UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

TESIS

DIFERENCIABILIDAD EN SENTIDO CARATHÉODORY APLICADO AL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA PARA FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL

PRESENTADO POR:

Br. KELVIN ADAN PERLACIO HURTADO

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ASESOR:

Dr. ALEJANDRO TTITO TTICA

CO-ASESOR:

Dr. EDISON MARCAVILLACA NIÑO DE GUZMAN

CUSCO - PERÚ

2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, asesor del trabajo de investigación/tesis titulada: **"DIFERENCIABILIDAD EN SENTIDO CARATHÉODORY APLICADO AL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA PARA FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL"** presentado por: **KELVIN ADAN PERLACIO HURTADO** con Nro. de DNI: 77203181, para optar el título profesional de: **Licenciado en Matemáticas.** Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 2 veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de laUNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de **4%.**

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (x)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera hoja del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 24 de febrero de 2025

....

Dr. ALEJANDRO TTITO TTICA

Post firma: Alejandro Ttito Ttica

Nro. de DNI: 24676328

ORCID del Asesor: 0000-0002-6898-5307

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. https://unsaac.turnitin.com/viewer/submissions/oid:27259:433616650?locale=es-MX

KELVIN ADAN PERLACIO

DIFERENCIABILIDAD EN SENTIDO CARATHEODORY APLICADO AL TEOREMA DE LA FUNCION INVERSAL

Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:433616650

Fecha de entrega

24 feb 2025, 5:36 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

24 feb 2025, 5:43 p.m. GMT-5

Nombre de archivo

Tesis Kelvin-final.pdf

Tamaño de archivo

1.6 MB

79 Páginas

15,506 Palabras

69,401 Caracteres

4% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Bibliografía
- Texto citado
- Texto mencionado
- Coincidencias menores (menos de 20 palabras)

Fuentes principales

4%	Fuentes de Internet
1%	Publicaciones
1%	Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alertas de integridad para revisión

No se han detectado manipulaciones de texto sospechosas.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Presentación

Señor: Decano de la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas.

Señor: Director de la Escuela Profesional de Matemática.

Señores: Miembros del Jurado.

El presente trabajo de tesis intitulado "DIFERENCIABILIDAD EN SENTIDO CARATHÉODORY APLICADO AL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA PARA FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL", tiene como objetivo principal aplicar la diferenciabilidad en sentido Carathéodory a la demostración del teorema de la función inversa para funciones vectoriales de variable vectorial.

Este trabajo permite una comprensión profunda de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory, favoreciendo a los matemáticos y profesionales afines explorar y contribuir a esta área de investigación. Asimismo motiva a los interesados a entrar a esta línea de estudio, aportando nuevos enfoques y complementando los conocimientos ya adquiridos.

El contenido de este trabajo se divide en tres capítulos, los cuales se describen a continuación:

En el primer capítulo, se aborda la fase inicial de la investigación, proporcionando un marco comprensivo para el estudio. Se incluyen los siguientes elementos: Planteamiento del problema, formulación del problema, justificación de la investigación y los objetivos.

En el segundo capítulo, se presentan los antecedentes relevantes que contextualizan y fundamentan la investigación. Para ello se realiza una revisión de artículos y libros que han influido en el desarrollo de la teoría de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory. Se exploran estudios previos, resultados destacados y enfoques adoptados por investigadores en campos relacionados.

El marco teórico, se sumerge en un profundo análisis que sustenta la investigación donde se considera los conceptos fundamentales como la transformación lineal, se introduce la noción de espacios métricos y normados como fundamento para la definición de continuidad y diferenciabilidad de funciones vectoriales.

En el tercer capítulo, se profundiza en la construcción de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory, partiendo de los fundamentos de la diferenciabilidad clásica para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Este proceso implica una transición, donde los conceptos bien establecidos de la diferenciabilidad clásica se extienden de manera lógica y rigurosa hacia el marco más general de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Se desarrolla la diferenciabilidad en sentido Carathéodory a partir de la teoría clásica, estableciendo una conexión esencial entre los contextos de funciones reales y funciones vectoriales. Se extiende la definición de diferenciabilidad en sentido Carathéodory a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, aprovechando los conceptos establecidos en el capítulo anterior. Este proceso implica consideraciones especiales debido a la naturaleza vectorial de las funciones y la influencia de las métricas y normas. Se analiza el comportamiento característico de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory, identificando condiciones bajo las cuales una función es diferenciable Carathéodory y contribuyendo así a una comprensión más profunda de la naturaleza de la diferenciabilidad en contextos más generales.

Dedicatoria

Dedico este trabajo de investigación a mi amada familia, fuente inagotable de amor, apoyo y valores. En particular, quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi querida mamá, Doris, y a mi valioso padre, Adan. Su dedicación, sacrificio y aliento constante han sido la inspiración que me impulsó a alcanzar este logro académico.

En especial, a mi mamá y papá, les dedico este trabajo con profundo cariño y gratitud, reconociendo que su influencia ha sido fundamental en mi camino hacia el conocimiento y el crecimiento personal.

Agradecimientos

Inicio expresando mi profundo agradecimiento a mi madre Doris y mi padre Adán, por el inmenso amor y los valores que siempre me brindaron. Agradezco de manera especial a mis hermanos Alondra, Almendra y Waldid por su constante apoyo y cariño a lo largo de este camino.

Mi gratitud a mis asesores, los profesores Dr. Alejandro Ttito Ttica y Dr. Edison Marcavillaca Niño de Guzmán, por su invaluable orientación en el desarrollo de este trabajo. Además, no puedo dejar de reconocer la influencia significativa de los profesores Dr. Gino Gustavo Maqui Huaman y Dr. Jonathan Ruiz Quiroz, quienes no solo impactaron en mi trayectoria académica, sino que también brindaron valiosos consejos para mi continuación en estudios superiores.

Agradezco a los profesores que además de impartirme sus amplios conocimientos, me ofrecieron su apoyo, orientación y valiosos consejos en cada etapa de mi formación universitaria: Nelly M. Salazar Peña, Paulina Taco Llave, Eleuteria Ttito Ttica, Jose Moso Ayma, Pedro Quispe Sandoval, Patricio Choque Huaman, Guido Alvarez Jauregui, Epifanio Puma Huañec, y a todos aquellos cuyos nombres no menciono, por compartir generosamente su vasto conocimiento durante mi educación universitaria.

Mi reconocimiento especial se extiende a mis entrañables amigos de pregrado: Malú, Werner, Renzo, Orlando, Rudy, Antony, Rusbel, Kelly, Naydu, Nadia, Steven y todos aquellos con quienes compartí momentos inolvidables y enriquecedores.

Resumen

El teorema de la función inversa, un pilar fundamental en diversas disciplinas matemáticas, sirve como base para explorar y comprender propiedades esenciales en el análisis de funciones. En este contexto, la presente tesis se sumerge en el estudio detenido y la aplicación específica de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory, con un enfoque particular que es demostrar el teorema de la función inversa aplicado a funciones vectoriales de variable vectorial.

El desarrollo teórico abarca la construcción de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory, partiendo de los cimientos de la diferenciabilidad clásica para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. La extensión de esta definición a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se realiza con el respaldo de conceptos fundamentales introducidos en capítulos anteriores. Se realiza un análisis exhaustivo del comportamiento de la diferenciabilidad Carathéodory, identificando condiciones precisas bajo las cuales una función es diferenciable en sentido Carathéodory.

Enriqueciendo la teoría con aplicaciones axiomáticas, se presentan ejemplos esclarecedores, como el cálculo de la derivada Carathéodory para transformaciones lineales.

La culminación de este trabajo es la aplicación de diferenciabilidad en sentido Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ en la demostración del teorema de la

función inversa. Es importante especificar que la extensión de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory es para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, sin embargo para el teorema de la función inversa es necesario estudiarla con funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Palabras clave: Continuidad de funciones, Diferenciabilidad en sentido Carathéodory, Derivada de Carathéodory, Teorema de la Función Inversa, Transformación lineal.

Abstract

The inverse function theorem, a fundamental pillar in various mathematical disciplines, serves as a foundation for exploring and understanding essential properties in function analysis. In this context, the present thesis delves into the thorough study and specific application of differentiability in the Carathéodory sense, with a particular focus on demonstrating the inverse function theorem applied to vector functions of vector variables.

The theoretical development encompasses the construction of differentiability in the Carathéodory sense, starting from the foundations of classical differentiability for functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. The extension of this definition to functions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$ is carried out with the support of fundamental concepts introduced in earlier chapters. An exhaustive analysis of the behavior of Carathéodory differentiability is conducted, identifying precise conditions under which a function is Carathéodory differentiable.

Enriching the theory with axiomatic applications, enlightening examples are presented, such as the calculation of the Carathéodory derivative for linear transformations.

The culmination of this work is the application of Carathéodory differentiability for functions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ in the demonstration of the inverse function theorem.

It is important to specify that the extension of differentiability in the Carathéodory sense is for functions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$, however for the inverse function theorem it is necessary to study it with functions from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$.

Keywords: Function Continuity, Carathéodory Differentiability, Carathéodory Derivative, Inverse Function Theorem, Linear Transformation.

Índice general

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Descripción de problema

El análisis funcional es una de las ramas más relevantes de las matemáticas, pues su importancia es enfocada en su aplicación; sin embargo, muchas de las teorías desarrolladas en dicho campo no goza de alguna aplicación hasta el pasar de algunos años, es decir, muchas veces se desarrolla y presenta estudios de matemática que no se ve en una aplicación inmediata, aún así cuando transcurre años es posible quizás encontrar alguna aplicación (aunque muchas veces no).

En ese contexto, el desarrollo de las matemáticas no puede detenerse independientemente de que tenga o no alguna aplicación. Para ello este estudio es uno de los que su enfoque es prioritariamente en lo axiomático (aplicación de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory en la demostración del teorema de la función inversa), no obstante también se presenta algunos ejemplos del cálculo.

La diferenciabilidad fue uno de los grandes avances en la matemática dada por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, independientemente, desarrollaron el cálculo en el siglo XVII. Newton utilizó el concepto de fluxiones, mientras que Leibniz introdujo la notación de la derivada tal como se conoce hoy. Ambos contribuyeron significativamente a la teoría de la derivación y la diferenciabilidad.

En 1954 el matemático alemán Constantin Carathéodory expuso en una pagina de su libro (Carathéodory, 1954) una forma peculiar de derivar, el cual pasó por desapercibido por unos 40 años aproximadamente, pues en 1991 Stephen Kuhn quien observó, estudió y publicó (Kuhn, 1991) la derivada a la Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ demostrando algunos de los teoremas fundamentales del cálculo mediante la diferenciabilidad a la Carathéodory, dándole un enfoque pedagógico. Un año después (1992) Acosta, Delgado y Rodriguez publican (Acosta et al., 1992) donde extienden la diferenciabilidad en sentido Carathéodory.

La idea fundamental de estos matemáticos fue encontrar una demostración distinta a la diferenciabilidad clásica de algunos teoremas importantes. Obteniendo así ventajas y desventajas en el desarrollo de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory. Uno de los tantos teoremas fundamentales del cálculo para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es el teorema de la función inversa. Dicho teorema es un resultado fundamental en el cálculo y tiene una gran importancia en el estudio de funciones vectoriales y, en general, en análisis matemático. Este teorema se aplica principalmente a funciones que mapean un espacio vectorial en sí mismo, es decir, funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ o de un espacio métrico a sí mismo.

La importancia del teorema de la función inversa para funciones vectoriales radica en varios aspectos:

- Existencia de inversa local: El teorema de la función inversa establece las condiciones bajo las cuales una función vectorial tiene una inversa local en un punto. Esto es crucial para el estudio de funciones que no son necesariamente biyectivas (es decir, no tienen una inversa global), pero que aún pueden tener inversas locales en regiones específicas del dominio. En otras palabras, una función puede ser localmente invertible alrededor de un punto, incluso si no es invertible en todo su dominio.

- Estudio de la topología: El teorema de la función inversa está relacionado con la topología de la función, ya que impone restricciones en términos de continuidad y derivabilidad. Y la continuidad también se puede analizar desde un punto de vista topológico.

- Aplicaciones en cálculo multivariable: El teorema de la función inversa es una herramienta esencial en el cálculo multivariable, ya que facilita el cálculo de derivadas parciales y el estudio de cambios locales en funciones vectoriales. Esto es útil en campos como la física, la ingeniería y la economía, donde se analizan sistemas complejos con múltiples variables.

- Así como en la geometría diferencial y el estudio de variedades diferenciables, ya que establece que si una función diferenciable tiene un Jacobiano invertible en un punto, entonces es localmente invertible alrededor de ese punto. Este resultado es importante para entender los difeomorfismo locales.

En síntesis, el teorema de la función inversa para funciones vectoriales es una herramienta esencial para el análisis matemático y tiene aplicaciones significativas en diversas áreas, lo que lo convierte en un resultado importante en el estudio de funciones vectoriales y transformaciones en espacios métricos.

