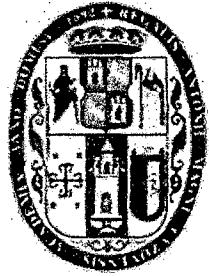


UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO



FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CARRERA PROFESIONAL DE FÍSICA

Tesis: “Solución a la Paradoja de la Información de los
Agujeros Negros en el Contexto de los Fermiones”

**“TESIS AUSPICIADA POR EL CONSEJO DE
INVESTIGACIÓN-UNSAAC”**

TESIS PRESENTADA POR: Br. David Choque Quispe. Para optar al
Título profesional de Físico.

DOCENTE: Lic. Ricardo Cáceres Saenz.

CUSCO-2012

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres y amigos de ciencia que me acompañaron dentro de este paseo por la física, y seguirán haciéndolo, ya que la amistad nacida en la física nunca termina y el conocimiento científico es ilimitado. El apoyo incondicional de mis padres y las vastas discusiones con mi asesor y compañeros, fueron suficientes para que este modesto grupo de elucubraciones fuesen plasmados en estas cálidas y sinceras líneas que aquí escribí.

Resumen

El capítulo I, se encarga de ponernos en el contexto de la paradoja de la información, tomando forma a medida que hablemos de los agujeros negros y la información desde el punto de vista de la Relatividad General Clásica, planteada por Albert Einstein en 1915, pasando por una crisis y después aparentemente rescatado por la Mecánica Cuántica, de la misma forma que rescató el problema del cuerpo negro, pero como dije fue un aparente rescate debido a que Hawking sumergió en una gran fosa al principio de la conservación de la información. Pero parandose sobre los hombros de gigantes, Horowitz y Maldacena plantearon unas condiciones de contorno que les permitió bosquejar una posible solución a la paradoja de la información, pero dichas condiciones de contorno se plantearon intuitivamente, por lo que no provienen de la teoría, esta posible teoría sería por supuesto la tan soñada unificación de la Relatividad General con la Mecánica Cuántica. Es así que la parte central de mi trabajo radica en mostrar la evolución unitaria del proceso de evaporación de Hawking para el caso de estados puros de los fermiones en la singularidad.

El capítulo I se centra en el desarrollo de las herramientas necesarias para movernos con soltura en el tema de los agujeros negros y su descripción termodinámica.

Por último en el capítulo III se termina por describir y solucionar la paradoja de la información, tratando antes de describir al agujero negro de Schwarzschild.

En el apéndice se desarrolla de forma más formal la evaporación de Hawking cuyo objetivo es comprender el proceso de evaporación en términos de la integral de Hawking-Gobbons.

Prólogo

Todo el trabajo gira en forma a mostrar que si se plantea la existencia de una matriz unitaria ésta permite mostrar el proceso de evolución unitaria del agujero negro, esta idea nació con Horowitz y Maldacena, sus implicaciones son profundas y es como un ensayo de la tan soñada Gravitación Cuántica.

A lo largo del desarrollo del trabajo se usaron tensores para la variedad de Riemann cuyos índices a usar a diferencia de otros textos, serán tanto latinos (i, j, k, \dots), como griegos (μ, ν, \dots), también se usó los Verbeins cuyos índices son también latinos y griegos, la diferencia está en que sus índices se hallan entre paréntesis.

Las unidades a usar son, las unidades naturales, ($\hbar = 1, c = 1$), comúnmente usadas en Cosmología. En cuanto a la enumeración de la bibliografía, esta se simboliza por [], y con respecto a la enumeración de las ecuaciones, se simboliza con ().

Índice general

1.	5
1.1. Aspectos Generales	5
1.1.1. Problema de Investigación	5
1.1.2. Formulación del Problema	5
1.1.3. Antecedentes	5
1.1.4. Justificación	10
1.1.5. Objetivo General	11
1.1.6. Objetivos Específicos	11
1.1.7. Hipótesis	11
2.	13
2.1. Marco Teórico	13
2.1.1. Relatividad General	13
2.1.2. Mecánica Cuántica	30
2.1.3. Teoría Cuántica del Campo	45
2.1.4. Teoría Cuántica del Campo En el espacio-tiempo Curvo de Rieman	56
2.1.5. Termodinámica	63
2.1.6. Mecánica Estadística	68
2.1.7. Mecánica Estadística Cuántica	72

3.	75
3.1. La Paradoja de la Infomación	75
3.1.1. Conclusiones	98
4. Apéndice	99
4.1. Integral de Camino de Hawking-Gibbons	99
4.1.1. Paradoja de la Información para Estados Mezcla	107

Capítulo 1

1.1. Aspectos Generales

1.1.1. Problema de Investigación

El trabajo consiste en demostrar el caracter unitario del proceso de evaporación de los Agujeros Negros; para ello previamente debemos hacer un paseo por las Teorías Físicas como la Mecánica Cuántica, Mecánica Clásica, Relatividad Especial, Relatividad General, Electrodinámica Cuántica o Teorías Cuánticas del Campo, Termodinámica, Mecánica Estadística, Mecánica Estadística Cuántica y las Teorías Cuánticas del Campo en variedades espacio temporales curvas. Dichos tópicos seran cruciales para comprender la paradoja de la información y su correspondiente solución particular, planteada en esta tesis.

1.1.2. Formulación del Problema

El problema radica en que si la Hipótesis de Hawking, del proceso de evaporación de los agujeros negros, es correcta, entonces la información no se conserva, violando así los principios de la Mecánica Cuántica, es así que siguiendo el proceso de Horowitz-Maldacena, se debe mostrar la existencia de una matriz unitaria, la existencia de esta matriz significará que el proceso de evaporación sea unitaria.

1.1.3. Antecedentes

El estudio de los agujeros negros comenzó formalmente cuando Robert Hoppenheimer publicó una solución de las ecuaciones de Einstein para la gravedad, la cuál describía el proceso de

colapso de una estrella, Hoppenheimer se preguntó, qué pasaría si una estrella tuviera la suficiente masa como para que la fuerza gravitatoria pueda vencer a cualesquiera otra fuerza de la naturaleza y si ésto fuese correcto la estrella comenzaría a comprimirse, pero ¿Alguna vez se detendría este proceso de colapso? ¿Y si no se detiene el colapso de la estrella, entonces el volumen de la estrella disminuiría hasta que su densidad sea infinita?

Una estrella se forma por acción de la gravedad, los átomos y núcleos de Hidrógeno y Helio por acción gravitatoria (fuerza netamente de atracción debida a la masa) comenzaron a juntarse pero, como se sabe, la fuerza gravitatoria es muy débil cuando la masa es muy pequeña, así que el aglomeramiento de Helio e Hidrógeno debido a la gravedad fue lento, entonces la formación de las estrellas es un evento astronómico, pero a medida que se va juntando más y más masa, la fuerza gravitatoria fué aumentando más y más, entonces los átomos y núcleos de Hidrógeno y Helio comenzaron a golpearse con más y más fuerza (energías cinéticas mayores) hasta el punto en el cual los núcleos de Hidrógeno comenzaron a fusionarse, formando nuevos núcleos de Helio liberando energía nuclear la cual se opone a la fuerza gravitatoria, entonces una estrella como nuestro Sol se dice que tiene una vida estable cuando las fuerzas Nucleares y Gravitatorias se equilibran. Entonces se preguntarán ¿Que pasa con los núcleos de Helio? Lo que pasa es que algunos núcleos también consiguen fusionarse para formar nuevos núcleos más pesados, pero sólo algunos ya que son dos y hasta tres veces más masivos que los núcleos de Hidrógeno y la energía gravitatoria necesaria para acelerarlos y conseguir fusionar átomos de Helio es mucho mayor que la necesaria para la fusión de los átomos de Hidrógeno. Es fácil darse cuenta entonces de lo que sucede cuando se acaban los núcleos de Hidrógeno. Cuando se acaba el Hidrógeno toda la fuerza gravitatoria se centra en fusionar núcleos de Helio y así sucesivamente hasta los demás elementos de la tabla periódica en orden de Numero Atómico (numero de masa) pero llega un momento en el que la fusión no puede mantenerse y es claro que depende mucho de cuan masiva sea la estrella, además los átomos más pesados son más inestables o radiactivos provocando las fases de Gigante Roja y Supernova.

Por último me queda por describir los límites dados por Chandrasekhar y Oppenheimer, estos dicen que si una estrella tiene más de 1,4 masas solares, pero menor que 3,5 masas solares, la estrella se convertirá en una enana blanca y luego en una enana negra, pero si tiene una masa cercana o igual a 3,5 masas solares, se convertirá en una estrella de neutrones la cuál se mantiene gracias al Principio de Exclusión de Pauli aplicada a los electrones de los átomos de la estrella, luego si la masa fuese de más de 3,5 masas solares no existirá fuerza conocida en la naturaleza capaz de oponerse a la fuerza Gravitacional, formandose un Agujero Negro. Las estrellas de nuestro universo visible en un 90 por ciento, son de más de 10 masas solares, así que podría decirse que en un futuro muy pero muy lejano casi todas las estrellas de nuestra Vía Láctea están destinadas a colapsar y formar Agujeros Negros[3].

Comenzaremos por describir a los agujeros negros en el contexto de la Relatividad General, la idea nace con los físicos Robert Oppenheimer, Tolman y Volkoff, quienes llevaron al límite la Relatividad General (RG) al explorar el final de las estrellas que terminan su combustible nuclear. La idea fue construir un sistema de coordenadas acompañante tal que nos permita seguir a la materia de la estrella en su proceso de colapso. Las ecuaciones de Campo Einstein dicen que la materia colapsa en un estado de densidad infinita y en el que el tiempo se detiene, a este estado se le llama singularidad. Es necesario dar una definición más útil de los Agujeros Negros, primero debemos tomar en cuenta que nada en el universo puede ser más rápido que la velocidad de las interacciones, ya que la luz tiene justamente esa velocidad entonces se enuncia que nada puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. Los libros de texto plantean de forma muy anticuada dicha ley ya que esta es un corolario del Principio de Relatividad y no una Ley o Principio independiente. Una violación al principio de Relatividad trae consigo problemas de Causalidad. Pasado y futuro dejarían de tener sentido si dicha ley se violara[3][24]. No se conoce ningún sistema físico que haya violado dicho principio. Teniendo en cuenta todo esto, *un agujero Negro es un objeto estelar con una velocidad de escape igual a la velocidad de la Luz*[3][9], entonces quiere decir que la velocidad

necesaria de una partícula que desea escapar del Agujero Negro (o del Horizonte de sucesos), debería ser mayor que la velocidad de la luz. En ese sentido, todo lo que cae en un Agujero Negro nunca podrá escapar[5][6]. Por lo expuesto anteriormente, cualquier aparato de medición que se aproxime al Horizonte de sucesos de un Agujero Negro, no captaría ninguna señal (radiación electromagnética) ya que cualquier señal (ondas electromagnéticas) viaja a la misma velocidad de la luz o menor a ella, por lo que en principio el Agujero Negro estaría completamente frío para un observador externo, lo que quiere decir es que la estrella colapsó formando así un Agujero Negro y esta fue capaz de alcanzar el Cero Absoluto, entonces los agujeros negros violan la Tercera Ley de la Termodinámica por lo que vino al rescate la Mecánica Cuántica, tal y como sucedió con el problema del cuerpo negro, pero su rescate no fue del todo completo. Si estudiamos la termodinámica de un agujero negro clásico (sin tener en cuenta su descripción cuántica) ya que el Agujero Negro tiene una temperatura cero, entonces la Entropía sería infinita, lo que quiere decir que la información acerca de la estrella colapsada se pierde inevitablemente en la singularidad, estos hechos son descritos por Relatividad General Clásica y desde ya se puede decir que no están de acuerdo con las leyes de la Termodinámica. Basados en el concepto de la entropía de Von Neuman dada como la generalización de la entropía dada para la teoría de información por Claude Shannon, con esta es posible describir la entropía de sistemas cuánticos entrelazados, esta fue la idea seminal para que Stephen Hawking pueda describir al agujero negro como un sistema que cumple con las leyes de la termodinámica.

Stephen Hawking se propuso solucionar en 1967 el problema de la evaporación de los Agujeros Negros, es así que brillantemente se aprovechó de la no localidad de los fenómenos Cuánticos, además del concepto de creación de pares de las teorías Cuánticas del Campo y del recientemente descubierto (en 1970) efecto Unruh. Con todo ello pudo determinar que los Agujeros Negros no son tan negros y que de hecho radían. El mostró que el agujero negro de Schwarzschild radia a una temperatura, donde "M", es la masa del agujero Negro y "G", es la constante Gravitatoria,

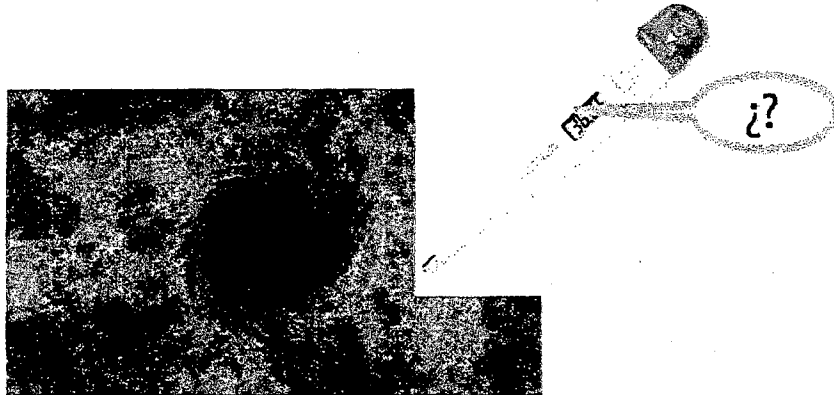


Figura 1.1: ¿Esta frío el Agujero Negro?

$$T = \frac{1}{8\pi MG} \quad (1.1)$$

esta temperatura es la que es medida por un observador que se halla a una distancia considerablemente grande[1][34], esto lo mostraré a lo largo del desarrollo del trabajo, dicho observador se dice que se halla en un marco inercial, de modo que Hawking pudo calcular la entropía y halló que era proporcional al cuadrado del área de la superficie del horizonte de sucesos. Esto mismo halló D. Bekenstein. Hawking y Bekenstein postularon que la entropía de cualesquiera Agujero Negro, debería tener un valor que sea proporcional al cuadrado de la superficie del horizonte de sucesos, o sea que toda la información está codificada en el área del Horizonte de sucesos[1], este es un punto vital para la idea de Leonard Susskind la cual trataremos después, pero ¿Que fue lo que le indujo a Hawking y a Bekenstein a plantear que los Agujeros Negros no son tan "Negros"? Y lo más importante, esta temperatura no nula y por supuesto la entropía no nula implican que podemos conseguir algo de información de la materia que cruza el horizonte de sucesos.

La idea seminal se halla en las fluctuaciones Cuánticas del Vacío cerca del horizonte de sucesos ¡sencillo! El vacío descrito por la Mecánica Cuántica plantea que pares partícula-antipartícula se crean, las cuales se hallan en un estado máximamente entrelazado, por ejemplo cuando se crea un

par de fermiones, electrón, positrón, entrelazados por el espín, cerca del horizonte de sucesos, si no fuese por el horizonte de sucesos, el par volvería a aniquilarse, pero el horizonte impedirá que el par se vuelva a aniquilar, es así que la antipartícula cruza el horizonte y la partícula escapa al infinito, esta antipartícula se aniquila con una partícula de la materia, que se halla dentro del Agujero Negro, esto quiere decir que una partícula que se hallaba dentro del Agujero Negro pudo escapar, si este proceso ocurre una y otra vez el agujero terminará por desaparecer o evaporarse. Esto es a lo que se le llama efecto Hawking o Evaporación de Hawking.

Stephen Hawking llevó a una crisis a los Principios de la Mecánica Cuántica planteando que los estados entrelazados pierden coherencia cuando el agujero negro radía, de ello directamente se deduce que la información es perdida en el proceso de evaporación ya que su planteamiento es que los estados no evolucionan de forma unitaria, o sea que los estados puros no evolucionan a estados puros y los estados mezcla no evolucionan a estados mezcla, violando uno de los principios de la Mecánica Cuántica. Nos hallamos entre la espada y la pared; o la Relatividad General está incompleta y no es capaz de describir satisfactoriamente a los agujeros negros y/o falta una revisión a los principios de la Mecánica Cuántica.

1.1.4. Justificación

Hasta la fecha los principios de la Mecánica Cuántica, están bien fundamentadas, las C^* -Algebras son una muestra de su formalismo teórico. Por otro lado la Física de la Materia Condensada es un ejemplo de su aplicabilidad, por ello considerar que los principios de la Mecánica Cuántica son correctos, es una consecuencia de la gran cantidad de confirmaciones experimentales a la Teoría Cuántica.

La resolución de la paradoja de la información nos da luces acerca de lo que le sucede a la materia en la singularidad de los agujeros negros.

1.1.5. Objetivo General

Mostrar la necesidad y la existencia de Una Matriz Unitaria que actuando sobre los estados de espín de los fermiones, describe el proceso de evaporación de los Agujeros Negros, asegurando así el cumplimiento de los principios de la Mecánica Cuántica y por ende la conservación de la información.

1.1.6. Objetivos Específicos

1. Mostrar el desarrollo de dos formas de obtener la evaporación de Hawking; la primera de las formas es importante porque siguiendo a Unruh, es de menester mostrar que en las cercanías del horizonte de sucesos el espacio-tiempo es topológicamente equivalente al espacio-tiempo de Minkowski, por ende la mecánica cuántica puede aplicarse formalmente en el horizonte. El segundo cálculo que haré nos permitirá obtener formalmente la entropía del Agujero Negro, con la ayuda de las integral de Camino, Feynman-Dirac, generalizado por Hawking-Gibbons.
2. Construir un espacio de Hilbert, tal que se descomponga como el producto tensorial de los espacios de Hilbert, de los estados de espín de los fermiones, dentro y fuera, con respecto al Horizonte de Sucesos.
3. En este espacio podré realizar la proyección de los estados cuánticos entrelazados en el Horizonte de Sucesos y los estados entrelazados con los estados cuánticos de la materia en la singularidad, planteando la existencia de una matriz, la misma que es Unitaria.

1.1.7. Hipótesis

- Los estados cuánticos de la materia de la estrella que colapso para formar el agujero negro, existen y estan dados como un sistema puro o de forma más general como un sistema mezcla[27].
- Los estados de los fermiones dentro y fuera con respecto al horizonte de sucesos, se hallan

maximalmente entrelazados[28][29].

- Los estados de los fermiones de la materia de la estrella en la singularidad y la materia inmediatamente dentro del horizonte de sucesos se hallan máximalmente entrelazados[30].

Capítulo 2

2.1. Marco Teórico

2.1.1. Relatividad General

De la misma forma que la Relatividad Especial, la Relatividad General fue formulada a partir de un sólo principio fundamental, el Principio de Equivalencia, este principio es el soporte de toda la Relatividad General y desde que Albert Einstein lo presentó en 1915 fue ampliamente criticada y reformulado, de modo que actualmente existen tres enunciados, versión Débil, versión semi Fuerte y la Fuerte. La versión Débil contiene a la mecánica de Newton, es muy eficaz para describir en primera aproximación los sistemas estelares. La versión semi fuerte y fuerte contiene a la Relatividad General la cual se la considera como una teoría métrica de la Gravedad, también conocida como Geometrodinámica, es muy útil en cuanto a la construcción de modelos de sistemas estelares, pero para describir el universo en forma global y su creación, además de las ondas Gravitacionales, es útil la forma Fuerte del Principio de Equivalencia[3][5][6],

La forma Débil dice que las leyes de la Física incluida la gravedad son las mismas para cualesquiera par de observadores en todo el espacio de un campo Gravitacional o Marco de Referencia Acelerado[3][5].

La forma Semi-Fuerte dice que las leyes de la Física excepto la gravedad son las mismas para cualesquiera par de observadores en una región infinitesimal de un campo Gravitacional o Marco de Referencia Acelerado, esto quiere decir que es imposible

saber con experimentos realizados de forma local, si es un Campo Gravitacional o si el observador se halla en un marco de referencia acelerado[5].

La forma Fuerte dice que todas las leyes de física incluyendo la Gravedad son las mismas para cualesquiera par de observadores en una región infinitesimal de un campo Gravitacional o Marco de Referencia Acelerado, esto quiere decir que es imposible saber con experimentos realizados de forma local, si es un Campo Gravitacional o si el observador se halla en un marco de referencia Acelerado[5][6].

La versión semi fuerte del principio de Equivalencia además de contener a la Relatividad de Einstein, contiene a otras teorías métricas, tales como la Teoría Relativista de la Gravitación, Formulación del Campo Gravitacional como un campo Escalar, Dimensiones extra Espaciales. Para mi trabajo será necesario la forma fuerte del principio de equivalencia.

Cálculo Tensorial

Comenzaremos por definir uno de los elementos fundamentales para la Relatividad General, este elemento es conocido como Tensor, su principal función es que nos permite escribir las ecuaciones fundamentales, de tal forma que permanezcan invariantes para cualesquiera marco de referencia ya sea inercial o no inercial. Entonces un tensor puede representar a una cantidad física, por ejemplo el tensor Energía Momentún de la Materia, contiene toda la información acerca de la energía y el momentum de los campos de materia, es así que cada campo tiene su tensor Energía Momentún, como el campo de Klein-Gordon, o el Campo de Maxwell, por lo que si un observador en su marco de referencia determina que el tensor Energía Momento es nulo El tensor que mostraremos a continuación es un tensor de orden uno, o sea que tiene un sólo índice.

$$A = (A^0, A^1, A^2, A^3) \mapsto A^i(x) \quad (2.1)$$

$$A = (A_0, A_1, A_2, A_3) \mapsto A_i(x) \quad (2.2)$$

Cuando los índices se hallan arriba se dice que es un tensor contravariante, cuando los índices se hallan abajo se dice que es un tensor covariante, pero para que sean tensores es necesario que obedezcan a una ley de transformación, dicha ley obedecen todos los tensores de orden cualesquiera, además se hará uso de la convención de suma de Einstein, la cual dice que si hay dos índices repetidos el símbolo de suma sobre ellos ya no se colocan, sobreentendiéndose tal suma.

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'^j \quad (2.3)$$

$$A_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A'_i \quad (2.4)$$

Para tensores de orden 2 contravariante y covariante se da forma similar y naturalmente para tensores de ordenes mayores. En efecto,

$$A^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} A'^{kl} \quad (2.5)$$

$$A_{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} A'_{kl} \quad (2.6)$$

uno de los tensores de segundo orden fundamental es el tensor métrico, este tensor define la geometría de Riemann, En 1910 Riemann disertó sus Fundamentos de la Geometría en espacios n-dimensionales, en dicha disertación se hallaba Friedrich Gauss y Einstein. Fue maravilloso e inspiró a Einstein a continuar su búsqueda de las ecuaciones covariantes para la Gravedad y como dije antes el tensor métrico es fundamental para la Relatividad General, es más, Einstein identifica directamente el tensor métrico como el Potencial Gravitatorio.

