los picos de señal que superan el margen de estabilización, son producidos por las vibraciones de los motores.

# Capítulo 6

## DISCUSIÓN

### 6.1. Descripción de hallazgos relevantes y significativos.

#### 6.1.1. Problemas del manejo de señales PWM dentro del microcontrolador ESP32-S

Se ha descubierto que entre las limitaciones que tiene el microcontrolador ESP32-S, se encuentra el manejo de las señales PWM a frecuencias de 10kHz, 15kHz, 20kHz, 25kHz, y 30kHz, con una resolución de 10bits cuando el bus de comunicación del protocolo I2C se encuentra configurado en *FastMode*, en donde utiliza una frecuencia de comunicación de 400kHz. Como resultado de esta limitación, en el manejo de señales del ESP32-S, se observó que el Bus del protocolo de comunicación I2C, no es capaz de sostener la comunicación con los dispositivos anclados a éste, generando un fallo en el funcionamiento del sistema que se este diseñando. El error o la falla de comunicacion que se genera en el microcontrolador ESP32-S, en las condiciones que se ha explicado, se limitan al protocolo I2C, pues se comprobó que el protocolo de comunicación Bluetooth y el protocolo de comunicación SPI, funcionan con normalidad cuando este error se produce.

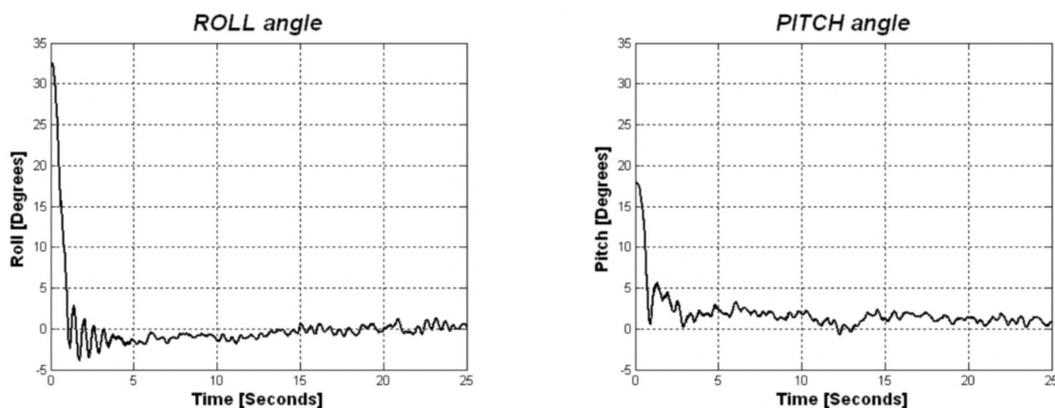
Se han realizado pruebas configurando las señales PWM con una resolución de 8 bits a frecuencias de 5kHz, 10kHz, 15kHz, 20kHz, 25kHz, y 30kHz, cuando el protocolo de comunicación I2C esta configurado en *FastMode* y no se ha visto errores o defectos en el funcionamiento del sistema de prueba.

## 6.2. Comparación crítica con la literatura existente.

En esta sección se realiza una comparación de los resultados logrados en el presente trabajo con respecto a la literatura existente. El enfoque de la comparación se centra en el control de los ángulos roll y pitch de un vehículo aéreo no tripulado de cuatro motores en un ambiente controlado, utilizando técnicas de control avanzadas. Tomando consideración de este enfoque, el trabajo con el que se lleva a cabo una comparación crítica de resultados, es el control de orientación basado en la técnica de Backstepping, presentado en el proyecto de tesis que realizo el Dr. Samir Bouabdallah para la obtención del grado de doctor en ciencias (ver sección 2.1.1). Los resultados mostrados en el presente proyecto (Figura 5.11 y 5.12), serán comparados de forma cualitativa con los resultados obtenidos del controlador de orientación, basado en la técnica de control Backstepping (Figura 6.1), presentado por el Dr. Samir Bouabdallah en su tesis doctoral.

### Figura 6.1

*Respuesta, del sistema de control basado en la técnica de Backstepping, para el angulo Roll y Pitch de un VANT de cuatro motores, obtenido por el Dr. Samir Bouabdallah.*



*Nota. Adaptado de (Bouabdallah, 2007, enero).*

### 6.2.1. Comparación cualitativa en el control de los ángulos roll y pitch del sistema de control basado en la técnica Backstepping y el sistema de control desarrollado, basado en las técnicas Backstepping + SMC.

#### Angulo roll

Análisis de la respuesta en el angulo roll del sistema, basado en la técnica Backstepping (Figura 6.1).

- **Comportamiento inicial:** Actúa rápidamente, llegando cerca a su valor de referencia en  $\sim 1,5s$ .
- **Sobreimpulso:** Tiene picos pronunciados hasta  $\sim 4s$ , esto indica que la respuesta es rápida pero muy poco amortiguada.
- **Tiempo de establecimiento:** El tiempo para asentarse es corto ( $de \sim 5s - 7s$ ), pero persisten oscilaciones de pequeña amplitud.
- **Ruido:** Se observa una banda de oscilación constante que muestra sensibilidad a perturbaciones.

Análisis de la respuesta en el angulo roll del sistema basado en la combinación de las técnicas: Backstepping + SMC (Figura 5.11).

- **Comportamiento inicial:** Alcanza el valor de referencia en  $\sim 1s$ .
- **Sobreimpulso:** Es pequeño, comparado con el controlador Backstepping solo.
- **Tiempo de establecimiento:** Es menor que el anterior controlador, tomando un tiempo de  $3,95s$ , manteniendo la referencia con menor dispersión.
- **Ruido:** Oscilaciones de baja amplitud y frecuencia.

**Observaciones:** El control combinado (Backstepping + SMC), logra una señal mas estable para el angulo roll, teniendo un tiempo de estabilización de  $3,95s$  y reduciendo drásticamente las oscilaciones en estado estacionario.

### Angulo pitch

Análisis de la respuesta en el angulo pitch del sistema, basado en la técnica Backstepping (Figura 6.1).