Ante esta gran importancia del teorema de la función inversa, el problema es en si, existirá la demostración por la diferenciabilidad en sentido Carathéodory del teorema de la función inversa.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Será posible demostrar mediante la diferenciabilidad en sentido Carathéodory el teorema de la función inversa para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$?

1.2.2. Problemas específicos

1. ¿Podrá construirse la diferenciabilidad en el sentido Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ desde la diferenciabilidad clásica?

2. ¿Es viable extender la diferenciabilidad en el sentido Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$?

3. ¿Es posible demostrar teoremas fundamentales del análisis para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ con la diferenciabilidad en sentido Carathéodory?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Demostrar el teorema de la función inversa para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ mediante la diferenciabilidad en sentido Carathéodory.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Construir la diferenciabilidad en el sentido Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ desde la diferenciabilidad clásica.

2. Extender la diferenciabilidad en el sentido Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

3. Demostrar teoremas fundamentales del análisis para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ con la diferenciabilidad en sentido Carathéodory.

1.4. Justificación de la investigación

La diferenciabilidad en sentido Carathéodory surgió en las últimas décadas y es una forma distinta de derivar, ya que, se basa fuertemente en el concepto de continuidad.

En este trabajo se estudia el teorema de la función inversa, además bajo que condiciones cumple este teorema con la diferenciabilidad en sentido Carathéodory; así como también, qué requisitos precisamos para demostrar por medio de dicha diferenciabilidad. En ese contexto este estudio procura generar iniciativa para adentrarse en el campo del cálculo o en otras ramas relacionadas al análisis, usando esta diferenciabilidad distinta a la clásica, se sugiere compararlas con la derivada de Frechét, la derivada de Gâteaux o por último y no menos importante, estudiar la diferenciabilidad en sentido Carathéodory para espacios Banach.

1.5. Limitaciones

La única limitación que obtuvo este trabajo es el excesivo costo de artículos.

1.6. Metodología

Tipo de investigación

El presente trabajo es de tipo básica. Además, es una investigación científica-bibliográfica.

Diseño de investigación

El diseño de esta investigación es el descriptivo - exploratorio. Por que se enfoca en describir definiciones y teoremas, además de explorar lo axiomático y teórico de libros y artículos.

Capítulo 2

Marco teórico conceptual

2.1. Antecedentes

1. (Carathéodory, 1954) introduce la diferenciabilidad desde un nuevo punto de vista al cual llamaremos diferenciabilidad en sentido Carathéodory, no obstante el trabajo de Constantin Carathéodory fue enfocado en la teoría de funciones en variable compleja donde desarrolló introducción de los números complejos, posterior a ello, teoría de funciones analíticas.

2. (Kuhn, 1991) en el artículo "The Derivative á la Carathéodory" estudia esta diferenciabilidad en sentido Carathédory, y aunque Constantin Carathéodory utiliza esta definición dentro del marco de la teoría de funciones de variable compleja, Stephen Kuhn mostró que esta definición, aplicada a funciones de variable real, facilita en gran parte el manejo demostrativo de algunos de los teoremas del cálculo diferencial, como la regla de la cadena y el teorema de la función inversa. Además uno de los objetivos de Stephen Kuhn fue promulgar en estudiantes del cálculo diferencial la diferenciabilidad en sentido

Carathéodory.

3. (Acosta et al., 1992) en el articulo "La Derivada de Carathéodory" presenta la demostración de algunos teoremas del cálculo diferencial para funciones vectoriales de variable vectorial.

4. (Acosta G and Delgado G, 1994) presenta el artículo "Fréchet vs. Caratheodory" donde la diferenciabilidad Carathéodory compara con la derivada de Fréchet además mediante un teorema demuestra su equivalencia entre ambos.

2.2. Marco teórico

2.2.1. Transformación Lineal e Isomorfismos

Definición 2.2.1. Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, T una función de V en W. Se dice que T es una transformación lineal si posee las siguientes propiedades:

(a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in V$,

(b) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ para todo $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$

(Pulino, 2012, 221).

Se denota la familia de transformaciones lineales por

$$\mathscr{L}(V, W) = \{T : V \longrightarrow W \mid T \text{ es transformación lineal}\}$$

. Cuando el espacio vectorial $W = \mathbb{K}$, T se define como una funcional lineal. A dicha funcional se denota por l. Además se define

$$V^* = \{l : V \longrightarrow \mathbb{K} \mid l \text{ es funcional lineal}\}$$

como el espacio dual de V. Este último concepto de espacio dual es importante para la diferenciabilidad observada desde el punto de vista algebraico que posteriormente se revisará.

Definición 2.2.2. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Una transformación lineal $T : V \to W$ biyectiva, se llama isomorfismo de V en W. Cuando existe un isomorfismo de V en W, se dice que son isomorfos, o que V es isomorfo a W. El isomorfismo $T : V \to V$ se denomina un automorfismo de V (Pulino, 2012, 244).

En muchas ocasiones, en el ámbito matemático, nos encontramos con la necesidad de relacionar el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con el espacio de matrices $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Esta identificación puede parecer trivial en muchas ocasiones, pero es importante comprender que se esta tratando con dos espacios vectoriales que son isomorfos, lo que significa que existe una correspondencia biunívoca entre ellos, el cual es expuesta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.3. Sean $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{M}_{n\times 1}$ espacios vectoriales, entonces $\mathbb{R}^n$ es isomorfo a $\mathbb{M}_{n\times 1}$, definido de la siguiente forma:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}$$

Definición 2.2.4. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se define la imagen de T, denotada por $\operatorname{im} T$, por $\operatorname{im} T = \{y \in W \mid y = Tx\}$. Se define el núcleo de T, denotado por $\ker T$, por $\ker T = \{x \in V \mid Tx = 0\}$(Bueno, 2006).

Teorema 2.2.5. *Sea V, W espacios vectoriales de dimensión finita. Para toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ entonces $dimV = dim(kerT) + dim(imT)$(Lages, 2009).*

Corolario 2.2.6. *Sean V, W espacios vectoriales de la misma dimensión finita n. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es inyectiva si, y solamente si, es sobreyectiva y por tanto es isomorfismo (Lages, 2009).*

Teorema 2.2.7. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces, V y W son isomorfos si, y solo si, $dimV = dimW$ (Pulino, 2012).*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $T : V \to W$ un isomorfismo, es decir, $\ker(T) = \{0_V\}$ e $\mathrm{Im}(T) = W$. Por el teorema del núcleo y de la imagen se tiene,

$$\dim V = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{im}T),$$

pero $\dim(\ker T) = 0$, entonces,

$$\dim V = \dim W.$$

($\Leftarrow$) Sean $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\gamma = \{w_1, \ldots, w_n\}$ las bases para los espacios vectoriales V y W, respectivamente. Se define la transformación lineal $T : V \to W$ de la siguiente manera:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i,$$

donde se define $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Se puede verificar que $\ker T = \{0_V\}$. De hecho, se considera un elemento $v \in \ker T$ que se escribe de manera única como:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \Rightarrow T(v) = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i = 0_W,$$

como $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es linealmente independiente, esto implica que $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Así, se verificó que T es una transformación inyectiva.

Finalmente, aplicando el teorema del núcleo y de la imagen, se tiene que

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim(\mathrm{im} T) \Rightarrow \dim(\mathrm{im} T) = n.$$

Luego, $\mathrm{im} T = W$. Por lo tanto, se demostró que T es un isomorfismo de V en W.

Definición 2.2.8. Sea V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se elige bases $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ para V y $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ para W, la *matriz asociada* a T con respecto a estas bases es la matriz $A = [a_{ij}]$ tal que:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,$$

donde a_{ij} es el coeficiente en la i-ésima fila y j-ésima columna de la matriz A.

Observación 2.2.9. *En el caso de $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$, es relevante notar que existe un par natural de bases canónicas en estos espacios vectoriales. Esto permite que el isomorfismo $\varphi : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{M}_{m\times n}$ se defina de manera única, sin necesidad de elecciones arbitrarias. En otras palabras, a cada transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ le corresponde una matriz $\varphi(A) = [a_{ij}]$, en la cual la j-ésima columna está dada por $A \cdot e_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ (Lages, 2009).*

Además, cada funcional lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ puede asociarse de manera natural con una matriz $[a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{M}_{1\times n}$ o, de forma equivalente, con un vector $(a_1, \ldots, a_n)$. Las correspondencias entre la matriz $[a_1, \ldots, a_n]$ y el funcional f tal que $f(e_i) = a_i$, así como entre el funcional f y el vector $(a_1, \ldots, a_n)$, establecen isomorfismos entre $\mathbb{M}_{1\times n}$,$(\mathbb{R}^n)^*$ y $\mathbb{R}^n$, todos determinados por la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Esta último observación es relevante tanto en el contexto de la diferenciabilidad de Fréchet como en el sentido de Carathéodory.

Nota 2.2.10. *Se utilizará la notación* $\cong$ *para indicar la existencia de un isomorfismo entre los espacios vectoriales correspondientes.*

2.2.2. Espacios Métricos y Normados

Definición 2.2.11. Una métrica en un conjunto X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ que asocia a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ un número real no negativo denotado por $d(x, y)$, llamado distancia de x a y, satisfaciendo las siguientes condiciones para cualquier $x, y, z \in X$:

1. $d(x, x) = 0$
2. Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(Lima, 1977)

Al par ordenado (X, d) se denomina espacio métrico, donde X es un conjunto y d es una distancia definida en X.

Ejemplo 2.2.12. Dado el conjunto no vacío cualquier X se define la función d_{dis} en X donde

$$d_{dis}(x) = \begin{cases} 1 & , si \quad x \neq y \\ \\ 0 & , si \quad x = y \end{cases}$$

(X, d_{dis}) es un espacio métrico, llamado espacio métrico discreto.

Ejemplo 2.2.13. Se considera $X = \mathbb{R}^n$ y además $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ elementos de X. En este contexto, se pueden definir tres métodos naturales para definir la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$:

1. Distancia Euclidiana:

$$d_u(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

   (Lima, 2008).

2. Distancia de Manhattan:

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

   (Lima, 2008).

3. Distancia Chebyshev:

$$d_\infty(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

   (Lima, 2008).

Es importante mencionar que, aunque las definiciones de estas normas se encuentran en el libro que cito, los nombres específicos de las mismas no están explícitamente mencionados en dicho libro.

Definición 2.2.14. Si X es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ (caso particular $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) la función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ se dice una norma si:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X; \forall \lambda \in k$.

3. $\|x\| = 0$ si, y solo, $x = 0$ $\forall x \in X$.

(Gourdon, 2020).

El par $(\|\cdot\|, X)$, donde $\|\cdot\|$ es una norma y X es un espacio vectorial, se llama un espacio normado o espacio vectorial normado.

Considerando a $X = \mathbb{R}^n$ como un espacio vectorial normado, las normas más conocidas son:

- Norma absoluta: $\|x\| = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Norma de Manhattan: Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{donde} \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Norma Euclidiana: Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

- p-norma: Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y para cada $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $p \geq 1$, entonces

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

- Norma del supremo: Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

Estas dos últimas normas son particulares, pues la p-norma es una generalización de la norma Euclidiana y p tiene que ser estrictamente mayor o igual a 1, es decir, es posible demostrar que para $p \in]0, 1[$ se tiene que $\|\cdot\|_p$ no es una norma. Luego para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, se tiene $\|x\|_p \xrightarrow{p \to \infty} \|x\|_\infty$.

Definición 2.2.15. Dos distancias d, d' sobre X son equivalentes si, existe $a, b > 0$ tal que $\forall x, y \in X$ cumple que,

$$a \cdot d(x, y) \leq d'(x, y) \leq b \cdot d(x, y).$$

Análogamente, dos normas $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ son sobre un espacio vectorial X son dichas equivalentes si, existe $a, b > 0$ tal que $\forall x, y \in X$ cumple que,

$$a \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \cdot \|x\|_1$$

(Gourdon, 2020).

Teorema 2.2.16. *Todas las normas en el espacio $\mathbb{R}^n$ son equivalentes*

(Bueno, 2006).

Demostración.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\| \cdot \|_0$ una norma arbitraria en el espacio $\mathbb{R}^n$. Se demostrará que esta norma es equivalente a la norma $\| \cdot \|_\infty$, dada por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Primero, defínase $\lambda := \|e_1\|_0 + \ldots + \|e_n\|_0$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\|x\|_0 = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\|_0 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\|_0 \leq \lambda \|x\|_\infty.$$

Esto muestra que la aplicación $f : (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\infty) \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = \|x\|_0$ es continua. Por lo tanto, alcanza un mínimo κ en el conjunto

$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. Además, $\kappa > 0$ porque $\| \cdot \|_0$ es una norma. Así, si $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, entonces $\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \in S$ y se tiene

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_0 \geq \kappa \implies \kappa \|x\|_\infty \leq \|x\|_0.$$

En resumen, se han demostrado las desigualdades

$$\kappa\|x\|_\infty \leq \|x\|_0 \leq \lambda\|x\|_\infty,$$

lo que demuestra que las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_0$ son equivalentes.

