



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRIA EN MATEMÁTICAS

TESIS

**DESCRIPCIÓN POR TEORIA DE REDES Y SIMULACIÓN DE
RUTAS DE TRANSPORTE EN EL CASCO URBANO DE LA
CIUDAD DEL CUSCO 2023**

**PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
MATEMÁTICAS**

AUTOR

Br. HILARION CHIRME CABALLERO

ASESOR

Dr. EPIFANIO PUMA HUAÑEC

CODIGO ORCID: 0000-0002-2592-7967

CUSCO – PERÚ

2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, Asesor del trabajo de investigación/tesis titulada: DESCRIPCIÓN POR TEORÍA DE REDES Y SIMULACIÓN DE RUTAS DE TRANSPORTE EN EL CASCO URBANO DE LA CIUDAD DEL CUSCO 2023

presentado por: BX. HILARION CHIRME CABALLERO con DNI Nro.: 4213/622 presentado por: con DNI Nro.: para optar el título profesional/grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 2 veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 9%.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera página del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 13 de FEBRERO de 2024



Firma

Post firma EPIFANIO PUMA HUANAC

Nro. de DNI 23.861.131

ORCID del Asesor 0000-0002-2592-7967

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: oid: 27259;330861220

NOMBRE DEL TRABAJO

**DESCRIPCIÓN POR TEORIA DE REDES Y
SIMULACIÓN DE RUTAS DE TRANSPORT
E EN EL CASCO URBANO DE LA CIUDAD**

AUTOR

HILARION CHIRME CABALLERO

RECUENTO DE PALABRAS

23308 Words

RECUENTO DE CARACTERES

119207 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

128 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

19.1MB

FECHA DE ENTREGA

Feb 13, 2024 10:44 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Feb 13, 2024 10:46 AM GMT-5**● 9% de similitud general**

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 8% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 4% Base de datos de trabajos entregados
- 1% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

● Excluir del Reporte de Similitud

- Material bibliográfico
- Material citado
- Material citado
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 10 palabras)

DEDICATORIA

Con todo mi amor y cariño a Dios, por situarme en la senda del bien, iluminando cada paso de mi vida, por bendecirme con salud, la esperanza...

Con mucho cariño a mis padres, hermanas, familiares, amigos, colegas, y en especial para mi compañera de la vida YOBANA; quienes siempre confiaron en mí, brindándome su apoyo incondicional día a día.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi gratitud a los docentes del Departamento Académico de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco por haberme proporcionado sus habilidades e indicarme el camino hacia el Estudio y la superación.

Agradezco a la plana Docente del Departamento Académico de Ciencias Básicas de la Universidad nacional Amazónica de Madre de Dios, quienes siempre confiaron en mí.

INTRODUCCIÓN

Este estudio implica la aplicación de los conocimientos de la teoría redes al estudio del tránsito de unidades vehicúlales en el centro de la ciudad del Cusco, esta investigación gira en torno a la optimización de los recursos como son el tiempo y costos; por ende, nuestro problema radica en la posibilidad de simular y optimizar un sistema de transporte urbano, de tal modo que se logre sujetar los tiempos y costos en cuanto a la movilización.

En el capítulo I, se precisa los potenciales problemas que componen nuestro problema, y estos se encuentran en el documento denominado “Plan Regulador de Rutas de Transporte Público Urbano 2012” (Municipalidad Provincial del Cusco, 2012), tales como son:

- 1) Falta de nuevas rutas de tránsito a partir de la reorganización de las rutas que ya existen tomando en cuenta el crecimiento poblacional.
- 2) Falta de recursos para organizar adecuadamente los paraderos del transporte público de pasajeros.
- 3) Escasas rutas para clientes del transporte público.
- 4) Oferta excesiva de vehículos de baja capacidad de transporte.
- 5) Hay demasiados taxis. El 55% de estas viaja sin pasajeros a determinados momentos del día.
- 6) La dirección de las empresas de transporte no cuenta con planes de desarrollo a largo plazo.
- 7) Competencia entre rutas.
- 8) Atasco en el Centro Histórico.
- 9) Las condiciones para los peatone son malas y a veces peligrosas.
- 10) Ampliación de espacios para estacionar por parte del transporte turístico que operan en los mismos horarios.
- 11) El diseño anormal de las rutas provoca accidentes en la ciudad.