- **Comportamiento inicial:** Llega a su nivel de referencia (cero), en  $\sim 1s$ .
- **Sobreimpulso:** Notablemente de gran magnitud, siendo el mayor de  $\sim 6^\circ$ .
- **Tiempo de establecimiento:** Similar al angulo roll ( $\sim 5s-7s$ ), pero mantiene oscilaciones alrededor del cero.
- **Ruido:** Vibración visible en la señal residual.

Análisis de la respuesta en el angulo pitch del sistema basado en la combinación de las técnicas: Backstepping + SMC (Figura 5.12).

- **Comportamiento inicial:** Alcanza el valor de  $9,02^\circ$  en  $0,096$  segundos. Cercano al valor de referencia.
- **Sobreimpulso:** Mínimo, llega a tener un pico máximo de  $10,85^\circ$ , equivalente al  $8,5\%$  del valor de referencia.
- **Tiempo de establecimiento:** Llega a su valor de referencia sin oscilaciones significativas.
- **Ruido:** Muy baja amplitud de oscilación, señal estable.

**Observaciones:** La combinación de las técnicas de control: Backstepping + Control en Modo Deslizante (SMC), muestra una mejora clara en la estabilidad, manteniendo la referencia deseada con menos ruido y sin grandes picos iniciales.

# CONCLUSIONES

- Al implementar el sistema de control basado en las técnicas Backstepping y Control en Modo Deslizante en un entorno real, se observó que los ángulos de orientación *roll* y *pitch* presentan un sobreimpulso máximo de 18 % y 8,5 %, respectivamente, con un tiempo de estabilización de aproximadamente 3,95 s para el ángulo *roll* y 2,22 s para el ángulo *pitch*. Lo cual se considera adecuado para el control de orientación de un VANT de cuatro motores.
- Para la obtención de las ecuaciones del modelo matemático del VANT se empleó el método Newton-Euler, con el cual se determinaron las ecuaciones de control  $U_i$ . Para calcular los momentos de inercia respecto a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  del VANT, se utilizó el método del péndulo bifilar, obteniéndose los siguientes resultados:  $I_x = 8,6885 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ;  $I_y = 9,6524 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y  $I_z = 1,8824 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Se observa que  $I_x \approx I_y$  y que  $I_z \approx I_x + I_y$ , lo que respalda su validez, dado que corresponden a una estructura semi-simétrica.
- Para la implementación del sistema de instrumentación se utilizó el sensor inercial *MPU-6050* implementado con el Filtro de Kalman, obteniendo datos precisos en la orientación en *roll* y *pitch*; como microcontrolador se empleó el *ESP32-S*, y se utilizaron transistores *MOSFET SL2302* para controlar los motores del VANT. Los motores son del tipo *DC-Coreless* (corriente continua sin núcleo) y utilizan hélices de tres palas fabricadas en material *ABS*.
- Al implementar el sistema de control combinado Backstepping y Control en Modo Deslizante en Matlab® para el seguimiento de una trayectoria con forma de espiral helicoidal ascendente de radio creciente, se obtuvieron los siguientes resultados: error medio en  $X = 0,19 \%$ , error medio en  $Y = 0 \%$ , y error medio en  $Z = 0,03 \%$ . Estos resultados no solo demuestran la eficacia del sistema de control, sino que también validan las ecuaciones halladas mediante el método Newton-Euler.

# RECOMENDACIONES

- La implementación del sistema embebido desarrollado para el presente proyecto puede ser mejorado si, para hacerlo, se utilizan dispositivos con encapsulado *SMD*, logrando una reducción en el volumen físico del hardware.
- Para la implementación de un sistema de control orientado al seguimiento de trayectorias, se recomienda emplear un sensor de medición inercial que incorpore un procesador integrado para la ejecución de su algoritmo de fusión de sensores, y que además cuente con la capacidad de realizar mediciones de hasta diez grados de libertad. Este enfoque no solo contribuye a obtener datos de mayor calidad, sino que también reduce la carga computacional del microcontrolador del VANT, ya que el filtrado de las señales del *IMU* se ejecutaría directamente en el propio sensor, sin requerir procesamiento adicional en el controlador principal.
- El sistema de control fue implementado en un VANT con dimensiones de 0,16 m de largo y 0,16 m de ancho. Sin embargo, esta configuración no limita su aplicación, ya que las ecuaciones presentadas en este proyecto pueden emplearse como referencia para vehículos del mismo tipo, incluso si presentan diferentes dimensiones.

# Bibliografía

- Aerostudents. (s.f.). Backstepping [Recuperado el 17 de marzo de 2025]. <https://www.aerostudents.com/courses/advanced-flight-control/backstepping.pdf>
- Ardema, M. D. (2010). *Newton-Euler Dynamics* (1st). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-3960-5>
- Assun Motor. (2024, enero). DC Coreless Motor: What Is It? <https://assunmotor.com/blog/dc-coreless-motor/>
- BBVA OpenMind. (2024). *Juan de la Cierva y el invento del autogiro* [Consultado: 8 de julio de 2024]. <https://www.bbvaopenmind.com/tecnologia/visionarios/juan-de-la-cierva-y-el-invento-del-autogiro/>
- Beard, R. W., & McLain, T. W. (2012). *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. Princeton University Press.
- Becker, A. (2023). *Kalman Filter from the Ground Up*. KilmanFilter.NET. [https://books.google.com.pe/books?id=\\_2fa0AEACAAJ](https://books.google.com.pe/books?id=_2fa0AEACAAJ)
- Biblioteca Ambrosiana. (2024). *Codex Atlanticus* [Consultado: 8 de julio de 2024]. <https://codex-atlanticus.ambrosiana.it/#/>
- Bouabdallah, S. (2007, enero). *Design and Control of quadrotors with application to autonomous flying* [Tesis doctoral, Escuela Politécnica Federal de Lausana] [Tesis para optar el grado de Doctor]. [10.5075/epfl-thesis-3727](https://doi.org/10.5075/epfl-thesis-3727)
- Bouadi, H., Bouchoucha, M., & Tadjine, M. (2007). Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type-quadrotor. *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, 1(2), 39-44.
- Chovancová, A., Fico, T., Hubinský, P., & Duchoň, F. (2016). Comparison of various quaternion-based control methods applied to quadrotor with disturbance observer and position estimator. *Robotics and Autonomous Systems*, 79, 87-98. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.robot.2016.01.011>
- Chovancová, A., Fico, T., Duchoň, F., Dekan, M., Chovanec, L., & Dekanová, M. (2020). Control Methods Comparison for the Real Quadrotor on an Innovative Test Stand. *Applied Sciences*, 10, 2064. <https://doi.org/10.3390/app10062064>
- Craig, R. R. (2006). *Mechanics of Materials* (3.<sup>a</sup> ed.). Wiley.
- Derhab, A., Cheikhrouhou, O., Allouch, A., Koubaa, A., Qureshi, B., Ferrag, M. A., Maglaras, L., & Khan, F. A. (2023). Internet of drones security: Taxonomies, open issues, and future directions. *Vehicular Communications*, 39, 100552. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.vehcom.2022.100552>
- DJI Innovations. (2023). F450 Flame Wheel Specifications [Consultado el 16 de abril de 2025].
- Edwards, C., & Spurgeon, S. K. (1998). Sliding mode control: theory and applications. *Automatica*, 34(2), 199-207. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00167-6](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00167-6)