Entonces, para el caso de un espacio vectorial de dimensión finita, todas as normas son equivalentes. Posteriormente se utilizará estos conceptos en el sub-subcapítulo de "Diferenciabilidad de funciones vectoriales normados de dimensión finita".

Observación 2.2.17. *Todo espacio normado puede considerarse como un espacio métrico, en el que la distancia $d(x, y)$ entre x e y es $\|x - y\|$ (Rudin, 2012). Más no necesariamente se cumple lo recíproco.*

Además :

1. $0 \leq d(x, y) < \infty$ para cualquiera x e y.
2. $d(x, y) = 0$ si, y solo si, $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ para cualquiera x e y.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cualquiera x, y y z.

Es decir, en muchos casos, un espacio métrico puede ser definido en términos de una norma. Si se tiene un espacio vectorial con una norma, es posible definir una métrica utilizando la norma. Por ejemplo, en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, la norma euclidiana define una métrica $d_u(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Sin embargo, no todos los espacios métricos se pueden asociar directamente con una norma. Como el Ejemplo 2.2.12 el espacio métrico discreto, donde la distancia entre dos puntos es 1 si son diferentes y 0 si son iguales, no se puede expresar en términos de una norma. Mientras que una norma puede ser utilizada para definir una métrica en ciertos espacios, no todos los espacios métricos pueden ser descritos mediante normas. Por lo tanto, la relación entre espacios métricos y normas es más compleja y no es una implicación directa en ambos sentidos.

Ejemplo 2.2.18. (Norma euclidea) La función $x \mapsto \|x\|_2$, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, definida por

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, es una norma sobre $\mathbb{R}^n$, llamada norma euclidiana (Rudin, 2012).

Definición 2.2.19. Sea el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Una bola abierta de centro en $x_0 \in X$ y radio $r > 0$ se define como el conjunto de puntos $x \in X$ que están a una distancia menor que r de x_0:

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

(Rudin, 2012).

Definición 2.2.20. Sea el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Una bola cerrada de centro $x_0 \in X$ y radio $r > 0$ como el conjunto de puntos $x \in X$ que están a una distancia menor o igual que r de x_0:

$$B'(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

Teorema 2.2.21. *Sea $f \in \mathscr{L}(E, F)$, donde E, F son espacios vectoriales normados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es continua en E;*

2. *f es continua en 0;*

3. *f está acotada en la bola unidad cerrada $B_E(0,1)$ de E;*

4. *f está acotada en la esfera unidad $S_E(0,1)$ de E;*

5. *Existe una constante $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$;*

6. *f es lipschitziana;*

7. *f es uniformemente continua en E.*

(Gourdon, 2020)

Corolario 2.2.22. *Toda transformación lineal de la forma $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua.*

(Bueno, 2006)

Definición 2.2.23. Sea el espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Se dice que una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ es convergente a $x \in X$ (indicado como $x_k \to x$) si, para cada número natural k, la norma de la diferencia $\|x_k - x\|$ tiende a cero.

Definición 2.2.24. Si $\{x_k\}$ no converge, entonces se dice que diverge. (Apostol, 2020).

Definición 2.2.25. Dada una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Se dice que esta sucesión es de Cauchy si, para cualquier número real positivo $\epsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo par de índices k, l mayores o iguales que n_0, la distancia entre los términos x_k y x_l es menor que ϵ, es decir:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k, l \geq n_0, \quad \|x_k - x_l\| < \epsilon$$

Rudin (2012).

Esta definición establece que una sucesión es de Cauchy si, dado cualquier valor positivo ϵ, se puede encontrar un punto en la sucesión a partir del cual todos los términos subsiguientes estén dentro del radio de ϵ. En otras palabras, la sucesión se contrae en el sentido de la norma $\|\cdot\|$ a medida que avanzamos en la sucesión.

Definición 2.2.26. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Se dice que X es un espacio completo si toda sucesión de Cauchy converge en X.

Definición 2.2.27. Un espacio vectorial, normado y completo se denomina espacio de Banach (Rudin, 2012).

Observación 2.2.28. *En esta investigación, se enfoca en el espacio $\mathbb{R}^n$, que es un espacio de dimensión finita. La elección de la norma en $\mathbb{R}^n$ no afectará significativamente el estudio, ya que, según el Teorema 2.2.15, todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes. Además, es importante destacar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach, lo que significa que es un espacio normado completo, es decir, cualquier sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ converge a un punto dentro de $\mathbb{R}^n$.*

2.2.3. Continuidad de Funciones vectoriales

Definición 2.2.29. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$.

- Una vecindad de x, es un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que V contiene un abierto U con $x \in U$, es importante observar que $B(x, \epsilon)$ es un abierto, así se tiene que, V es vecindad de x, si y solo si, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset V$.
- Se dice que $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de U si para todo vecindad V de a, $V \cap U \neq \emptyset$ y $V \cap U \neq \{a\}$, lo que también se escribe como

$$(\forall \epsilon > 0), B(a, \epsilon) \cap U \neq \emptyset \text{ y } B(a, \epsilon) \cap U \neq \{a\}.$$

- Se dice que $a \in U$ es un punto aislado de U si existe un vecindario V de a tal que $V \cap U = \{a\}$, lo que también se escribe como

$$(\exists \epsilon > 0), B(a, \epsilon) \cap U = \{a\}$$

(Gourdon, 2020).

Definición 2.2.30. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función vectorial de variable vectorial se define como $f : U \to \mathbb{R}^m$ donde sus coordenadas $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$, son dadas por la relación

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in U.$$

(Lima, 1973)

Esto es:

Si a cada vector $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ le hace corresponder un vector $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$, es decir, $y = f(x)$. Más precisamente lo denominan aplicación, sin embargo en este estudio consideraremos usar el termino de función. Se utilizará la siguiente notación:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Con $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Cada f_i son funciones escalares (campos escalares), $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y se les denomina funciones componentes o proyecciones de la función vectorial f.

En adelante, las funciones vectoriales de variable vectorial, más precisamente, las funciones dadas por, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ serán llamadas solo como funciones.

Definición 2.2.31. Sea la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y a un punto de acumulación de U, $l \in \mathbb{R}^m$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \epsilon$ (Apostol, 2020).

Teorema 2.2.32. *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y a un punto de acumulación de U. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un límite l cuando x se aproxima al punto a tal que*

   $f(x) = l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$.

2. *Existen límites individuales l_i cuando x se aproxima a a para cada componente i de $f(x)$, es decir, $\exists \lim_{x \to a} f_i(x) = l_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Definición 2.2.33. Sea la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es continua en un punto $a \in U$ si para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in U$, si $\|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$ (Apostol, 2020).

Nota 2.2.34. *La definición dice exactamente que para cualquier bola $B_1(f(a), \epsilon)$ existe una bola $B_2(a, \delta)$ con $f(B_2) \subset B_1$, o equivalentemente, $f^{-1}(B_1) \supset B_1$.*

Teorema 2.2.35. *La función $f : U \to \mathbb{R}^m$ es continua en el punto $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ si, y solo si, para toda sucesión $x_k \in U$ con $\lim x_k = a$, se tiene $\lim f(x_k) = f(a)$.*

(Lima, 2008).

Teorema 2.2.36. *Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas en sus respectivos dominios U y V, donde U y V son conjuntos abiertos no vacíos en $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

- *Las funciones $f + g$ y $f - g$ son continuas en $U \cap V$.*
- *La función $f \cdot g$ (producto componente a componente) es continua en $U \cap V$.*
- *La función f/g, definida componente a componente como*

$$\left(\frac{f}{g}\right)_i (x) = \frac{f_i(x)}{g_i(x)},$$

  es continua en $U \cap V$ si $g_i(x) \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $x \in U \cap V$.

Demostración. Para demostrar la continuidad de $f+g$ en $U \cap V$, sea una sucesión $\{x_k\}$ en $U \cap V$ tal que $x_k \to x$ cuando $k \to \infty$, donde $x \in U \cap V$. Se debe mostrar que $(f + g)(x_k) \to (f + g)(x)$.

Dado que f y g son continuas en U y V, respectivamente, se tiene que:

$$f(x_k) \to f(x) \quad \text{y} \quad g(x_k) \to g(x) \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Por la propiedad de suma de límites, se concluye que:

$$(f+g)(x_k) = f(x_k) + g(x_k) \to f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

Esto implica que $f+g$ es continua en x. Dado que x es arbitrario en $U \cap V$, se concluye que $f+g$ es continua en $U \cap V$.

De manera similar, la continuidad de $f-g$ sigue directamente del hecho de que la resta es una operación continua en $\mathbb{R}^m$.

Para $f \cdot g$ (producto componente a componente), la continuidad resulta de la propiedad de que el producto de funciones continuas es continuo. Para cada componente $i = 1, \ldots, m$, se tiene:

$$(f \cdot g)_i(x_k) = f_i(x_k) \cdot g_i(x_k) \to f_i(x) \cdot g_i(x) = (f \cdot g)_i(x).$$

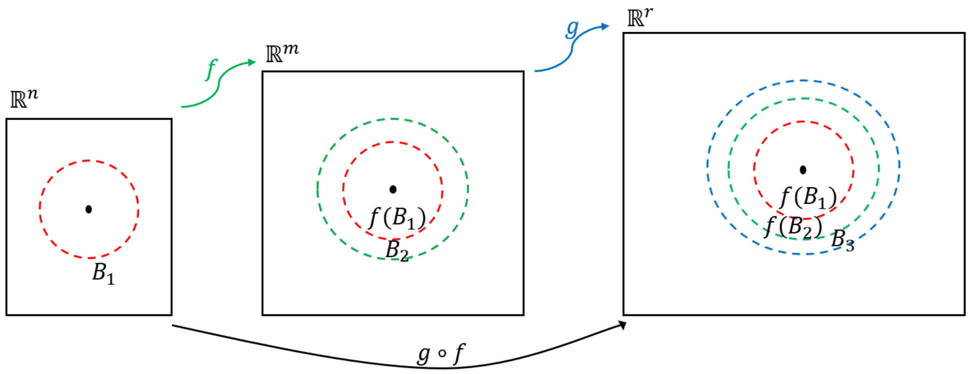
Finalmente, para f/g, se requiere la condición adicional de que $g_i(x) \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $x \in U \cap V$. Bajo esta condición, el cociente componente a componente es continuo porque la división es una operación continua siempre que el denominador no sea cero:

$$\left(\frac{f}{g}\right)_i (x_k) = \frac{f_i(x_k)}{g_i(x_k)} \to \frac{f_i(x)}{g_i(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)_i (x).$$

Por lo tanto, f/g es continua en $U \cap V$ bajo la condición de que $g_i(x) \neq 0$.

Proposición 2.2.37. *Sea $\mathbb{R}^n$,$\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^r$, tres espacios normados de dimensión finita, y sus funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^r$, $a \in \mathbb{R}^n$. Suponga que f es continua en a y g es continua en $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es continua en a. (Gourdon, 2020)*

Demostración. Sea $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ y considérese las bolas $B_2 = B(f(a)), \delta)$; $B_3 = B(g(f(a)), \epsilon)$, por hipótesis se tiene que g es continua en $f(a)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $g(B_2) \subset B_3$. Perciba que f es continua en a, entonces existe $\eta > 0$ tal que $f(B(a,\eta)) \subset B_2$ (podemos denotar $B_1 = B(a,\eta)$), luego $g(f(B_1) \subset g(B_2) \subset B_3$. Se concluye $g \circ f$ es continua en a. Para mayor entendimiento se presenta el gráfico.



Estos últimos teoremas, son fundamentales para el siguiente capítulo, pues la diferenciabilidad en sentido Carathéodory se sujeta fuertemente a la continuidad de una función, ya sea una función real de variable real o vectorial de variable vectorial.

2.2.4. Norma Matricial

Ahora se considera una norma en $\mathbb{R}^n$ y otra en $\mathbb{R}^m$. Por el Corolario 2.2.22, se sabe que las transformaciones lineales de tipo $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua, luego por el Teorema 2.2.21 es lipschitziana, es decir, existe un $c > 0$ tal que $\|A\ x\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En la desigualdad, las normas de los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no necesariamente tiene que ser los mismos, pues por el Teorema 2.2.16 las normas en espacios con esas características son equivalentes.

Ahora se estudia cuando se restringe a los vectores unitarios en $\mathbb{R}^n$, o sea, si $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\|x\| = 1$, entonces $\|Ax\| \leq c$, esto es, A transforma la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$ definida por $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ en un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^m$. Perciba que S^{n-1} es cerrado y acotado en el espacio de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ (compacto). Este caso también puede ser observado mediante la proposición “La imagen de un conjunto compacto por una aplicación continua es un conjunto compacto" (Lima, 1977, 210), es decir la imagen de S^{n-1} mediante la transformación continua A es un compacto (cerrado y acotado).