Por tal motivo, el objetivo primordial de este trabajo el cual será “Simular y optimizar un sistema de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, que logre reducir tiempos y costos de movilización, por intermedio de teoría de redes.

En el capítulo II, procedemos a proporcionar definiciones de la teoría de grafos y también algunos conceptos importantes relacionados con la simulación del transporte en nuestra área de estudio, las que serán de gran utilidad al momento de analizar los descriptivamente los datos de estudio.

Primeramente, se registrará del flujo de vehículos que transitan en las arterias del casco urbano, dichos estudios serán el eje principal de nuestro trabajo de indagación.

En el capítulo III y el capítulo IV se muestra el desarrollo del proceso de dar solución a los objetivos, para nuestro estudio se tomó como punto de focalización el área central de la ciudad del Cusco. Para esta tesis se usará el método deductivo, deductivo porque permite determinar los diferentes tipos de realidad, las cuales estudian ya sea como resultado de los enunciados que se incluyen en proposiciones y definiciones frecuentes que se han formulado previamente. Y el nivel de estudio es descriptivo y explicativo, puesto que caracterizaremos un hecho del sistema de transporte público centro de la ciudad del Cusco, para establecer su comportamiento con respecto a su recorrido.

RESUMEN

Este trabajo tiene su soporte sobre teoría de redes, su fundamento principal es, la aplicación de esta teoría en el campo del transporte público, con el fin de reducir los tiempos y costos de movilización dentro del centro de la ciudad del Cusco. En el capítulo I, se encuentra el objetivo primordial de este trabajo el cual será “Simular y optimizar un sistema de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, que logre reducir tiempos y costos de movilización, por intermedio de teoría de redes”, el capítulo II apreciamos conceptos sobre teoría de redes, algoritmos, simulación, optimización y algoritmo de Dijkstra. El capítulo III y el capítulo IV se muestra el desarrollo del proceso de dar solución a los objetivos, el estudio propiamente se realizará en el centro de la ciudad del Cusco.

En conclusión, el trabajo de investigación tiene un nivel descriptivo y explicativo, puesto que caracterizaremos un estudio del sistema de transporte público en el centro de la ciudad del Cusco, para establecer su comportamiento con respecto a su recorrido.

Palabras claves: algoritmos, optimización, simulación, sistema, transporte, conectividad, accesibilidad, centralidad.

ABSTRACT

This work has its support on network theory, its main foundation is the application of this theory in the field of public transport, in order to reduce travel times and costs within the center of the city of Cusco. In Chapter I, we find the main objective of this work which will be "To simulate and optimize a transportation system in the urban center of the city of Cusco, which manages to reduce travel times and costs, through network theory", in Chapter II we appreciate concepts about network theory, algorithms, simulation, optimization and Dijkstra's algorithm. Chapter III and Chapter IV show the development of the process of solving the objectives, the study itself will be carried out in the center of the city of Cusco.

In conclusion, the research work has a descriptive and explanatory level, since we will characterize a study of the public transport system in the center of the city of Cusco, to establish its behavior with respect to its route.

Keywords: algorithms, optimization, simulation, system, measurements, connectivity, accessibility, centrality

INDICE

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD DEL PROBLEMA.....	1
1.1.1. Descripción general de las empresas	2
1.1.2. Transporte urbano	7
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	9
1.2.1. Problema general	9
1.2.2. Problemas específico	9
1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	9
1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	10
1.4.1. Objetivo general.....	10
1.4.2. Objetivos específicos	10
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	10
2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.....	10
2.1.1 Antecedentes internacionales.....	11
2.1.2 Antecedentes nacionales	14
2.1.3 Antecedentes locales.....	16
2.2. BASES TEÓRICAS FILOSÓFICAS	18
2.3. MARCO LEGAL DEL TRANSPORTE PÚBLICO	19
2.4. TEORÍA DE GRAFOS.....	20
2.4.1. El grafo	20
2.4.2. Conceptos básicos	20
2.4.3. Matrices asociadas a los grafos.....	27
2.4.4. Isomorfismo de grafos	29
2.5. TEORÍA DE REDES	32
2.6. ALGORITMOS	34
2.6.1. Clasificación de los algoritmos.....	34
2.6.2. Características de los algoritmos	35
2.6.3. Representación de algoritmos	35
2.7. ALGORITMO DE DIJKSTRA	38
2.7.1. Algoritmo De Dijkstra	38
2.8. SIMULACIÓN	40
2.8.1. Sistema.....	40
2.8.2. Modelo	40
2.8.3. Tipos e modelos	40
2.8.4. Simulación	41
2.8.5. Fases para iniciar una simulación	42
2.8.6. Tipos De Simulación	42
2.8.7. Proceso de simulación se un sistema	43
2.8.8. Errores en Simulación.....	43
2.9. TRANSPORTE.....	45
2.10. DEFINICIONES DE TRÁFICO	46
2.10.1. La Intensidad en el tráfico (i).....	46
2.10.2. Densidad De Tráfico (K).....	47