Dicho tensor tiene tambien su forma contravariante, es imprescindible ya que nos permite definir la distancia entre dos puntos en el espacio-tiempo de Rieman, pero como es un espacio cuatridimensional, esa distancia no es la que se medía en la geometría euclidiana si no que ahora mide la distancia entre dos sucesos, osea que el espacio-tiempo curvo de Rieman es el espacio de sucesos. El suceso se define como la existencia de un fenómeno físico en un determinado punto del espacio-tiempo de Rieman; puede ser un Campo Electromagnético o Campo Gluónico, en fin toda propiedad física que se defina en función de tres coordenadas espaciales y una temporal, entonces un propiedad física cualesquiera definida para un instante y posición fijas, es un suceso y la distancia entre dos sucesos nos informa de la evolución de esa propiedad física, esta distancia se la conoce como Historia. Entonces una serie de sucesos nos da una Historia, pero para poder determinar la Historia (longitud de la curva dada en el espacio curvo de Rieman) es necesario el tensor métrico, en este caso "u" es el parámetro de la curva cuatridimensional.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.7)$$

$$s(u) = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du}} du \quad (2.8)$$

Otra importante función del tensor métrico es que nos permite subir o bajar indices o lo que es lo mismo, nos ayuda a convertir tensores covariantes a contravariantes y viceversa.

$$A^{ij} g_{ik} g_{jl} = A_{kl} \quad (2.9)$$

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \quad (2.10)$$

Es necesario definir la derivada covariante, ya que nuestra antigua deriva ordinaria no es util; en general, la derivada ordinaria se define sobre el concepto de transporte paralelo, pero como se

esta en un espacio-tiempo esencialmente curvo no es posible hacer un transporte paralelo de forma ordinaria, debemos hallar una manera de transporte paralelo, el cual obviamente dependerá de cada punto del espacio-tiempo.

$$A^i_{;l} = \partial_l A^i + \Gamma^i_{kl} A^k \quad (2.11)$$

$$A_{i;l} = \partial_l A_i - \Gamma^k_{il} A_k \quad (2.12)$$

El punto y coma simboliza la derivada covariante, pero también es muy popular usar el nabla, siempre es bueno estar en contacto con una y otra notación, así que se usará también.

$$\nabla_l A^{ik} = \partial_l A^{ik} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im} \quad (2.13)$$

$$\nabla_l A^i_k = \partial_l A^i_k - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k \quad (2.14)$$

$$\nabla_l A_{ik} = \partial_l A_{ik} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im} \quad (2.15)$$

Por último para tensores de mayor orden es necesario aumentar más símbolos Gamma, la cantidad de índices del tensor, indica la cantidad de estos símbolos Gamma ¿Pero que es este misterioso símbolo? Este ente matemático es conocido como el símbolo de Christoffel y es el que nos permite realizar el transporte paralelo, es muy importante que podamos escribir una expresión para el Símbolo de Christoffel, esto lo podemos conseguir a partir de la condición de Riemann, la cual dice que la derivada covariante del tensor métrico es cero.

$$g_{ik;l} = \partial_l g_{ik} - g_{mk} \Gamma^m_{il} - g_{im} \Gamma^m_{kl} = 0 \quad (2.16)$$

$$\partial_l g_{ik} - g_{mk} \Gamma^m_{il} - g_{im} \Gamma^m_{kl} = 0 \quad (2.17)$$

$$\partial_i g_{lk} - g_{mi} \Gamma_{kl}^m - g_{km} \Gamma_{il}^m = 0 \quad (2.18)$$

$$\partial_k g_{il} - g_{mi} \Gamma_{ik}^m - g_{lm} \Gamma_{ik}^m = 0 \quad (2.19)$$

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{g^{im}}{2} (\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{kl}) \quad (2.20)$$

Dos consideraciones; primero que el tensor métrico es simétrico y el símbolo de Christoffel también es simétrico pero con respecto a los dos índices covariantes, pero le llamamos símbolo y no tensor, sencillamente por que el símbolo de Christoffel no es un tensor, es más bien un pseudotensor lo que quiere decir que no obedece a la ley de transformación que obedecen los tensores y además, existen marcos de referencia donde las componentes del tensor métrico son constantes y el símbolo de Christoffel es cero, ya que existen muchos marcos de referencia que cumplen esa propiedad en todos ellos se comporta como un tensor, es por eso que se llama pseudotensor, a veces es un tensor y a veces no.

Otro de los elementos que necesitaremos definir es el determinante del tensor métrico ($g = \det[g_{\mu\nu}]$) y luego su diferencial, ya que nos permitirá mediante la variación de la acción Hilbert-Einstein conseguir las ecuaciones para el campo Gravitacional.

$$dg = g g^{ik} dg_{ik} = -g g_{ik} dg^{ik} \quad (2.21)$$

Luego definamos la divergencia de un vector o tensor de orden uno y de un tensor antisimétrico de orden dos.

$$A^i_{;i} = \partial_i A^i + \Gamma^i_{il} A^l \quad (2.22)$$

Usando la expresión del símbolo de Christoffel, e igualando un par de índices covariante y contravariante se verá que.

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \partial_k g_{im} \quad (2.23)$$

O de acuerdo con la diferencial del determinante del tensor métrico, podemos reescribirlo como,

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g} \partial_k g = \partial_k \ln \sqrt{-g} \quad (2.24)$$

escribamos ahora la divergencia como.

$$A_{;i}^i = \partial_i A^i + A^i \partial_i \ln \sqrt{-g} \quad (2.25)$$

$$A_{;i}^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} A^i) \quad (2.26)$$

Determinemos ahora la divergencia para el tensor de segundo orden antisimétrico,

$$A^{mk} = -A^{km} \quad (2.27)$$

$$A_{;k}^{ik} = \partial_k A^{ik} + \Gamma_{mk}^i A^{mk} + \Gamma_{mk}^k A^{im} \quad (2.28)$$

$$A_{;k}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k (\sqrt{-g} A^{ik}) \quad (2.29)$$

esta expresión (30) es muy útil a la hora de determinar la ley de conservación del cuadrimomentun angular y por supuesto del tensor electromagnético, ahora nos falta determinar la expresión del *D' lambertiano* el cual es algo diferente en un espacio-tiempo curvo, primero averiguemos la forma de la derivada covariante del campo escalar.

$$\nabla_i \phi = \partial_i \phi \quad (2.30)$$

$$\nabla^i \phi = g^{ik} \partial_k \phi = g^{ik} \nabla_k \phi \quad (2.31)$$

$$\nabla_i \nabla^i \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{ik} \partial_k \phi) \quad (2.32)$$

Describamos ahora el movimiento de una partícula hecha de energía pura o sin masa inercial, el camino que sigue será aquel cuya derivada covariante direccional sea cero, el operador correspondiente a esta derivada se define de la siguiente forma,

$$\frac{D}{d\lambda} = u^i \nabla_i \quad (2.33)$$

la cuadrivelocidad se define como la rapidez del cambio de un suceso con respecto a su tiempo propio.

$$u^i = \frac{dx^i}{d\lambda} \quad (2.34)$$

Hallemos entonces las ecuaciones paramétricas de la Historia espacio-temporal que siguen las partículas sin masa,

$$\frac{D}{d\lambda} u^j = u^i \nabla_i u^j = 0 \quad (2.35)$$

$$u^i (\partial_i u^j + \Gamma_i^{jk} u^k) = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0 \quad (2.37)$$

esta curva que siguen esas partículas sin masa inercial, los matemáticos le llaman geodésicas y son tales que, es la historia más corta entre dos puntos del espacio-tiempo de Riemann de dimensión 4, por lo que también es deducible a partir de un principio variacional,

$$S(u) = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du}} du \quad (2.38)$$

las ecuaciones que describen estas geodésicas son determinadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{du} \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad (2.39)$$

en este caso el Lagrangiano es,

$$L(x, \frac{dx}{du}) = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du}} \quad (2.40)$$

colocandola en las ecuaciones de Euler-Lagrange arribamos a la anterior ecuación para la geodésica. Es hora de hablar del tensor de Rieman el cual nos dará la información acerca de la curvatura del espacio-tiempo, esto es muy importante ya que Einstein nos enseñó que la curvatura puede ser traducida como la acción de la fuerza Gravitacional a ello se le llama Geometrodinámica, es sencillo, si nuestro universo fuese la superficie de una esfera, todo cuerpo que se halla en ella desde el punto de vista de la Gravitación de Newton, es mantenida sobre la superficie por la existencia de una fuerza de atracción, pero no se dice nada acerca de la naturaleza de esa fuerza, pero en la Geometrodinámica de Einstein se dice que el cuerpo sigue la geometría de su espacio-tiempo, así que para saber la magnitud de la fuerza Gravitacional es necesario conocer la curvatura global del universo en el que vivimos, pero el problema es que no podemos salir de nuestra dimensión así que debemos hallar una manera de calcular dicha curvatura sin salir de nuestro espacio-tiempo, a esa curvatura se le conoce como Curvatura Intrínseca y es la curvatura que Rieman estudió y determinó, derivémosla, consideremos la derivada de la derivada covariante,

$$A_{\alpha;\beta;\gamma} = A_{\alpha;\beta,\gamma} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} A_{\sigma;\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} A_{\alpha;\sigma} \quad (2.41)$$

$$A_{\alpha;\beta;\gamma} = (A_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} A_{\sigma})_{,\gamma} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} (A_{\alpha,\sigma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} A_{\mu}) \quad (2.42)$$

$$A_{\alpha;\beta;\gamma} = A_{\alpha,\beta,\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} A_{\sigma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} A_{\sigma,\gamma} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} A_{\sigma,\beta} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} A_{\mu} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\sigma} A_{\alpha,\sigma} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\sigma} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} A_{\mu} \quad (2.43)$$

ahora de la misma forma, se construye la derivada de la derivada covariante pero esta vez permutando los indices de la derivada covariante, luego restamos una de la otra y obtenemos,

$$A_{\alpha;\beta;\gamma} - A_{\alpha;\gamma;\beta} = A_{\sigma} (\Gamma_{\gamma\alpha,\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\beta\alpha,\gamma}^{\sigma}) + A_{\mu} (\Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\beta}^{\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\mu}) \quad (2.44)$$

$$[\nabla_{\beta}, \nabla_{\gamma}] A_{\alpha} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} A_{\sigma} \quad (2.45)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} = \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^{\sigma} + \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\sigma} \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \quad (2.46)$$

Este es el famoso tensor de Rieman que nos dará la información acerca de la curvatura del espacio-tiempo, además el número de elementos diferentes de cero que tiene este tensor, es (n ; es la dimensión del espacio tiempo)

$$N^{\circ} \text{componentes} = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) \quad (2.47)$$

en un universo unidimensional, todas las componentes son cero, esto entra en una contradicción, cuando hablamos por ejemplo de un universo de dimensión $n = 1$ en forma de circunferencia, intuitivamente esta si tiene curvatura, pero según la geometría de Rieman no tiene curvatura, Veamos que pasa. Amigos lectores, la curvatura que mide el tensor de Rieman es una curvatura intrínseca osea es un tipo de curvatura que sólo se puede medir por metodos que impliquen su propia dimensión, por eso para un ser que viva en esa circunferencia la curvatura es nula, pero si

viviese en una superficie esférica la cual tiene dos dimensiones, existirá una componente del tensor de Riemann diferente de cero, lo que quiere decir que debe existir una manera de medir esa curvatura sin salir de ese espacio bidimensional, una de ellas sería mediante la construcción de un triángulo, cuya suma de sus ángulos de seguro no será 180 grados. Existe otro tipo de curvatura conocida como curvatura extrínseca, la cual mide la curvatura pero saliendo necesariamente a una nueva dimensión o metiéndose en una dimensión menor.

Terminemos por estudiar al tensor de Ricci, Hilbert en su búsqueda de una formulación de la Densidad Lagrangiana, se dió cuenta de que el tensor de Riemann no era el apropiado para ello ya que existen derivadas de orden mayor a 2, así que era necesario otro tensor, pero que aún nos de información acerca de la curvatura, ese es el tensor de Ricci, el cual es la contracción del tensor de Riemann.

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^l_{ilk} \quad (2.48)$$

$$R_{ik} = \Gamma^l_{ik,l} - \Gamma^l_{il,k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} \quad (2.49)$$

Ricci nos habla del flujo de la energía del espacio-tiempo curvo, esto lo veremos en la celebrada ecuación campo de Einstein,

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm} \quad (2.50)$$

La Acción de Hilbert-Einstein

Einstein usó las identidades de Bianchi para arribar a las ecuaciones de la gravitación, además de su gran intuición física, pero David Hilbert fué por otro camino, él buscó la Acción para el campo Gravitacional y con ello halló las ecuaciones de campo gravitacional, mediante la variación de la acción, es así que ingeniosamente planteó[3][12],

$$S_G = \int L_G d^4x \quad (2.51)$$

$$L_G = l_G \sqrt{-g} \quad (2.52)$$

Esta densidad lagrangiana sería la densidad de curvatura intrínseca del espacio-tiempo, en eso pensó Hilbert y además, esta densidad de curvatura no debería tener derivadas del tensor métrico de orden mayor a dos, el elemento perfecto para esto es la curvatura escalar[12] (donde χ , es una constante),

$$L_G = \frac{1}{2\chi} \sqrt{-g} R \quad (2.53)$$

con ello, la acción total de la materia y el campo gravitacional se escribe como,

$$S = \int (L_G + L_M) d^4x \quad (2.54)$$

realizando la correspondiente variación.

$$\delta S = \frac{1}{2\chi} \int \delta(R\sqrt{-g}) d^4x + \int \delta L_M d^4x$$

$$\delta S = \frac{1}{2\chi} \int ((\sqrt{-g}\delta R) + R\delta\sqrt{-g}) d^4x + \int \delta L_M d^4x$$

$$\delta S = \frac{1}{2\chi} \int [\delta(g_{ab}R^{ab})\sqrt{-g} + \frac{1}{2}R(-g)^{-\frac{1}{2}}(-1)\delta g] d^4x + \int \delta L_M d^4x$$

$$\delta S = \frac{1}{2\chi} \int [R^{ab}\delta g_{ab}\sqrt{-g} - \frac{R}{2\sqrt{-g}}g g^{ab}\delta g_{ab}] d^4x + \frac{1}{2\chi} \int g_{ab}\delta R^{ab}\sqrt{-g} d^4x + \int \delta L_M d^4x$$

$$\delta S = \frac{1}{2\chi} \int [R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}]\delta g_{ab}\sqrt{-g}d^4x + \frac{1}{2\chi} \int [\sqrt{-g}g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c - \sqrt{-g}g^{ac}\delta\Gamma_{ab}^b]d\Sigma_c + \int \delta L_M d^4x$$

$$\frac{1}{2\chi} \int \delta g_{ab}[R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab}]\sqrt{-g}d^4x + \int \frac{\delta L}{\delta g_{ab}}\delta g_{ab}d^4x = 0 \quad (2.55)$$

$$R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab} = 8\pi T^{ab} \quad (2.56)$$

donde el tensor energía-momentun se define como,

$$T^{ab} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{ab}} \quad (2.57)$$

la ecuación (62) nos dice que la curvatura del espacio-tiempo se genera por la distribución de materia la misma que se halla codificada en el tensor energía-momentún, en resumen, *La materia le dice al espacio-tiempo como curvarse y la curvatura del espacio-tiempo le dice a la materia como moverse*, esto fué enunciado por J. Wheeler[3].

Agujero Negro de Schwarzschild

Primero comenzamos por definir el elemento de línea o elemento de historia del espacio-tiempo de Riemán, de tal forma que la simetría sea máxima, esto se consigue mediante las ecuaciones de Killing, dicho tópico no desarrollaré, tomaré el resultado dado en el texto[3],

$$ds^2 = -e^{2a(r)}dt^2 + e^{2b(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.58)$$

donde los funciones exponenciales son las componentes del tensor métrico, las cuales debemos determinar con la ecuación campo de Einstein; las coordenadas contravariantes son,

$$x^\mu = (t, r, \theta, \phi) \quad (2.59)$$

el tensor métrico es,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

estas componentes se colocan en la ecuación (21), para calcular todas las componentes diferentes de cero del Símbolo Christoffel y con ellas calcular, el tensor de Riemann.

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \partial_r a & \Gamma_{00}^1 &= e^{2(a-b)} \partial_1 a & \Gamma_{11}^1 &= \partial_1 b \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-2b} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^1 &= -re^{-2b} \text{sen}^2\theta & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta \cos\theta & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Calculemos las componentes del tensor de Ricci dada por la ecuación (49), sólo las componentes de la diagonal son no nulas,

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{2(a-b)} [\partial_r^2 a + (\partial_1 a)^2 - \partial_1 a \partial_1 b + \frac{2}{r} \partial_1 a] \\ R_{11} &= -\partial_1^2 a - (\partial_1 a)^2 + \partial_1 a \partial_1 b + \frac{2}{r} \partial_1 a \\ R_{22} &= e^{-2b} [r \partial_1 (a-b) - 1] + 1 \\ R_{33} &= \text{sen}^2\theta R_{22} \end{aligned} \quad (2.62)$$

ya que la idea es describir el campo Gravitacional fuera de la fuente, tendremos que en la ecuación campo de Einstein (62), el tensor energía-momento de la materia es nulo, así que las componentes del tensor de Ricci son también nulas.

$$R_{ab} = 0 \quad (2.63)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones(68),

$$\begin{aligned} \alpha &= -\beta \\ e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) &= 1 \\ \partial_r (r e^{2\alpha}) &= 1 \\ e^{2\alpha} &= 1 - \frac{cte}{r} \end{aligned} \quad (2.64)$$

la constante, es el radio de Schwarzschild, el cual define el horizonte de sucesos, con todo ello podemos escribir el elemento de historia del espacio-tiempo de Schwarzschild.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.65)$$

Si consideramos por ejemplo que en nuestro sistema solar los planetas tienen una masa casi nula en comparación con la masa del sol, tendríamos que el espacio-tiempo curvo que crea el sol, estaría aproximadamente dado por la solución de Schwarzschild, de tal manera que si graficamos las geodésicas de este espacio-tiempo serían precisamente las órbitas planetarias, en especial para los planetas que se hallan cerca del sol podemos despreciar los ángulos Azimutal y Cenital, ya que dichas órbitas se hallan aproximadamente en un mismo plano, tales planetas son Mercurio, Venus, Marte, esto está corroborado por observaciones astronómicas[5].

Por último pasemos a discutir el caso en el que $r = 2GM$, allí parece haber una singularidad, ya que el elemento de historia se hace infinito, pero en realidad esta no es una singularidad, sencillamente es una muestra de que nuestro sistema coordenado no es el adecuado ya que no es capaz de informarnos como es el campo Gravitacional cuando $r = 2GM$ ¿Que sucede cuando $r=2GM$?, cuando estudiamos la caída libre de una partícula se revela que respecto a un observador orbitando en caída libre es una de las geodésicas, se observa la partícula acercarse a $2GM$ más y más lentamente, teóricamente esta partícula se acerca al horizonte $r = 2MG$ pero sólo asintóticamente, dichos observadores tienen un nombre acuñado por Susskind "FIDOS"[1]; y el tiempo que mide su reloj o tiempo propio es proporcional a $d\tau_{propio} = \sqrt{1 - \frac{2MG}{r}} dt_{FIDO}$. Para la partícula en caída libre los marcos de referencia capaces de seguirla se conocen como FREFOS, en este marco de referencia la partícula cruza el horizonte en un tiempo finito y lo más importante, una vez que la partícula haya cruzado dicho horizonte no será capaz de escapar, osea que no existirá fuerza alguna en la naturaleza capaz de sacarla fuera del horizonte, ya que necesitaría acelerar hasta velocidades mayores que de la luz por lo que clásicamente, el agujero negro transforma toda la energía potencial gravitacional en energía y como nada escapa, en principio el Agujero Negro está a una temperatura cero y entropía infinita[1].

Por último, respecto a los FIDOS pareciera que la información acerca de la partícula queda codificada en el horizonte de sucesos o al menos parte de ella. Esta idea sencilla y bella llevó a Leo-

nard Susskid y otros físicos teóricos a plantear la Hipótesis Holográfica, la misma que explicaré mas adelante[1].

Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Como puntualizamos anteriormente, la información dada por la solución de Schwarzschild es incompleta ya que solucionamos las ecuaciones de campo fuera de la fuente, pero ¿Cómo es posible que dicha solución explique las orbitas del sistema solar y simultáneamente describa a un Agujero Negro? La respuesta es sencilla y se debe a que cuando la estrella, por ejemplo el sol, tiene combustible nuclear (hidrógeno) que quemar[4], su radio es tal que excede al radio de Schwazschild pero cuando se le acaba el combustible nuclear la fuerza Gravitacional es superior y comienza la contracción y si la masa de nuestro sol fuese suficientemente grande, del orden de 3.5 Masas solares no existirá fuerza en la naturaleza capaz de soportar dicha atracción gravitacional y se encogería a un tamaño mucho menor que el radio de Schwarzschild[28], se reducirá tanto que no sabremos si usar la Mecánica Cuántica por su tamaño infimo; O la Relatividad General por su gran Masa, por el momento la Relatividad General nos dice que se reducirá a un punto con densidad infinita y curvatura infinita, esta es la verdadera singularidad y estamos seguros de que es esta ya que no existe ninguna transformación de coordenadas que nos permita desaparecerla, una forma más precisa de probar que un punto del espacio-tiempo es una singularidad o no, es por medio de la construcción del invariante de Kretschmann[3],

$$R^{abcd}R_{abcd} = \text{invariante} \quad (2.66)$$

calculandola para la metrica de Schwarzschild (70) tendremos[3].

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48G^2M^2}{r^6} \quad (2.67)$$

Ahora es necesario saber como es el espacio-tiempo dentro del horizonte de sucesos, pero obten-

dremos más de lo que busquemos, si usamos la transformación de Kruskal-Szekeris definida para la parte exterior al agujero negro[9][3],

$$r > 2GM \left\{ \begin{array}{l} x' = \left(\frac{r}{2MG} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4MG}} \cosh\left(\frac{t}{4MG}\right) \\ t' = \left(\frac{r}{2MG} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4MG}} \sinh\left(\frac{t}{4MG}\right) \end{array} \right. \quad (2.68)$$

en la que claramente vemos que en $r=2GM$, no hay singularidad, ahora para la parte interior,

$$r < 2GM \left\{ \begin{array}{l} x' = \left(1 - \frac{r}{2MG}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4MG}} \sinh\left(\frac{t}{4MG}\right) \\ t' = \left(1 - \frac{r}{2MG}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r}{4MG}} \cosh\left(\frac{t}{4MG}\right) \end{array} \right. \quad (2.69)$$

de esta manera podemos mapear todo el espacio-tiempo del agujero negro de Schwarzschild con esta nueva transformación, reemplazando estas nuevas variables en la ecuación 2.65 tendremos una nueva forma del elemento de historia[3].

$$ds^2 = \frac{32M^3G^3}{r} e^{\frac{-r}{2MG}} (-dt'^2 + dx'^2) + r^2(t', x')(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.70)$$

Mediante la siguiente ecuación podemos graficar las asíntotas del espacio-tiempo de Kruskal-Szekeris,

$$\left(\frac{r}{2MG} - 1\right)e^{\frac{r}{2MG}} = x'^2 - t'^2 \quad (2.71)$$

el horizonte de sucesos se halla en el centro o en la intersección de las asíntotas dadas en $r = 2GM$ y $t = \pm\infty$, la singularidad se halla en las partes superior e inferior, esta métrica describe toda la extensión del agujero negro, ya sea su parte exterior al Horizonte de sucesos, su parte interior, además del agujero blanco, por lo que el diagrama en este sistema de coordenadas se conoce como agujero negro eterno. Esta geometría nos será útil cuando exploremos la periferia del horizonte de sucesos[35].

2.1.2. Mecánica Cuántica

La Mecánica Cuántica representa la gran Revolución de los siglos XX y XXI y sus conceptos no son muy intuitivos, con leyes que desafían nuestra forma convencional de ver al mundo. Se dará una breve revisión a su estructura matemática y a sus postulados, luego analizaremos el concepto de Coherencia y Entrelazamiento Cuántico, las cuales son la parte central del efecto Hawking[8].

Notación de Dirac

Comenzaremos por describir lo que es un estado en Mecánica Cuántica, los estados físicos clásicamente se describen mediante las posiciones y velocidades (q, \dot{q}) en el espacio de Configuraciones, pero si describimos mediante las posiciones y momenta (q,p) al sistema físico, el espacio de estados donde se describe la dinámica del sistema se conoce como Espacio de Fases. La mecánica cuántica es mucho más eficiente a la hora de describir el mundo, ya que la M.C. busca responder preguntas del tipo "sí" o "no", por ejemplo para describir clásicamente a una partícula es necesario definir 6 variables y para dos partículas son necesarios 12 variables, pero en M.C. para una partícula sin espín es necesario sólo una función de onda o un ket a diferencia de las 6 variables a determinar¹[23].