- Electronics, M. (2024). Espressif ESP32-DevKitC Boards [Consultado el: 8 de julio, 2024]. <https://www.mouser.pe/new/espressif/espressif-esp32-devkitc-boards/>
- Electropro. (2024). *ESP32-DevKitC* [Accedido: 19-octubre-2024]. [https://electropro.pe/index.php?route=product/product&product\\_id=539](https://electropro.pe/index.php?route=product/product&product_id=539)
- Falabella. (2024). *Dron a Control Remoto con Luces - Azul* [Accedido: 19 de octubre de 2024]. <https://www.falabella.com.pe/falabella-pe/product/881951219/Dron-A-Control-Remoto-con-Luces-Amarillo/881951221>
- HiFiSac. (2024a). *GE 1147C Hélice Mix Nylon con Fibra de Carbono* [Accedido: 19-octubre-2024]. <https://hifisac.com/shop/ge-1147c-helice-mix-nylon-con-fibra-de-carbono-1669?category=398#attr=>
- HiFiSac. (2024b). *XA2212 980KV Motor Brushless Sin Escobillas para Hélices de Alta Velocidad* [Accedido: 19-octubre-2024]. <https://hifisac.com/shop/xa2212-980kv-motor-brushless-sin-escobillas-para-helices-de-alta-velocidad-1672>
- Imperial War Museums. (2024a). *Aerial Target* [Consultado: 8 de julio de 2024]. <https://www.iwm.org.uk/collections/item/object/205315299>
- Imperial War Museums. (2024b). *A Brief History of Drones* [Accessed: 2024-07-08]. <https://www.iwm.org.uk/history/a-brief-history-of-drones>
- Jing Zhou, C. W. (2008). *Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-77807-3>
- Johnson, W. (1980). *Helicopter Theory*. Dover Publications.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems* (3rd). Prentice Hall.
- Krstic, M., & Smyshlyaev, A. (2008). *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. Society for Industrial; Applied Mathematics.
- Ma, H., Luo, Y., & Zhang, W. (2022). Deep Learning-Based Path Planning for UAVs Using Swarm Intelligence in Obstacle-Rich Environments. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 47, 10141-10155. <https://doi.org/10.1007/s13369-022-06738-0>
- MathWorks. (2024). *Cleve Moler - Fundador de MathWorks* [Consultado el 20 de abril de 2025]. <https://la.mathworks.com/company/aboutus/founders/clevemoler.html>
- Mechatronics, N. (2024). *Tutorial MPU6050 Acelerómetro y Giroscopio* [Accedido: 19-octubre-2024]. [https://naylampmechatronics.com/blog/45\\_tutorial-mpu6050-acelerometro-y-giroscopio.html](https://naylampmechatronics.com/blog/45_tutorial-mpu6050-acelerometro-y-giroscopio.html)
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna* (5.<sup>a</sup> ed.) [Versión en español]. Pearson Educación.
- Partheepan, S., Sanati, F., & Hassan, J. (2023). Autonomous Unmanned Aerial Vehicles in Bushfire Management: Challenges and Opportunities. *Drones*, 7. <https://doi.org/10.3390/drones7010047>
- Peredo, E. A. P. (2016, noviembre). *Modelado y control de un cuadricóptero* [Tesis de maestría, Universidad de Piura] [Maestría con mención en Automática y Optimización]. <https://pirhua.udep.edu.pe/items/d3ff62a4-6ab6-47c8-bd7e-e1dc40407e5f>
- Richard, C., Okamura, A. M., & Cutkosky, M. R. (1997). Getting a Feel for Dynamics: Using Haptic Interface Kits for Teaching Dynamics and Controls [November 15–21]. *Proceedings of the ASME IMECE 6th Annual Symposium on Haptic Interfaces*. <http://cdr.stanford.edu/touch>
- Sundarapandian Vaidyanathan, A. T. A. (2020). *Backstepping Control of Nonlinear Dynamical Systems*. Elsevier. <https://shop.elsevier.com/books/backstepping-control-of-nonlinear-dynamical-systems/vaidyanathan/978-0-12-817582-8>

- Tektronix, Inc. (2011). *PWS4000 Series Power Supplies User Manual: Models PWS4205, PWS4305, PWS4602, PWS4721* (First). Beaverton, OR. <https://download.tek.com/manual/071276101web.pdf>
- The MathWorks, Inc. (2023). *MATLAB Documentation* [<https://www.mathworks.com/help/matlab>]. The MathWorks, Inc. Natick, Massachusetts.
- Torres, R. R. (2016, marzo). *Comparación de Modelos Matemáticos y Controladores PID vs LQR, para un Cuadróptero*. [Tesis de maestría, Universidad de Piura] [Maestría con mención en Automática y Optimización]. <https://pirhua.udep.edu.pe/backend/api/core/bitstreams/b191c73d-7ba4-414a-a0c0-786ecec0de8/content>
- Utkin, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag.
- Waliszkiewicz, M., Wojtowicz, K., Rochala, Z., & Balestrieri, E. (2020). The Design and Implementation of a Custom Platform for the Experimental Tuning of a Quadcopter Controller. *Sensors*, 20(7), 1-29. <https://doi.org/10.3390/s20071940>