En ese contexto, dichas consideraciones permite introducir una norma en el espacio vectorial $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{nm}$. Así para cada transformación lineal $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\|A\| := \sup\{\|A\,x\| : \|x\| = 1\}$$

Proposición 2.2.38. *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal dada por la matriz $A \in M_{n\times n}(K)$. Entonces:*

(i) La aplicación $\|\cdot\| : M_{n\times n}(K) \to [0,\infty)$ es una norma;

(ii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para cualesquiera $A, B \in M_{n\times n}(K)$;

(iii) $\|A\| = \max_{\|x\|=1=\|y\|} |\langle Ax, y\rangle|$

(Bueno, 2006).

2.2.5. Diferenciabilidad de funciones vectoriales en espacios normados de dimensión finita

En esta sección se estudia brevemente la diferenciabilidad según Fréchet (clásica) de funciones vectoriales de variable vectorial finita, con la finalidad de conservar la forma de diferencial de dichas funciones o más explícitamente dichas aplicaciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Teorema 2.2.39 (Derivada como aproximación lineal)**.** *Dado un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, una función $f : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in I$, si existe una función lineal $A(h) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que la función $\varepsilon :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por la igualdad*

$$\varepsilon(h) := f(a+h) - [f(a) + A(h)]$$

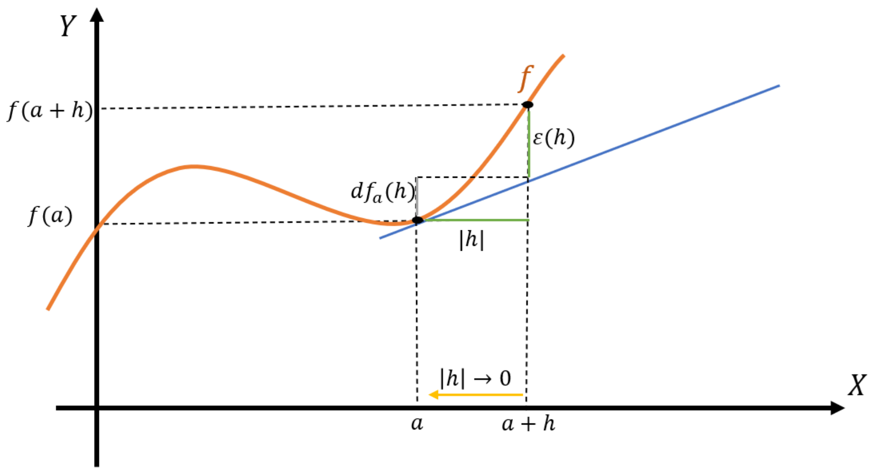
cumple

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0,$$

se tiene $A = df_a$.

En este teorema, la estructura utilizada es la de un espacio vectorial de $\mathbb{R}$. Dicho de otra forma, la función afim $h \longmapsto A(h) = f(a) + df_a h$ es la mejor aproximación de f cerca a a (A es la aproximación de f en a)

Una interpretación gráfica es:



Definición 2.2.40. Sean $E; F$ dos espacios vectoriales normados de dimensión finita, el abierto $U \subset E$, $a \in U$ y la función $f : U \longrightarrow F$. Se dice que f es **diferenciable** en a se existe una aplicación lineal $A \in \mathscr{L}(E, F)$ tal que

$$f(a + h) = f(a) + A(h) + \varepsilon(h) \ , \quad \text{con} \quad \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

(Lima, 2008).

Se verifica que si A existe, es única y se denota por $df_a = A$, llamada diferencial de f en a.

Observación 2.2.41. *La notación de diferenciabilidad no depende de las normas, en* $\mathbb{R}^n$ *se puede escoger la norma más conveniente para mostrar que* f *es diferenciable.*

Proposición 2.2.42. *Sea $f : U \subset E \longrightarrow F$ una función, U un abierto, $a \in U$ tal que f es diferenciable en a. Entonces la diferencial é única.*

Demostración

Suponga que

$$f(a+h) = f(a) + A_1(h) + \varepsilon_1(h)$$

$$= f(a) + A_2(h) + \varepsilon_2(h)$$

donde $A_1, A_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ y $\frac{\varepsilon_k(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$ con $k = 1,2$. Haciendo la diferencia, se obtiene $A_1(h) - A_2(h) + \varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h) = 0$ si y solo si $A(h) = \varepsilon(h)$ para $A = A_1 - A_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ y $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)$. Por tanto, $\frac{A(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$. Pero para cualquier $t > 0$, $\frac{A(th)}{\|th\|} = \frac{tA(h)}{t\|h\|} = \frac{A(h)}{\|h\|}$

Para h fijo y $t \to 0$ se tiene que $\frac{A(h)}{\|h\|} = \frac{A(th)}{\|th\|} \xrightarrow{t\to 0} 0$. Finalmente $A = 0$ y $A_1 = A_2$

Derivadas Parciales

Definición 2.2.43. Sea $f : U \subset E \longrightarrow F$ una función (U abierto, E, F dos espacios vectoriales normados de dimensión finita), y sean $a \in U$ un punto, $v \in E$ un vector y $\varphi : t \in I \subset \mathbb{R} \longmapsto f(a+tv) \in F$ una función. Se dice que f es diferenciable en dirección al vector v, si φ es diferenciable en $t = 0$. El vector $\varphi'(0) \in F$ se llama derivada de f en dirección de v en a.

Proposición 2.2.44. *Si f es diferenciable en a, entonces para cualquier vector $v \in E$, f es derivable en a en la dirección v. Además de eso, la derivada es $df_a(v)$.*

Nota 2.2.45. *En caso $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.*

Si $v = e_i = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{i\text{ -ésima coordenada}}, 0, \cdots, 0)$, entonces $df_a(e_1)$ puede ser calculada usando $\varphi(t) = f(a, \cdots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \cdots, a)$, o sea, fijando todas las coordenadas menos la i-ésima. Se obtiene así la derivada $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Definición 2.2.46. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la función definida en el abierto U. Se dice que la derivada parcial de f con respecto a x_i, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe en $a \in U$, si f es derivable en a en dirección e_i, y ponemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{d}{dt}(f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+t}, a_{a+1}, \cdots, a_n))$$

(Gourdon, 2020)

Es decir, las derivadas parciales son las derivadas en dirección al vector canónico del espacio vectorial estudiado.

Proposición 2.2.47. *Sea la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida en el abierto U. Si f es diferenciable en $a \in U$, entonces*

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

donde $h = (h_1, \cdots, h_n)$(Gourdon, 2020).

Observación 2.2.48. *Si f es diferenciable en a, entonces f es diferenciable en todas las direcciones, y esto último implica que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$ existen.*

Se debe tener cuidado, ya que las funciones que tienen derivadas parciales, no necesariamente son diferenciables, tampoco las funciones que tienen derivadas direccionales.

La matriz Jacobiana de df_a en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ está dada por

$$J_a f = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{M}_{m \times n}.$$

Teorema 2.2.49. *La función $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el punto $a \in U$ (U abierto), si y solamente si, cada una de sus funciones coordenadas $f_1, \cdots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en ese punto.(Lima, 2008)*

Definición 2.2.50. La función $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida en el abierto U. Se dice que f es diferenciable en U cuando es diferenciable en todos los puntos de U (Lima, 2008).

Teorema 2.2.51. *Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ definida en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es diferenciable y la aplicación derivada $df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ es continua;*

2. *Las funciones-coordenada $f_1, \ldots, f_m : U \to \mathbb{R}$ de la aplicación f tienen derivadas parciales continuas $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$;*

3. *Para cada $v \in \mathbb{R}^n$, existe la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x)$ en cualquier punto $x \in U$ y la aplicación $\dfrac{\partial f}{\partial v} : U \to \mathbb{R}^m$ es continua.*

Observación 2.2.52. *Se dice que la aplicación $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de **clase** $\mathscr{C}^1$ en el abierto U cuando la función f cumple una de las (y por su equivalencia todas) condiciones del Teorema 2.2.51, también se le conoce a f como **continuamente diferenciable**.*

Proposición 2.2.53. *Sean $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones definidas en el abierto U, diferenciables en $a \in U$. Entonces*

- *$f + g$ es diferenciable en a y*

$$d(f+g)_a = df_a + dg_a$$

- *Para cada escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es diferenciable en a y*

$$d(\lambda f)_a = \lambda df_a$$

(Gourdon, 2020).

Proposición 2.2.54. *Sean los abiertos* $U \subset \mathbb{R}^n$*,* $V \subset \mathbb{R}^m$ *y* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *,* $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$*, con* $f(U) \subset V$*,* $a \in U$*. Si que* f *es diferenciable en* $a \in U$ *y* g *diferenciable en* $b = f(a) \in V$*, entonces* $(g \circ f)$ *es diferenciable en* a *y*

$$d(g \circ f)_a = dg_b \cdot df_a$$

(Gourdon, 2020).

Equivalentemente la regla de la cadena para derivadas parciales es:

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

Definición 2.2.55. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y V un abierto de $\mathbb{R}^m$. Una biyección $f : U \to V$ se llama un difeomorfismo de U sobre V cuando es diferenciable y su inversa $f^{-1} : V \to U$ también es diferenciable (Lima, 2008).

Por otro lado, se llama **difeomorfismo local** a la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida en el abierto U, tal que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ existe $W \subset U$ vecindad abierta de x, y $V \subset \mathbb{R}^n$ vecindad abierta de $f(x)$ tal que $f|_W : W \longrightarrow V$ sea un difeomorfismo

A continuación se presenta el teorema de la función inversa o también conocida como el teorema de inversión local.

Teorema 2.2.56. *Sea la función* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida en el abierto* U *de clase* $\mathscr{C}^1$ *y* $a \in U$ *tal que* $df_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *sea un isomorfismo (o equivalentemente* $det(J_a f) \neq 0$*). Entonces* f *es un difeomorfismo local.*

Observación 2.2.57. *Si* f *tiene un inverso* f^{-1} *diferenciable, entonces* $f^{-1} \circ f = id$ *luego por la regla de la cadena* $(df^{-1})_{f(a)} \circ (df)_a = id$*.*

Capítulo 3

Diferenciabilidad en sentido Carathéodory y el teorema de la función inversa

3.1. Derivada clásica

En esta sección se formula la derivada de una función real de variable real en sentido clásico. Con las definiciones y teoremas de diferenciabilidad para funciones reales de variable real esencialmente como nos da Cauchy, típicamente se presenta de la siguiente forma.

Definición 3.1.1. (**Derivada clásica**) Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función real de variable real definida en el intervalo abierto I, donde I contiene al punto x_0, la derivada de f en x_0 denotada como $f'(x_0)$, se define como el límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(Apostol, 2020).

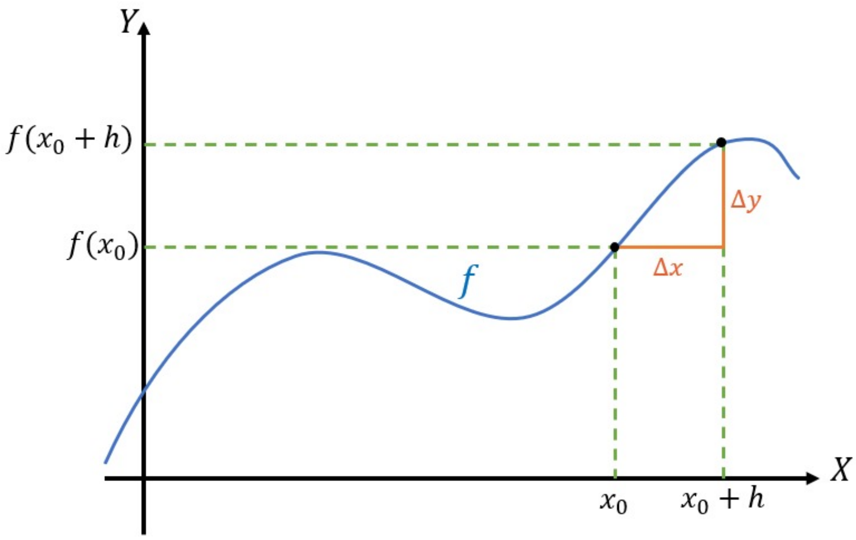


Figura 3.1: Derivada clásica de una función real de variable real f en el punto x_0.

La pendiente es fundamental en la definición 3.1.1, pues si se recuerda la pendiente para la gráfica de la figura 3.1 está formulada como

$$m := \frac{\triangle\, y}{\triangle\, x}$$

estas variaciones en el eje Y y eje X son equivalentes a

$$\triangle\, y = f(x_0+h) - f(x_0) \quad ; \quad \triangle\, x = h.$$

Reescribiendo la pendiente

$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Ahora para que los puntos $(x_0, f(x_0)$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ se aproximen lo más cerca posible, es necesario $h \to 0$, así se obtiene

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

evidentemente la existencia del límite en un punto x_0 es una condición necesaria para que la función f sea derivable en ese punto.