Los estados cuánticos se representan por medio de los kets y las variables dinámicas a medir se representan por operadores Hermitianos, con lo que sus autovalores son reales, con dichos autovalores podemos construir una estadística para determinar los valores medios de los observables físicos. Por lo pronto comenzaremos por definir el espacio lineal de kets y para garantizar la existencia del producto interno y de allí la norma, es necesario la existencia del espacio dual conocido como espacio vectorial dual Bra. El espacio vectorial en el que definimos el producto interno, tiene además que ser completo, se conoce como espacio de Hilbert, esta completitud significa que debe existir una serie de Cauchy tal que sea convergente en su mismo espacio lineal, en la notación de Kets de Dirac significa la existencia del uno de Dirac, comenzaremos por definir una base para el espacio

¹Claro está que la función de onda descompuesta en sus modos normales tiene infinitas dimensiones[8], pero de todas maneras la simplicidad dada por la mecánica cuántica es encomiable

vectorial de kets H , al que se le conocerá como espacio de Hilbert[8].

$$\{|a'\rangle\} \quad (2.72)$$

cuya condición de ortonormalización es

$$\langle a' | a'' \rangle = \delta_{a' a''} \quad (2.73)$$

ya que es un espacio vectorial lineal, cualquier elemento de este espacio vectorial puede ser descrito como una combinación lineal de los elementos de la base, si $|x\rangle \in H$, entonces.

$$|x\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle \quad (2.74)$$

Esta última ecuación se puede interpretar físicamente como la construcción de un estado físico cualesquiera $|x\rangle$, como una superposición de sus estados físicos básicos, las amplitudes o pesos que multiplican a los vectores base de H , se conocen como amplitudes de probabilidad de que el sistema físico en estudio se halle en dicho estado, por ello es importante que tengamos una expresión de la misma, multiplicado por la derecha con el correspondiente vector bra de la base de H [11],

$$\begin{aligned} \langle a' | x \rangle &= \sum_{a''} \langle a' | c_{a''} | a'' \rangle \\ \langle a' | x \rangle &= \sum_{a''} c_{a''} \langle a' | a'' \rangle \\ \langle a' | x \rangle &= \sum_{a''} c_{a''} \delta_{a' a''} \\ \langle a' | x \rangle &= c_{a'} \end{aligned} \quad (2.75)$$

tal y como puntualizó Richard Feynman, la notación de Dirac nos permite entender intuitivamente la Mecánica Cuántica, por ejemplo la ecuación (81) nos da la amplitud de probabilidad de que estando inicialmente en el estado $|x\rangle$ se halle en el estado $|a'\rangle$, bueno pero ¿Como saber si la base en la que estamos trabajando es completa? Para esto la base (2.72) de H además de cumplir la condición de ortonormalización también debe cumplir la condición de completitud[11][8].

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = 1 \quad (2.76)$$

Con esta relación de completitud mostraremos que podemos construir una estadística con las amplitudes de probabilidad tal que el cuadrado la norma de $c_{a'}$ es la probabilidad, así que la suma de todas las amplitudes en un espacio vectorial completo debe ser igual a la unidad, mostremos esto, pero suponiendo que el estado $|x\rangle$ está debidamente normalizado[8][11][1].

$$\begin{aligned}
 \langle x|x\rangle &= \langle x|(1)|x\rangle \\
 \langle x|x\rangle &= \langle x|(\sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|)|x\rangle \\
 \langle x|x\rangle &= \sum_{a'} \langle a'|x\rangle\langle x|a'\rangle \\
 \langle x|x\rangle &= \sum_{a'} |\langle a'|x\rangle|^2 \\
 \langle x|x\rangle &= \sum_{a'} |c_{a'}|^2 = 1
 \end{aligned}
 \tag{2.77}$$

Ahora definamos a las variables dinámicas las cuales se representan por operadores, un operador A , es una aplicación lineal que toma elementos de un espacio lineal y los lleva a otro espacio lineal[8][11],

$$A : H \mapsto H \tag{2.78}$$

los mismos que se definen en una cierta base. Un caso especial es cuando esta se define en su propia base de kets en este caso los kets se llaman auto kets y los escalares obtenidos de la aplicación del operador en el auto ket se llaman autovalores,

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle, A|a''\rangle = a''|a''\rangle \tag{2.79}$$

esta operación nos dice que el operador tiene la capacidad de sacar información escalar de un estado físico dado por un ket, el problema es que si queremos que este escalar sea alguna cantidad física, tiene que ser un número real, pero los autovalores de un operador lineal cualesquiera son complejos en general, pero existe un grupo de operadores tales que sus autovalores son reales y se conocen como Hermitianos, pero primero comencemos por escribir una representación matricial para un operador lineal cualesquiera[8][11],

$$B = 1 \cdot B \cdot 1$$

$$B \equiv \sum_{a'} \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''| B |a'\rangle \langle a'| \quad (2.80)$$

lo importante es que el algebra matricial es no abeliano o no conmutativo, esto es vital ya que los operadores Hermiticos representan a observables físicos, por ejemplo si definimos los operadores de posición y momentún, estos no conmutan esto nos conduce directamente al principio de incertidumbre[8][11], un operador se dice que es hermitiano si,

$$B = B^\dagger \quad (2.81)$$

el operador es igual a su adjunto, el adjunto es la traspuesta de del conjugado de la representacion matricial del operador,

$$\begin{aligned} \langle b|X|a\rangle &= \langle b| \cdot (X|b\rangle) \\ \langle b|X|a\rangle &= \{(\langle a|X^\dagger) \cdot |b\rangle\}^* \\ \langle b|X|a\rangle &= \langle a|X^\dagger|b\rangle^* \\ \langle b|X|a\rangle &= \langle a|X|b\rangle^* \end{aligned} \quad (2.82)$$

ahora escribamos la representación matricial de un observable en su auto base, con las ecuaciones (2.76) y (2.79) en la ecuación (2.80),

$$\begin{aligned} A &= \sum_{a'} \sum_{a''} |a''\rangle a' \langle a''|a'\rangle \langle a'| \\ A &= \sum_{a'} \sum_{a''} a' \delta_{a',a''} |a''\rangle \langle a'| \\ A &= \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'| \end{aligned} \quad (2.83)$$

se muestra entonces que un operador en su auto base es diagonal y sus componentes son los autovalores, definiremos ahora una operación sobre los operadores el cual toma dos operadores y nos da uno nuevo, este es el conmutador y el anti conmutador[8][11].

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ \{A, B\} &= AB + BA \end{aligned} \quad (2.84)$$

El conmutador es importante ya que nos dice si estos dos operadores son o no compatibles, si conmutan entonces pueden compartir la base y por ende pueden ser simultáneamente medibles, pero

si no, no pueden ser simultáneamente medibles, definamos el principio de incertidumbre generalizado para dos operadores cualesquiera[11].

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2 \quad (2.85)$$

Por último es necesario que hablemos de la matriz de transformación de base o cambio de la representación, y como veremos el responsable de dicha transformación debe ser una matriz unitaria un caso especial que conocemos es por ejemplo una rotación al rededor del eje z en el plano $R \times R$, esta transformación es tal que la norma de los vectores en $R \times R$ permanece invariante[8]. Pero veamos esto en forma general, sean las dos representaciones de un espacio vectorial dados por dos conjuntos de vectores ortonormales y completos $\{|a'\rangle\}, \{|b'\rangle\}$ entonces existe una matriz unitaria que nos permite escribir la siguiente ley de transformación[11][8],

$$U|a^{(l)}\rangle = |b^{(l)}\rangle \quad (2.86)$$

tal que,

$$\begin{aligned} U^+U &= 1 \\ UU^+ &= 1 \end{aligned} \quad (2.87)$$

entonces la construcción explícita de dicho operador es,

$$U = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}| \quad (2.88)$$

es sencillo mostrar una ley de transformación para operadores, el cual nos lleva directamente al importante teorema de observables unitarios equivalentes, sean los elementos de un operador cualesquiera X [8][11][14],

$$\begin{aligned} \langle b^{(k)}|X|b^{(l)}\rangle &= \sum_m \sum_n \langle b^{(k)}|a^{(m)}\rangle\langle a^{(m)}|X|a^{(n)}\rangle\langle a^{(n)}|b^{(l)}\rangle \\ \langle b^{(k)}|X|b^{(l)}\rangle &= \sum_m \sum_n \langle a^{(k)}|U^+|a^{(m)}\rangle\langle a^{(m)}|X|a^{(n)}\rangle\langle a^{(n)}|U|a^{(l)}\rangle \end{aligned} \quad (2.89)$$

escribamosla simbólicamente como,

$$X' = U^+ X U \quad (2.90)$$

el teorema dice que si X es un observable, entonces los autovalores de X son los mismos autovalores de UXU^{-1} , también es muy útil para diagonalizar matrices.

Principios de la Mecánica Cuántica

Los anteriores resultados pueden ser generalizados para casos degenerados o para variables continuas, ahora describiremos los 10 principios de la Mecánica Cuántica, además plantearé si estas pueden cambiar para espacios tiempos Relativistas y Curvos[39].

Primer postulado: *Para un espacio \bar{r}_0 y tiempo $t_{(0)}$ y espín definido, el estado del sistema puede ser descrito por un vector ket $|\psi(t_{(0)})\rangle$, una función de onda $\psi(\bar{r}_0, t_0)$ o un espinor $\psi_\alpha(\bar{r}_0, t_0)$, definido en un espacio vectorial lineal.[39]*

Este postulado es un cambio radical con respecto a la mecánica clásica ya que pone en segundo plano a la posición, momento y velocidad como variables dinámicas que determinan la dinámica de un sistema físico en general, sencillamente porque la Mecánica Cuántica hace un cambio de paradigma centrandose en las leyes de conservación y la dinámica de las amplitudes de probabilidad de hallar una partícula en un determinado estado. Pero además de eso Relativistamente debemos adicionar algo más, en Mecánica Cuántica no relativista el número de partículas se conserva pero en M.Q. Relativista ya no existe la conservación del número de partículas esta es reemplazada por la conservación del cuadrimomento[5], esto quiere decir que el momento total y la energía debe conservarse en conjunto, pero debido a la equivalencia de la energía y la masa, dos partículas altamente energéticas que colisionan, luego de la colisión aparecen nuevas partículas ya que no existe lo que nivel macroscópico conocemos como calor en el mundo cuántico, la energía debe irse a algún lado, es así que la energía se masifica, entonces la función de onda que se interpretaba como la amplitud probabilidad de hallar una partícula en un determinado punto del espacio-tiempo pasa a

ser un operador el cual se expande en los operadores creación \hat{a}^+ y destrucción \hat{a} de las partículas, es así que la construcción del espacio de estados cuánticos en Relatividad Especial se centra en que las partículas son concentraciones del campo en el vacío y se la conoce como Espacio de Fock[10], mediante una descomposición de Fourier en sus modos normales,

$$\hat{\psi}(r, t) = \int d^4p N_p (\hat{a}_p e^{i(p \cdot x - \omega_p t)} + \hat{a}_p^+ e^{-i(p \cdot x - \omega_p t)})$$

pero para que los modos normales existan es necesario que sean invariantes bajo el grupo de Poincaré. Esto último nos lleva a ciertas restricciones de la definición de partícula en Relatividad General, ya que en general no es posible hallar un grupo de Poincaré mediante el cual podamos definir los modos normales, siendo más precisos en el espacio-tiempo de Minkowsky (M.Q. relativista) los modos normales tienen invarianza traslacional en el tiempo, pero en Relatividad General no siempre es posible determinar la invarianza traslacional en el tiempo, es así que el concepto de partícula pierde significado en Relatividad General, así que se atacó el problema de los agujeros negros en regiones infinitesimales, en las que si es posible hallar un sistema coordenado ortogonal y plano, en la que si podemos hallar un grupo de Poincaré[1].

Segundo Postulado: *A cada observable del sistema físico se le asocia un operador Hermítico, $\hat{A} = \hat{A}^+$ en el marco de de la Mecánica Cuántica no Relativista, pero en el marco de la Mecánica Cuántica Relativista dicho observable tiene que conmutar con el operador número, $[\hat{A}, a^+ a] = [\hat{A}, \hat{N}] = 0$ y se la conoce como regla de Superselección.[18][14]*

Tenemos un problema bien fuerte ante nuestro ojos, de acuerdo a la anterior discusión, no siempre será posible construir un observable, porque para que dicho observable esté definido es necesario construir el operador número y para que el operador número exista, es necesario que la función de onda sea invariante bajo el grupo de Poincaré, ($t \rightarrow t + cte$) ya que con esa invarianza recién es posible determinar la expansión de Fourier en sus modos normales, (a^+, a), como ya sabemos, en el espacio-tiempo de Riemann curvo en general no se puede hallar un grupo de Poincaré, de allí que el concepto de medida es ambigua en un espacio-tiempo curvo, pero no todo está perdido, más

adelante les mostraré en base a las ideas de Hawking y Unruh, que cerca del horizonte de sucesos del agujero negro de Schwarzschild, en sus regiones infinitesimales del mismo si es posible hallar un grupo de Poincaré, esto nos da el indicio de que debe existir restricciones al sistema coordinado (condiciones Gauge) a usarse en Relatividad General, dichas restricciones es tratada por la Teoría de Cuerdas, la misma que queda fuera del contexto de esta tesis.

Tercer Postulado: *El único resultado posible de la medida de una cantidad física (observable) A , es uno de los autovalores del correspondiente observable A .*[14]

Cuarto Postulado: *El valor medio de la medida de un observable esta dado por una colección de medidas de un observable el cual se consigue mediante el colapso de la función de onda, el promedio estadístico es.*[14]

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(A\psi) dq \quad (2.91)$$

Quinto Postulado: *La dinámica de los estados cuánticos son determinados por la ecuación de Schrödinger y el responsable directo es el operador hermitico, conocido como Hamiltoniano.*[14][8]

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.92)$$

Esta ecuación dice que los estados cuánticos evolucionan de forma continua y causal, el caracter probabilístico nace cuando realizamos una medida sobre el sistema, otra cosa que debemos remarcar es que esta ecuación se sigue cumpliendo en la Teoría Cuántica del Campo, pero es algo oscura en Relatividad General, esto fue estudiado por Wheeler y Witt, pero no trabajaremos con esta ya que estudiaremos al Agujero Negro de forma Semiclásica, esto quiere decir que tomaremos resultados clásicos dados por la Relatividad General y resultados Cuánticos, las cuales las vamos a yuxtaponer y sacaremos nuevas conclusiones.

Sexto Postulado: *La función de onda correspondiente a un sistema de fermiones idénticos (espín semientero) debe ser antisimétrica respecto al intercambio de las coordenadas de dos de ellos*

(Principio de Exclusión de Pauli). Para un sistema de bosones idénticos (espín entero), debe ser simétrica respecto de dicho intercambio.[19][9]

Este último postulado es común en la bibliografía moderna, ya que sabemos que las componentes de la materia son los fermiones, y los bosones son los mensajeros de la materia los cuales transportan la interacción entre los fermiones, pero la función de onda es distinta para los fermiones y bosones, esto queda asegurado en este último postulado.

Cuadros de Schrödinger y Heisenberg

En el cuadro de Schrödinger los estados son los que evolucionan en el tiempo y los operadores son estacionarios, por ello la ecuación de Schrödinger es para los estados[8],

$$\hat{H}|\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} \quad (2.93)$$

este cuadro es de especial importancia en la Mecánica Cuántica no Relativista, pero en la Teoría Cuántica del Campo el cuadro de Heisenberg se impone, ya que en este cuadro son los operadores los que evolucionan en el tiempo y la función de onda de la teoría Cuántica del Campo pasa a ser un operador, debido a que esta se expande mediante una combinación lineal infinita en sus modos normales (expansion de Fourier) las cuales son los operadores creación y destrucción. Primero recordemos que el responsable de la evolución temporal de los estados cuánticos es el operador evolución temporal, este operador es unitario, cuya representación debe darse mediante otro operador pero hermitiano, como el conjugado del tiempo es la energía, es natural que sea el operador Hamiltoniano[14][8],

$$\begin{aligned} U(t, t_0 = 0) &= e^{(-\frac{iHt}{\hbar})} \\ U^+(t, t_0 = 0) &= e^{(\frac{iH^+t}{\hbar})} \\ U^+(t, t_0 = 0) &= e^{(\frac{iHt}{\hbar})} \\ U^+(t, t_0 = 0) &= U^{-1}(t, t_0 = 0) \\ U^+(t, t_0 = 0)U(t, t_0 = 0) &= 1 \end{aligned} \quad (2.94)$$

ahora realizemos una transformación de similaridad para un operador en el cuadro de *Schrödinger*,

ya que en este cuadro los operadores no evolucionan en el tiempo, mediante esta transformación conseguiremos un operador que si evoluciona en el tiempo el cual es precisamente el operador del cuadro de Heisemberg[8],

$$\begin{aligned} A^{(H)}(t) &= U^+(t)A^{(S)}U(t) \\ A^{(H)}(t) &= e^{(iHt/\hbar)}A^{(S)}e^{(-iHt/\hbar)} \end{aligned} \quad (2.95)$$

para $t=0$, ambos operadores son los mismos,

$$A^{(H)}(t=0) = A^{(S)} \quad (2.96)$$

Producto Tensorial

El producto tensorial es útil para describir sistemas interactuantes, por ejemplo un sistema electrón-positrón, los cuales pueden ser descritos por una función de onda que describa al sistema, pero cuyos estados particulares de cada componente del sistema dependan uno del otro, es mas, es posible construir un nuevo espacio vectorial lineal a partir de cada uno de sus espacios vectoriales lineales de cada componente y se consigue mediante el producto tensorial[8][1].

Sean dos espacios vectoriales lineales V_1 y V_2 cada una con dimensión N_1 y N_2 respectivamente,

Definición: el producto tensorial de estos dos espacios vectoriales forman un nuevo espacio vectorial V , cuya dimensión es N_1N_2 ,

$$V = V_1 \otimes V_2 \quad (2.97)$$

sean $|x(1)\rangle \in V_1$ y $|y(2)\rangle \in V_2$, entonces

$$|x(1)\rangle \otimes |y(2)\rangle \in V \quad (2.98)$$

entonces de acuerdo a esto, podemos construir una nueva base para el espacio vectorial V a partir de las bases de los espacios vectoriales V_1 y V_2 , mediante un producto tensorial, sean las

descomposiciones de los vectores ket dado por la ecuación (79),

$$\begin{aligned} |x(1)\rangle &= \sum_i a_i |u_i(1)\rangle \\ |y(2)\rangle &= \sum_j b_j |v_j(2)\rangle \end{aligned} \quad (2.99)$$

de tal manera que $|u_i(1)\rangle$ es una base para V_1 y $|v_j(2)\rangle$ es una base para V_2 , entonces con ello construyamos,

$$|x(1)\rangle \otimes |y(2)\rangle = \sum_{i,j} a_i b_j |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \quad (2.100)$$

entonces un vector en general $|\Phi\rangle \in V$ se expande como,

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \quad (2.101)$$

pero los $N_1 N_2$ numeros complejos (en general) $c_{i,j}$ en general no es posible ponerlos como los productos de a_i y b_j , entonces los vectores $|x(1)\rangle$ y $|y(2)\rangle$ en general no existen, ahora definamos el producto escalar de $|x(1)\rangle \otimes |y(2)\rangle$ y $|x'(1)\rangle \otimes |y'(2)\rangle$,

$$\langle x'(2) | \otimes \langle y'(2) | x(1)\rangle \otimes |y(2)\rangle = \langle x'(2) | x(1)\rangle \langle y'(2) | y(2)\rangle \quad (2.102)$$

por último los operadores definidos en cada espacio vectorial, pueden ser extendidos al espacio producto tensorial con la ayuda de los operadores identidad o de la relación de completitud, entonces sean $A(1) \in V_1$ y $B(2) \in V_2$, entonces podemos definir nuevos operadores,

$$\begin{aligned} \widetilde{A(1)} &= A(1) \otimes 1_{(2)} \\ \widetilde{B(2)} &= 1_{(1)} \otimes B(2) \end{aligned} \quad (2.103)$$

tal que $\widetilde{A(1)} \in V$ y $\widetilde{B(2)} \in V$.

Entrelazamiento Cuántico

Conocido como Entrelazamiento Cuántico, consiste en que las leyes de la física son no locales de tal forma que existen sistemas cuánticos en los cuales los estados de una de las componentes

dependen de los estados de las demas y viceversa, esto se enuncia de forma mas clara diciendo de que las funciones de onda de cada subsistema no pueden factorizarse, por lo que el concepto de función de onda debe generalizarse, mediante la matriz de densidad[1][8][14].

La matriz de densidad es importante ya que describe dos tipos de sistemas Cuánticos, sistemas Puros y Mixtos, por ejemplo los sistemas puros son sistemas cuyos estados cuánticos tienen una fase entre los estados del sistema, a este sistema se le llama coherente, pero ademas los estados son ortogonales, por ejemplo el sistema puro de los estados de espín de un haz de átomos de Plata S_x+ que se somete a un aparato *Stern – Gerlach_z*, los estados de espín $|+\rangle, |-\rangle$ [8],

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle \quad (2.104)$$

tienen una diferencia de fase $\delta_1 = \pi$, por lo que forman un estado coherente, los átomos con espín $|+\rangle$ y los átomos con espín $|-\rangle$.

Veamos ahora un sistema con estados mixto, tomemos un aparato de *Stern – Gerlach_z* y un haz de átomos de plata con S_x+ , se desdobra en dos haces cuyos estados cuánticos se dan por $|+\rangle, |-\rangle$, luego colocamos una pared para detener el haz $|-\rangle$, luego tomamos otro haz igual que el anterior con dos estados $|+\rangle, |-\rangle$, pero esta vez detemos con una pared los estados de spin $|+\rangle$, entonces nos quedan dos haces $|+\rangle, |-\rangle$, pero dichos haces a diferencia de los anteriores no tienen alguna fase entre los estados, por lo que la distribución de probabilidad de espín es $w_+ = 0,5$ y $w_- = 0,5$, pero estos estados forman una mezcla incoherente o sistema mixto, ya que no tienen una fase cuántica relacione ambos estados de espín. Se introducirá las siguientes definiciones[1][8].

Sistema Puro: *Es una mezcla coherente de sistemas físicos tal que todo miembro esta caracterizado por un mismo ket $|a\rangle$.*[8]

Estas son las colectividades comunmente vistos en Mecánica Cuántica, por ejemplo en el experimento de Stern-Gerlach, la colectividad formada por los estados de espín del haz que ha cruzado el aparato de Stern Gerlach, forman un sistema puro.

Sistema Mixto: Es una mezcla incoherente de emsembles puros, tal que cada miembro se caracteriza por una población o peso clásico y un ket específicos, $w^{(i)}$ y $|a^{(i)}\rangle$. [8]

Otra diferencia fundamental es que los estados formados por la mezcla coherente (Ensemble Puro) forman un sistema ortogonal, pero los estados que conforman la mezcla incoherente (Ensemble Mixto) no forman un sistema ortogonal [8]. Ahora escribamos de acuerdo a la ecuación (96) el valor medio pero para un Ensemble Mixto el cual es una generalización de un ensemble Puro.

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \sum_i w_i \langle a^{(i)} | A | a^{(i)} \rangle \\ \langle A \rangle &= \sum_i \sum_{a'} \sum_{a''} w_i \langle a^{(i)} | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle \langle a'' | a^{(i)} \rangle \\ \langle A \rangle &= \sum_i \sum_{a'} \sum_{a''} w_i \langle a^{(i)} | a' \rangle a'' \delta_{a'' a'} \langle a'' | a^{(i)} \rangle \\ \langle A \rangle &= \sum_i \sum_{a'} w_i |\langle a' | a^{(i)} \rangle|^2 a'\end{aligned}\quad (2.105)$$

Pero esta expresión es porque el operador está expresado en su auto-base, así que elegiremos una base más general, o una base que no sea su auto base,

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \sum_i \sum_{b'} \sum_{b''} w_i \langle a^{(i)} | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle \langle b'' | a^{(i)} \rangle \\ \langle A \rangle &\equiv \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | (\sum_i w_i |a^{(i)}\rangle \langle a^{(i)}|) | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle\end{aligned}\quad (2.106)$$

la parte que está dentro del paréntesis es la matriz densidad,

$$\rho = \sum_i w_i |a^{(i)}\rangle \langle a^{(i)}| \quad (2.107)$$

y las componentes en una base cualesquiera se dan por,

$$\langle b'' | \rho | b' \rangle = \sum_i w_i \langle b'' | a^{(i)} \rangle \langle a^{(i)} | b' \rangle \quad (2.108)$$

colocando (113) en (111) hallaremos una nueva expresión para determinar el valor medio de un operador [8].