# Anexos

## Anexo A. Desarrollo de las ecuaciones en espacio de estados

Para el correcto desarrollo y entendimiento de las ecuaciones de estado del VANT, ordenaremos las ecuaciones dinámicas conforme al siguiente vector de estados:

$$X = [\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}]^T \quad (\text{A.1})$$

Según el orden establecido en el vector de estados (A.1), primero se desarrollarán las ecuaciones correspondientes a la dinámica rotacional, seguidas por las ecuaciones de la dinámica traslacional:

$$\begin{aligned} I_x \ddot{\phi} &= (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} + d(F_3 - F_1) - K_{fax} \dot{\phi}^2 - \dot{\theta} J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ I_y \ddot{\theta} &= (I_z - I_x) \dot{\phi} \dot{\psi} + d(F_4 - F_2) - K_{fay} \dot{\theta}^2 - \dot{\phi} J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \\ I_z \ddot{\psi} &= (I_x - I_y) \dot{\phi} \dot{\theta} + K_d (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) - K_{faz} \dot{\psi} \\ m \ddot{x} &= (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{ftx} \dot{x} \\ m \ddot{y} &= (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{fty} \dot{y} \\ m \ddot{z} &= \cos \theta \cos \phi (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{ftz} \dot{z} - mg \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Recordemos que nuestras entradas de control virtual están definidas como:

$$\begin{aligned} U_1 &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ U_2 &= F_3 - F_1 \\ U_3 &= F_4 - F_2 \\ U_4 &= K_d (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

El vector de estados (A.1) también puede ser expresado de forma general como:

$$\begin{aligned} X &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}]^T, \\ \text{donde: } x_1 &= \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{\theta}, \quad x_5 = \psi, \quad x_6 = \dot{\psi}, \\ x_7 &= x, \quad x_8 = \dot{x}, \quad x_9 = y, \quad x_{10} = \dot{y}, \quad x_{11} = z, \quad x_{12} = \dot{z} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Como ejemplo representativo del desarrollo de las ecuaciones en espacio de estados para la **dinámica rotacional**, consideraremos el movimiento en el eje *roll*:

$$I_x \ddot{\phi} = (I_y - I_z) \dot{\theta} \dot{\psi} + d(F_3 - F_1) - K_{fax} \dot{\phi}^2 - \dot{\theta} J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)$$

Despejando  $\ddot{\phi}$  y reemplazando  $F_3 - F_1$  por  $U_2$ , se obtiene:

$$\ddot{\phi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{d}{I_x} U_2 - \frac{K_{fax}}{I_x} \dot{\phi}^2 - \dot{\theta} \frac{J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_x} \quad (\text{A.5})$$

Expresando en términos de las variables de estado (A.4):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\phi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} x_4 x_6 + \frac{d}{I_x} U_2 - \frac{K_{fax}}{I_x} x_2^2 - x_4 \frac{J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_x} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

De forma similar, obtenemos las ecuaciones para los ejes *pitch* y *yaw*:

**Pitch:**

$$\dot{x}_4 = \ddot{\theta} = \frac{I_z - I_x}{I_y} x_2 x_6 + \frac{d}{I_y} U_3 - \frac{K_{fay}}{I_y} x_4^2 + x_2 \frac{J_r (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_y}$$

**Yaw:**

$$\dot{x}_6 = \ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z} x_4 x_2 + \frac{U_4}{I_z} - \frac{K_{faz}}{I_z} x_6$$

Para la **dinámica traslacional**, consideramos como ejemplo el desplazamiento en el eje *x*:

$$m \ddot{x} = (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) - K_{ftx} \dot{x}$$

Despejando  $\ddot{x}$  y reemplazando  $F_1 + F_2 + F_3 + F_4$  por  $U_1$ :

$$\ddot{x} = \frac{(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi)}{m} U_1 - \frac{K_{ftx}}{m} \dot{x} \quad (\text{A.7})$$

En términos de variables de estado:

$$\dot{x}_8 = \ddot{x} = \frac{(\cos x_5 \sin x_3 \cos x_1 + \sin x_5 \sin x_1)}{m} U_1 - \frac{K_{ftx}}{m} x_8 \quad (\text{A.8})$$

Las ecuaciones para los ejes *y* y *z* son:

**Traslación en y:**

$$\dot{x}_{10} = \frac{(\sin x_5 \sin x_3 \cos x_1 - \cos x_5 \sin x_1)}{m} U_1 - \frac{K_{fty}}{m} x_{10} \quad (\text{A.9})$$

**Traslación en z:**

$$\dot{x}_{12} = \frac{(\cos x_3 \cos x_1)}{m} U_1 - \frac{K_{ftz}}{m} x_{12} - g \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, combinando todas las ecuaciones obtenemos el sistema completo en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{I_y - I_z}{I_x} x_4 x_6 + \frac{d}{I_x} U_2 - \frac{K_{fax}}{I_x} x_2^2 - x_4 \frac{J_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_x} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{I_z - I_x}{I_y} x_2 x_6 + \frac{d}{I_y} U_3 - \frac{K_{fay}}{I_y} x_4^2 + x_2 \frac{J_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)}{I_y} \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= \frac{I_x - I_y}{I_z} x_4 x_2 + \frac{U_4}{I_z} - \frac{K_{faz}}{I_z} x_6 \\ \dot{x}_7 &= x_8 \\ \dot{x}_8 &= \frac{(\cos x_5 \sin x_3 \cos x_1 + \sin x_5 \sin x_1)}{m} U_1 - \frac{K_{ftx}}{m} x_8 \\ \dot{x}_9 &= x_{10} \\ \dot{x}_{10} &= \frac{(\sin x_5 \sin x_3 \cos x_1 - \cos x_5 \sin x_1)}{m} U_1 - \frac{K_{fity}}{m} x_{10} \\ \dot{x}_{11} &= x_{12} \\ \dot{x}_{12} &= \frac{\cos x_3 \cos x_1}{m} U_1 - \frac{K_{ftz}}{m} x_{12} - g \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