Para $\triangle x = x - x_0$. La definición 3.1.1 es equivalente a

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si el límite existe.

Constantin Carathéodory (1873 – 1950) en su publicación "THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE", define la diferenciabilidad en una sola pagina (Carathéodory, 1954, 119), apoyándose fuertemente en la continuidad de funciones, cabe resaltar que estas funciones que estudió son de la forma $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, sin embargo dicho estudio es también válido para funciones reales de variable real.

A continuación se realiza la construcción de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory para funciones reales de variable real, con conceptos de un espacio topológico euclidiano (o también conocida como la topología usual) para trabajar con sus abiertos y con la ayuda de una gráfica se obtiene algunas observaciones importantes que son distintas a la derivada clásica, así finalmente llegar a una definición formal de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory para funciones reales de variable real.

3.2. Construcción de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory

En esta sección se construye la diferencial en sentido Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, para posteriormente usar esta nueva forma de diferenciar para aplicar en demostraciones de algunos teoremas de suma importancia en el contexto de análisis matemático I, finalmente se ejemplifica este subcapítulo.

Sea el abierto $U \subset \mathbb{R}$, y $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.

Con el fin de obtener una referencia más completa, se emplea el siguiente gráfico.

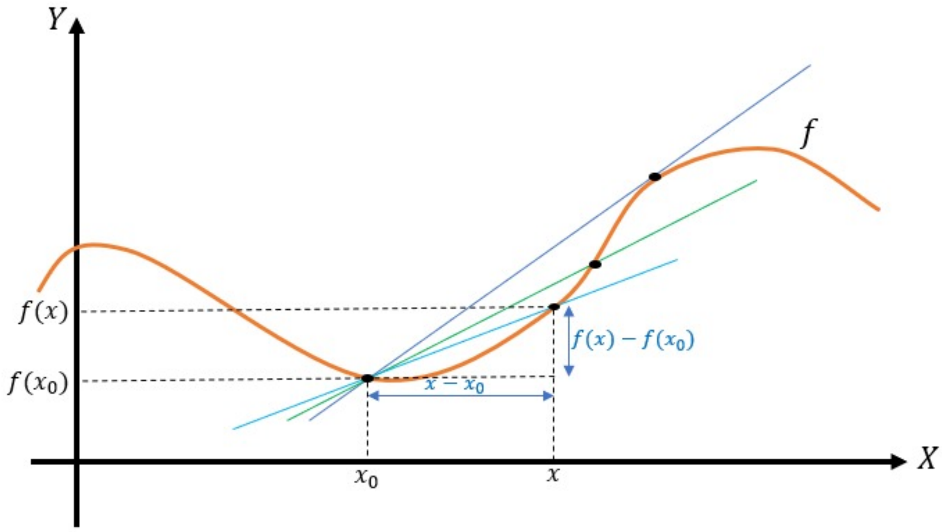


Figura 3.2: Derivada en sentido Carathéodory.

En la Figura 3.2, se observa que para la gráfica de la función f existe infinidad de rectas secantes que pasen por el punto $(x_0, f(x_0))$, pues x no es un punto fijo. Ahora se considera dos puntos de la función $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$, hallando su pendiente se obtiene la función ϕ_f ya definida.

Así se construye la función ϕ_f, que será la **función de las pendientes de las rectas**

secantes a la gráfica f **en el punto** $(x_0, f(x_0))$, donde x_0 es un punto fijo de U.

$$\phi_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x \in U - \{x_0\}$$

a dicha función ϕ_f la se llama **función Carathéodory** y se define como:

Definición 3.2.1. Sea la función $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el abierto U y x_0 un punto fijo en U y $M = \{m \in \mathbb{R} : m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\}$. Se llama **función Carathéodory** de la función f en el punto x_0, denotada por $\phi_f(x, x_0)$ o $\phi_f(x_0)$ a la función $\phi_f(x_0) : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ expresada por $\phi_f(x_0) = \phi_f(x, x_0) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;$\forall x \in U \backslash \{x_0\}$

Observación 3.2.2. *A continuación se presenta las siguientes observaciones:*

- *La función $\phi_f(x_0)$ es una función discontinua removible en el punto $x = x_0$ para la función f.*

- *Los valores $\phi_f(x, x_0) = \phi_f(x_0)$;$\forall x \in U \setminus \{x_0\}$ son las pendientes de las rectas secantes de la gráfica de f en el punto x_0 para $x \in U$, cuando x se aproxime a x_0.*

- *Si existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ y $\phi(x, x_0)$ es continua en $x = x_0$, se denotará por $\phi_f(x_0, x_0)$, donde $\phi_f(x_0 x_0)$ es la pendiente de la reta tangente a f en el punto $f(x_0)$.*

- *En lo que se sigue la función Carathéodory $\phi_f(x, x_0)$ se denotará simplemente por $\phi_f(x)$ teniendo en cuenta que $\phi_f(x)$ depende de x_0.*

- *Dado $\phi_f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;$\forall x \in U \setminus \{x_0\}$, se tiene:*

  $$\lim_{x \to x_0} \phi_f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

  Si existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ entonces se escribe:

  $$\lim_{x \to x_0} \phi_f(x) = \phi_f(x_0).$$

Nota 3.2.3. *El enfoque que le da Carathéodory a la Derivada, es que ahora se tiene una función a la cual se está denominando ϕ_f en el cual está directamente relacionado con la continuidad.*

Es decir, la existencia de la pendiente de la recta tangente a la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$ está vinculada a la presencia de una discontinuidad removible en x_0 para la función ϕ. Este hecho conduce a la definición que sigue.

Definición 3.2.4. (**Diferenciabilidad en sentido Carathéodory**) Sea la función $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el abierto U. Se dice que f es diferenciable en $x_0 \in U$, **en sentido Carathéodory**, si existe una función $\phi_f(x)$ continua en x_0 que satisface la relación

$$f(x) - f(x_0) = \phi_f(x, x_0)(x - x_0) \ , \quad \forall\, x \in U$$

(Carathéodory, 1954).

El número $\phi_f(x_0, x_0)$ es la derivada de Carathéodory de f en x_0.

Esto es:

f es diferenciable en sentido Carathéodory en $x_0 \in U$, si y solamente si,
$\exists\ \phi_f(x)$ tal que $f(x) - f(x_0) = \phi_f(x)(x - x_0)$; $\forall x \in U$.

Observación 3.2.5. *Consecuencias inmediatas de esta definición son:*

(i) Si f es diferenciable en x_0 entonces existe ϕ_f continua en x_0 tal que

$$f(x) = \phi_f(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

puesto que el producto y la suma de funciones continuas es otra función continua, por consiguiente f es continua en x_0, es decir, si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

(ii) Como ϕ_f tiene una discontinuidad removible, es posible definirla como:

$$\phi_f(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & si \quad x \neq x_0 \\ \\ \phi_f(x) & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

(iii) Si f es diferenciable en sentido Carathéodory en x_0, existe al menos una función ϕ_f que satisface la Definición 3.2.4 además, si $f'(x_0)$ (Derivada clásica) existe,

$$f'(x_0) = \phi_f(x_0).$$

Nota 3.2.6. *En lo que se sigue la diferenciabilidad en sentido Carathéodory se mencionará solo como diferenciabilidad denotada por ϕ_f, análogamente cuando se mencione derivada hace referencia a derivada en sentido Carathéodory. La otra diferenciabilidad de Fréchet denotada por df_a, se expresará explícitamente.*

Teorema 3.2.7. ***(Regla de la cadena)*** *Sean las funciones $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : V \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas en los abierto U, V respectivamente; diferenciables en $x_0 \in U$ y $f(x_0) = x_1 \in V$. Entonces $h = g \circ f$ es diferenciable en x_0, y*

$$\phi_h(x_0) = \phi_g(f(x_0))\phi_f(x_0)$$

(Kuhn, 1991).

Demostración

Sea $x \in U$ y $f(x) \in V$, luego dado que f es diferenciable en x_0, entonces de acuerdo a la Definición 3.2.4, siendo así, existe un ϕ_f tal que

$$f(x) - f(x_0) = \phi_f(x)(x - x_0)$$

análogamente se obtiene para la función diferenciable g en x_1, esto es:

$$g(x) - g(x_1) = \phi_g(x)(x - x_1).$$

Como $h = g \circ f$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) \\ &= \phi_g(f(x))(f(x) - f(x_0)) \\ &= (\phi_g \circ f)(x)(f(x) - f(x_0)) \\ &= (\phi_g \circ f)(x)\phi_f(x)(x - x_0). \end{aligned}$$

Dado que la composición y el producto de funciones continuas es otra función continua, se concluye que $(\phi_g \circ f)(x)\phi_f(x)$ es continua en $x_0 \in U$ y $f(x_0) \in V$. se tiene así $h = g \circ f$ es diferenciable, en donde

$$\phi_h(x_0) = \phi_g(f(x_0))\phi_f(x_0).$$

□

Teorema 3.2.8. ***(Teorema de la Función Inversa)*** *Sea $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto U que contiene a x_0 y se asume que $\phi_f(x_0)$ existe y es distinto de cero.*
Entonces $g = f^{-1}$ es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ y

$$\phi_g(y_0) = \frac{1}{\phi_f(x_0)}$$

(Kuhn, 1991).

Demostración.

Una función f continua y estrictamente monótona en un intervalo abierto U no tiene saltos ni retrocesos, lo que asegura que cada valor en el dominio se corresponde con uno y solo uno en el rango. Así se garantiza que f es inyectiva, luego f es invertible localmente en el abierto U.

Por otro lado f es diferenciable en x_0, entonces $f(x) - f(x_0) = \phi_f(x)(x - x_0)$ $\forall x \in U$ con ϕ_f continua y por hipótesis se tiene $\phi_f(x_0) \neq 0 \ \forall \ x_0 \in U$. Sea V el abierto con $dom(g) = V$ (dominio de g igual a V), entonces

$$y - y_0 = f(g(y)) - y_0$$

pues g es la inversa de f y la composición de estas funciones es la identidad, además

$$f(g(y)) - y_0 = f(g(y)) - f(x_0)$$

y como f es diferenciable, se tiene

$$f(g(y)) - f(x_0) = \phi_f(g(y))[g(y) - x_0]; \quad \forall y \in V.$$

Así

$$[g(y) - g(y_0)] = \frac{1}{\phi_f(g(y))}(y - y_0); \quad \forall y \in V,$$

por el teorema de la función inversa continua [1] g es continuo en V, entonces $\dfrac{1}{\phi_f(g(y))}$ es también continua en V. Por consiguiente

$$g(y) = \frac{1}{\phi_f(x)}; \quad \forall x \in U \wedge \forall y \in V.$$

$\square$

Teorema 3.2.9. ***(Álgebra de las derivadas)*** *Sean $f, g : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dos funciones definidas en el abierto U, diferenciables en $x_0 \in U$, además dado un $k \in \mathbb{R}$ (k constante), entonces:*

[1] El teorema de la función continua dice que, suponga que $f : I \to J$ es una función continua y estrictamente monótona creciente (decreciente), donde I y J son intervalos reales, entonces la función inversa $g = f^{-1}$ también es continua y estrictamente monótona creciente (decreciente) en J.

i) $\phi_{kf+g} = k\phi_f + \phi_g \quad ; \quad en\ x_0 \in U.$

ii) $\phi_{f\cdot g} = \phi_f \cdot g + f \cdot \phi_g \quad ; \quad en\ x_0 \in U.$

iii) $\phi_{\frac{f}{g}} = \dfrac{\phi_f \cdot g - f \cdot \phi_g}{g^2} \quad ; \quad g \neq 0 \quad ; \quad en\ x_0 \in U.$

Demostración.

Como f y g son diferenciables en $x_0 \in U$, entonces existe las funciones continuas ϕ_f, ϕ_g respectivamente, tal que

$$f(x) - f(x_0) = \phi_f(x)(x - x_0)$$

$$g(x) - g(x_0) = \phi_g(x)(x - x_0)$$

considerando esa hipótesis, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{i) } (kf+g)(x) - (kf+g)(x_0) &= kf(x) + g(x) - kf(x) - g(x_0) \\ &= k[f(x) - f(x_0)] + (g(x) - g(x_0)) \\ &= k[\phi_f(x)(x - x_0)] + \phi_g(x)(x - x_0) \\ &= [k\phi_f(x) + \phi_g(x)](x - x_0), \end{aligned}$$

como el producto de un escalar con una función continua es otra función continua, además la suma y producto de funciones continuas es otra función continua, por consiguiente $k\phi_f(x) + \phi_g(x)$ es continua en $x_0 \in U$.