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | \rho | b' \rangle \langle b' | A | b'' \rangle \\ \langle A \rangle &= \text{tr}(\rho A)\end{aligned}\quad (2.109)$$

Para un ensemble puro $i = n$ y $w_i = 1$, en este caso la matriz densidad cumple con las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \rho \\ \text{tr}(\rho^2) &= 1\end{aligned}\tag{2.110}$$

pero en general la matriz densidad para Ensembles mixtos cumple con dos propiedades fundamentales.

$$\rho^\dagger = \rho\tag{2.111}$$

$$\text{tr}(\rho) = 1\tag{2.112}$$

Vemos que la matriz densidad nos permite hablar de Coherencia Cuántica, ya que $\text{tr}(\rho^2) \leq 1$, entonces un sistema de estados es más coherente cuando la traza de su matriz densidad se aproxima a 1, esto nos será útil cuando investigemos los estados cuánticos cerca del horizonte de sucesos (apendice). Por último introduciremos el concepto de entropía dada por Neumann[8],

$$\sigma = -\text{tr}(\rho \ln \rho)\tag{2.113}$$

tal que es adimensional, así que sólo necesitamos introducir una constante, en este caso la constante de Boltzmann, esto nos ayudará en el capítulo de Mecánica Estadística Cuántica, ya que esta generaliza la entropía de Boltzmann. Considere un sistema cuántico que puede hallarse con la misma probabilidad en un número Ω de estados puros, entonces la matriz densidad es $\rho = \frac{1}{\Omega}P$, donde P es un operador proyección de dimensión $\Omega \times \Omega$, reemplazando este operador densidad en la formula de Neumann, obtenemos la entropía de Boltzmann[8].

$$S = k\sigma\tag{2.114}$$

Mostraremos uno de los ejemplos más importantes que nos ayudarán en nuestra visualización del efecto Hawking; sea un par de electrones que estuvieron juntos al comienzo y luego los separamos,

veremos que es imposible describir al sistema separadamente uno del otro, a este aspecto tan peculiar de la Mecánica Cuántica se le llama Entrelazamiento Cuántico, los estados entrelazados del espín se determinan como el producto tensorial de los espacios de espín de cada electrón[8],

$$S = S_1 \otimes 1 + 1 \otimes S_2 \quad (2.115)$$

es posible medir simultáneamente la proyección del espín del electrón 1 en la dirección x y del electrón 2 en la dirección y, pero no es posible medir simultáneamente la proyección del espín del electrón 1 y 2 en la misma dirección, esto se resume en,

$$[S_{1x}, S_{2y}] = 0 \quad (2.116)$$

pero medir simultáneamente los estados de espín del electrón 1 o del electrón 2 no es posible,

$$[S_{1x}, S_{1y}] = i\hbar S_{1z} \quad (2.117)$$

$$[S_{2x}, S_{2y}] = i\hbar S_{2z} \quad (2.118)$$

existen relaciones de conmutación similares para los estados espín del sistema completo.

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad (2.119)$$

Podemos trabajar en dos diferentes bases, la base de los momentos magnéticos o espín de cada electrón S_{1z} y S_{2z} y están dados por $\{|m_1, m_2\rangle\} = \{|++\rangle |+-\rangle; |-+\rangle; |--\rangle\}$, la base de la norma del espín total S^2 y del momento magnético total S_z es $\{|s, m\rangle\} = \{|s = 1, m = 1\rangle; |s = 1, m = 0\rangle; |s = 1, m = -1\rangle; |s = 0, m = 0\rangle\}$, cuyos autovalores de los operadores espín son denotados por[8],

$$\begin{aligned} S^2 &= (S_1 + S_2)^2 : s(s+1)\hbar^2 \\ S_z &= S_{1z} + S_{2z} : m\hbar \\ S_{1z} &: m_1\hbar \\ S_{2z} &: m_2\hbar \end{aligned} \quad (2.120)$$

es necesario determinar una relación entre ambas bases, los coeficientes que forman la matriz que determinan esta transformación se conocen como coeficientes de Clebsch-Gordan, para determinarlos usaremos los operadores escalera[8],

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= S_{1\pm} + S_{2\pm} \\ S_{\pm}|s, m\rangle &= \sqrt{(s \mp m)(s \pm m \pm 1)}|s, m \mp 1\rangle \end{aligned} \quad (2.121)$$

aplicando a la base $\{|s, m\rangle\} = \{|s = 1, m = 1\rangle; |s = 1, m = 0\rangle; |s = 1, m = -1\rangle; |s = 0, m = 0\rangle\}$ obtenemos dichos coeficientes, por ejemplo

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+1)(1-1+1)}|s = 1, m = 0\rangle &= \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1)}| - + \rangle + \\ &\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1)}| + - \rangle \\ |s = 1, m = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(| - + \rangle + | + - \rangle) \end{aligned} \quad (2.122)$$

en resumen tenemos,

$$\begin{aligned} |s = 1, m = 1\rangle &= | + + \rangle \\ |s = 1, m = 0\rangle &= (\frac{1}{\sqrt{2}})(| + - \rangle + | - + \rangle) \\ |s = 1, m = -1\rangle &= | - - \rangle \\ |s = 0, m = 0\rangle &= (\frac{1}{\sqrt{2}})(| + - \rangle - | - + \rangle) \end{aligned} \quad (2.123)$$

claramente los singletes $| + + \rangle, | - - \rangle$, son estados en los cuales el par electrón-electrón se pueden ver como bosones de espín entero 1,0; y los dobletes dados por $(\frac{1}{\sqrt{2}})(| + - \rangle + | - + \rangle), (\frac{1}{\sqrt{2}})(| + - \rangle - | - + \rangle)$, son estados en los cuales los estados de espín $| + \rangle, | - \rangle$ de cada electrón están entrelazados, osea que el estado $| + \rangle$ del electrón 1 esta condicionado con el estado $| - \rangle$ del segundo electrón[8][1].

2.1.3. Teoría Cuántica del Campo

Esta teoría es la unión de la Relatividad Especial y la Mecánica Cuántica, dicha unión se basa sencillamente en el hecho de que los campos sean covariantes bajo las trasformaciones de Lorentz, pero en términos sencillos la idea central es que ahora el número de partículas ya no se conserva tan sólo la energía y el momentón juntos o el quadri momento, esto quiere decir que la interpretación del campo cuántico o de la función de onda ya no es el de la amplitud de probabilidad de hallar una partícula en un espacio y tiempo dados, vemos que el mundo cuántico es mas dinámico de lo que

creámos, es más el mismo vacío lo es[14][7]. El vacío cuántico no es vacío, este vacío es una ebullición constante de creación de pares de forma permanente, esto debido al principio de incertidumbre o mejor aún a la relación de incertidumbre de medida de la energía-tiempo derivada de la relación de Heisemberg[9][14],

$$\begin{aligned} \Delta p \Delta q &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta E \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (2.124)$$

para fracciones de tiempo suficientemente pequeñas las fluctuaciones de la energía son muy grandes y de acuerdo con la Relatividad Especial la energía y la materia son equivalentes entonces de dichas fluctuaciones pueden nacer partículas, pero al mismo tiempo las partículas creadas se aniquilan en un tiempo muy pero muy pequeño, dependiendo cuán masivo sea el par que se crea, por ejemplo para crear un par electrón positrón el tiempo en el que se crean y se aniquilan, es del orden de $\Delta t \approx \frac{\hbar}{2m_e} \approx 6 \times 10^{-24} s$, pero ¡esperen un momento! imaginen que podamos ser capaces de ver el vacío antes de que comience una fluctuación, en ese instante la energía del vacío es cero además del momentón, pero cuando la fluctuación se da tenemos un partícula y una antipartícula con energías E y -E y momento opuestos, de manera que de forma global tanto la energía y el momentón son nulos, pero entonces ¿Cómo es que no podemos ver dichas fluctuaciones a nivel macroscópico? claro que no podemos verlas ya que nuestros detectores o sensores requirían de un tiempo de reacción realmente minúsculo, ya que estamos hablando de una frecuencias de 10^{28} Hertz, además si sólo se creasen partículas el vacío estaría atestado, entonces en promedio el vacío está verdaderamente vacío, para nuestras escalas de medida, pero para las escalas microscópicas ese tiempo es realmente toda una vida[9][14][15].

La idea de la Teoría Cuántica del Campo es que una partícula material es de algún modo una de las partículas que no encontró su antipartícula así que es necesario en primer lugar construir el estado de vacío y aplicar al ya conocido operador escalera a ese estado, según sea lo que deseamos describir una partícula o antipartícula, esta es pues nuestra nueva imagen, el campo del vacío es

la función de onda de la Teoría del Campo, pero ¿Cómo construirla? Este campo debería estar en función de los operadores escalera o operadores Creación y Destrucción[15][21][10][7].

Por último en la naturaleza existen dos tipos de partículas, las que conforman la materia conocidas como Fermiones con espín semientero y las partículas que llevan la información de una partícula a otra estas se conocen como Bosones con espín entero, cada una descrita con una estadística distinta, de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli[10][9].

La Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación que describe a partículas con espín 0 es la ecuación de Klein-Gordon, esta ecuación fue considerada primero por *Schrödinger*, pero para los propósitos de la descripción de la Mecánica Cuántica Clásica no era la indicada, pero la idea de la construcción de dicha ecuación era sencilla, primero necesitamos la expresión de la energía relativista dada en la Relatividad Especial[14],

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 + m_0^2 \\ (E, \vec{p})(E, -\vec{p}) &= m_0^2 \\ p^\mu p_\mu &= m_0^2 \end{aligned} \quad (2.125)$$

pasando a restar m_0^2 y aplicando este a un campo $\phi(\vec{x}, t) = \phi(x)$ reemplazando los correspondientes operadores de los cuadrimentos,

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m_0^2 &= 0 \\ (p^\mu p_\mu - m_0^2)\phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} p^\mu &\rightarrow i\partial^\mu \\ p_\mu &\rightarrow i\partial_\mu \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2)\phi(x) = 0 \quad (2.128)$$

recordar que cuando escribimos x quiere decir x^μ o x_μ , es necesario construir la densidad Lagrangiana, ya que es más sencillo y metódico determinar las leyes de conservación y la misma ecuación de campo a partir de un principio variacional[14][7][9],

$$\begin{aligned}
S[\phi] &= \int L dt \\
S[\phi] &= \int \left(\int \frac{dL}{d^3x} d^3x \right) dt \\
S[\phi] &= \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) d^4x
\end{aligned} \tag{2.129}$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} = 0 \tag{2.130}$$

La densidad lagrangiana para el campo de Klein-Gordon es[10][21],

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \frac{1}{2} ((\partial\phi)^2 - m_0^2 \phi^2) \tag{2.131}$$

de ella se obtiene las ecuaciones de Klein-Gordon y ademas otro campo conocido como campo conjugado de ϕ

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \dot{\pi})} = \dot{\phi}(x) \tag{2.132}$$

pero este campo aún no es cuántico, entonces procedamos a cuantizarlo, para ello los campos $\phi(x)$, $\pi(x)$ son reemplazados por operadores $\hat{\phi}(x, t)$ y $\hat{\pi}(x, t)$, dichos operadores obedecen a la siguientes reglas de conmutación,

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = i\delta^3(x - x') \tag{2.133}$$

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(x', t)] = [\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = 0 \tag{2.134}$$

un poco de inspección de estas relaciones de conmutación muestran que cuidan el concepto de causalidad, ya que podemos ver de acuerdo al primer conmutador, que no es posible medir simultáneamente en un mismo punto del espacio el campo y rapidez de cambio de ese campo, por lo que se entiende que el campo viaja a una velocidad finita. Ahora expandamos ese operador mediante

una combinación lineal infinita de los operadores creación y destrucción o lo que es lo mismo una transformada de Fourier, de esta manera este operador representa el estado de vacío[9][10][14][21],

$$\hat{\phi}(x, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2\omega_p)} (\hat{a}_p e^{i(p \cdot x - \omega_p t)} + \hat{a}_p^+ e^{-i(p \cdot x - \omega_p t)}) \quad (2.135)$$

$$\hat{\pi}(x, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (2\omega_p)} (-i\omega_p) (\hat{a}_p e^{i(p \cdot x - \omega_p t)} - \hat{a}_p^+ e^{-i(p \cdot x - \omega_p t)}) \quad (2.136)$$

entonces imponiendo en el primero de los conmutadores para los campos $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$,

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = \int d^3 p \int d^3 p' N_p N_{p'} (-i\omega_{p'}) ([\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] e^{-i(p \cdot x - p' \cdot x')} - [\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+] e^{-i(p \cdot x + p' \cdot x')} \dots) \quad (2.137)$$

pero para que este conmutador se encuentre en acuerdo con las ecuaciones (2.133),(2.134) los conmutadores de los operadores creación y destrucción deben cumplir,

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.138)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = [\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+] = 0 \quad (2.139)$$

dado que $p \cdot x = \omega_p t - \vec{p} \cdot \vec{x}$, $t = t'$, entonces con esto y con los anteriores conmutadores mostraremos,

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = i \int d^3 p N_p^2 \omega_p (e^{ip \cdot (x - x')} + e^{-ip \cdot (x - x')}) = i\delta^3(x - x') \quad (2.140)$$

no calcularemos el hamiltoniano paso a paso ya que es parte de un curso entero como Teoría Cuántica del Campo, así que escribiré el resultado,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3 p \omega_p (\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \hat{a}_p \hat{a}_p^+) \quad (2.141)$$

ya que $\hat{a}_p \hat{a}_p^+ = \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \delta^3(0)$, reemplazándola en la anterior ecuación, obtendremos,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3 p \omega_p (2\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \delta^3(0)) = \int d^3 p \omega_p (\hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \frac{1}{2} \delta^3(0)) \quad (2.142)$$

podemos ver que el valor esperado para cualquier estado incluyendo el vacío es infinito, para ver el origen del problema vayamos al caso discreto,

$$\hat{H} = \sum_l \omega_{p_l} (\hat{a}_{p_l}^+ \hat{a}_{p_l} + \frac{1}{2}) \quad (2.143)$$

siendo que existen infinitos modos normales en un campo, entonces la energía del punto cero o del vacío es,

$$E_0 = \sum_l \frac{1}{2} \omega_{p_l} \rightarrow \infty \quad (2.144)$$

esta es fuertemente divergente, pero ya que los observables no se miden respecto no de la energía total si no que diferencias de energías, entonces podemos definir un nuevo operador hamiltoniano renormalizado,

$$\hat{\tilde{H}} = \hat{H} - E_0 \quad (2.145)$$

pero este tipo de renormalización es muy trivial, hay otra forma de renormalizar el cual es conocido como Producto Normal, el cual se enuncia de la siguiente forma, *Los operadores con fase de frecuencia negativa se mantienen a la izquierda y los de frecuencia positiva a la derecha*, de esa forma se obtiene,

$$\hat{H} = \int d^3 p \omega_p \hat{a}_p^+ \hat{a}_p \quad (2.146)$$

y ya que el operador número se define como $\hat{n}_p = \hat{a}_p^+ \hat{a}_p$, tal y como queríamos, esta es la interpretación corpuscular de la Teoría del Campo Cuántico, veamos

$$\hat{H} = \int d^3p \omega_p \hat{n}_p \quad (2.147)$$

entonces la energía depende del número de partículas que haya en un determinado estado y esta esta dada en función del operador número quien nos da el número de partículas con un momentón definido, por último existe una regla se Superselección para los operadores el cual dice que *los operadores que no conmutan con el operador número no son hermitianos*, además el estado de vacío se define como [9][10][14],

$$\hat{a}_p|0\rangle = \hat{a}_p^\dagger|0\rangle = 0 \quad (2.148)$$

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (2.149)$$

como vemos este estado de vacío es muy sencillo, será necesario definir otro estado de vacío, algo parecido para las cercanías del Horizonte de sucesos del agujero negro.

La Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac debe ser colocada junto con la ecuación de *Schrödinger*, las ecuaciones de Maxwell y la ecuación del campo Einstein, como las ecuaciones más sencillas, elegantes y por supuesto principistas ya que cada una enmarca una teoría; entre tanto haré una revisión a la ecuación de Dirac.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.150)$$

Esta maravillosa ecuación nos permite describir a los fermiones o a partículas de espín un medio, la función de onda se divide en cuatro partes las cuales forman grupos de dos, cada grupo de dos describen a una partícula y a una antipartícula, con sus respectivos espines, este grupo de funciones de onda que conforman a la función de onda mostrada en la ecuación de Dirac se dice que es un

espinor, una forma sencilla de entender que es el espín, es que dada la función de onda, la indizamos o sea que desdoblamos el espacio de estados en sub-espacios para cada estado de espín, en términos formales la descripción del electrón con las matrices de Pauli, requiere del estudio de las Fibraciones de Hoff, pero si deseamos formalizar el espinor de Dirac, es necesario trabajar con los Cuaterniones y el algebra de Grossman, pero dichos tópicos no son necesarios por el momento para mis propósitos [11][9].

$$\psi \doteq \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \\ \psi_3(x, t) \\ \psi_4(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.151)$$

En la descripción de la Mecánica Cuántica de las partículas, ellas son puntuales, por lo que es simétrica para cualesquiera ángulo de giro, pero el electrón por ejemplo no lo es, el electrón es simétrica cada 4π , o lo que es lo mismo el estado del electrón es el mismo, esta simetría de giro es intrínseco y se debe al espín que intrínsecamente tiene, ahora describamos γ^μ [9][10][14].

$$\gamma^0 \doteq \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \doteq I \otimes \tau_3 \quad (2.152)$$

$$\gamma^i \doteq \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \doteq \sigma^i \otimes i\tau_2 \quad (2.153)$$

Podemos ver que las γ^μ son matrices 4×4 , estas matrices brillantemente introducidas por Dirac tienen una estructura, conocida como Algebra de Crifford, la misma que obedece a,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (2.154)$$

la matriz $I_{2 \times 2}$ es una matriz identidad y $(\sigma^i)_{2 \times 2}$ son las matrices de Pauli cuya algebra esta incluida en el algebra de Clifford, un algebra más general es el algebra de Grassman, esta algebra es inherente al espacio tangente de Rieman y con ella se construyen las ecuaciones de Cartan-Einstein, es así que diréctamente podemos construir la ecuación de Dirac en el espacio tangente de la Veriedad

Riemanniana, la matriz $\eta^{\mu\nu}$ es el tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowsky[10][9]. De la misma forma que en el caso de Klein-Gordon debemos construir la densidad Lagrangiana para el campo de Dirac[14],

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (2.155)$$

el espinor adjunto se define como $\bar{\psi} = \gamma^0\psi^\dagger$ y además definiremos una quinta matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, esta nueva matriz nos permite describir un nuevo estado conocido como Helicidad, las matrices dadas anteriormente se conocen como representación de Dirac y para esta representación la matriz γ^5 es,

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (2.156)$$

existe otra representación más adecuada para partículas ultrarelativistas (partículas con velocidades próximas a la luz), esta se conoce como Representación de Weyl, la Ecuación de Dirac es más sencilla cuando se la usa para partículas con masa cero por ejemplo los neutrinos cuya masa es casi cero, es allí donde se usa la representación de Weyl[9].

Ahora pasemos a cuantizar el campo de Dirac, primero esta función de onda debe ser reemplazado por un operador y con ella construir el conjugado del campo de Dirac y plantear los anticonmutadores que nos permitirán cuantizar el campo[9][10],

$$\pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi_\alpha)} = i\psi_\alpha^\dagger \quad (2.157)$$

la relación ya no es de conmutación ahora es de Anticonmutación, este el principio de exclusión de Pauli y la estadística construida para estas partículas es tal que el operador del campo cumplen con las siguientes reglas de cuantización[9][10],

$$\{\psi_\alpha(x, t), \psi_\beta^\dagger(x', t)\} = \delta^{(3)}(x - x')\delta_{\alpha\beta} \quad (2.158)$$

$$\{\psi_\alpha(x, t), \psi_\beta(x', t)\} = \{\psi_\alpha^+(x, t), \psi_\beta^+(x', t)\} = 0 \quad (2.159)$$

Este operador de campo debe ser descompuesto en modos normales dados por los operadores creación y destrucción en el espacio de Fock,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{E_{\vec{p}}}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} \sum_s [\hat{b}(p, s)u(p, s)e^{-ipx} + \hat{d}^+(p, s)v(p, s)e^{ipx}] \quad (2.160)$$

donde, $\hat{b}^+(p, s)$ y $\hat{b}(p, s)$ tienen que ser los operadores creación y aniquilación para un electrón con cuadri momento p y espín s , mientras que $\hat{d}^+(p, s)$ y $\hat{d}(p, s)$ son los operadores creación y destrucción para un positrón, además este operador de campo debe cumplir con las relaciones de conmutación, y de allí se obtiene las reglas de conmutación para los operadores creación y aniquilación[9].

$$\{\hat{b}(p, s), \hat{b}^+(p', s')\} = \{\hat{d}(p, s), \hat{d}^+(p', s')\} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{ss'} \quad (2.161)$$

$$\{\hat{b}(p, s), \hat{b}(p', s')\} = \{\hat{d}(p, s), \hat{d}(p', s')\} \quad (2.162)$$

$$\{\hat{b}^+(p, s), \hat{b}^+(p', s')\} = \{\hat{d}^+(p, s), \hat{d}^+(p', s')\} \quad (2.163)$$

Y lo más importante que nos falta hacer es describir el hamiltoniano del campo de Dirac y con ello determinar la energía del campo de Dirac, usando la transformación de Legendre podemos hacerlo[12],

$$h = \pi \frac{\partial \psi}{\partial t} - L = \bar{\psi}(i\vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + m)\psi \quad (2.164)$$

insertando la expansión del operador del campo de Dirac (2.160) e integrando en todo el espacio veremos que,

$$H = \int d^3x h = \int d^3x \bar{\psi} (i \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial} + m) \psi = \int d^3x \bar{\psi} i \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.165)$$

esta parte del cálculo es algo extensa, lo más importante es mostrarles que,

$$H = \int d^3p \sum_s E_p [\hat{b}^+(p, s) \hat{b}(p, s) - \hat{d}(p, s) \hat{d}^+(p, s)] \quad (2.166)$$

usando el conmutador (2.161) de tal forma que igualamos los momentos y el espín, tendremos $-\hat{d}(p, s) \hat{d}^+(p, s) = \hat{d}^+(p, s) \hat{d}(p, s) - \delta^{(3)}(\vec{0})$, con ello reemplacemos en la anterior ecuación.

$$H = \int d^3p \sum_s E_p [\hat{b}^+(p, s) \hat{b}(p, s) - \hat{d}(p, s) \hat{d}^+(p, s)] - \delta^{(3)}(\vec{0}) \int d^3p \sum_s E_p \quad (2.167)$$

Los primeros dos términos nos dicen que tanto el electrón como el positrón tienen la misma energía tal y como debe ser, pero el segundo término nos desconcierta, recordemos que la transformada de Fourier de la delta de Dirac toma la forma, $\delta^{(3)}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$, pero tomando en la delta $\vec{p} = 0$, con ello se ve que $\delta^{(3)}(\vec{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x$, ahora la energía del punto cero del vacío se da cuando no hay partículas entonces $E_p = 0$ [9][10],

$$E_0 = -\frac{1}{\hbar^3} \int d^3x \int d^3p \sum_s 2\left(\frac{1}{2} E_p\right) \quad (2.168)$$

esta puede interpretarse de la misma forma que se hace en el espacio de fase, claramente se ve que $-\frac{1}{2} E_p$ es la energía que tiene la celda unitaria $\frac{1}{h^3} d^3x d^3p$ del espacio de fase, para cada espín y para el electrón y el positrón separadamente, como la integral se da sobre todo el espacio, dicha integral es claramente divergente, además se parece mucho al que hallamos para el caso bosónico, pero la diferencia crucial es el signo negativo, esta es importante para la supersimetría, pero ese tema no es importante para los propósitos actuales, lo importante es que determinamos la existencia del vacío cuántico[9][10][14][21].

2.1.4. Teoría Cuántica del Campo En el espacio-tiempo Curvo de Riemann

En principio me faltó mostrar que los Campos Cuánticos en el espacio-tiempo plano de Minkowski son invariantes bajo las transformaciones de Poincaré o de forma más general son invariantes, bajo el grupo de Poincaré, en el caso de los campos fermiónicos de Dirac es necesario construir una representación del grupo de transformación y con ello también los campos de Dirac son también invariantes[9][10].

Este comentario es útil y necesario ya que en espacios curvos hay ciertas cosas que debemos abandonar y al hacerlo inevitablemente tendremos que deshacernos de la interpretación de los campos como partículas y antipartículas, como verán el hecho de que podamos descomponer los campos en los modos normales de los operadores creación y destrucción cuyos factores modulantes son $e^{\pm ipx} = e^{\pm(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$ pero dichos factores aparecen sólo porque el campo es invariante bajo las transformaciones de Lorentz[9][10].

Ecuación de Klein-Gordon en Relatividad General

Dada la anterior ecuación de Klein-Gordon (2.128) debemos escribirla de forma covariante para un espacio-tiempo curvo en general ya que en esos espacios curvos es donde se manifiesta la gravedad, una forma sencilla de hacerlo es mediante la correspondencia que existe entre la derivada parcial y la derivada covariante, de tal forma que las ecuaciones mantienen su forma canónica, es sencillo ya que si tenemos una ecuación escrita de forma covariante para el espacio-tiempo plano de Minkowsky, esa misma ecuación puede reescribirse directamente para el espacio-tiempo curvo de Riemann reemplazando las derivadas parciales que son covariantes en espacios planos por las derivadas covariantes que son covariantes en espacios curvos[9][10].