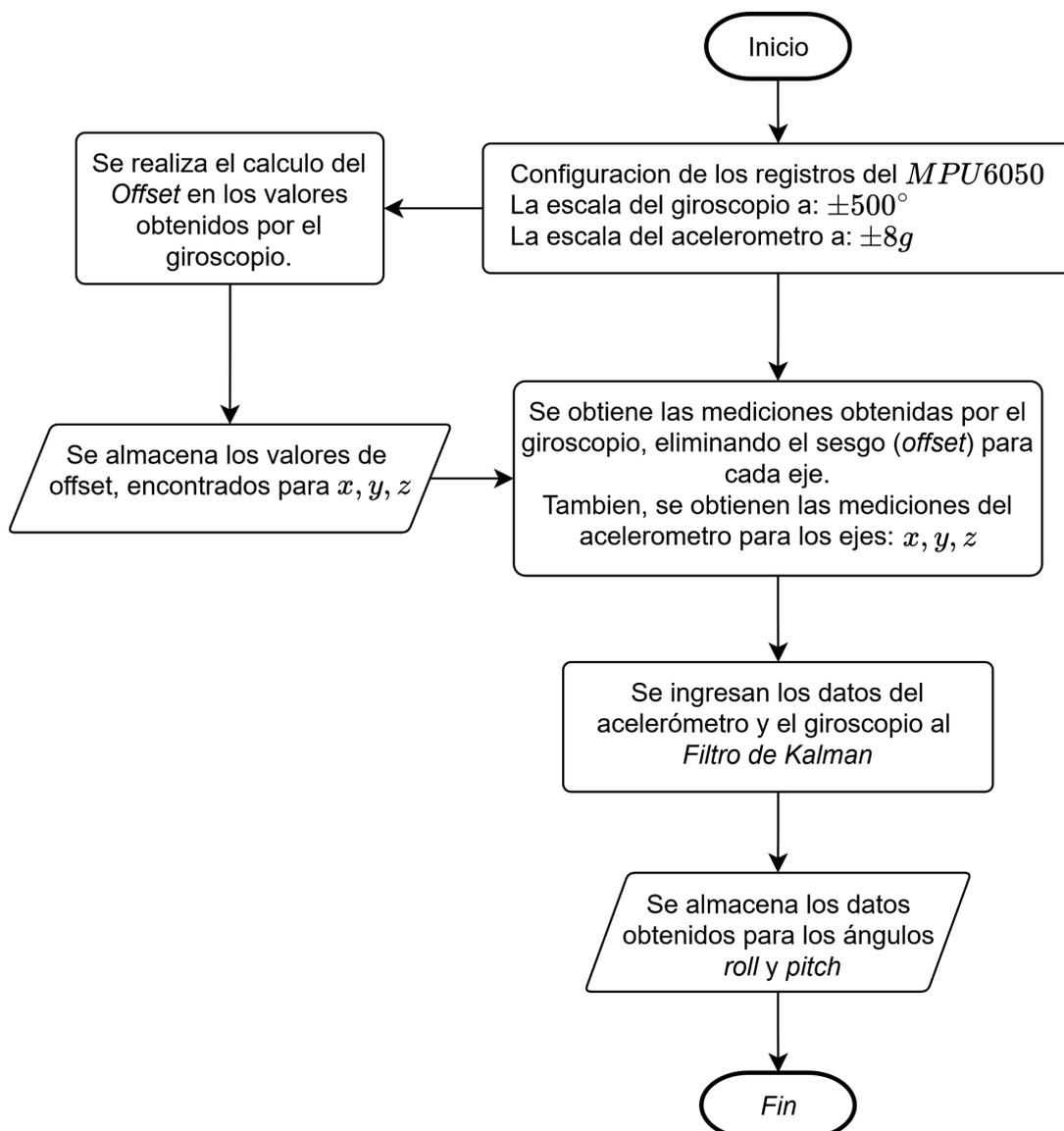
## Anexo B. Calibración del sensor de medición inercial, MPU-6050

El correcto funcionamiento de un sistema de control de orientación depende directamente de la precisión con la que se obtienen los datos de entrada. En nuestro caso estamos utilizando el sensor inercial MPU-6050 para realizar las mediciones de los ángulos de orientación en roll y pitch. Y en esta sección, nos enfocaremos en realizar su calibración para garantizar mediciones confiables y conocer el margen de error que tiene.

### Software de calibración del MPU-6050

Figura A.1

Diagrama de flujo del software de calibración desarrollado para el sensor MPU-6050.