Por lo tanto $kf + g$ es diferenciable además,

$$\phi_{kf+g} = k\phi_f + \phi_g \quad ; \quad \forall x_0 \in U.$$

ii) $$\begin{aligned}(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0) &= f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)\\ &= f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x_0)+f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)\\ &= f(x)\cdot[g(x)-g(x_0)]+g(x_0)\cdot[f(x)-f(x_0)]\\ &= f(x)\cdot[\phi_g(x)\cdot(x-x_0)]+g(x)\cdot[\phi_f(x)\cdot(x-x_0)]\\ &= [\phi_f\cdot g(x_0)+f(x)\cdot\phi_g(x)](x-x_0),\end{aligned}$$

con el mismo análisis anterior, se tiene que $\phi_f\cdot g(x_0)+f(x)\cdot\phi_g(x)$ es continua en $x_0\in U$, entonces $f\cdot g$ es diferenciable, además

$$\phi_{f\cdot g}=\phi_f\cdot g+f\cdot\phi_g \quad ; \quad \forall x_0\in U.$$

iii) $$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) &= \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\\ &= \frac{f(x)\cdot g(x_0)}{g(x)\cdot g(x_0)}-\frac{f(x_0)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)}+\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)}-\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)}\\ &= \frac{g(x)\cdot f(x)-f(x_0)\cdot g(x)-[f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x_0)]}{g(x)\cdot g(x_0)}\\ &= \frac{[f(x)-f(x_0)]\cdot g(x)-[g(x)-g(x_0)]\cdot f(x)}{g(x)\cdot g(x_0)}\\ &= \frac{[\phi_f(x)\cdot(x-x_0)]\cdot g(x)-f(x)\cdot[\phi_g(x)\cdot(x-x_0)]}{g(x)\cdot g(x_0)}\\ &= \frac{[\phi_f(x)]\cdot g(x)-f(x)\cdot[\phi_g(x)]}{g(x)\cdot g(x_0)}\cdot(x-x_0)\end{aligned}$$

análogamente se tiene $\dfrac{[\phi_f(x)]\cdot g(x)-f(x)\cdot[\phi_g(x)]}{g(x)\cdot g(x_0)}$ que es continua en $x_0\in U$, por consiguiente $\dfrac{f}{g}$ con $g\neq 0$ es continua en $x_0\in U$, además

$$\phi_{\frac{f}{g}}=\frac{\phi_f\cdot g-f\cdot\phi_g}{g^2} \quad ; \quad g\neq 0 \quad ; \quad \forall x_0\in U.$$

$\square$

La demostración de los teoremas básicos en el cálculo por esta forma de derivar funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ revela que hay una notable simplicidad y elegancia, esta afirmación se hace referencia al aspecto axiomático, más no en el aspecto del cálculo;

pues para el calculo de derivadas en el sentido Carathéodory es necesario algunos artificios tediosos. La aplicación de este enfoque proporciona un marco conceptual que simplifica la comprensión y la prueba de resultados fundamentales en el ámbito de la diferenciabilidad. La naturaleza intuitiva y estructurada del método Carathéodory facilita la exposición clara de los argumentos, permitiendo una asimilación más fluida de los conceptos y resultados. Este enfoque demuestra ser una herramienta valiosa para abordar problemas complejos desde lo axiomático, destacando lo bonito (referencia a lo grato a la vista desde el punto de vista matemático axiomático) de la teoría diferenciable en sentido Carathéodory. A continuación se muestran algunos ejemplos del cálculo de derivadas (claramente para funciones reales).

Ejemplo 3.2.10. Sea la función $f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y U es un abierto, la derivada de la función f en el punto $x_0 \in U$, es

$$\phi_f(x_0) = nx_0^{n-1}.$$

En efecto,

$$f(x) - f(x_0) = x^n - x_0^n$$

por el álgebra elemental, se tiene la identidad

$$x^n - x_0^n = (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})(x - x_0)$$

así la función ϕ_f toma la forma de

$$\phi_f(x) = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

donde ϕ_f es continua en $x_0 \in U$ (por ser un polinomio), además el número $\phi_f(x_0, x_0)$ es la derivada de Carathéodory de f en x_0 (valga la redundancia), entonces

$$\phi_f(x_0) = x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + x_0^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

es decir,

$$\phi_f(x_0) = nx_0^{n-1}.$$

Ejemplo 3.2.11. Sea $g : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = k$, donde U es un abierto, la derivada de la función g en el punto $x_0 \in U$, es

$$\phi_g(x_0) = 0.$$

En efecto,

$$f(x) - f(x_0) = k - k = 0$$

pero

$$f(x) - f(x_0) = 0 \cdot (x - x_0)$$

así la función ϕ_g toma la forma de la función cero

$$\phi_g(x) = 0$$

sin embargo ϕ_g es continua, pues la función cero es continua en todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Por consiguiente

$$\phi_g(x_0) = 0.$$

Ejemplo 3.2.12. Sea $h : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función, definida por $h(x) = ln(x)$ donde U es un abierto, la derivada de la función h en el punto $x_0 \in U$ con $x_0 > 0$ es

$$\phi_h(x_0) = \frac{1}{x_0}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
f(x)-f(x_0) &= \ln(x)-\ln(x_0)\\
&= \frac{\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\\
&= \frac{1}{x-x_0}\cdot\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\cdot(x-x_0)\\
&= \frac{1}{x-x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{x}{x_0}-1\right)\cdot(x-x_0)\\
&= \frac{1}{x-x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)\cdot(x-x_0)\\
&= \frac{1}{x-x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{x-x_0}}\right)\cdot(x-x_0)\\
&= \frac{1}{x_0}\cdot\frac{x_0}{x-x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{x-x_0}}\right)\cdot(x-x_0)\\
&= \frac{1}{x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{x-x_0}}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}\cdot(x-x_0).
\end{aligned}$$

llegando a obtener $\phi_h(x)$ como candidato a la derivada de $f(x) = ln(x)$ con $x_0 > 0$, definida como:

$$\phi_h(x) = \frac{1}{x_0}\cdot ln\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{x-x_0}}\right)^{\left(\frac{x_0}{x-x_0}\right)},$$

sin embargo, ϕ_h tiene una discontinuidad removible, por la Observación 3.2.5 ítem (ii) es posible redefinirla por:

$$\phi_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_0}\cdot ln\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{x-x_0}}\right)^{\left(\frac{x_0}{x-x_0}\right)} & ,\text{si} \quad x \neq x_0. \\ \\ \frac{1}{x_0} & ,\text{si} \quad x = x_0, \end{cases}$$

Ahora se tiene que ϕ_h es continua en $x = x_0$, entonces

$$\phi_h(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

Así, se puede seguir ejemplificando este capitulo de la diferenciabilidad en sentido Carathédory.

En el comentario de Kunh “Si la alternativa de Carathéodory fuera lo suficientemente poderosa como para demostrar teoremas como los anteriores, pero demasiado potente o engorrosa para manejar los resultados de cálculos más tempranos de la materia, sería menos probable que la introdujéramos”(Kuhn, 1991), hace referencia a la enseñanza, pues Stephen Kuhn trabajó la diferenciabilidad en sentido Carathéodory con un enfoque pedagógico. Sin embargo se coincide que, dicha diferenciabilidad también resalta la idea de la elegancia matemática. Aunque la alternativa de Carathéodory puede gestionar con facilidad los conceptos básicos del cálculo, la elección entre métodos clásicos y enfoques más abstractos puede depender de la eficiencia y la claridad conceptual. Aquí, la elegancia matemática se interpreta como la capacidad de abordar problemas con la menor complejidad posible, sin sacrificar rigor.

3.3. Extensión de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory

En (Acosta et al., 1992) extiende la diferenciabilidad en sentido Carathéodory para funciones vectoriales de variable vectorial. Sin embargo, en esta sección se profundiza este concepto, desglosándolo y desarrollándolo de manera detallada para funciones vectoriales. Este enfoque tiene como finalidad clarificar las condiciones haciendo que la diferenciabilidad en sentido de Carathéodory sea más accesible y comprensible para el lector.

La forma más conocida de estudiar esto es mediante la introducción de la derivada total como aproximación lineal de la función en un punto. Esto corresponde a la definición de derivada de Fréchet estudiada en la sección 2.2.5. Diferenciabilidad de funciones vectoriales en espacios normados de dimensión finita. No obstante la presente investigación tiene como finalidad encontrar otra forma de diferenciar funciones vectoriales de variable vectorial (dimensión finita) por ello se estudia la "Construcción de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory para funciones vectoriales normados de dimensión finita"

Se observa que una interpretación conveniente de la Definición 3.2.4 permite extender la derivada de Carathéodory a funciones vectoriales.

3.3.1. Construcción de la diferenciabilidad en sentido Caratheódory para funciones vectoriales normados de dimensión finita

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y a un punto en $\mathbb{R}^n$. Se da la interpretación a la expresión

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x - a).$$

Se identifica $f(x)-f(x_0)$ con un vector columna de $\mathbb{R}^m$ y $x-a$ con un vector columna de $\mathbb{R}^n$. Así $\phi_f(x)$ se puede interpretar como la matriz $m \times n$, que se identifica con el espacio $\mathbb{M}_{m\times n}$ de matrices reales $m \times n$. Para que la Definición 3.2.4 tenga sentido para f, se tiene la siguiente definición.

Definición 3.3.1. Sea la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en a, en sentido Carathéodory, si existe $\phi_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{M}_{m\times n}$ continua en a y satisface la siguiente relación para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x - a).$$

Si ϕ_f existe y es continua en a, $df(a) = \phi_f(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (Acosta et al., 1992).

Esto es:

f es diferenciable en $a \in \mathbb{R}$ (en el sentido Carathéodory), si y solamente si,
$\exists\ \phi_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{M}_{m\times n}$, tal que $f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x - a)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Si se estudia ϕ_f asumiendo que existe y es continua en a, se observa el siguiente comportamiento:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|\phi_f(x) - \phi_f(a)\| < \epsilon$, se gráfica para mayor comprensión.

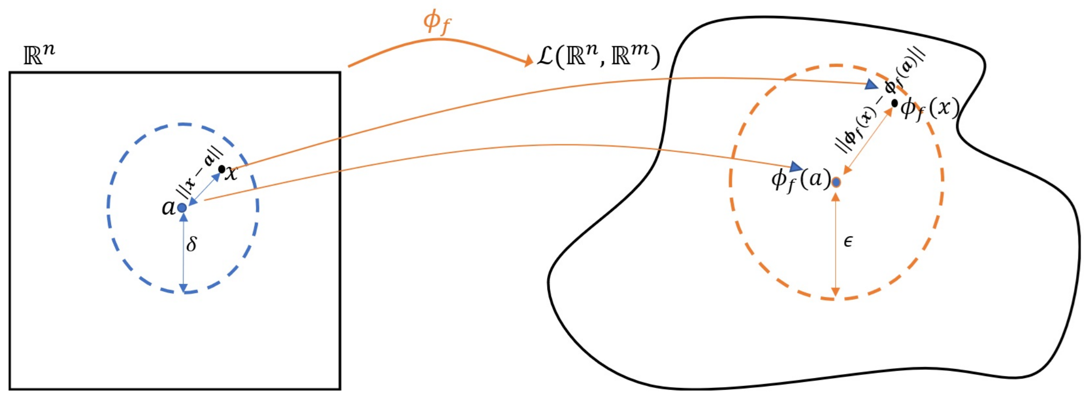


Figura 3.3: Continuidad de ϕ_f en a.

En la Figura 3.3 se observa que la continuidad de ϕ_f es equivalente a estudiar la diferenciabilidad localmente en un abierto o una vecindad.

Observación 3.3.2. *Se percibe que la función $\phi_f(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, además por el Corolario 2.2.22 es continua.*

Es importante no confundir ϕ_f con $\phi_f(a)$. La función ϕ_f es un candidato a ser la diferenciabilidad en sentido Carathéodory y será diferenciable cuando sea continua, mientras que $\phi_f(a)$ es continua independientemente de la continuidad de ϕ_f.

Nota 3.3.3. *$df(a)$ hace referencia a la derivada Fréchet, planteada en el anterior capítulo de forma resumida y $\phi_f(a)$ hace referencia a la diferencial en sentido Carathéodory en el punto a, además esa última equivalencia fue demostrada en (Acosta G and Delgado G, 1994). Sin embargo en en la investigación se trabaja con la diferencial en sentido Carathéodory (valga la redundancia). Se observa que la Definición 3.3.1es para funciones vectoriales de variable vectorial con dichos vectores que sean de dimensión finita; para este estudio del tipo, funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.*

La expresión de la Definición 3.3.1 es similar a la expansión lineal (Definición 3.2.4) de una función diferenciable en el caso de funciones escalares, pero aquí se está tratando con funciones vectoriales y matrices. La matriz $\phi_f(x)$ se conoce como la matriz Jacobiana de f en el punto x (posteriormente se da su notación), y la continuidad de ϕ_f garantiza la continuidad de la aproximación lineal en el sentido de Carathéodory.