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-\eta} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_0^2 \phi^2) \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-\eta} &\rightarrow \sqrt{-g} \\ \partial_{\mu} &\rightarrow \nabla_{\mu} \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (\nabla_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - m_0 \phi^2) \quad (2.171)$$

Esta es la densidad lagrangiana del campo escalar de Klein-Gordon covariante para el espacio-tiempo curvo de Riemann, de ella se deduce fácilmente las ecuaciones de Klein-Gordon,

$$(\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} + m_0^2) \phi(x) = 0 \quad (2.172)$$

este operador $\nabla_{\mu} \nabla^{\mu}$ es la generalización del operador de *D'alembert* de la generalización del operador de Laplace y se conoce con el nombre de operador de Beltrami-*D'alembert* y su expresión fue deducida en el capítulo II ecuación (2.32)[9][10]. Algo que también quizás debería revisar es el concepto de invarianza conforme, pero dicho tópico no será necesario ya que estudiaremos singularidades de los agujeros negros y no singularidades cosmológicas, es así que pasaremos por alto este tema, sólo recordarles que la ecuación (2.172) está lista para usarse, sólo necesitamos describir el elemento de línea del espacio-tiempo de Riemann, por ejemplo el que está dado en la ecuación (2.58). Entonces el orden lógico de pasos a seguir para determinar las soluciones de un campo cuantizado interactuante con la gravedad es:

- Plantear y simplificar mediante observaciones astronómicas el elemento de línea del espacio-tiempo de Riemann.
- Determinar los elementos del tensor métrico mediante la ecuación de campo Einstein.
- Escribir la densidad lagrangiana para la función de onda a cuantizar y con ella determinar su ecuación.

- Desarrollar en base al tensor métrico el conjunto de ecuaciones de onda.

- Determinar la topología del espacio-tiempo estudiado y plantear el metodo de la segunda cuantización (si es posible) estudiada para el caso del espacio-tiempo plano.

Tomemos en cuenta que este metodo de solución se refiere a que el campo cuántico no crea gravedad, si no que el campo cuántico se halla interactuando sobre un campo gravitatorio ya existente, asi pues si quisieramos información más precisa de lo que en realidad sucede en la singularidad sería necesario tomar en cuenta el tensor energía momentun del campo Cuántico, en las soluciones dadas por Snyder-Hoppenheimer con ello podríamos estudiar de forma teórica el proceso de colapso de la estrella, pero ese es otro tema de investigación.

La Ecuación de Dirac en el espacio-tiempo Curvo.

Como ya lo mencioné antes, la interacción del campo de Dirac con la Gravedad es en principio posible pero esto se da en el espacio tangente, dicha conclusión nace del teorema de Cartan, es así que una de las tantas bases que existen para definir el espacio tangente usaremos las Tetradas o Vierveins[9][10][21],

$$e_{(\alpha)}^{\nu} e_{(\beta)}^{\mu} g_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.173)$$

esta nos permite determinar una relación entre los elementos del espacio-tiempo de Rieman con los del espacio tangente asi mismo esta base de tetradas es muy importante ya que con esa base el espacio tangente es Minkowskiano, de manera más sencilla las tetradas nos permiten transformar objetos de un espacio-tiempo plano (Minkowsky) a un espacio-tiempo curvo (Rieman) y viceversa.

La condición de ortogonalidad de dicha base es,

$$e_{\nu}^{(\alpha)} e_{(\beta)}^{\nu} = \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (2.174)$$

de esta forma podemos reescribir tambien el elemento de linea,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} (e_{\mu}^{(\alpha)} dx^{\mu}) (e_{\nu}^{(\beta)} dx^{\nu}) \quad (2.175)$$

en el language de las formas diferenciales este se reduce aun más,

$$d^2 s = \eta_{\alpha\beta} e^{(\alpha)} e^{(\beta)} \quad (2.176)$$

$$\begin{aligned} e^{(\alpha)} &= e_{\mu}^{(\alpha)} dx^{\mu} \\ e^{(\beta)} &= e_{\nu}^{(\beta)} dx^{\nu} \end{aligned} \quad (2.177)$$

Con las tetradas podemos construir un algebra de Clifford para el espacio-tiempo de Rieman (curvo) a partir del algebra de Clifford del espacio tangente[9][10],

$$\gamma^{(a)} e_a^{\mu} = \gamma^{\mu} \quad (2.178)$$

$$\{\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}\} = 2\eta^{ab} \rightarrow \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.179)$$

Como los espinores se transforman con la representación del grupo de Lorentz $GL(4)=O(3,1)$ en el espacio-tiempo plano de Minkowsky, dado por,

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\omega^{ab}\sigma_{ab}} \quad (2.180)$$

los generadores de traslación y rotación ahora deben variar en cada punto del espacio tangente, esto debido a que es afectada por la gravedad, pero ademas de que los espinores se transforman mediante una representación generalizada, la derivada covariante de un espinor debe transformarse también como un vector[9][10].

$$S(\Lambda(x)) = e^{-\frac{i}{4}\omega^{ab}(x)\sigma_{ab}} \quad (2.181)$$

Ahora debemos buscar la densidad Lagrangiana covariante para el caso en el que se halle en un campo gravitatorio, para esto usaremos la densidad lagrangiana de Dirac para el espacio-tiempo plano de Minkowsky dada en (2.155) y usaremos los Tetradas para llevarla al espacio-tiempo curvo de Rieman[9][10],

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu e_\mu^{(a)}\partial_{(a)} - m)\psi \quad (2.182)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (2.183)$$

pero esta densidad lagrangiana no esta del todo en el espacio-tiempo curvo, ya que la derivada parcial del espiñor $\partial_\mu\psi$ no es invariante en este espacio-tiempo curvo, debemos buscar que sea invariante, para esto plantearemos dos densidades lagrangianas de Dirac en distintos marcos de referencia[9][10],

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (2.184)$$

luego planteamos la densidad lagrangiana de Dirac en otro marco de referencia,

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi' \quad (2.185)$$

tales densidades deben ser invariantes bajo la siguiente transformación,

$$\psi' = S\psi = e^{-\frac{i}{4}\omega^{(ab)}\sigma_{(ab)}}\psi \quad (2.186)$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1} = e^{\frac{i}{4}\omega^{(ab)}\sigma_{(ab)}}\bar{\psi} \quad (2.187)$$

reemplazando en,

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} S^{-1} (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m) S \psi \quad (2.188)$$

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi} S^{-1} \gamma^\mu S \partial'_\mu \left(-\frac{i}{4} \omega^{(cb)} \sigma_{(cb)} \right) \psi + i S^{-1} \gamma^\mu S (\partial'_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi \quad (2.189)$$

Es fácil mostrar como se generaliza la transformación de las matrices gamma en el espacio-tiempo de Minkowsky al espacio tangente.

$$S^{-1} \gamma^{(a)} S = \gamma^{(b)} \Lambda'^{(a)}_{(b)} \rightarrow S^{-1} \gamma^\mu S = \gamma^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.190)$$

Arribamos así a la siguiente ecuación.

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \omega^{(ab)}) \sigma_{(ab)} \psi \quad (2.191)$$

De manera que para que la ecuación de Dirac sea invariante bajo el Grupo gauge local de Lorentz, simplemente debemos restar el término que impide que sea invariante.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu (-\omega^{(ab)}) \sigma_{(ab)} \psi \quad (2.192)$$

A la que reemplazamos la transformación gauge invariante.

$$\omega_\mu^{ab} \rightarrow \omega_\mu^{ab} + \partial_\mu (-\omega^{ab}) \quad (2.193)$$

Con ello nuestra ecuación de Dirac queda de la siguiente forma.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu S_\mu - m) \psi \quad (2.194)$$

Cuya derivada es covariante tanto en el espacio tiempo de Poincaré como de Rieman, a la que llamaré Derivada Covariante Espinorial²[10].

$$S_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{4} \omega_\mu^{(ab)} \sigma_{(ab)} \quad (2.195)$$

Esta derivada covariante es tal que cuando se deriva a un espinor esta se transforma como un vector, pero necesitamos una expresión mas clara asi que vamos a desarrollarla, primero que nada, usaremos la hipótesis de las Tetradas, dice que la derivada covariante de la tetrada es cero[9][10],

$$\nabla_\mu e_\nu^{(a)} = \partial_\mu e_\nu^{(a)} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^{(a)} + \omega_{\mu(b)(a)} e_\nu^{(b)} = 0 \quad (2.196)$$

como podrán notar es sencillo hallar la derivada covariante de un tensor con dos tipos de indices, en este caso la derivada covariante de la tetrada $e_\mu^{(a)}$, para cada índice del espacio curvo μ se coloca un símbolo de Christoffel y para cada índice del espacio tangente se coloca la conección espinorial $\omega_\mu^{(ab)}$, ahora despejemos precisamente este símbolo espinorial[3],

$$\omega_\mu^{(ab)} = (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^{(a)} - \partial_\mu e_\nu^{(a)}) e_{(b)\mu} \quad (2.197)$$

ademas de eso necesitamos la expresión de los generadores de rotación y traslación del espacio tangente,

$$\sigma_{(ab)} = \frac{1}{i} (\eta_{ab} - \gamma_{(a)} \gamma_{(b)}) \quad (2.198)$$

con estas dos expresiones desarrollemos la parte $\frac{i}{4} \omega_\mu^{(ab)} \sigma_{(ab)}$ de la derivada covariante espinorial,

$$\frac{i}{4} \omega_\mu^{(ab)} \sigma_{(ab)} = \frac{i}{4} (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^{(a)} - \partial_\mu e_\nu^{(a)}) \nu^{(b)} (\eta_{ab} - \gamma_{(a)} \gamma_{(b)}) \frac{1}{i} \quad (2.199)$$

²He de aclarar que dicha derivada no tiene ningún nombre, ademas que usan la notación nabra[9][10] para representarla, pero para evitar confusiones decidí escribirla de forma diferente y darle un nombre especial

$$\frac{i}{4}\omega_{\mu}^{(ab)}\sigma_{(ab)} = \frac{1}{4}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta_{\lambda}^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\gamma_{\lambda}\gamma^{\nu} - (\partial_{\mu}e_{\nu}^{(a)})e_{(a)}^{\nu} + (\partial_{\mu}e_{\nu}^{(a)})\gamma_{(a)}\gamma^{\nu}) \quad (2.200)$$

luego separamos en dos partes, de tal forma que usando la expresión (2.200) pero esta vez igualando $\lambda = \nu$, $\omega_{\mu(a)}^{(a)} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - e_{(a)}^{\mu}\partial_{\mu}e_{\nu}^{(a)}$, la reemplazemos,

$$\frac{i}{4}\omega_{\mu}^{(ab)}\sigma_{(ab)} = -\frac{1}{4}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\gamma_{\lambda}\gamma^{\nu} - (\partial_{\mu}\gamma_{\nu})\gamma^{\nu}) + \frac{1}{4}(\Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - (\partial_{\mu}e_{\nu}^{(a)})e_{(a)}^{\nu}) \quad (2.201)$$

$$\frac{i}{4}\omega_{\mu}^{(ab)}\sigma_{(ab)} = -\frac{1}{4}(\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}\gamma_{\nu}\gamma^{\lambda} - (\partial_{\mu}\gamma_{\nu})\gamma^{\nu}) + \frac{1}{4}\omega_{\mu(a)}^{(a)} \quad (2.202)$$

pero como $\omega_{\mu(ab)} = -\omega_{\mu(ba)}$ es antisimétrico respecto a los índices del espacio tangente, por lo que los terminos de la diagonal son ceros[34],

$$\frac{i}{4}\omega_{\mu}^{(ab)}\sigma_{(ab)} = -\frac{1}{4}\gamma_{\nu}(\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}\gamma^{\lambda} + \partial_{\mu}\gamma^{\nu}) = -\frac{1}{4}\gamma_{\nu}\nabla_{\mu}\gamma^{\nu} \quad (2.203)$$

con esta expresión podemos calcular fácilmente los terminos de la derivada covariante espinorial S_{μ} , pero una cosa es tener todas las ecuaciones y otra es poder cuantizarlas para un espacio-tiempo curvo de Riemann, como por ejemplo el espacio-tiempo de Schwarchild. Este desarrollo que mostré es necesario para mostrar que es posible describir a los fermiones en campos gravitatorios determinados por la geometría de Riemann.

2.1.5. Termodinámica

Las leyes de la termodinámica se formulan en base a la generalización de las observaciones hechas a sistemas macroscópicos, de allí que su estudio se simplifique a un conjunto de variables conocidos como variables de estado, las mismas que cumplen una ecuación de estado, además son también importantes los llamados potenciales termodinámicos los cuales nos permiten determinar cada una de las variables de estado[19].

Comenzaremos por dar algunas definiciones básicas que nos permitirán movernos con libertad, luego daremos definiciones de las funciones respuesta en sistemas hidrostáticos, ya que los modelos de la materia como el de una estrella colapsante en Relatividad General se trabajan como sistemas hidrostáticos, luego pasaremos a describir tres situaciones en las que puede hallarse un sistema termodinámico, aislado, en equilibrio con un baño térmico y en equilibrio con un baño térmico y de partículas, ya que estas son muy importantes para la mecánica estadística porque se corresponden con las tres colectividades de Gibbs (microcanónica, canónica y la gran canónica)[19].

Llamaremos sistema a una porción macroscópica del universo y ambiente a otra porción del universo de tal forma que sea capaz de interactuar con el sistema[19].

Estado Termodinámico: Queda completamente determinado por los parámetros termodinámicos (p, V, T, H, etc)

Ecuación de Estado: Es la ecuación que nos permite relacionar los parámetros o variables de estado.

Existen tres tipos básicos de interacción del sistema con el ambiente.

- *Equilibrio Mecánico:* Es cuando la presión del sistema es uniforme y no cambia, si las paredes del sistema es móvil, cuando la presión del sistema y del ambiente son iguales se dice que se halla en equilibrio mecánico.
- *Equilibrio Térmico:* Es cuando la temperatura es uniforme y no cambia, si el sistema se halla en contacto térmico con el ambiente (pared diatérmica) y si ambas temperaturas son las mismas se dice que esta en equilibrio térmico.
- *Equilibrio Químico:* Es cuando el potencial químico de cada tipo de partículas que conforman el sistema es uniforme y no cambia.

Cuando un sistema Hidrostático se encuentra simultáneamente en equilibrio Mecánico, Térmico y Químico, se dice que el sistema se halla en equilibrio Termodinámico[19].

Principios de la Termodinámica

- *Principio Cero*: Dos sistemas en equilibrio térmico con un tercero están en equilibrio mutuo, este enunciado nos permite definir a la temperatura como una propiedad fundamental que tienen todos los tipos de sistemas Termodinámicos[19].
- *Primer Principio*: Existe una función de estado denominada Energía Interna del sistema U , para todo sistema termodinámico, tal que su variación (en un proceso que va de un estado de equilibrio inicial a otro estado de equilibrio)[19].

$$\Delta U = Q + W \quad (2.204)$$

Donde Q es la cantidad de calor absorbida por el sistema y W , el trabajo hecho sobre el sistema

- *Segundo Principio*: En cualesquiera proceso cíclico se satisfase la desigualdad de Clausius.

$$\oint \frac{\bar{d}Q}{T} \leq 0 \quad (2.205)$$

Donde T es la temperatura de las fuentes con las cuales el sistema intercambia calor a lo largo del Ciclo, la igualdad se aplica cuando la transformación es reversible, en ese caso la temperatura de las fuentes y la del sistema son las mismas siempre[19].

Una consecuencia directa de este principio es que existe una función de estado denominada entropía del sistema, para cualesquiera sistema termodinámico, definida por.

$$S(A) = \int_O^A \frac{\bar{d}Q}{T} \quad (2.206)$$

Esta es una integral de línea a lo largo de un camino reversible arbitrario, desde un estado de referencia de equilibrio O , hasta un estado final de equilibrio A . A lo largo de este camino

el sistema se encuentra en contacto con una sucesión de fuentes a temperatura T , con cada una de las cuales intercambia una cantidad de calor dada por $\bar{d}Q$ de forma reversible.

Dado un punto de referencia de equilibrio O , podemos escribir la integral cerrada como.

$$\oint \frac{\bar{d}Q}{T} = \int_B^O \frac{\bar{d}Q}{T} + \int_O^A \frac{\bar{d}Q}{T} = -\delta S \quad (2.207)$$

si combinamos esta con la desigualdad de Clausius obtendremos, para un sistema aislado en un proceso arbitrario se verifica[19].

$$\delta S \geq 0 \quad (2.208)$$

- *Tercer Principio*: No es posible llegar al cero absoluto, mediante una serie finita de procesos, Una consecuencia muy importante es que la capacidad calorífica a volumen constante se hace nula al aproximarse al cero absoluto[19].

Sistemas Termodinámicos y sus Potenciales Termodinámicos

- *Sistema Aislado*: Un sistema rodeado por paredes rígidas, adiabáticas e impermeables es un sistema aislado del resto del Universo, al parecer este sería el tipo sistema termodinámico que modela a un agujero negro, los parámetros de estado quedan determinados por las variables extensivas (p, V, N_j) y el potencial térmico fundamental para este sistema es la Entropía[19][13].

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j \quad (2.209)$$

comparando con la diferencial total,

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)dN \quad (2.210)$$

obtenemos las ecuaciones que nos permiten describir p , T , μ_j

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V, N_j} \quad (2.211)$$

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U, N_j} \quad (2.212)$$

$$\frac{\mu_j}{T} = -\left(\frac{\partial S}{\partial N_j}\right)_{U, V, N_{i \neq j}} \quad (2.213)$$

Aprovechando la extensividad de la entropía, la ecuación diferencial puede escribirse como,

$$TS = U + pV - \sum_j \mu_j N_j \quad (2.214)$$

esta es la ecuación de Euler.

Diferenciando esta ecuación y restando la ecuación de estado obtenemos la ecuación de Gibbs-Duhem.

$$SdT - Vdp + \sum_j N_j d\mu_j = 0 \quad (2.215)$$

- *Sistema en Equilibrio con un Baño Térmico:* Sea un sistema termodinámico hidrostático, rodeado por paredes rígidas, impermeables y conductoras de calor, el sistema se halla en equilibrio térmico con un baño térmico a temperatura T, pero por el contrario su energía interna no esta fijada a priori, por ello el conjunto de variables que determinan al sistema son el mismo que para el caso aislado a excepción de U, esta es reemplazada por T, es así que tenemos el siguiente grupo de variables (T, V, N_j) , para este sistema es necesario construir otro potencial termodinámico el cual es obtenido mediante la transformación de Legendre, cuya ecuación de conjugación de las variables a intercambiar U por T es $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V, N_j}$, así que el nuevo potencial termodinámico es [13][19],

$$F = U - TS \quad (2.216)$$

reemplazando la ecuación de Euler hallada anteriormente se muestra,

$$F = -pV + \mu N \quad (2.217)$$

diferenciandola y reemplazando la ecuación de Gibbs-Duhem, obtenemos la ecuación diferencial de estado para este sistema,

$$dF = -SdT - pdV + \sum_j \mu_j dN_j \quad (2.218)$$

y de la misma forma que antes podemos determinar las ecuaciones que nos dan información de la p, S, μ_j en función de este nuevo potencial termodinámico que es conocido como la Energía Libre de Helmholtz[19].

- *Sistema en equilibrio con un baño térmico y de partículas:* Sea un sistema termodinámico rodeado por paredes rígidas, conductoras de calor y permeables al paso de partículas, debido a que no es de mucho interés para nuestros propósitos, sólo les diré que el procedimiento para construir la ecuación de estado es el mismo que el anterior, de más está decir que N_j se cambia por μ_j ya que además de estar en equilibrio con un baño térmico está en equilibrio con un baño de partículas, por lo que el número de partículas N_j ya no está fijado.

$$d\Xi = -SdT - pdV - \sum_j N_j d\mu_j \quad (2.219)$$

2.1.6. Mecánica Estadística

La Mecánica Estadística o Física Estadística se encarga de construir un nexo entre los estados microscópicos de la materia y los parámetros termodinámicos (estados macroscópicos), para ello

primero necesitamos hacer un conteo de todos los posibles estados en un determinado estado de equilibrio del sistema, este conjunto de estados forman lo que se le llama Ensemble o Colectividad y debido a que este ensemble es muy pero muy numeroso, podemos usar metodos estadisticos, estos nos permitan inferir comportamientos comunes promedios, los cuales se interpretan como variables termodinámicas medibles, es asi que la mecánica estadística tiene su interpretación del mundo macroscópico a partir del microscópico, comenzaremos por describir las colectividades Microcanónica, Canónica y gran Canónica, pero lo más resumido posible[19][13].

Colectividad Microcanónica

Esta colectividad estudia a uno de los sistemas más importantes, Sistemas Aislados, este sistema es perfecto para los trabajos teóricos ya que nos permite fundamentar uno de los principios más enigmáticos de la termodinámica, el Segundo Principio, el dice que existe un potencial termodinámico, tal que para sistemas aislados, su variación es siempre positiva, esto quiere decir que la entropía siempre está en aumento, si suponemos el universo como autoexistente, por lo que cualquier cosa que exista fuera de ella no tiene nada que ver con toda la materia existente dentro, ya que en principio no hay ningún tipo de conexión causal conocida con el exterior (si es que existe) entonces el universo es un sistema cerrado[13][20], de allí que en nuestro universo la entropía aumenta.

Otro ejemplo pero más importante para nuestros propósitos es el agujero negro, al cual se estudia como separado del resto del universo, pero como veremos, trabajando con esta colectividad a la hora de determinar la entropía de un sistema cerrado a partir de los microestados, es necesario contar los microestados, el problema radica en que ni la Relatividad General y ni la Mecánica Cuántica pueden ponerse de acuerdo ya que en principio no es posible cuantizar el campo Gravitacional, por lo que no podremos contar los microestados correctamente, es mas primero debemos construir el espacio de Fases para el agujero negro y luego recién comenzar con el conteo. La primera idea la dio Stephen Hawking quien halló que la entropía de un agujero negro en general es proporcional

al área del horizonte de sucesos, eso nos dice directamente que el posible espacio de fases de un agujero negro es el horizonte de sucesos, luego Leonard Susskind planteó que la información se halla ciertamente en el horizonte y planteó su hipótesis Holográfica y mediante la Teoría de Cuerdas pudo realizar el conteo de los posibles microestados del agujero negro, pero aún faltan muchos cabos que atar[1].

Las variables macroscópicas que determinan esta colectividad son (E, V, N) , para el caso de un sistema hidrostático, ahora daremos tres postulados que nos permitirán construir el puente entre los microestados y la Entropía, el principal potencial termodinámico para sistemas cerrados[13][20].

- *Postulado de Equiprobabilidad:* Todos los microestados compatibles con el estado macroscópico de equilibrio de un sistema aislado son igualmente probables. Bastará decir que un sistema físico que se halla en equilibrio tiene un entropía muy alta, por lo tanto dicho sistema tiene máximo desorden, ya que todos los estados en promedio son iguales, entonces es imposible sacar trabajo de él ya que las fluctuaciones de sus estados son todos estadísticamente iguales (equiprobables), así que se mantendrá así para siempre[13].
- *Postulado sobre el número de microestados, Ω , en el equilibrio:* El número de microestados de dos sistemas 1 y 2 $\Omega(E_1, V_1, N_1, E_2, V_2, N_2)$, en equilibrio termodinámico entre sí y aislados del resto del universo, es máximo respecto de cualquiera de las variables termodinámicas de uno de los dos sistemas. Desde un punto de vista estadístico, se está identificando el estado de equilibrio como el estado más probable, aquel para el cual Ω es máximo[13].
- *Postulado de compatibilidad con la termodinámica:* Las propiedades derivadas de una descripción mecánico-estadística de un determinado sistema han de ser compatibles con las leyes de la termodinámica[13].