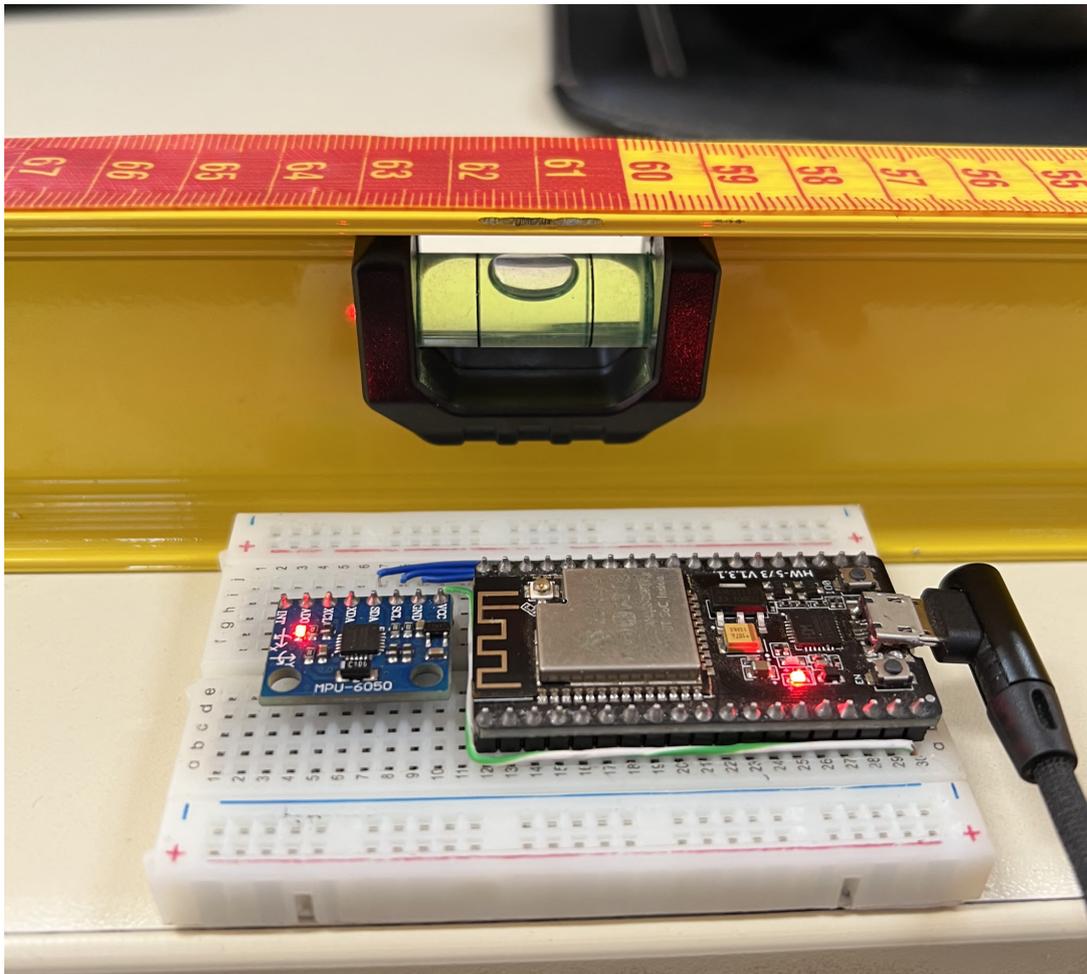
En la Figura A.1, se muestra el diagrama de flujo del software de calibración que se realizó para el *MPU-6050*. Este software, entre otras cosas, realiza la configuración de los sensores internos que lo componen utilizando sus registros. Se seleccionan los valores de  $\pm 500^\circ$  y  $\pm 8g$ , para el giroscopio y el acelerómetro respectivamente, debido a la naturaleza de nuestro proyecto (control de orientación en un ambiente controlado). El cálculo de los *offset* en el giroscopio se realiza mediante un muestreo repetido (*repeated sampling*), para nuestro caso se utiliza la toma de 4000 muestras con una frecuencia de  $1\text{KHz}$ . El giroscopio es útil para realizar la medición de la velocidad angular, pero acumula errores, y el acelerómetro es capaz de realizar mediciones absolutas de los ángulos roll y pitch, pero es sensible al ruido, lo que hace el *Filtro de Kalman* fusiona los datos obtenidos del giroscopio y el acelerómetro, proporcionando una estimación precisa y estable de los ángulos roll y pitch.

## Experimentación

En esta sección se realiza la medición de ángulos de referencia, utilizando el sensor IMU programado con el software de calibración. Los ángulos de referencia fueron medidos con un transportador metálico y la experimentación se realizó en una superficie nivelada (ver Figura A.2).

### Figura A.2

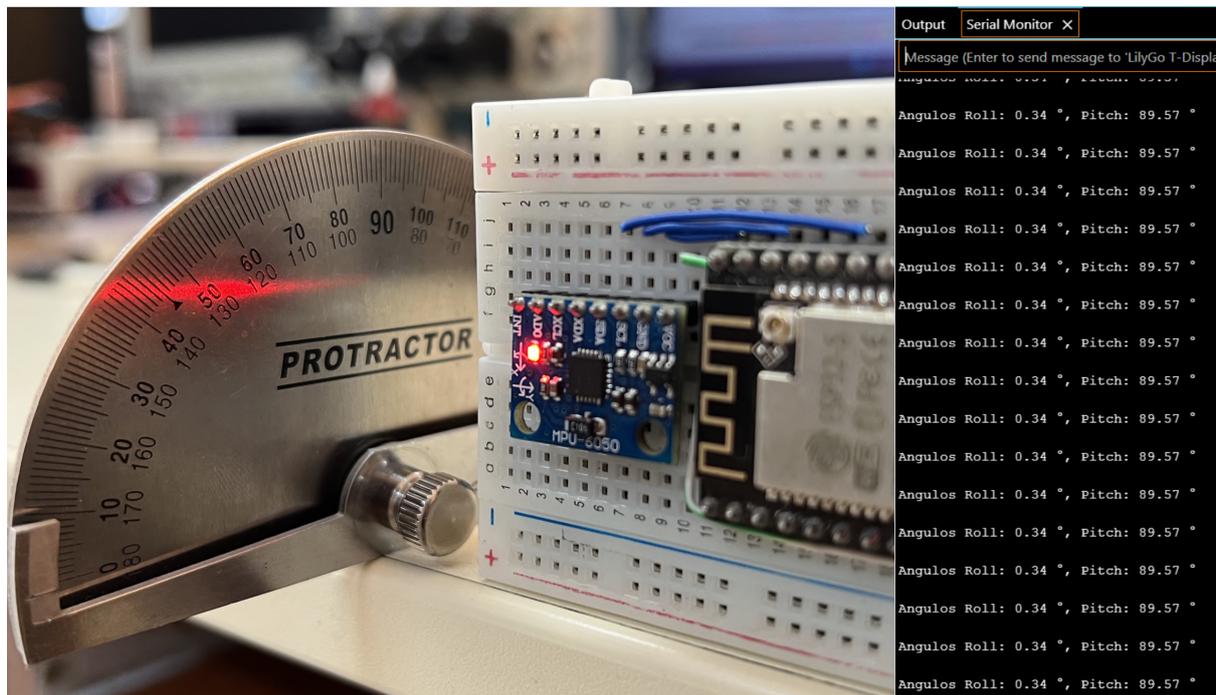
*Montaje del sensor inercial MPU-6050 en una superficie nivelada.*





## Figura A.5

Medición del ángulo pitch con una referencia de 90°, realizada en un superficie nivelada.