En resumen, la diferenciabilidad en el sentido de Carathéodory establece que la función f puede aproximarse linealmente cerca del punto a mediante la multiplicación de la matriz Jacobiana $\phi_f(x)$ por la diferencia $x - a$, y esta aproximación es continua en a.

Por otro lado, la matriz Jacobiana $\phi_f(x)$ en el contexto de la diferenciabilidad en el sentido de Carathéodory es una matriz $m \times n$, donde m es la dimensión del codominio de la función f y n es la dimensión del dominio de f.

Si la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el sentido de Carathéodory en un punto $a \in \mathbb{R}^n$, entonces la matriz Jacobiana $\phi_f(x)$ en ese punto está definida por las derivadas parciales de las componentes de f con respecto a las variables de x. La entrada en la fila i y columna j de la matriz Jacobiana es la derivada parcial de la i-ésima componente de f con respecto a la j-ésima variable de x.

La notación común para la matriz Jacobiana es la siguiente:

$$\phi_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Si esta matriz existe y es continua en a, entonces la función f es diferenciable en a en el sentido de Carathéodory.

Observación 3.3.4. *La matriz Jacobiana es continua en un punto si todas sus de-*

rivadas parciales son continuas en ese punto. Más formalmente, sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial definida por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, donde $x \in \mathbb{R}^n$. La matriz Jacobiana $\phi_f(x)$ en el punto x es:

$$\phi_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

La matriz Jacobiana $\phi_f(x)$ es continua en x si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ son continuas en x para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Es decir, la continuidad de la matriz ϕ_f se basa en la continuidad de sus componentes individuales, que son las derivadas parciales de las componentes de la función vectorial f observadas en dicho punto.

Cabe resaltar que, cuando se introduce el estudio del Jacobiano ϕ_f no se considera en el cálculo de la derivada de Carathéodory, pues para desarrollar dicho cálculo es más tedioso con respecto a la factorización o similitudes de expresiones, por ello es necesario resaltar que, en el enfoque de este estudio es, solamente axiomático a pesar de contener algunos ejemplos del cálculo.

Por otro lado, según la Definición 3.3.1, una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en un punto $a \in \mathbb{R}^n$ en el sentido de Carathéodory si existe una función $\phi_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{M}_{m\times n}$ continua en a tal que:

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x - a).$$

Se observa que *df* (diferenciabilidad Fréchet) es única, pues se demostró en la

Proposición 2.2.42.

Luego la existencia de ϕ_f garantiza la diferenciabilidad de f en a. Sin embargo, la unicidad de ϕ_f no está garantizada por la definición. Es decir, puede haber múltiples funciones ϕ_f que cumplan con la condición de diferenciabilidad en el sentido de Carathéodory para un mismo punto a. La unicidad de ϕ_f es una cuestión adicional que no se aborda directamente en la definición.

Para ilustrar esto, se considera el siguiente ejemplo donde se explora la diferenciabilidad de una función específica en un punto dado.

Ejemplo 3.3.5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = xy$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= xy - ab \\ &= bx - ab + xy - bx \\ &= b(x - a) + x(y - b) \\ &= (b, x)(x - a, y - b), \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= xy - ab \\ &= xy - ay + ay - ab \\ &= y(x - a) + a(y - b) \\ &= (y, a)(x - a, y - b), \end{aligned}$$

teniendo así

$$\phi_f(x, y) = (b, x) \quad \text{y} \quad \psi_f(x, y) = (y, a).$$

Es decir, ϕ_f y ψ_f son dos funciones de pendiente diferente para f en (a, b). Por ello es necesario garantizar la unicidad de las funciones auxiliares ϕ_f y ψ_f.

Teorema 3.3.6. ***(Unicidad)*** *Si $\phi_f, \psi_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{M}_{m\times n}$ son dos funciones continuas en $a \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen las siguientes condiciones para f en a:*

$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x-a) \quad y \quad f(x) - f(a) = \psi_f(x)(x-a)$

entonces,

$$\phi_f(a) = \psi_f(a)$$

(Acosta G and Delgado G, 1994).

Demostración.

Se tiene que ϕ_f y ψ_f son dos funciones continuas en a que satisfacen:

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x-a)$$

$$f(x) - f(a) = \psi_f(x)(x-a).$$

Por otro lado, sea $g(x) = \phi_f(x) - \psi_f(x)$, entonces

$$g(x)(x-a) = 0.$$

Además

$$\begin{aligned} \|g(a)(x-a)\| &= \|g(a)(x-a) - g(x)(x-a)\| \\ &= \|(g(a) - g(x))(x-a)\| \\ &\leq \|g(a) - g(x)\|\|x-a\| \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$\left\| g(a)\frac{x-a}{\|x-a\|} \right\| \leq \|g(a) - g(x)\|.$$

Como ϕ_f y ψ_f son funciones continuas en a, entonces g es continua en a, se concluye que $g(a) = 0$ y luego $\phi_f(a) = \psi_f(a)$. $\square$

Este teorema es fundamental para la diferenciabilidad en sentido Carathéodory, ya que establece que si la función ϕ_f existe en un punto a, entonces esta es única. La unicidad de ϕ_f en el punto a proporciona una base sólida para el análisis y las aplicaciones posteriores dentro de esta teoría. Es de suma importancia notar que la demostración de este teorema no solo es rigurosa y completa, sino que también se caracteriza por su simplicidad y elegancia, lo que la hace sorprendentemente accesible incluso para aquellos que se están iniciando en el estudio de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory.

Teorema 3.3.7. ***(Linealidad)*** *Sean las funciones $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$ y dados los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es diferenciable en a y*

$$\phi_{(\alpha f+\beta g)}(a) = \alpha\phi_f(a) + \beta\phi_g(a)$$

(Acosta G and Delgado G, 1994).

Demostración.

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces existen ϕ_f y ψ_g, respectivamente, que satisfacen para f y g la condición de diferenciabilidad según Carathéodory, es decir,

$$f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x - a)$$

$$g(x) - g(a) = \psi_g(x)(x - a),$$

luego

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha(f(x) - f(a)) + \beta(g(x) - g(a)) \\ &= \alpha\phi_f(x)(x - a) + \beta\psi_g(x)(x - a) \\ &= [\alpha\phi_f(x) + \beta\psi_g(x)](x - a).\end{aligned}$$

Como el producto de un escalar con una función continua es otra función continua, además la suma y producto de funciones continuas es otra función continua, por consiguiente,

$$\phi_{(\alpha f+\beta g)}(a) = \alpha\phi_f(a) + \beta\phi_g(a).$$

$\square$

Teorema 3.3.8. ***(Regla de la cadena)*** *Sean las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^r$. Si f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en a y*

$$\phi_{(g\circ f)}(a) = \phi_g(f(a))\phi_f(a)$$

(Acosta G and Delgado G, 1994).

Demostración.

Como f es diferenciable en a, existe $\phi_f(x)$ tal que $f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x - a)$, análogamente, g es diferenciable en $f(a)$, $g(x) - g(a) = \phi_g(x)(x - f(a))$. Entonces

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= \phi_g(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= \phi_g(f(x))\phi_f(x)(x - a), \end{aligned}$$

donde ϕ_f es la función derivada para f en a y ϕ_g es una función derivada para g en $f(a)$. Dado que ϕ_g es continua en $f(a)$ y ϕ_f es continua en a, por la Proposición 2.2.37 se tiene que $g \circ f$ es continua en a. Luego

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = [\phi_g(f(x))\phi_f(x)](x - a),$$

se concluye

$$\phi_{(g\circ f)}(a) = \phi_g(f(a))\phi_f(a). \qquad \square$$

Teorema 3.3.9. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el abierto U. Si f es diferenciable en $a \in U$ y $f(a)$ es un valor extremo, entonces $\phi_f(a) = 0$*

(Acosta G and Delgado G, 1994).

Demostración.

Dado que $a \in U$ y es tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in U$, pues $f(a)$ es un valor extremo, además f es diferenciable en a. Entonces, existe una función continua ϕ_f definida en a definida por $\phi_f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{M}_{1\times n}$ tal que,

$$0 \leq f(x) - f(a) = \phi_f(x)(x-a), \quad \text{para todo } x \in U. \tag{3.1}$$

Sea h un punto fijo en $\mathbb{R}^n$, y dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño que cumple que $a+th \in U$ para todo $t \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle$. Por (3.1), se tiene

$$0 \leq f(a+th) - f(a) = \phi_f(a+th)(a+th-a);$$

$$0 \leq \phi_f(a+th)(th), \quad \text{para todo } t \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle.$$

$$0 \leq \phi_f(a+th)h \ , \quad \text{para } t > 0;$$

y

$$0 \geq \phi_f(a+th)h \ , \quad \text{para } t < 0.$$

Dado que ϕ_f es continua en a, se tiene que $\phi_f(a)h = 0$, pero h es cualquier valor arbitrario; entonces $\phi_f(a) = 0$. □

Este teorema expone una condición esencial para los puntos de valor extremo en el contexto de funciones diferenciables. La demostración ilustra cómo la diferenciabilidad en a y la condición de ser un valor extremo implican que la función derivada $\phi_f(a)$ debe ser cero. Esto se debe a que, en un entorno de a, la función f no puede aumentar ni disminuir en ninguna dirección, lo que se traduce en que la derivada direccional de f en a debe ser nula. La técnica empleada en la demostración, que utiliza la aproximación lineal y evalúa en direcciones arbitrarias, establece una conexión efectiva entre la diferenciabilidad y las condiciones de extremos locales.

A continuando, se ilustra el proceso mediante algunos ejemplos de cálculo de derivadas en sentido Carathéodory (valga la redundancia).

Ejemplo 3.3.10. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2, y^2)$. Demostrar que f es diferenciable en un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Para ello,

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a,b) &= (x^2, y^2) - (a^2, b^2) \\ &= (x^2 - a^2, y^2 - b^2) \\ &= ((x-a)(x+a), (y-b)(y+b)) \\ &= \begin{bmatrix} x+a & 0 \\ 0 & y+b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, ϕ_f toma la forma:

$$\phi_f(x,y) = \begin{bmatrix} x+a & 0 \\ 0 & y+b \end{bmatrix}$$

y es candidato a ser la derivada en el punto (a, b), sin embargo es necesario ver la continuidad de esta matriz en dicho punto (lo cual cumple), entonces

$$\phi_f(a,b) = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix}$$

es la derivada de la función f en el punto (a, b).

Ejemplo 3.3.11. Se analisa como actúa de derivada Carathéodory a una transformación lineal. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y $a \in \mathbb{R}^n$, como f es lineal, entonces goza de las propiedades:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

luego

$$f(x) - f(a) = f(x-a),$$

Por lo tanto, en este caso, $\phi_f(x) = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La matriz $\phi_f(x)$ que relaciona la diferencia en la imagen de f con la diferencia en la entrada x es simplemente la propia función lineal f.

En términos de la definición de la derivada de Carathéodory, esto implica que f es diferenciable en cualquier punto a y la derivada de f en a (denotada como ϕ_f) es simplemente la función lineal f. En notación matricial, se puede expresar como: $\phi_f = f$.

En resumen, para funciones lineales, la derivada de Carathéodory es simplemente la función lineal misma, y la matriz $\phi_f(x)$ es constante e igual a la función f.

Ejemplo 3.3.12. Sea la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (2x + 3y, -x + 4y).$$

Ahora, para un punto arbitrario $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, se asume la diferencia $f(x, y) - f(a_1, a_2)$ y se trata de factorizarla como $f(x - a_1, y - a_2)$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) - f(a_1,a_2) &= \begin{bmatrix} 2x+3y \\ \\ -x+4y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a_1+3a_2 \\ \\ -a_1+4a_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2(x-a_1)+3(y-a_2) \\ \\ -(x-a_1)+4(y-a_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a_1 \\ \\ y-a_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

En este caso, la matriz que aparece es constante y representa la función lineal f. La derivada de Carathéodory en cualquier punto a es simplemente la matriz que define la función lineal:

$$
\phi_f(a) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.
$$

Por lo tanto, en este ejemplo, f es diferenciable en cualquier punto a y la derivada de f en a es la misma función lineal f representada por la matriz $\phi_f(a)$.

Además la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada a la función lineal $f(x,y) = (2x+3y, -x+4y)$.

3.4. Teorema de la función inversa

El teorema de la función inversa es un resultado fundamental del cálculo y el análisis matemático. Se aplica a funciones $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pues necesariamente se trabaja con una matriz cuadrada, además las funciones como f son continuas y diferenciables en un conjunto abierto U. El teorema establece condiciones bajo las cuales la función es invertible localmente. Formalmente, si el Jacobiano de f en un punto $\mathbf{a}$ es no singular[2], entonces existen entornos V y W de $\mathbf{a}$ y $f(\mathbf{a})$ respectivamente, donde f es un difeomorfismo[3], y la inversa f^{-1} también es continua y diferenciable.