Ahora describiremos un sistema cerrado formado por dos subsistemas, limitada por una pared diatérmica, móvil y permeable al paso de partículas, sean las variables termodinámicas para el

sistema 1, (E_1, V_1, N_1) y cuyo número de microestados esta en función de la misma $\Omega_1(E_1, V_1, N_1)$, para el subsistema 2 las variables termodinámicas son (E_2, V_2, N_2) y cuyo número de microestados es $\Omega_2(E_2, V_2, N_2)$, por último para el sistema total tenemos (E, V, N) y cuyo número de microestados es $\Omega(E, V, N)$, pero esta puede reescribirse sólo en función de las variables del subsistema 1 y del sistema total,

$$\Omega(E, V, N) = \Omega_1(E_1, V_1, N_1)\Omega_2(E_2, V_2, N_2) \quad (2.220)$$

esto es posible ya que los microestados son independientes antes del equilibrio,

$$\Omega(E, V, N, E_1, V_1, N_1) = \Omega_1(E_1, V_1, N_1)\Omega_2(E - E_1, V - V_1, N - N_1) \quad (2.221)$$

y de acuerdo al postulado sobre el número de microestados en el equilibrio, tendremos,

$$\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial E_1}\right)_{V_1, N_1} = \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial E_2}\right)_{V_2, N_2} \quad (2.222)$$

$$\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial V_1}\right)_{E_1, N_1} = \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial V_2}\right)_{E_2, N_2} \quad (2.223)$$

$$\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial N_1}\right)_{E_1, V_1} = \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial N_2}\right)_{E_2, V_2} \quad (2.224)$$

comparando estas ecuaciones con las ecuaciones (energía, 2.223, 2.224), se obtiene la entropía de Boltzmann,

$$S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N) \quad (2.225)$$

Dada esta relación, lo que sencillamente nos falta es contar los microestados, de acuerdo a la mecánica cuántica, no existe tal cosa como punto del espacio de fases, el cual describe un estado de los tantos por los que atraviesa en la evolución del sistema físico, esto debido a que existe el

principio de incertidumbre, ya que no es posible medir con exactitud que la posición ni el momento simultáneamente, ya que existe un tamaño mínimo determinado por $\delta_0 = h$.

$$\Delta p_i \Delta q_i = \delta_0 \quad (2.226)$$

Con esta unidad fundamental podremos contar los microestados, dividiendo el volumen total ocupado por todos los estados de sistema físico cualesquiera, por el elemento fundamental dado por δ_0 .

$$\Omega(E, V, N) = \frac{1}{\delta_0} \int \dots \int_{E \leq H \leq E + \delta E} d^{3N} q d^{3N} p \quad (2.227)$$

2.1.7. Mecánica Estadística Cuántica

Colectividad Microcanónica Cuántica

El elemento fundamental es la matriz densidad descrito anteriormente $\hat{\rho} = \sum_i \omega_i |i\rangle \langle i|$, pero esta expresión se da en una base especial ya que es diagonal, el postulado de equiprobabilidad dice que $\omega_i = \frac{1}{\omega}$, pero este postulado no es suficiente para construir la colectividad microcanónica, se debe añadir un nuevo postulado el de las *fases aleatorias a priori*, esto nos permite garantizar que los promedios de los elementos no diagonales de la matriz densidad sean nulos en cualquier representación $|\alpha\rangle$ [13][19][20].

Colectividad Canónica Cuántica

Se propone que la matriz densidad en la representación diagonal de energía viene dada por [19]:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_N} \sum_i e^{-\beta E_i} |i\rangle \langle i| \quad (2.228)$$

donde E_i es el valor propio de la energía correspondiente al estado $|i\rangle$. Apliquemos ahora la condición de normalización a la matriz densidad:

$$Tr(\hat{\rho}) = 1 \mapsto Tr\left(\frac{1}{Z_N} \sum_i e^{-\beta E_i} |i\rangle\langle i|\right) = \frac{1}{Z_N} \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (2.229)$$

$$Z_N = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (2.230)$$

entonces la función de partición es precisamente este factor renormalizante y la escribimos como,

$$Z_N(V, T) = Tr(e^{\beta \hat{H}}) \quad (2.231)$$

la dependencia de Z_N en V viene de que V esta relacionado con E_i , esta relación aparece cuando resolvemos la ecuación de *Schrödinger* de un sistema cuántico, contenido en un volumen, por último el valor medio de un observable se obtiene con la ayuda de la matriz densidad[20].

$$\langle A \rangle = Tr(\hat{A}\hat{\rho}) = \frac{Tr(\hat{A}e^{-\beta \hat{H}})}{Tr(e^{-\beta \hat{H}})} \quad (2.232)$$

Esta colectividad no será particularmente útil, cuando resolvamos la paradoja de la información para el caso de fermiones, recordemos que anteriormente dije que la colectividad microcanónica sería útil para describir el agujero negro, pero tomando en cuenta la evaporación de Hawking, podemos visualizar al agujero negro como un sistema en interacción con un baño térmico, el cuál es justamente la radiación de Hawking del agujero negro.

Colectividad Macrocanónica Cuántica

Como en este caso el sistema esta en interacción con un baño térmico y con una fuente de partículas, entonces estos dos observables deben ser simultáneamente medibles, así que $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$, entonces dada una base esta debe ser comun a ambas $\{|\psi(\xi_1 \dots \xi_N)\rangle\}$, en esta base la matriz densidad es[20],

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Q} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \quad (2.233)$$

escrita explícitamente en esa base comun es:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Q} \sum e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} |\psi(\xi_i \dots \xi_N)\rangle \langle \psi(\xi_i \dots \xi_N)| \quad (2.234)$$

aplicando la condición de normalización, obtendremos la función de partición

$$Q(\mu, V, T) = \sum e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} \quad (2.235)$$

de la misma forma el valor esperado de un observable se obtiene con la matriz densidad.

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) \quad (2.236)$$

Capítulo 3

3.1. La Paradoja de la Infomación

Es hora de enfrentarnos al problema con las herramientas resumidas, para ello nos iremos sumergiendo en el problema, comenzando por compactificar el espacio-tiempo de Schwarzschild, con la cual podremos describir el colapso de la materia, luego se describirá el vacío de Unruh, él me permitirá argumentar que en el horizonte de sucesos del agujero negro existen fluctuaciones cuánticas del vacío, y mediante el efecto Hawking es posible detectar un baño térmico en equilibrio a una temperatura T , para llegar al fondo del asunto se usará como base la hipótesis de Horowitz y Maldacena; Esto nos conducirá a una posible salida para el caso de los Fermiones.

Diagramas de Penrose

Los diagramas de Penrose permiten compactificar el espacio-tiempo, esto se consigue realizando una transformación conforme; esta es una transformación que modifica las coordenadas de tal forma que la pendiente de los conos de luz sea constante, además cuando $r \rightarrow \infty$, entonces el tensor métrico $g_{\mu\nu} \rightarrow 0$, este límite se conoce como infinito espacial, luego cuando $t \rightarrow \infty$, $g_{\mu\nu} \rightarrow 0$, se conoce como futuro infinito y cuando $t \rightarrow -\infty$ pasado infinito, esta transformación es tal que deja invariante el elemento de línea salvo un factor $e^{-2\alpha(x,t)}$ [17][35],

$$ds^2 = e^{-2\alpha(x,t)} ds'^2 \tag{3.1}$$

en estos espacios que son conformalmente invariantes, puede elegirse una transformación de

coordenadas, de tal forma que podamos traer los contornos infinitos de la variedad hacia una región finita bidimensional del espacio-tiempo, por supuesto debemos ignorar las coordenadas angulares. Esto es posible porque en principio deseamos describir la geometría global, por lo que a gran escala las variaciones angulares son irrelevantes[3].

Por ejemplo el elemento de línea del espacio-tiempo de Minkowsky es invariante conformacional, esto además de asegurar que podamos reescalar toda la geometría, también nos permite escribir la ecuación de Dirac en este espacio sin el uso de alguna constante de acoplamiento, sea por ejemplo el elemento de línea del espacio-tiempo de Minkowsky[1].

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - d\Omega^2 \quad (3.2)$$

sin tomar en cuenta la dependencia angular ya que la transformación conformal es tal que la inclinación de los conos de luz quedan invariantes, entonces hallaré el ángulo de inclinación de los conos de luz, los conos de luz son tales que sus bordes son haces de luz, para los cuales el tiempo propio no discurre esto quiere decir que $ds^2 = 0$

$$dt = \pm dr \rightarrow t = \pm r + b \quad (3.3)$$

cuya pendiente es 45° , ahora necesitamos un nuevo sistema de coordenadas tales que engloben el pasado infinito $-\infty$, el futuro infinito $+\infty$ y el infinito espacial $r = \infty$, para esto usaremos la tangente hiperbólica de la siguiente forma,

$$Y^+ = f(r, t) = \tanh(t + r) \quad (3.4)$$

esta ecuación nos da el futuro nulo infinito, ahora determinemos el pasado nulo infinito,

$$Y^- = f(r, t) = \tanh(t - r) \quad (3.5)$$

cuando $(t+r) \rightarrow \infty$ obtenemos $Y^+ = 1$ con esto la ecuación de la recta podría escribirse como,

$$t = -r + \infty \quad (3.6)$$

luego cuando $(t-r) \rightarrow \infty$ obtenemos $Y^- = -1$ y con esto la ecuación de la otra recta será,

$$t = r - \infty \quad (3.7)$$

por último cuando $r = 0$ obtendremos $Y^+ = Y^-$, con estas ecuaciones podemos describir la geometría global del espacio-tiempo de Minkowsky.

Ahora usaremos el elemento de línea del espacio-tiempo de Schwarzschild pero en las coordenadas de Kruskal-Szekeres, ya que esta describe todo el espacio-tiempo de Shwarchild incluyendo la geometría dentro del horizonte de sucesos, bueno comencemos por realizar la siguiente transformación a la ecuación (2.70),

$$T = \frac{1}{2}(\nu' + \mu') \quad (3.8)$$

y

$$R = \frac{1}{2}(\nu' - \mu') \quad (3.9)$$

reemplazándola en la ecuación (2.70),

$$ds^2 = \frac{(32M^3G^3)}{r} [-(d\nu' + d\mu')(d\nu' + d\mu') + (d\nu' - d\mu')(d\nu' - d\mu')] + r^2(t', r')d\omega^2 \quad (3.10)$$

$$ds^2 = -\frac{16G^3M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (d\nu' d\mu' + d\mu' d\nu') + r^2 d\omega^2 \quad (3.11)$$

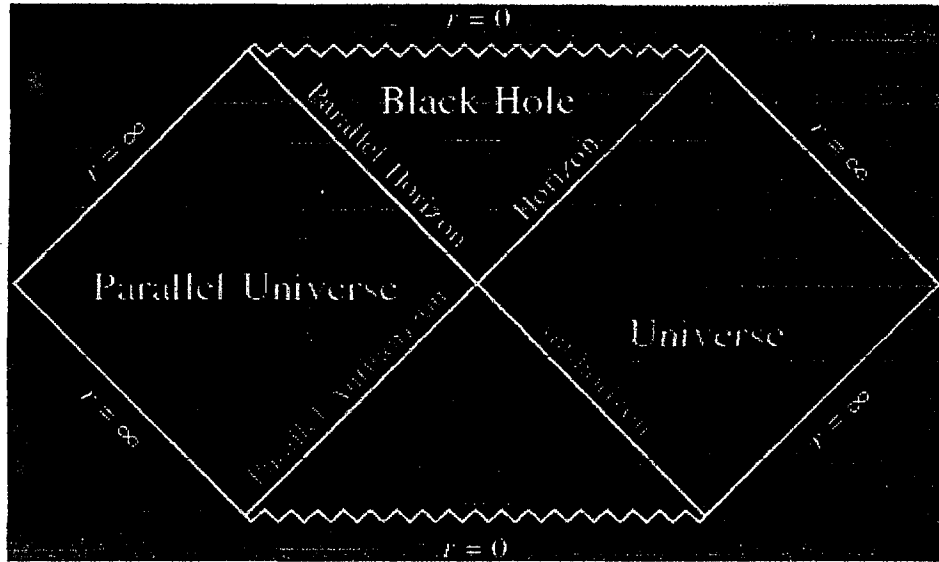


Figura 3.1: Diagrama Conformal del Espacio-Tiempo de Kruskal-Szekeres

De una forma muy parecida al caso del espacio-tiempo de Minkowsky, podemos realizar la transformación conforme, con la ayuda de la función tangente inversa o arco tangente, podemos realizar una transformación de coordenadas consiguiendo describir la estructura global[1],

$$\nu'' = tg^{-1}\left(\frac{\nu'}{\sqrt{2GM}}\right) \quad (3.12)$$

$$\mu'' = tg^{-1}\left(\frac{\mu'}{\sqrt{2GM}}\right) \quad (3.13)$$

ya que antes de esta transformación μ' y ν' varían en el rango, $-\infty < \nu' < \infty$, $-\infty < \mu' < \infty$, pero con estas transformaciones el rango es ahora $-\frac{\pi}{2} < \nu'' < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \mu'' < \frac{\pi}{2}$.

La representación geométrica de este espacio-tiempo conformacional de Kruskal-Szekeres, permite ver la geometría global del agujero negro, en la que podremos describir de manera formal el proceso de Hawking.

Vacío de Unrhu

Una de las más importantes ideas acerca de los agujeros negros es sobre la descripción del horizonte de sucesos con coordenadas que se hallan muy cerca del horizonte, primero debemos describir el espacio-tiempo que se halla en la vecindad inmediata del agujero negro, pero para ello se debe recordar brevemente a los FIDOS y FREFOS, uno de estos observadores son capaces de brindar información a un observador que podría hallarse en la una orbita lejana de un agujero negro, este observador es un FIDO[1], por ejemplo si un día fuésemos capaces de enviar una nave de investigación a un sistema estelar en el que se halle un agujero negro y logramos colocarla en orbita y por seguridad en una orbita algo lejana y desde esa orbita lanzamos una sonda que se acercase al agujero negro con una aceleración propia, esta sonda podría llevar con el un termómetro o algún aparato como un detector de partículas que nos brinde evidencia de la Evaporación de Hawking, este observador se conoce como FIDO, los intervalos temporales deben determinarse para el caso de un agujero negro estático de Schwarzschild como[1][35],

$$d\tau_{FIDO} = \sqrt{1 - \frac{2MG}{r}} dt \quad (3.14)$$

y a medida que este se aproxima al horizonte de sucesos del agujero negro, las señales que nos envía sufren un corrimiento al rojo (redshift) y de acuerdo a la anterior ecuación el tiempo necesario para alcanzar el horizonte es infinito, pero existe otro tipo de observador conocido como FREFO el cual sería una sonda enviada por nuestra nave de investigación, pero a diferencia del FIDO el FREFO está en caída libre y este si cruza el Horizonte de sucesos del Agujero Negro, pero a cambio de eso es incapaz de enviarnos información alguna.[1][35].

Es hora de acercarnos al horizonte y construir las coordenadas para los FIDOS, ya que estos observadores nunca cruzan el horizonte de sucesos, estas coordenadas se definen de forma que $r > 2MG$, esto lo conseguiremos mediante la siguiente transformación[1] $(t, r, \theta, \phi) \mapsto (t, r^*, \theta, \phi)$,

esta transformación se conoce como coordenadas tortuga (*Tortoise Coordinates*), como podemos ver el tiempo y las coordenadas angulares no cambian, pero si la parte radial[1].

$$\frac{dr^2}{1 - \frac{2MG}{r}} = (1 - \frac{2MG}{r})(dr^*)^2 \quad (3.15)$$

reemplazandola en el elemento de linea de Schwarzschild ecuación (2.58), pero tomandola como espacio propio, esto es $g_{00} > 0$, obtenemos,

$$d\tau^2 = (1 - \frac{2MG}{r})[dt^2 - (dr^*)^2] - r^2 d\Omega^2 \quad (3.16)$$

este espacio es conformalmente plano , esto quiere decir que podemos escribirla como,

$$d\tau^2 = F(x)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (3.17)$$

como dije anteriormente esta importante propiedad nos permite escribir los campos escalares sin ningún término de acoplamiento, esto lo usaré para posteriores trabajos, ahora pasemos a integrar la transformación dada en la ecuación (3.15)[1],

$$\int \frac{\frac{1}{2MG}}{\frac{r-2MG}{2MG}} dr = \int_{2MG}^{r^*} dr^* \quad (3.18)$$

realizando una integración por partes, mediante la siguiente transformación $b = \frac{r-2MG}{2MG}$ y $a = \frac{1}{2MG} \int \frac{1}{b} = \ln b$

$$r^* - 2MG = r \ln b 2MG \ln b + 2MG b \quad (3.19)$$

reemplazando los términos (a, b), obtendremos,

$$r^* = r + 2MGLn\left(\frac{r - 2MG}{2MG}\right) \quad (3.20)$$

esta ecuación como podemos ver, esta definida sólo para $r > 2MG$ y cuando $r \mapsto \infty$, $r^* \mapsto -\infty$, estas coordenadas entonces nos describen cláramente sólo la vecindad proxima al horizonte de sucesos, pero aún nos falta algo más, ya que debemos describir el espacio-tiempo cercano al horizonte pero para pequeños angulos θ , comenzaremos por explorar el horizonte cercano mediante una nueva variable[1],

$$\rho = \int_{2MG}^r \left(1 - \frac{2MG}{\tilde{r}}\right)^{-\frac{1}{2}} d\tilde{r}' = \int_{2MG}^r \left(\frac{\tilde{r}'}{\tilde{r}' - 2MG}\right)^{\frac{1}{2}} d\tilde{r}' \quad (3.21)$$

integrandola,

$$\rho = \sqrt{r(r - 2MG)} + 2MG \operatorname{Senh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{r}{2MG} - 1}\right) \quad (3.22)$$

pero aún nos falta hacer la aproximación de $r \simeq 2MG$,

$$\rho = \sqrt{2MG r \left(\frac{r}{2MG} - 1\right)} + 2MG \frac{e^{\sqrt{\frac{r}{2MG} - 1}} - e^{-\sqrt{\frac{r}{2MG} - 1}}}{2} \quad (3.23)$$

para hacer nuestra aproximación el exponente debe ser tal que, $\sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} < 1 \mapsto r < 4MG$, esto es excelente ya que $r \simeq 2MG$, entonces podemos usar la serie de Tailor para los exponentes,

$$\rho \simeq \sqrt{2MG(2MG)} \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} + MG \left[\left(1 + \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1}\right) - \left(1 - \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1}\right) \right] \quad (3.24)$$

$$\rho \simeq 4MG \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} + 2MG \sqrt{\frac{2MG}{2MG} - 1} \quad (3.25)$$

$$\rho = 4MG \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} \quad (3.26)$$

en términos de ρ y t , la métrica se escribe como,

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r(\rho)}\right) dt^2 - d\rho^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2 \quad (3.27)$$

reemplazando nuestra aproximación, pero teniendo en cuenta que cuando $r \leq 4MG$, $\rho < 0$, osea que $(\frac{r}{2MG}) < 0$, entonces tenemos que cambiar de signo la raíz de la ecuación para que no aparezcan números imaginarios,

$$1 - \frac{2MG}{r} = \frac{\rho^2}{8MG(2MG)} = \frac{\rho^2}{16M^2G^2}. \quad (3.28)$$

$$d\tau^2 \cong \frac{\rho^2}{16M^2G^2} dt^2 - d\rho^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.29)$$

$$d\tau^2 \cong \rho^2 \left(\frac{dt}{4MG}\right)^2 - d\rho^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.30)$$

realizaremos el cambio de la coordenada temporal por una coordenada adimensional, $\omega = \frac{t}{4MG}$, pero ademas, realizemos el siguiente cambio de variables,

$$x = 2MG\theta \cos\phi \quad (3.31)$$

$$y = 2MG\theta \sin\phi \quad (3.32)$$

con éstas nuevas variables realizaremos la transformación para la parte angular,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \theta^2 d\phi^2 \quad (3.33)$$

diferenciando y elevando al cuadrado, las transformaciones dadas en las ecuaciones (3.31) y (3.32),

$$dx^2 = (2MG\theta)^2 \text{Sen}^2 d\phi^2 \quad (3.34)$$

$$dy^2 = (2MG\theta)^2 \text{Cos}^2 d\phi^2 \quad (3.35)$$

Con estas obtenemos,

$$\frac{(dx^2 + dy^2)}{(2MG)^2} = d\theta^2 \quad (3.36)$$

$$\frac{(dx^2 + dy^2)}{(2MG)^2} = \theta^2 d\phi^2 \quad (3.37)$$

ahora reemplazemos, estas diferenciales y conseguiremos,

$$d\tau^2 = \rho^2 d\omega^2 - d\rho^2 - 2(dx^2 + dy^2) \quad (3.38)$$

por último realizemos una última transformación a las coordenadas ρ y ω ,

$$T = \rho \text{Sen}h\omega \quad (3.39)$$

$$Z = \rho \text{Cosh}\omega \quad (3.40)$$

de la misma forma que antes, diferenciando con respecto a ρ y elevando al cuadrado, obtendremos,

$$dT^2 = \text{Sen}h^2\omega d\rho^2 \quad (3.41)$$

$$dZ^2 = \text{Cosh}^2\omega d\rho^2 \quad (3.42)$$

restando y usando la relación $\text{Cosh}^2\omega - \text{Sen}h^2\omega = 1$,

$$dZ^2 - dT^2 = d\rho^2 \quad (3.43)$$

ahora sólo nos falta la parte $\rho^2 d\omega^2$, para ello debemos diferenciar con respecto a ω

$$dT^2 = \rho^2 \text{Cosh}^2 \omega d\omega^2 \quad (3.44)$$

$$dZ^2 = \rho^2 \text{Senh}^2 \omega d\omega^2 \quad (3.45)$$

restando y usando de nuevo la relación pitagórica para la trigonometría hiperbólica,

$$dZ^2 - dT^2 = \rho^2 d\omega^2 \quad (3.46)$$

con ella obtendremos,

$$d\tau^2 = dT^2 - dZ^2 - dx^2 - dy^2 \quad (3.47)$$

esta es finalmente la geometría del espacio-tiempo proximo al horizonte de sucesos de un agujero negro y se la conoce como espacio-tiempo de Rindler[1][35], ahora describamos su geometría proyectada en el plano (T,Z), cuyas ecuaciones paramétricas estan dadas por, (3.39) y (3.40), con estas podemos describir la geometría de este espacio tiempo, la misma que está dividida en cuatro espacios o regiones y cuyo centro que es origen de coordenadas es el horizonte de sucesos $T = Z = 0$, ω es el tiempo propio adimensional de Rindler, esta coordenada de forma similar al espacio-tiempo de Minkowsky puede definir uno de los invariantes (boost) de Lorentz, o lo que es lo mismo, las ecuaciones son invariantes bajo la transformación $\omega \rightarrow \omega + \text{constante}$.

Este resultado es tan importante que es uno de los ejes sobre las cuales se construye la solución a la paradoja de la información, ya que nos dice que la vecindad del horizonte de sucesos es un espacio-tiempo plano, en la que nuestras teorías Cuánticas y Cuánticas Relativistas pueden construirse si ningun problema, es más a diferencia de los artículos que lei[32][33] y muchos otros de los cuales tomé los conceptos de las condiciones contorno de Horowitz y Maldacena no lo enfatizan; Me atrevería a plantear que estas

condiciones de contorno dependen fuertemente de la posibilidad de mostrar que en la vecindad del horizonte de sucesos de cualesquiera agujero negro el espacio-tiempo es de Rindler, entonces aún hay mucho trabajo por hacer.

Vayamos ahora por una de las más brillantes deducciones hechas por Unruh en 1976, hablamos de la matriz de densidad para el vacío determinada en el espacio-tiempo de Rindler, o lo que es lo mismo buscaremos determinar la termodinámica del vacío próximo al horizonte de sucesos para un FIDO, para ello comenzaremos por definir un campo escalar, estos campos pueden definirse de la siguiente forma, para $Z > 0$ el campo sería $\chi(x, y, z) = \chi_R(x, y, z)$ y para $Z < 0$ el campo es $\chi(x, y, z) = \chi_L(x, y, z)$, entonces la función de onda global es $\psi = \psi(\chi_L, \chi_R)$.