## Observaciones

En la experimentación realizada se muestra que el margen de error de la medición en el ángulo roll varía de  $\pm 0,15^\circ$  a  $\pm 0,47^\circ$  y en pitch varía de  $\pm 0,01^\circ$  a  $\pm 0,43^\circ$ . Esta variación del margen de error es aceptable para la naturaleza de nuestro proyecto.

## **Anexo C. Códigos implementados.**

**Código de programación implementado en el microcontrolador *ESP32-S***

**Código de programación implementado para simular el controlador en Matlab®**

## Anexo D. Hojas de datos o especificaciones técnicas

En este apartado se mostrara las primeras paginas de las hojas de datos o de las especificaciones técnicas de los componentes o módulos electrónicos de mayor relevancia, utilizados en el presente proyecto de tesis.

- MOSFET *SL2302*.  
Dirección web: [https://www.mccsemi.com/pdf/Products/SI2302\(SOT-23\).pdf](https://www.mccsemi.com/pdf/Products/SI2302(SOT-23).pdf).
  
- Microcontrolador *ESP32-S*.  
Dirección web: [https://www.espressif.com/sites/default/files/documentation/esp32\\_datasheet\\_en.pdf](https://www.espressif.com/sites/default/files/documentation/esp32_datasheet_en.pdf).
  
- Sensor IMU *MPU6050*.  
Dirección web: <https://cdn.sparkfun.com/datasheets/Sensors/Accelerometers/RM-MPU-6000A.pdf>

### Features

- Rugged and Reliable
- Lead Free Product is Acquired
- High Dense Cell Design for Extremely Low  $R_{DS(ON)}$
- Epoxy Meets UL 94 V-0 Flammability Rating
- Moisture Sensitivity Level 1
- Halogen Free. "Green" Device (Note 1)
- Lead Free Finish/RoHS Compliant ("P" Suffix Designates RoHS Compliant. See Ordering Information)

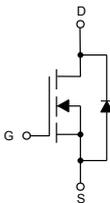
### Maximum Ratings

- Operating Junction Temperature Range: -55°C to +150°C
- Storage Temperature Range: -55°C to +150°C
- Thermal Resistance: 100°C/W Junction to Ambient

Parameter	Symbol	Rating	Unit
Drain-Source Voltage	$V_{DS}$	20	V
Gate-Source Voltage	$V_{GS}$	±8	V
Drain Current-Continuous	$I_D$	3.0	A
Drain Current-Pulsed <sup>(Note 2)</sup>	$I_{DM}$	10	A
Power Dissipation	$P_D$	1.25	W

Note: 1. Halogen free "Green" products are defined as those which contain <900ppm bromine, <900ppm chlorine (<1500ppm total Br + Cl) and <1000ppm antimony compounds.

### Internal Structure

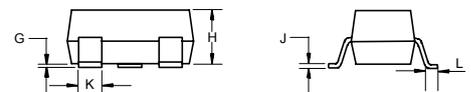
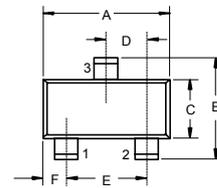


1. GATE
2. SOURCE
3. DRAIN

**Marking: S2**

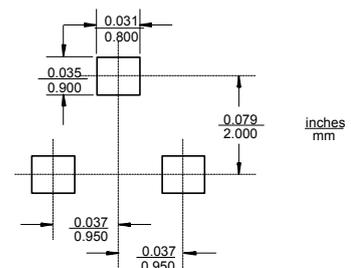
## N-Channel Enhancement Mode Field Effect Transistor

### SOT-23



DIM	DIMENSIONS				NOTE
	INCHES		MM		
	MIN	MAX	MIN	MAX	
A	0.110	0.120	2.80	3.04	
B	0.083	0.104	2.10	2.64	
C	0.047	0.055	1.20	1.40	
D	0.034	0.041	0.85	1.05	
E	0.067	0.083	1.70	2.10	
F	0.018	0.024	0.45	0.60	
G	0.0004	0.006	0.01	0.15	
H	0.035	0.043	0.90	1.10	
J	0.003	0.007	0.08	0.18	
K	0.012	0.020	0.30	0.51	
L	0.007	0.020	0.20	0.50	

#### Suggested Solder Pad Layout



**ELECTRICAL CHARACTERISTICS (Ta=25°C unless otherwise specified)**

Parameter	Symbol	Test conditions	Min	Typ	Max	Unit
<b>Static Characteristics</b>						
Drain-Source Breakdown Voltage	$V_{(BR)DSS}$	$V_{GS}=0V, I_D=10\mu A$	20			V
Gate-Threshold Voltage <sup>(Note3)</sup>	$V_{GS(th)}$	$V_{DS}=V_{GS}, I_D=50\mu A$	0.65		1.2	V
Gate-Body Leakage Current	$I_{GSS}$	$V_{GS}=\pm 8V, V_{DS}=0V$			$\pm 100$	nA
Zero Gate Voltage Drain Current	$I_{DSS}$	$V_{DS}=20V, V_{GS}=0V$			1	$\mu A$
Drain-Source On-Resistance <sup>(Note 4)</sup>	$R_{DS(on)}$	$V_{GS}=4.5V, I_D=3.6A$		55	72	m $\Omega$
		$V_{GS}=2.5V, I_D=3.1A$		82	110	
Forward Transconductance <sup>(Note 4)</sup>	$g_{FS}$	$V_{DS}=5V, I_D=3.6A$		8.5		S
<b>Dynamic Characteristics</b> <sup>(Note 5)</sup>						
Input Capacitance	$C_{ISS}$	$V_{DS}=10V, V_{GS}=0V, f=1MHz$		237		pF
Output Capacitance	$C_{OSS}$			120		
Reverse Transfer Capacitance	$C_{RSS}$			45		
<b>Switching Characteristics</b> <sup>(Note 5)</sup>						
Turn-On Delay Time	$t_{d(on)}$	$V_{DD}=10V, V_{GS}=4.5V, I_D=3.6A, R_{GEN}=6\Omega$		23	45	ns
Turn-On Rise Time	$t_r$			11	30	
Turn-Off Delay Time	$t_{d(off)}$			34	70	
Turn-Off Fall Time	$t_f$			36	70	
Total Gate Charge	$Q_g$	$V_{DS}=10V, V_{GS}=4.5V, I_D=3.6A$		6	10	nC
Gate-Source Charge	$Q_{gs}$			1.4		
Gate-Drain Charge	$Q_{gd}$			1.8		
<b>Drain-Source Diode Characteristics and Maximum Ratings</b>						
Diode Forward Voltage <sup>(Note4)</sup>	$V_{SD}$	$V_{GS}=0V, I_S=0.94A$			1.2	V
Drain-Source Diode Forward Current <sup>(Note3)</sup>	$I_S$				0.94	A