Para incorporar el concepto de diferenciabilidad en sentido Carathéodory en la demostración del teorema de la función inversa, es imperativo ampliar la noción de diferenciabilidad de un punto a la diferenciabilidad en un conjunto abierto. Este proceso implica considerar no solo las derivadas en un punto específico, sino también el comportamiento diferenciable en un entorno alrededor de dicho punto.

La diferenciabilidad en sentido Carathéodory se convierte entonces en un requisito esencial para garantizar que, no solo en un punto singular, sino en un conjunto abierto, la función muestre propiedades diferenciales coherentes. Este enfoque más amplio permite abordar de manera más efectiva las variaciones locales de la función en el conjunto abierto, proporcionando así una base sólida para aplicar el teorema de la función inversa de manera más generalizada.

Extendiendo la diferenciabilidad para un abierto, se define.

Definición 3.4.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función definida en el abierto U. Se dice que f es diferenciable en U si para cada $y \in U$ hay una función pendiente ϕ_y para f en y, satisfaciendo $f(x) - f(y) = \phi(x, y)(x - y)$. En tal caso, se escribe $\phi(x, y) = \phi_y(x)$

(Acosta G and Delgado G, 1994).

Definición 3.4.2. (**Continuamente diferenciable**) Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una

[2]El Jacobiano J se considera no singular en $\mathbf{a}$ si su determinante $\det(J)$ no es cero. Esto implica que la matriz es invertible.

[3]Una función $f : U \to V$ es un difeomorfismo si es biyectiva, continua, su inversa existe y es continua, y ambas son diferenciables.

función definida en el abierto U, x e y puntos de U.

Se dice que f es **continuamente diferenciable** en U si existe la función continua

$$\psi : U \times U \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{M}_{m\times n},$$

tal que,

$$f(x) - f(y) = \psi(x, y)(x - y)$$

(Acosta G and Delgado G, 1994)

En resumen:

f es continuamente diferenciable en U, si y solamente si,
$\exists\, \psi : U \times U \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}$ continua tal que $f(x) - f(y) = \psi(x, y)(x - y)$, $\forall x, y \in U$.

Cabe señalar que por la Observación 2.2.52 cuando se estudia la diferenciabilidad en sentido de Fréchet (df), f es continuamente diferenciable si poseía algunos de los items del teorema 2.2.51. Para este caso cuando se meciona de diferenciabilidad en sentido Carathéodory ϕ_f es continuamente diferenciable si cumple lo establecido en esta definición.

Análogamente, si se asume que ψ existe y es continua en el abierto U, se tiene:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$\|(x', y') - (x, y)\| < \delta \Longrightarrow \|\psi(x', y') - \psi(x, y)\| < \epsilon$, se gráfica para mayor comprensión.

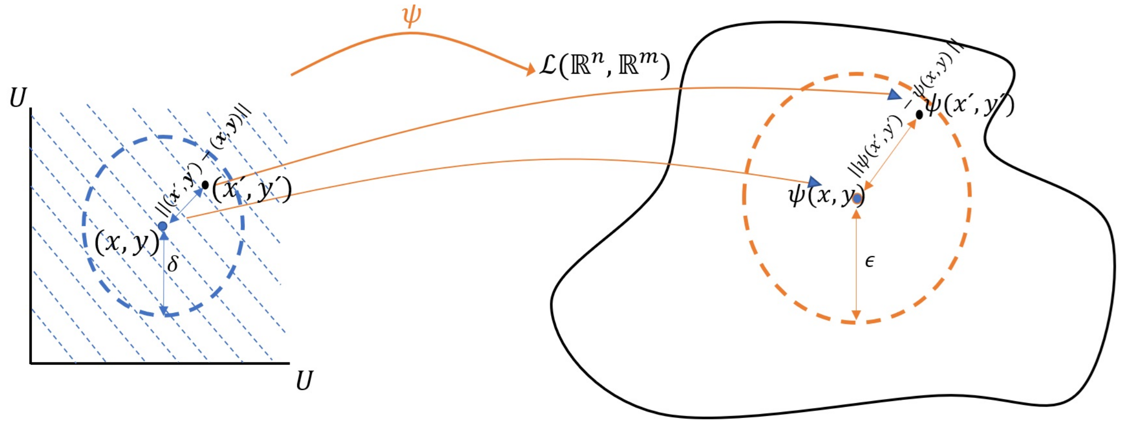


Figura 3.4: Continuidad de ψ en U.

Teorema 3.4.3. *(**Teorema de la función inversa**) Sea la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida en el abierto U y $a \in U$. Si f es continuamente diferenciable en U y $\det \psi(a, a) \neq 0$ para $a \in U$, entonces existen vecindades V de a y W de $f(a)$ tales que $f^{-1} : W \longrightarrow V$ existe, es continuamente diferenciable y*

$$\phi_{(f)^{-1}}(f(a)) = [\phi_f(a)]^{-1}$$

(Acosta G and Delgado G, 1994).

Demostración.

La prueba se da en las siguientes afirmaciones:

a) f es inyectiva en alguna vecindad de a.

b) Imagen de f localmente está en alguna vecindad de $f(a)$.

c) f^{-1} es continuamente diferenciable en alguna vecindad de $f(a)$.

Además, se observa por la hipótesis que,

- f es continuamente diferenciable $\Longleftrightarrow \exists \psi : UxU \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ continua en $(x, y) \in U \times U$, tal que

$$f(x) - f(y) = \psi(x, y)(x - y) \; ; \; \forall x, y \in U,$$

- $\psi(x,y)$ es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$.

- $\det\psi(a,a) \neq 0 \Longleftrightarrow \psi(a,a)$ es un isomorfismo.

- $\psi^{-1}(x,y)$ es continua y acotada en R^n.

Afirmación a) <u>f es inyectiva en alguna vecindad de a.</u>

De hecho, por la continuidad de ψ existe una vecindad V de a tal que $\det\psi(x,y) \neq 0$ para todo $x, y \in V$, además de eso por las observaciones dadas $\psi(x,y)$, $\psi^{-1}(x,y)$ son continuas y limitadas uniformemente.

Note que dados $x, y \in V$ tal que $x \neq y$,

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad (x-y) \neq 0 \\
&\Longrightarrow \quad \psi(x,y)(x-y) \neq 0 \\
&\Longrightarrow \quad f(x) - f(y) \neq 0 \\
&\Longrightarrow \quad f(x) \neq f(y),
\end{aligned}$$

luego $f|_V$ es inyectiva.

Afirmación b) <u>Imagen de f localmente está contenida en una vecindad de $f(a)$.</u>

Se define $B_1 \doteq B_1(a,r)$ donde $r > 0$, como $\partial B_1 \doteq \overline{B_1} \setminus \mathring{B}_1$ es cerrado y f es continua entonces $f(\partial B_1)$ es compacto.

Por la afirmación a), $f|_v$ es inyectiva, así $f(a) \notin f(\partial B_1)$.

Se considera la distancia $d \doteq \|f(a) - f(\partial B_1)\|$ y la bola $B_2 \doteq B_2(f(a), \frac{d}{2})$.

Fijando $y \in B_2$, se define:

$$\begin{aligned}
g|_{\overline{B_1}} : \overline{B_1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto g|_{\overline{B_1}} = g(x) \doteq \|y - f(x)\|^2
\end{aligned}$$

- $g|_{\overline{B_1}}$ es continua.

- $\overline{B_1}$ es compacto.

Entonces $g|_{\overline{B_1}}$ alcanza un mínimo para algún $x_0 \in \overline{B_1}$, note que $x_0 \notin \partial B_1$. Luego,

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) =& \|y - f(x)\|^2 - \|y - f(x_0)\|^2 \\ =& \underbrace{(2y - f(x) - f(x_0)) \cdot \psi(x, x_0)}_{=:\varphi \text{ (continua)}}(x - x_0) \end{aligned}$$

Así, en x_0 alcanza un extremo local y g es diferenciable por el Teorema 3.3.9 , se tiene

$$\varphi(x_0, x_0) = (2y - f(x_0) - f(x_0))\psi(x_0, x_0) = 2(y - f(x_0))\psi(x_0, x_0) = 0$$

entonces $y = f(x_0)$ donde $x_0 \in \overline{B_1}$ y $y \in B_2$.

Luego $Im(f) \subset W$ donde W es una vecindad de $f(a)$.

Afirmación c : f^{-1} es continuamente diferenciable en una vecindad de $f(a)$.

Defina $W \doteq f^{-1}(B_2) \cap B_1$ y $f : W \longrightarrow B_2$ es biyectiva localmente, así $f^{-1}|_{B_2} : B_2 \longrightarrow W$. Dados $z, w \in B_2$. Se considera $f^{-1}(z) = x$ e $f^{-1}(w) = y$ para $x, y \in W$. Sustituyendo en la expresión:

$$f(x) - f(y) = \psi(x, y)(x - y),$$

se tiene

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(z)) - f(f^{-1}(w)) =& [\psi(f^{-1}(z), f^{-1}(w)](f^{-1}(z) - f^{-1}(w)) \\ id(z) - id(w) =& [\psi(f^{-1}(z), f^{-1}(w))](f^{-1}(z) - f^{-1}(w)) \\ f^{-1}(z) - f^{-1}(w) =& \underbrace{[\psi(f^{-1}(z), f^{-1}(w))]^{-1}}_{\text{continua}}(z - w) \quad ; \quad [\psi(f^{-1}(z), f^{-1}(w))] \neq 0. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\phi_{f^{-1}}(f(a)) = [\psi(f^{-1}(z), f^{-1}(w))]^{-1} = (\phi_f(a))^{-1}. \qquad \square$$

Conclusiones

- Por medio medio de la diferenciabilidad en sentido Carathéodory, se demuestra el teorema de la función inversa para funciones vectoriales de variable vectorial, específicamente para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

- A partir de la derivada clásica se construyó la diferenciabilidad en sentido Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

- Se extendió la diferenciabilidad en sentido Carathéodory para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ cuidando conceptos básicos como vectores de dimensión finita y sus propiedades que gozan. Esta conclusión respalda la aplicabilidad de la diferenciabilidad Carathéodory en contextos más generales y complejos.

- Utilizando la diferenciabilidad en sentido Carathéodory, se demuestra teoremas fundamentales del análisis. Estos teoremas no solo validan la teoría desarrollada, sino que también ofrecen herramientas analíticas prácticas para abordar problemas específicos en este ámbito.

Recomendaciones

1. Se recomienda tener en cuenta que, aunque la aplicación del concepto de diferenciabilidad en el sentido de Carathéodory para demostrar los teoremas fundamentales del cálculo, tanto para funciones reales como para funciones vectoriales, puede ser relativamente sencilla (en su mayoría), el cálculo de derivadas y la resolución de ejercicios prácticos en este enfoque específico pueden resultar significativamente más complicados. Por lo tanto, es recomendable prestar especial atención a los detalles de los cálculos y utilizar las herramientas adecuadas para manejar la complejidad de los mismos.

2. Se sugiere desarrollar la diferenciabilidad en sentido de Carathéodory en los cursos de análisis matemático de la escuela profesional de matemática. Esta perspectiva ofrecería a los estudiantes una nueva forma de estudiar la diferenciabilidad.

3. Se recomienda tener un conocimiento previo en álgebra lineal, topología básica y análisis matemático antes de abordar la demostración del teorema de la función inversa.

4. Se recomienda extender la diferenciabilidad en sentido Carathéodory para funciones en espacios de Banach.

Referencias

Acosta, E., Delgado, C., and Rodríguez, C. (1992). La derivada de carathéodory. *Matemáticas Enseñanza Universitaria*, 2(2):31–38.

Acosta G, E. and Delgado G, C. (1994). Fréchet vs. carathéodory. *The American Mathematical Monthly*, 101(4):332–338.

Apostol, T. M. (2020). *Análisis matemático.* Reverté.

Bueno, H. P. (2006). Álgebra linear-um segundo curso, volume 06 of textos universitários.

Carathéodory, C. (1954). Theory of functions of a complex variable, vol. i.

Gourdon, X. (2020). Les maths en tête: Analyse.

Kuhn, S. (1991). The derivative á la carathéodory. *The American Mathematical Monthly*, 98(1):40–44.

Lages, E. (2009). Algebra linear. *IMPA, Rio de Janeiro.*

Lima, E. L. (1973). *Variedades diferenciáveis.* Number 15. Impa.

Lima, E. L. (1977). Espaços métricos, projeto euclides. *São Paulo, SP, Brasil*, 954:165.

Lima, E. L. (2008). Curso de análise, vol. 2, projeto euclides. *Rio de Janeiro: IMPA*.

Pulino, P. (2012). Algebra linear e suas aplicaçoes notas de aula. *Campinas: Universidade Estadual de Campinas.*

Rudin, W. (2012). *Análisis funcional.* Reverté.