Ahora de acuerdo a las ecuaciones (3.39) y (3.40), podemos decir que los FIDOS son invariantes bajo traslaciones en los ejes x, y , esto debido a que tanto x como y dependen sólo de Θ y ϕ , así que desplazamientos angulares son invariantes, pero a lo largo del eje Z las traslaciones no son invariantes, ya que $Z = \rho \text{Cosh} \omega$ es dependiente de ρ , con esto tenemos que, p_x y p_y conmutan con la matriz densidad, esto porque estamos hablando de estados entrelazados del campo dentro y fuera del horizonte[1]

$$[p_x, \rho_R] = [p_y, \rho_R] = 0 \quad (3.48)$$

ya que además deseamos describir estados estacionarios, entonces la matriz densidad no evoluciona en el tiempo,

$$[H_R, \rho_R] = 0 \quad (3.49)$$

con todo ello, podríamos calcular la integral de Camino de Feynman, para un campo escalar, pero usaremos un método mucho más sencillo que la fuerza bruta, primero, la integral de camino nos da la amplitud de probabilidad (de la función de onda) de que estando en el estado cuántico $|q_I\rangle$ (estados dentro con respecto al horizonte de sucesos del agujero negro) evolucione al estado

cuantico $|q_F\rangle$ (estados fuera con respecto al horizonte de sucesos del agujero negro), esta integral esta dada por [1][9][29],

$$\psi(q_F, q_I) = \langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \int Dq e^{i \int dt L(\dot{q}, q)} \quad (3.50)$$

realizando la rotación de Wick, $t \mapsto -it$, para que podamos integrar en el tiempo euclideo, tendremos que,

$$\psi(q_F, q_I) = \langle q_F | e^{-HT} | q_I \rangle = \int Dq e^{-\int dt L(\dot{q}, q)} \quad (3.51)$$

entonces la integral se calcula para $T > 0$, pero como dije antes esta integral es complicada asi que Unruh hizo un brillante planteamiento, en vez de integrarlo, construyó la integral de camino de la misma forma que hicieron Feynman y Dirac,

$$\psi(\chi_L, \chi_R) = \frac{1}{\sqrt{Z}} \langle \chi_L | e^{-HT} | \chi_R \rangle = \langle \chi_L | e^{-H\delta t} e^{-H\delta t} \dots e^{-H\delta t} | \chi_R \rangle \quad (3.52)$$

el tiempo en terminos del angulo es $T = \pi$,

$$\psi(\chi_L, \chi_R) = \frac{1}{\sqrt{Z}} \langle \chi_L | e^{-H\pi} | \chi_R \rangle \quad (3.53)$$

con esta podemos determinar la matriz densidad,

$$\rho_R(\chi_R, \chi'_R) = \int \psi^*(\chi_L, \chi_R) \psi(\chi_L, \chi'_R) d\chi_L \quad (3.54)$$

$$\rho_R(\chi_R, \chi'_R) = \frac{1}{Z} \int \langle \chi_R | e^{-\pi H_R} | \chi_L \rangle \langle \chi_L | e^{-\pi H_R} | \chi'_R \rangle d\chi_L \quad (3.55)$$

$$\rho(\chi_R, \chi'_R) = \frac{1}{Z} e^{-2\pi H_R} \quad (3.56)$$

entonces para los FIDOS el vacío cercano al Horizonte de sucesos, es descrito por un colectividad canónica cuya matriz densidad es del tipo Maxwell-Boltzman, como pudimos ver la integral no dependió de que campo se integre con la integral de caminos, así que Unruh postuló que cualquier campo crea un par partícula-antipartícula y que dicha atmosfera debe ser detectada por los FIDOS en la región derecha o mejor dicho en la parte externa del agujero negro[1], en este caso la temperatura adimensional que mediría el FIDO es de $T = \frac{1}{2\pi}$.

Consideremos un termómetro que lleva un FIDO, dicho termómetro tiene un espectro que nos da la medida de las partículas detectadas, este espectro tiene los siguientes niveles energéticos (ϵ_i), pero para que este termómetro tome datos debemos mantenerla en movimiento uniforme, ya que los movimientos acelerados exitan los estados del termómetro, dándonos como consecuencia ruido, de esta forma una medida se da cuando el termómetro entra en equilibrio térmico con el campo a medir[1].

Entonces si con respecto a un FIDO, colocamos nuestro termómetro en un marco inercial pero sólo el tiempo suficiente para medirla, además el termómetro se halla a una distancia ρ del horizonte y cuya aceleración propia es proporcional a $\frac{1}{\rho}$, ahora por inducción deduciremos la matriz hamiltoniána del termómetro, para ello construyamos el hamiltoniano pero en las coordenadas de Rindler[1][34],

$$H_R = \int T^{00} \sqrt{-g} d^3x \quad (3.57)$$

ya que esta dada en la métrica Rindler,

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-(-\rho^2)} = \rho \quad (3.58)$$

con esto, el hamiltoniano de Rindler es entonces,

$$H_R = \int T^{00} \rho d\rho dx dy \quad (3.59)$$

con esto la matriz hamiltoniana para los estados del termómetro es,

$$H_R(\text{termometro}) = \sum_i \rho |i\rangle \langle i| \epsilon_i \quad (3.60)$$

entonces la probabilidad de hallar el i -ésimo estado excitado del termómetro, cuando este mide el campo es dado por,

$$p_i = \frac{e^{-2\pi\rho\epsilon_i}}{\sum_i e^{-2\pi\rho\epsilon_i}} \quad (3.61)$$

entonces la temperatura propia que mide el FIDO, o que puede obtener, está dado por,

$$\beta = 2\pi\rho = \frac{1}{T} \rightarrow T = \frac{1}{2\pi\rho} \quad (3.62)$$

entonces como podemos ver, la temperatura que mide el FIDO crece muy rápidamente a medida que se aproxima al horizonte de sucesos del agujero negro y cuando se aleja la temperatura disminuye, pero está claro que la distancia a la cual la temperatura disminuye rápidamente es $r \approx 4MG$ o en términos de ρ , tenemos $\rho \approx 4MG$, es a esa distancia a la cual se considera que el observador se halla a una gran distancia, solo recuerde que en la aproximación de Rindler, las coordenadas construidas son tales que están cerca del horizonte de sucesos $2MG$, por lo que $4MG$ es muy distante y es justamente la temperatura que nuestra nave exploradora mediría[1],

$$T = \frac{1}{8\pi MG} \quad (3.63)$$

esta es la temperatura que halló Stephen Hawking, pero él usó un análisis diferente, ya que hizo el cálculo para un campo escalar no masivo y en el mismo espacio-tiempo de Rindler, cuantizó y determinó el valor medio del operador número de partículas.

La descripción dada anteriormente es la que se da para observadores externos, ya sea para observadores que se hallan en la órbita del agujero negro o para sondas enviadas cerca del agujero

negro (FIDOS), pero para observadores en caída libre dentro del agujero negro y que cruzan el horizonte de sucesos (FREFOS), no sucede nada de lo descrito anteriormente, entonces ¿Cuál de los fenómenos físicos es el correcto?[1].

Ahora cuando el FIDO se aproxima al horizonte de sucesos, este se aproxima a una distancia no nula de horizonte de sucesos del agujero negro, esta distancia es la longitud de Planck entonces el horizonte no es una línea infinitamente delgada, si no que tiene un espesor, este espesor del horizonte se le conoce como Horizonte Estrecho, y Horowitz-Maldacena, postulan que se halla a una temperatura no nula fija $T(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho_0}$, donde $\rho_0 = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$, como lo dije esta es una hipótesis para la teoría clásica de la interacción del campo gravitatorio y los campos cuánticos, ya que no es una consecuencia de esta teoría pseudo unificada, pero si es una consecuencia de la teoría de cuerdas la cual no tocaré en mi trabajo[32].

Esta membrana que se mantiene a una temperatura no nula es como el reservorio de calor y como veremos esto esta de acuerdo con el modelo de Unruh, ya que dicha matriz densidad describe un sistema en equilibrio con una fuente de calor (colectividad canónica)[1].

La Entropía de Vonn Neuman

Ahora mostraremos con la ayuda de la entropía de Vonn Neuman, la energía libre de Helmtotz,

$$S = -Tr(\rho \ln \rho) \quad (3.64)$$

la matriz de Unruh hallada es,

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Tr(e^{-\beta H})} \quad (3.65)$$

entonces usaremos la siguiente igualdad,

$$\rho \ln \rho = \frac{\partial \rho^N}{\partial N} \Big|_{N=1} \quad (3.66)$$

reemplazando la matriz densidad de Unruh,

$$S = -Tr \left[\frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{e^{-\beta NH}}{Z^N} \right) \right] \Big|_{N=1} \quad (3.67)$$

entonces dada la definición del valor medio de un observable,

$$S = Tr(\beta H \rho) + Tr[\ln Z \rho] \quad (3.68)$$

$$S = \beta \langle H \rangle + \ln Z \quad (3.69)$$

donde $\Omega(E)$ es el número de microestados, $\ln Z$, es la energía libre de Helmholtz.

$$\ln \Omega(E) = \ln Z + \frac{E}{KT} \quad (3.70)$$

se mostrará como se concilia esta con la entropía que obtendremos a partir de las hipótesis de Horowitz y Maldacena en el siguiente capítulo.

Solución a la Paradoja de la Información

Comenzaré por enunciar la conservación de la información a nivel cuántico, el cual dice que para que la información a nivel cuántico se conserve, debe existir una matriz unitaria que describa la evolución de los estados cuánticos de la siguiente manera, los estados puros evolucionan a estados puros y los estados mezcla evolucionan a estados mezcla [33][34].

$$S|\psi\rangle_{dentro} = |\psi\rangle_{fuera} \quad (3.71)$$

La conjetura de Stephen Hawking fue que cuando un agujero negro se evapora, lo hace de tal forma que los estados cuánticos no evolucionan de forma unitaria, osea que los estados puros

podrían evolucionar a estados mezcla[32], esta es la paradoja de la información, ya que de acuerdo a Leonard Susking y otros físicos, su conjetura viola la conservación de la información, o lo que es lo mismo, dicha conjetura plantea que los estados cuánticos no evolucionan de forma unitaria, es así que Horowitz y Maldacena propusieron que la evaporación es posible pero a la vez la información tiene que conservarse y se soluciona aclarando el concepto de conservación de la información a nivel cuántico. Para que la información se conserve a nivel cuántico debe existir una matriz unitaria (asegurando la evolución unitaria) pero además el agujero negro se evapora, entonces es cierto que la entropía sí aumenta en el proceso de evaporación del agujero negro, pero la información se conserva, entonces que la entropía del agujero negro aumente no implica que la información a nivel cuántico se pierda, esta es la solución a la paradoja de la información[1][31][32].

Con respecto a este punto, por semanas estuve buscando este concepto, pero conversando con mi asesor concluimos que la conservación de la información a nivel cuántico se da, sólo cuando la evolución de los estados es unitaria, y a nivel clásico como ya es conocido por la muy amplia bibliografía, la conservación de información se da por el teorema de Liouville, entonces el problema radica en conocer cuál es el nexo entre la conservación Clásica y Cuántica de la información, ese punto quedó fuera de mi investigación.

La primera condición de contorno es para la materia que se supone colapso cuando se formó el agujero negro, esta condición está dada entonces para la materia en la singularidad, y se acepta que los estados cuánticos ya sea para estados puros es representado por una función de onda o un vector ket o si hablamos de estados mezcla podemos describirla mediante la matriz densidad de la mezcla. Entonces básicamente se refiere a que existe un espacio de Hilbert para la materia en la singularidad, H_M [1].

Esta condición de contorno es muy enigmática y ninguno de los artículos que leí, se atreven a comentar acerca de ella, desde mi punto de vista esta condición se halla

escondida en las ecuaciones de campo gravitacional y las condiciones de contorno de Penrose. El comentario más importante acerca de esta condición, es que plantea directamente que la singularidad no existe y que de alguna manera esta región es plana, como el espacio-tiempo de Rindler, esto quiere decir que la gran soñada teoría de Gravitación Cuántica, por algún mecanismo podrá suavizar las singularidades.

La segunda condición de contorno se refiere a los estados cuánticos del vacío en la parte interior y exterior del agujero negro, primero se acepta que existen dos espacios de Hilbert uno que describe el estado de vacío en la parte interior respecto del horizonte de sucesos y otro en la parte exterior respecto del horizonte de sucesos, estos espacios de Hilbert son H_{dentro} y H_{fuera} , además dichos espacios se hallan entrelazados, es así que el espacio del estado de vacío es $H_{vacío} = H_{dentro} \otimes H_{fuera}$, bueno la condición de contorno es que los estados de la materia H_M , están maximalmente entrelazados con los estados del vacío dentro del horizonte de sucesos H_{dentro} , osea que existe un espacio de Hilbert $H_{dentro \otimes fuera}$.

Definamos el estado $|\phi_0\rangle_{dentro \otimes fuera} \in H_{vacío}$, ésta determina los estados entrelazados del vacío,

$$|\phi_0\rangle_{dentro \otimes fuera} = \sum_{i=0,1} A_i |i\rangle_{dentro} \otimes |i\rangle_{fuera} \quad (3.72)$$

Por último tenemos la tercera condición de contorno que dice que los estados de la materia H_M en la singularidad y los estados del espacio de Hilbert H_{dentro} , se hallan maximalmente entrelazados,

$$|\psi\rangle_{M \otimes dentro} = \sum_{n=0,1} A_n |n\rangle_{dentro} (S^+ \otimes 1) \quad (3.73)$$

podemos ver que la suma sobre los estados base va de 0 a 1, estos son los estados de espín del electrón o para cualesquiera fermión con espín $\frac{1}{2}$, si trabajásemos para los estados bosónicos, la suma va de cero a ∞ , pero estudiaremos sólo el caso fermiónico, ahora construiremos un nuevo estado que muestra el entrelazamiento entre los estados de la materia y del vacío ($H_M \otimes H_{dentro} \otimes H_{fuera}$)[27][28].

$$|\psi_0\rangle_{M\otimes dentro\otimes fuera} = |\psi\rangle_M \otimes |\phi_0\rangle_{dentro\otimes fuera} \quad (3.74)$$

Realizemos entonces la proyección para el estado final de la materia y veremos como sucede el Efecto Hawking,

$$|\phi_0\rangle_{fuera} =_{M\otimes dentro} \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle_{M\otimes dentro\otimes fuera} \quad (3.75)$$

$$|\phi_0\rangle_{fuera} = \sum_n A_n^* \langle n | \psi \rangle_M (S \otimes 1)_{dentro} \langle n | \sum_i A_i |i\rangle_{dentro} \otimes |i\rangle_{fuera} \quad (3.76)$$

$$|\phi_0\rangle_{fuera} = \sum_n |A_n|_M^2 \langle n | \psi \rangle_M (S \otimes 1) |n\rangle_{fuera} \quad (3.77)$$

desdoblado la suma,

$$|\phi_0\rangle_{fuera} = |A_0|^2 [{}_M \langle 0 | \psi \rangle_M (S \otimes 1)] |0\rangle_{fuera} + |A_1|^2 [{}_M \langle 1 | \psi \rangle_M (S \otimes 1)] |1\rangle_{fuera} \quad (3.78)$$

el estado de la materia dentro del agujero negro en la singularidad para el caso de los fermiones es,

$$|\psi\rangle_M = c_0 |0\rangle_M + c_1 |1\rangle_M \quad (3.79)$$

reemplazando en nuestra proyección del estado final de la materia,

$$|\phi_0\rangle_{fue} = |A_0|^2 [c_{0M} \langle 0 | S_M | 0 \rangle_M + c_{1M} \langle 0 | S_M | 1 \rangle_M] |0\rangle_{fue} + |A_1|^2 [c_{0M} \langle 1 | S_M | 0 \rangle_M + c_{1M} \langle 1 | S_M | 1 \rangle_M] |1\rangle_{fue} \quad (3.80)$$

la unitariedad de "S" asegura que ${}_M \langle i | S_M | j \rangle_M =_{fuera} \langle i | S_{fuera} | j \rangle_{fuera}$,

$$|\phi_0\rangle_f = |A_0|^2 [c_{0f} \langle 0 | S_f | 0 \rangle_f + c_{1f} \langle 0 | S_f | 1 \rangle_f] |0\rangle_f + |A_1|^2 [c_{0f} \langle 1 | S_f | 0 \rangle_f + c_{1f} \langle 1 | S_f | 1 \rangle_f] |1\rangle_f \quad (3.81)$$

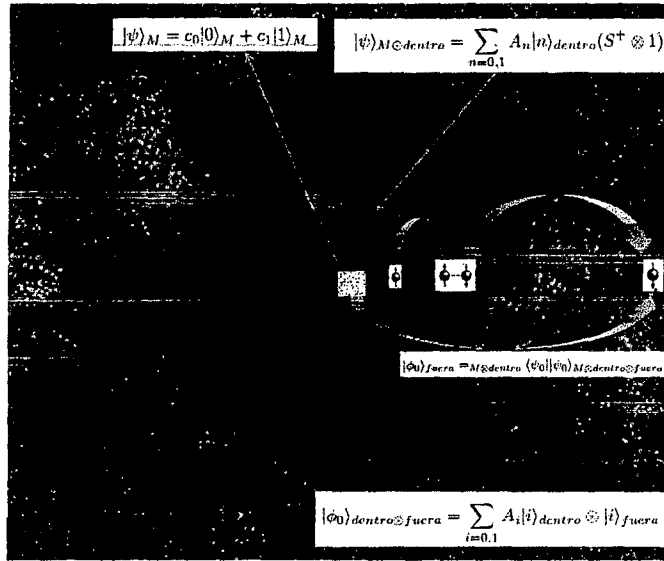


Figura 3.2: Diagrama de Efecto Hawking, con las tres condiciones de contorno de Horowitz y Maldacena

factorizando,

$$|\phi_0\rangle_{fuera} = (|A_0|^2 |0\rangle_{fuera} \langle 0| + |A_1|^2 |1\rangle_{fuera} \langle 1|) S_{fuera} (c_0 |0\rangle_{fuera} + c_1 |1\rangle_{fuera}) \quad (3.82)$$

$$|\phi_0\rangle_{fuera} = P S_{fuera} |\psi\rangle_{fuera} \quad (3.83)$$

donde P es la matriz densidad del sistema cuántico puro, pero en la base de los estados fuera, la condición de normalización para la matriz densidad es,

$$Tr(P) = \sum_{a'}_{fuera} \langle a' | P | a' \rangle_{fuera} \quad (3.84)$$

$$Tr(P) = |A_0|^2 + |A_1|^2 = 1 \quad (3.85)$$

De acuerdo a Unruh, la matriz densidad del vacío proximo al horizonte de sucesos

esta dado por la ecuación (299), la reescribiré en términos de los estados de espín, para fermiones de espín $\frac{1}{2}$,

$$P = \frac{1}{Z} \sum_{i=0,1} e^{-2\pi E_i} |i\rangle_{fuera} \langle i| \quad (3.86)$$

donde el factor normalizante es,

$$Z = \sum_i e^{-2\pi E_i} \quad (3.87)$$

los autovalores del Hamiltoniáno de Unruh para los fermiones de espín $\frac{1}{2}$ son, $E_0 = \frac{\omega}{2}$ y $E_1 = -\frac{\omega}{2}$, con ello el factor renormalizante es

$$Z = e^{\pi\omega} + e^{-\pi\omega} \quad (3.88)$$

es asi que podemos determinar cada uno de los pesos $|A_0|^2$ y $|A_1|^2$

$$|A_0|^2 = \frac{e^{\pi\omega}}{e^{\pi\omega}(e^{-2\pi\omega} + 1)} = \frac{(-1)^{2(0)} e^{-2(0\pi\omega)}}{(e^{-2\pi\omega} + 1)} \quad (3.89)$$

$$|A_1|^2 = \frac{e^{-\pi\omega}}{e^{\pi\omega}(e^{-2\pi\omega} + 1)} = \frac{(-1)^{2(1)} e^{-2(1\pi\omega)}}{(e^{-2\pi\omega} + 1)} \quad (3.90)$$

entonces,

$$|A_n|^2 = \frac{(-1)^{2n} e^{-2n\pi\omega}}{(e^{-2\pi\omega} + 1)} \quad (3.91)$$

mediante la entropía de Vonn Neuman, podemos determinar la entropía de los estados entrelazados de dentro y fuera con respecto al horizonte de sucesos, que originan la evaporación Hawking,

$$S = -Tr(P \ln P) \quad (3.92)$$

realizando el cálculo,

$$S = -Tr[|A_0|^2|0\rangle_{fuera}\langle 0| + |A_1|^2|1\rangle_{fuera}\langle 1|][\ln|A_0|^2|0\rangle_{fuera}\langle 0| + \ln|A_1|^2|1\rangle_{fuera}\langle 1|] \quad (3.93)$$

$$S = -Tr[|A_0|^2\ln|A_0|^2|0\rangle_{fuera}\langle 0| + |A_1|^2\ln|A_1|^2|1\rangle_{fuera}\langle 1|] \quad (3.94)$$

$$S = -2|A_0|^2\ln|A_0| - 2|A_1|^2\ln|A_1| \quad (3.95)$$

reemplazando los pesos hallados $|A_0|^2$ y $|A_1|^2$,

$$S = -\frac{2}{e^{-\pi\omega} + 1} \ln\left(\frac{1}{e^{-2\pi\omega} + 1}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2e^{-2\pi\omega}}{1 + e^{-\pi\omega}} \ln\left(\frac{e^{-2\pi\omega}}{e^{-2\pi\omega} + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.96)$$

$$S = \frac{1}{e^{-2\pi\omega} + 1} \ln(e^{-2\pi\omega} + 1) + \frac{e^{-2\pi\omega}}{1 + e^{-2\pi\omega}} [\ln(e^{-2\pi\omega} + 1) + \ln e^{-2\pi\omega}] \quad (3.97)$$

$$S = \beta \frac{\omega}{1 + e^{-2\pi\omega}} + \ln(e^{-2\pi\omega} + 1) \quad (3.98)$$

comparándola con la energía libre de Helmholtz,

$$\ln\omega = \beta E + \ln Z \quad (3.99)$$

entonces, $E = \frac{\omega}{1 + e^{-2\pi\omega}}$. Sólo nos falta darle dimensión a la temperatura, tal y como mostré anteriormente la temperatura redimensionada es $T = \frac{1}{8\pi M}$, **supongamos ahora que el agujero negro terminó de evaporarse, en ese estado puede decirse que el agujero negro se halla a una temperatura $T = \frac{1}{8\pi M} = 0$, entonces la entropía es,**

$$S = \ln 2 \quad (3.100)$$

¹No olvidar que se está usando las unidades naturales, por lo que $k_b = 1$, $c = 1$, $\hbar = 1$

esto nos muestra que hablamos de un sistema completamente desordenado, clásicamente a temperatura cero, la entropía debería ser ∞ , pero esta entropía mide el grado de desorden del entrelazamiento, por lo que cuando el agujero negro termina de evaporarse, ya no habrá fuerza gravitatoria y por supuesto no habrá horizonte de sucesos, así que la entropía de entrelazamiento de los estados cuánticos del vacío no desaparece, es como si la máquina que usaba los estados entrelazados del vacío terminase su función, pero como siguen creandose pares partícula-antipartícula, la entropía del vacío no llega a ser cero.

Es así que mostré que la entropía realmente aumenta para el agujero negro, esto es realmente fascinante ya que entonces no viola la segunda ley de la termodinámica, así que aumenta la entropía pero la información no se pierde a nivel cuántico ya que la matriz unitaria $S = S^+$ existe para que el efecto Hawking se de, esa es la solución a la paradoja de la información.

3.1.1. Conclusiones

1. Los agujeros negros tienen una entropía la cual es proporcional al área del horizonte de sucesos, del tal forma que obedece a la segunda ley de la termodinámica; entonces la entropía del agujero negro aumenta gracias al fenómeno cuántico del entrelazamiento, dándose así la Radiación de Hawking, pero la información no se pierde a (nivel cuántico) debido a que se mostró la necesidad de la existencia de una matriz que mantiene la evolución unitaria de los estados cuánticos, esa es la solución a la paradoja de la información.
2. Terminó diciendo que la primera de las condiciones de contorno es uno de los problemas no resueltos de la Física de hoy, ya que dicha condición de frontera dice que la materia de la estrella que colapsó, no desaparece en la singularidad si no que mantiene sus estados cuánticos, ya sean en estados puros o mezcla, ¿Pero como es posible que los estados cuánticos no desaparezcan? Ya que sabemos que no existe fuerza alguna capaz de contrarrestar las tremendas fuerzas gravitacionales, como podemos ver la primera de las condiciones de contorno es la más enigmática y la más difícil de justificar.

Capítulo 4

Apéndice

4.1. Integral de Camino de Hawking-Gibbons

Ahora nuestro propósito es hacer un cálculo semiclásico de la entropía del agujero negro de Schwazschild, se dice que es un cálculo semiclásico ya que usaremos por una parte la solución de Schwazschild dada por la gravitación clásica y por otro lado usaremos el método de cuantización mas intuitivo y elegante, descubierto por Feynman y modificado para la gravitación por Hawking y Gibbons[30].

Trabajaremos con la colectividad Macrocanónica Cuántica.