## Notes:

2. Repetitive Rating : Pulse Width limited By Maximum Junction Temperature.
3. Surface Mounted on FR4 Board,  $t < 10$  sec.
4. Pulse Test : Pulse Width  $< 300\mu s$ , Duty Cycle  $< 2\%$ .
5. Guaranteed By Design, Not Subject to Production Testing.

# ESP32

## Technical Reference Manual Version 5.4



**ESPRESSIF**

## About This Document

The **ESP32 Technical Reference Manual** is targeted at developers working on low level software projects that use the ESP32 SoC. It describes the hardware modules listed below for the ESP32 SoC and other products in ESP32 series. The modules detailed in this document provide an overview, list of features, hardware architecture details, any necessary programming procedures, as well as register descriptions.

## Navigation in This Document

Here are some tips on navigation through this extensive document:

- [Release Status at a Glance](#) on the very next page is a minimal list of all chapters from where you can directly jump to a specific chapter.
- Use the **Bookmarks** on the side bar to jump to any specific chapters or sections from anywhere in the document. Note this PDF document is configured to automatically display **Bookmarks** when open, which is necessary for an extensive document like this one. However, some PDF viewers or browsers ignore this setting, so if you don't see the **Bookmarks** by default, try one or more of the following methods:
  - Install a PDF Reader Extension for your browser;
  - Download this document, and view it with your local PDF viewer;
  - Set your PDF viewer to always automatically display the **Bookmarks** on the left side bar when open.
- Use the native **Navigation** function of your PDF viewer to navigate through the documents. Most PDF viewers support to go **Up**, **Down**, **Previous**, **Next**, **Back**, **Forward** and **Page** with buttons, menu, or hot keys.
- You can also use the built-in **GoBack** button on the upper right corner on each and every page to go back to the previous place before you click a link within the document. Note this feature may only work with some Acrobat-specific PDF viewers (for example, Acrobat Reader and Adobe DC) and browsers with built-in Acrobat-specific PDF viewers or extensions (for example, Firefox).



**InvenSense Inc.**

1197 Borregas Ave, Sunnyvale, CA 94089 U.S.A.  
Tel: +1 (408) 988-7339 Fax: +1 (408) 988-8104  
Website: [www.invensense.com](http://www.invensense.com)

Document Number: PS-MPU-6000A-00  
Revision: 3.4  
Release Date: 08/19/2013

# **MPU-6000 and MPU-6050 Product Specification Revision 3.4**



## CONTENTS

<b>1</b>	<b>REVISION HISTORY .....</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>PURPOSE AND SCOPE .....</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>PRODUCT OVERVIEW .....</b>	<b>7</b>
3.1	MPU-60X0 OVERVIEW .....	7
<b>4</b>	<b>APPLICATIONS.....</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>FEATURES .....</b>	<b>10</b>
5.1	GYROSCOPE FEATURES.....	10
5.2	ACCELEROMETER FEATURES .....	10
5.3	ADDITIONAL FEATURES .....	10
5.4	MOTIONPROCESSING.....	11
5.5	CLOCKING .....	11
<b>6</b>	<b>ELECTRICAL CHARACTERISTICS .....</b>	<b>12</b>
6.1	GYROSCOPE SPECIFICATIONS .....	12
6.2	ACCELEROMETER SPECIFICATIONS.....	13
6.3	ELECTRICAL AND OTHER COMMON SPECIFICATIONS.....	14
6.4	ELECTRICAL SPECIFICATIONS, CONTINUED .....	15
6.5	ELECTRICAL SPECIFICATIONS, CONTINUED .....	16
6.6	ELECTRICAL SPECIFICATIONS, CONTINUED .....	17
6.7	I <sup>2</sup> C TIMING CHARACTERIZATION.....	18
6.8	SPI TIMING CHARACTERIZATION (MPU-6000 ONLY) .....	19
6.9	ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS .....	20
<b>7</b>	<b>APPLICATIONS INFORMATION .....</b>	<b>21</b>
7.1	PIN OUT AND SIGNAL DESCRIPTION .....	21
7.2	TYPICAL OPERATING CIRCUIT.....	22
7.3	BILL OF MATERIALS FOR EXTERNAL COMPONENTS .....	22
7.4	RECOMMENDED POWER-ON PROCEDURE .....	23
7.5	BLOCK DIAGRAM .....	24
7.6	OVERVIEW .....	24
7.7	THREE-AXIS MEMS GYROSCOPE WITH 16-BIT ADCs AND SIGNAL CONDITIONING.....	25
7.8	THREE-AXIS MEMS ACCELEROMETER WITH 16-BIT ADCs AND SIGNAL CONDITIONING .....	25
7.9	DIGITAL MOTION PROCESSOR .....	25
7.10	PRIMARY I <sup>2</sup> C AND SPI SERIAL COMMUNICATIONS INTERFACES .....	25
7.11	AUXILIARY I <sup>2</sup> C SERIAL INTERFACE .....	26