- **Función de Partición**

$$Z(\mu, V, T) = \text{Tr}(e^{-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{C}_i)}) \quad (4.1)$$

- **Hipótesis del Gran Potencial**

$$W(\mu, V, T) = -K_B T \ln Z(\mu, V, T) \implies Z = e^{-\beta W} \quad (4.2)$$

- **Gran Potencial**

$$W(\mu, V, T) = E - TS - \mu_i \hat{C}_i \quad (4.3)$$

Entonces la entropía se obtiene combinando la hipótesis del gran potencial con la expresión termodinámica del gran potencial,

$$S = \frac{E - \mu_i C_i}{T} - \frac{W}{T} = \frac{1}{T}(E - \mu_i C_i) + LnZ \quad (4.4)$$

primero debemos determinar la función de partición del gran potencial y lo haremos con la integral de camino de Hawking-Gibbons[1][30].

$$Z = \int Dg e^{-\frac{S_{EH}}{\hbar}} \quad (4.5)$$

La acción Einstein-Hilbert es,

$$S_{EH} = \frac{c^3}{16\pi G_N^4} \int_M d^4x \sqrt{|g|} R + \frac{c^3}{8\pi G_N^4} \int_{\partial M} d^3\Sigma K - \frac{c^3}{8\pi G_N^4} \int_{\partial M} d^3\Sigma K_0 \quad (4.6)$$

donde $K_0 = K(g_{\nu\alpha'}i_0)$, este término nos permite regularizar la integral y evitar divergencias, sencillamente nos dice que la curvatura extrínseca en la región asintótica debe renormalizarse para obtener $\eta_{\mu\nu}$, además tomaremos la siguiente convención de unidades $\hbar = c = G_N^4 = 1$, ahora necesitamos hacer una rotación de Wick para obtener una expresión euclidiana-clásica de Schwarzschild con signatura $(-, -, -, -)$, la rotación de Wick es $\tau = it$. En las coordenadas de Kruskal-Szekeres (KS) dado por las coordenadas $\{T, X, \theta, \phi\}$, en estas coordenadas la rotación de Wick es $\Upsilon = iT$.

De acuerdo a la siguiente ecuación que relaciona la parte radial de las coordenadas de Schwarzschild con las de KS[3],

$$\left(\frac{r}{R_s - 1}\right) e^{\frac{r}{R_s}} = X^2 - T^2 \quad (4.7)$$

dice que la geometría de KS cubre tanto la región interna como externa del agujero negro y se le conoce como agujero negro eterno, pero si realizamos la rotación de Wick[3],

$$\left(\frac{r}{R_s} - 1\right) e^{\frac{r}{R_s}} = X^2 - \left(\frac{\tau}{i}\right)^2 = X^2 + \tau^2 \quad (4.8)$$

pero a diferencia de la anterior ecuación, $X^2 + \tau^2 > 0$ entonces en el sistema de coordenadas de KS con la rotación Wick $\{\Upsilon, X, \theta, \phi\}$, dicha geometría describe sólo la parte externa del Agujero Negro, con un tiempo euclideo Υ , otra de las relaciones útiles a usar, es la parte angular de la geometría de KS, dada por la relación[1][3],

$$\frac{t}{R_s} = \text{Ln}\left(\frac{X+T}{X-T}\right) = 2\text{tg}^{-1}\left(\frac{T}{X}\right) \Rightarrow \frac{X+T}{X-T} = e^{\frac{t}{R_s}} \quad (4.9)$$

con la rotación de Wick,

$$\frac{X-i\Upsilon}{X+i\Upsilon} = e^{-\frac{i\tau}{R_s}} \quad (4.10)$$

pero,

$$X+i = ae^{i\text{Arg}(X+i\Upsilon)} \quad (4.11)$$

$$X-i = ae^{-i\text{Arg}(X+i\Upsilon)} \quad (4.12)$$

reemplazandolas,

$$\frac{e^{-i\text{Arg}(X-i\Upsilon)}}{e^{i\text{Arg}(X+i\Upsilon)}} = e^{\frac{-i\tau}{R_s}} \Rightarrow e^{-2i\text{Arg}(X+i\Upsilon)} = e^{\frac{-i\tau}{R_s}} \quad (4.13)$$

igualando los exponentes, tenemos

$$-2i\text{Arg}(X+i\Upsilon) = -i\frac{\tau}{2R_s} \quad (4.14)$$

$$\text{Arg}(X+i\Upsilon) = \frac{\tau}{4M} \quad (4.15)$$

ya que el rango del argumento principal es $[0, 2\pi]$, con lo que claramente τ es una coordenada temporal con periodo $\tau = 8\pi M$, además esta es la inversa de la temperatura de Hawking $T = \frac{1}{8\pi M}$,

con lo que $\tau = \frac{1}{r}$. Es así que podemos usar la solución de Schwarzschild euclidiana $\{\tau, r, \theta, \phi\}$ para calcular la función de partición térmica [1][3].

Ahora la frontera de la solución se halla en $r \rightarrow \infty$, pero primero trabajaremos en un conjunto hipersuperficies $r = r_0$ y luego la haremos tender a ∞ , entonces determinaremos el vector normal a las hipersuperficies, las cuales son de tipo luz [1][3][32],

$$n_\nu n^\nu = -1 \quad (4.16)$$

por lo que el operador proyección es,

$$P_{m\mu}^\nu = \delta_\mu^\nu + n^\nu n_\mu \quad (4.17)$$

este vector normal es entonces,

$$n_\mu = -\frac{\partial_\mu(r - r_0)}{\sqrt{-n^2}} = -\frac{\delta_{\mu r}}{\sqrt{-n^2}} = -\sqrt{-g_{rr}}\delta_{\mu r} \quad (4.18)$$

$$n^\mu = \frac{\partial^\mu(r - r_0)}{\sqrt{-n^2}} = \frac{\delta^{\mu r}}{\sqrt{-n^2}} = \sqrt{-g_{rr}}\delta^{\mu r} \quad (4.19)$$

la métrica inducida sobre las hipersuperficies en $r = r_0$, es una métrica estática y esféricamente simétrica.

$$ds_{(3)}^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{tt}(r) dt^2 - r^2 d\Omega_{(2)}^2 /_{r=r_0} \quad (4.20)$$

bueno, es necesario determinar la curvatura extrínseca y de la misma forma determinar el regulador de la curvatura extrínseca K_0 , procedamos

$$\nabla_\mu n_\nu = \partial_\mu n_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma n_\sigma \quad (4.21)$$

reemplazando la expresión del vector unitario,

$$\nabla_{\mu} n_{\nu} = -\sqrt{-g_{rr}} \left[\delta_{\nu r} \frac{\partial_{\mu} \sqrt{-g_{rr}}}{\sqrt{-g_{rr}}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \delta_{\sigma\nu} \right] \quad (4.22)$$

la expresión es entonces,

$$\nabla_{\mu} n_{\nu} = -\sqrt{-g_{rr}} \left[\delta_{\nu r} \delta_{\mu r} \partial_r (\log \sqrt{-g_{rr}}) - \Gamma_{\mu\nu}^r \right] \quad (4.23)$$

la traza de la curvatura extrínseca es, $K = h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}$,

expandiendo dicha suma,

$$K = h^{tt} \nabla_t n_t + h^{rr} \nabla_r n_r + h^{\theta\theta} \nabla_{\theta} n_{\theta} + h^{\varphi\varphi} \nabla_{\varphi} n_{\varphi} \quad (4.24)$$

desde ya $h^{rr} = 0$, de acuerdo a la expresión anterior podemos calcular cada una de las derivadas,

$$\nabla_t n_t = -\sqrt{-g_{rr}} (-\Gamma_{tt}^r) \quad (4.25)$$

$$\nabla_{\theta} n_{\theta} = -\sqrt{-g_{rr}} (-\Gamma_{\theta\theta}^r) \quad (4.26)$$

$$\nabla_{\phi} n_{\phi} = -\sqrt{-g_{rr}} (-\Gamma_{\phi\phi}^r) \quad (4.27)$$

ademas de $h^{tt} = g_{tt}^{-1}$, $h^{\theta\theta} = -r^{-2}$, $h^{\phi\phi} = -r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta$, con estas obtenemos

$$K = \sqrt{-g_{rr}} \left[\frac{1}{g_{tt}} \Gamma_{tt}^r - \frac{1}{r^2} \Gamma_{\theta\theta}^r - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \Gamma_{\phi\phi}^r \right] \quad (4.28)$$

los símbolos de Christoffel son $\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2g_{rr}} \partial_r g_{tt}$, $\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2g_{rr}} \partial_r g_{\theta\theta}$, $\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2g_{rr}} \partial_r g_{\phi\phi}$, prosiguiendo

$$K = \sqrt{-g_{rr}} \left[\frac{1}{-g_{rr}} \frac{\partial_r g_{tt}}{g_{tt}} + \frac{1}{2r^2 g_{rr}} \partial_r g_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \partial_r g_{\phi\phi} \right] \quad (4.29)$$

reemplazando sólo las componentes $g_{\theta\theta} = -r^2$, $g_{\phi\phi} = -r^2 \text{sen}^2\theta$, ya que el elemento de línea de un espacio-tiempo esféricamente simétrico en general tiene la forma,

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.30)$$

es por ello que por el momento dejamos de lado las componentes temporales y radiales, A

$$K = \sqrt{-g_{rr}} \left[\frac{1}{-g_{rr}} \partial_r \ln(g_{tt}) + \frac{1}{-g_{rr}} \frac{2}{r} \right] \quad (4.31)$$

finalmente,

$$K = \frac{1}{\sqrt{-g_{rr}}} \left[\frac{1}{2} \partial_r \ln g_{tt} + \frac{2}{r} \right] \Big|_{r=r_0} \quad (4.32)$$

ahora el regulador se halla reemplazando las componentes métricas del elemento de línea del espacio-tiempo del vacío,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.33)$$

$$K(g_{vac'io}) = K_0 = \frac{2}{r} \quad (4.34)$$

realizando una transformación de coordenadas a la solución de Schwarzschild al sistema de coordenadas Isotrópicas y para el caso de grandes distancias de la fuente, las componentes radial y temporal del tensor métrico son,

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{r} \quad (4.35)$$

$$g_{rr} = -\left(1 + \frac{2m}{r}\right) \quad (4.36)$$

reemplazando estas componentes en la curvatura extrínseca,

$$K = (1 + \frac{2M}{r})^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} \partial_r \ln(1 - \frac{2M}{r}) + \frac{2}{r}) \quad (4.37)$$

expandiendo en series de Taylor el logaritmo natural,

$$\ln(1 - \frac{2M}{r}) = (-1)^2 (-\frac{2M}{r}) + \frac{(-1)^3}{2} (-\frac{2M}{r})^2 = -\frac{2M}{r} - \frac{2M}{r} = -\frac{4M}{r} \quad (4.38)$$

con esta y con la expansión binomial del factor $(1 + \frac{2M}{r})^{-\frac{1}{2}}$, tendremos que

$$K = \frac{2}{r} (1 + \frac{4M}{r}) (1 - \frac{M}{r}) = \frac{2}{r} - \frac{2M}{r^2} + \frac{M}{2r^2} - \frac{M^2}{2r^3} \quad (4.39)$$

ahora restando esta con el regulador K_0 y eliminando el término $\frac{1}{r^3}$,

$$(K - K_0)|_{r=r_0} = \frac{3}{2} (-\frac{M}{r^2}) \sim -\frac{M}{r^2} \quad (4.40)$$

Entonces por que hice tanto barullo para obtener esta expresión, bueno recordemos que la solución de Schwarzschild es tal que el tensor energía momentón $T = 0$ por lo que $-8\pi T = R = 0$, entonces, la parte de la acción que contiene la curvatura intrínseca escalar R se anula por lo que la integral de camino debe reducirse a[3],

$$Z = e^{\frac{i}{8\pi} \int d^3x \sqrt{|h|} (K - K_0)} \int Dg e^{-i \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{|g|} R} \quad (4.41)$$

$$Z = e^{\frac{i}{8\pi} \int d^3x \sqrt{|h|} (K - K_0)} \quad (4.42)$$

noten que volví a colocar la parte imaginaria en la integral de camino, es porque la métrica euclidiana sólo la usamos para obtener información a cerca de la periodicidad de la parte temporal, ahora prosiguamos con nuestra integración,

$$|h| = g_{tt} r^4 \text{sen}^2 \theta \Rightarrow \sqrt{|h|} = \sqrt{g_{tt}} r^2 \text{sen} \theta \quad (4.43)$$

además recordemos $\tau = \frac{1}{T} = \beta$, entonces de acuerdo a la rotación de wick $it = \tau \Rightarrow t = -i\beta$, con esto continuaremos con la integración,

$$\frac{i}{8\pi} \int d^3x \sqrt{|\hbar|} (K - K_0) = \frac{i}{8\pi} \int_0^{-i\beta} dt \int_{S^2} d^2x \sqrt{g_{tt} r_0^2} \text{sen}\theta (K - K_0) \quad (4.44)$$

pero antes de seguir, en coordenadas esféricas el elemento de volumen es

$$d^3x = r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi \quad (4.45)$$

luego integramos en la parte radial

$$\int d^3x = d^2x = \int_0^{r_0} \text{sen}\theta r^2 d\theta d\phi = \text{sen}\theta r_0^2 d\theta d\phi \quad (4.46)$$

pero además recordemos que $r_0 \mapsto \infty$

$$\frac{i}{8\pi} \int d^3x \sqrt{|\hbar|} (K - K_0) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{\beta}{8\pi} r_0 (K - K_0) (-\cos\theta)|_{-\pi}^0 (2\pi) (\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \sqrt{g_{tt}(r_0)}) \quad (4.47)$$

$$\frac{i}{8\pi} \int d^3x \sqrt{|\hbar|} (K - K_0) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{\beta}{8\pi} r_0^2 (K - K_0) (-\cos\theta)|_{-\pi}^0 (2\pi) \quad (4.48)$$

$$\frac{i}{8\pi} \int d^3x \sqrt{|\hbar|} (K - K_0) = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} -\frac{\beta}{2} r_0^2 (K - K_0) = -\frac{\beta M}{2} \quad (4.49)$$

finalmente hemos obtenido la función de partición, dada la relación obtenida anteriormente para la entropía, procederemos a calcularla

$$S = \frac{1}{T} M + \ln Z = \beta M - \frac{\beta M}{2} = \frac{\beta M}{2} \quad (4.50)$$

pero como $\beta = 8\pi M$ para un agujero negro de Schwarzschild, la entropía es finalmente [1][3].

$$S = 4\pi M^2 \quad (4.51)$$

Entonces esta es la entropía de de una agujero negro medido por un observador que se halla a una gran distancia del horizonte de sucesos, luego

$$S = \frac{4\pi(2M)^2}{4} = \frac{Area_{horizonte}}{4} \quad (4.52)$$

pero aún no entiendo del todo, el porque introducimos la curvatura extrínseca, la misma que nos da información acerca de la entropía del agujero negro.

4.1.1. Paradoja de la Información para Estados Mezcla

Mostraré un caso más general, en este caso los estados cuanticos de la materia en la singularidad son estados mezcla, asi que debemos usar una función de onda más general, estamos hablando de la legendaria matriz densidad, esta matriz densidad reemplaza a la ecuación (322)[30].

$$\rho_M = \sum_{0,1} c_n |n\rangle_M \langle n| \quad (4.53)$$

y dada la condición de normalización para la matriz densidad, tendremos

$$Tr(\rho_M) = 1 \mapsto \sum_n c_n = 1 \quad (4.54)$$

ademas,

$$Tr(\rho^2) \leq Tr(\rho) = 1 \quad (4.55)$$

ahora lo que necesitamos es determinar la matriz densidad pero que nos determine los estados fuera del horizonte a partir los estados dentro del horizonte, osea que necesitamos hallar $\rho_f = fuera \langle || \rangle_{fuera}$ [32],

$$\rho_f = {}_{M\otimes dentro} \langle \psi | [\rho_M \otimes |\phi_0\rangle_{dentro\otimes fuera} \langle \phi_0|] | \rangle_{M\otimes dentro} \quad (4.56)$$

usaremos de nuevo las ecuaciones (315) y (316),

$$\rho_f = {}_{M\otimes dentro} \langle \psi | \rho_M \otimes |\phi_0\rangle \left(\sum_n A_n^* \langle n | \otimes_{fuera} \langle n | \right) \left(\sum_i A_i | i \rangle_M \otimes | i \rangle_{dentro} (S_M^+ \otimes 1) \right) \quad (4.57)$$

$$\rho_f = {}_{M\otimes dentro} \langle \psi | \rho_M \otimes |\phi_0\rangle \left(\sum_n |A_n|^2 |n\rangle_{M fuera} \langle n| \right) (S_M^+ \otimes 1) \quad (4.58)$$

$$\rho_f = \left(\sum_k A_k^* {}_M \langle k |_{dentro} \otimes \langle k | (S_M \otimes 1) \right) (\rho_M) \left(\sum_j A_j | j \rangle_{dentro} \otimes | j \rangle_{fuera} \right) [\dots] \quad (4.59)$$

$$\rho_f = \sum_j |A_j|_M^2 \langle j | (S_M \otimes 1) | j \rangle_{fuera} \left[\left(\sum_i c_i | i \rangle_M \langle i | \right) \otimes \left(\sum_n |A_n|^2 |n\rangle_{M fuera} \langle n| (S_M^+ \otimes 1) \right) \right] \quad (4.60)$$

$$\rho_f = \sum_{j,i,n} |A_j|^2 |A_n|^2 c_i [{}_M \langle j | S_M | i \rangle_M \langle i | S_M^+ | n \rangle_M] | j \rangle_{fuera} \langle n | \quad (4.61)$$

$$\rho_f = \sum_{j,i,n} |A_j|^2 |A_n|^2 c_i [{}_M \langle j | S_M | i \rangle_M \langle i | S_M^+ | n \rangle_M] | j \rangle_{fuera} \langle n | \quad (4.62)$$

$$\rho_f = \sum_{j,i,n} |A_j|^2 |A_n|^2 c_i [{}_{fuera} \langle j | S_{fuera} | i \rangle_{fuera} \langle i | S^+ | n \rangle_{fuera}] | j \rangle_{fuera} \langle n | \quad (4.63)$$

de nuevo , la unitariedad dice que ${}_M \langle j | S_M | i \rangle_M = {}_{fuera} \langle j | S_{fuera} | i \rangle_{fuera}$

$$\rho_f = \left(\sum_j |A_j|^2 | j \rangle_{fuera} \langle j | \right) S_{fuera} \left(\sum_i c_i | i \rangle_{fuera} \langle i | \right) S_{fuera}^+ \left(\sum_n |A_n|^2 |n\rangle_{fuera} \langle n| \right) \quad (4.64)$$

donde $D = \sum_{n=0,1} |A_n|^2 |n\rangle \langle n|$, es el operador distorsión, cuya propiedad es $Tr(D) = 1$, con lo

que $Tr(D^2) \leq 1$

$$\rho_f = DS_{fuera}\rho_{fuera}S_{fuera}^+D \quad (4.65)$$

lo que nos falta es normalizarla,

$$\rho_f = \frac{DS_{fuera}\rho_{fuera}S_{fuera}^+D}{Tr(DS_{fuera}\rho_{fuera}S_{fuera}^+D)} \quad (4.66)$$

de acuerdo a la ecuación (115), el valor medio del operador densidad nos daría información acerca de la mezcla, o cuan mezclados se hallan los sistemas cuanticos con pesos estadísticos c_n ,

$$\langle \rho_f \rangle = Tr(\rho_f \rho_f) \quad (4.67)$$

$$\langle \rho_f \rangle = Tr\left(\frac{DS_{fuera}\rho_{fuera}S_{fuera}^+D}{Tr(DS_{fuera}\rho_{fuera}S_{fuera}^+D)} \frac{DS_{fuera}\rho_{fuera}S_{fuera}^+D}{Tr(DS_{fuera}\rho_{fuera}S_{fuera}^+D)}\right) \quad (4.68)$$

donde,

$$W = \frac{S_{fuera}D^2S_{fuera}^+}{Tr(DS_{fuera}\rho_{fuera}S_{fuera}^+D)} \quad (4.69)$$

entonces la traza del cuadrado del operador densidad del estado final es

$$Tr(\rho_f^2) = Tr(W\rho_{fuera}W\rho_{fuera}) \quad (4.70)$$

bueno como estamos trabajando con operadores acotados, podemos usar la relación[32],

$$|Tr(XY)| \leq |Tr(X)||Tr(Y)| \quad (4.71)$$

pero teniendo en cuenta que $Tr(AB) = Tr(BA)$

$$Tr(\rho_f^2) = Tr(\rho_{fuera}^2)Tr(W^2) \quad (4.72)$$

$$\text{Tr}(\rho_f^2) \leq \text{Tr}(\rho_{fuera}^2) \quad (4.73)$$

con ello tenemos simplemente, $\text{Tr}(\rho_f^2) \leq \text{Tr}(\rho_{fuera}^2) = \text{Tr}(\rho_M^2)$, esta desigualdad sugiere que el entrelazamiento disminuye en la evaporación de Hawking, o lo que es lo mismo el nivel de mezcla disminuye en la evaporación con lo que la entropía aumenta, pero la información se conserva ya que la matriz S es unitaria[33].

Bibliografía

- [1] Susskind Leonard, Lindsay James, *Black Holes, Information and the String Theory Revolution*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd. 2005.
- [2] Chevalley Claude, *Theory of Lie Groups*, Pinceton Landmarks, 1999.
- [3] Ciudolini Ignazio, Archibald Wheeler Jhon, *Gravitation and Inertia*, Princeton University Press, 1995.
- [4] Povh Rith Scholz Zetsche, *Pericles and Nuclei*, Spring-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [5] Landau ,L. D. , E.M. Lifshitz, *Teoría Clásica de los Campos*, Editorial Reverte, S.A, 1975.
- [6] A. Logunov, M. Mestvirishvili, *The Relativistic Theory of Gravitation*, Mir Publishers Moscow 1988.
- [7] Halzen Francis, Alan D.Martin, *Quarks and Leptons*, Spring-Verlag , 2000.
- [8] J.J. Sakurai, San Fu Tuan, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1982.
- [9] Zee A, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Published by Princeton University Press 2003.
- [10] Kaku Michio, *Quantum Field Theory*, Oxford University Press 1993.

- [11] Greiner Walter, Joachim Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996.
- [12] Landau L. D. y E.M. Lifshitz, *Mecánica*, Mezhdunarodnaya Kniga, Moscou, 1965.
- [13] Erwin *Schrödinger*, *Statistical Thermodynamics*, Cambridge at the University Press, 1962.
- [14] Greiner Walter, *Relativistic Quantum Mechanics*, Edition Spring-Verlag Berlin Heidelberg.
- [15] Griffiths David, *Introduction to Elementary Particles*, Jhon Wiley, 1987.
- [16] Pfahler Eisenhart Luther, *Riemannian Geometry*, Published by Princeton University Press, 41 William Street, 1993.
- [17] R.K.Sachs, H. Wu, *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, 1977.
- [18] Redhead Michael, *Incompleteness Nonlocality and Realism*, Published by Oxford University, 1987.
- [19] Ortín Jordi, Sancho José María, *Curso de Física Estadística*.
- [20] Greiner Neise Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Spring-Verlag New York Heidelberg, 1995.
- [21] Landau L. D. y Lifshitz E.M. , L.P. Pitaevskii, *Teoría Cuántica Relativista*, Editorial Reverté, S.A 1975.
- [22] Martin M. Lipschutz, Ph. D. *Geometría Diferencial*, Mc Graw-Hill de Mexico, S.A. de C.V. 1971.
- [23] Mgt. Francisco Bartra Gros, *Mecánica Cuántica*.
- [24] Einstein Albert, *El significado de la relatividad*, Editorial Planeta-De Agostini, 1985.

- [25] Syropoulos Apostolos, Tsolomitis Antonis, Sofroniou Nick, *Digital Typography Using LaTeX*, 2002.
- [26] H. Goldstein, *Mecánica Clásical*, Editorial Reverte, S.A. 1996.
- [27] S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* 13, 191 (1976).
- [28] W. G. Unruh and R. M. Wald, *Phys. Rev. D* 25, 942 (1982).
- [29] S. Coleman, J. Preskill, and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 67, 1975 (1991).
- [30] Fuentes-Schuller and R. B. Mann, *Phys. Rev. Lett.* 95, 120404 (2005).
- [31] Peres, P. F. Scudo, and D. R. Terno, *Phys. Rev. Lett.* 88, 230402 (2002).
- [32] Y. H. Moon, S. W. Hwang, and D. Ahn, *Prog. Theor. Phys.* 112, 219 (2004).
- [33] D. Ahn, J. H. Oh, K. Kimm, and S. W. Hwang, *Phys Rev A* 61, 052310 (2000).
- [34] D. Ahn, H.-J. Lee, and S. W. Hwang, *Phys. Rev. A* 67, 032309 (2003).
- [35] Sean M. Carroll, *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2004).