2.10.3.	Velocidad (V).....	48
2.10.4.	Intervalo (h)	48
2.10.5.	Espaciamiento (\bar{S})	49
2.10.6.	Modelos de flujo Ininterrumpido.....	49
2.10.7.	Relaciones velocidad, densidad e intensidad.....	49
2.10.8.	Relaciones intensidad y densidad	52
2.11.	OPTIMIZACIÓN.....	54
2.12.	MOVILIDAD Y TRANSPORTE EN ÁREAS URBANAS	54
2.13.	MEDIDAS DE CONECTIVIDAD.....	55
2.13.1.	Índice Beta	55
2.13.2.	Índice gamma.....	55
2.13.3.	Índice gamma %	56
2.13.4.	Número Ciclomático.....	56
2.13.5.	Índice alfa	56
2.14.	MEDIDAS DE ACCESIBILIDAD	56
2.14.1.	Matriz de Conectividad.....	56
2.14.2.	Matriz topológicamente accesible.	57
2.14.3.	Índice Koning	57
2.14.4.	Índice de Shimbel (SHI)	57
2.14.5.	Índice de Dispersión (G).....	58
2.14.6.	Índice de Accesibilidad Media (IAM)	58
2.14.7.	Índice Omega.....	58
2.15.	MEDIDA DE CENTRALIDAD.....	59
2.15.1.	Centralidad Media.....	59
2.16.	SOFTWARE GRAFO	59
2.16.1.	Análisis y casos.....	60
CAPÍTULO III: HIPÓTESIS.....		62
3.1.	HIPÓTESIS	62
3.1.1.	Hipótesis General.....	62
3.1.2.	Hipótesis Específica.....	62
CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA.....		63
4.1.	NIVEL DE INVESTIGACIÓN	63
4.2.	TÉCNICA DE INVESTIGACIÓN.....	63
4.3.	TIPO DE INVESTIGACIÓN	63
4.4.	MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN.....	63
4.5.	ÁMBITO DE ESTUDIO	64
4.5.1.	Localización y ubicación	64
4.5.2.	Población y Muestra de estudio	65
4.5.3.	Técnicas de recolección de datos.....	66
4.5.4.	Delimitación del área de estudio.....	66
CAPÍTULO V: RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....		67
5.1.	ALGORITMO DE DIJKSTRA	67
5.1.1.	Descripción	67

5.2.	TÉCNICAS APLICADAS: SOFTWARE Y HARDWARE.....	68
5.3.	TEORÍA DE REDES Y SISTEMAS DE INFORMACIÓN GEOGRÁFICA	68
5.4.	RED VIAL DEL CENTRO DE LA CIUDAD DEL CUSCO.....	69
5.4.1.	Delimitación y simbolización del espacio de trabajo	72
5.4.2.	Nodos o Vértices.....	74
5.4.3.	Arcos o Aristas.....	76
5.4.4.	Matriz de adyacencia	82
5.5.	RESULTADOS MEDIDAS DE CONECTIVIDAD.....	82
5.6.	RESULTADOS DE MEDIDAS DE ACCESIBILIDAD.....	85
5.7.	RESULTADOS DE MEDIDAS DE CENTRALIDAD	91
5.8.	ANÁLISIS DE LAS REDES.....	92
5.9.	CONSTRUCCION DEL GRAFO	94
5.10.	ANÁLISIS DE RESULTADOS	96
5.10.1.	Algoritmo De Dijkstra	96
5.10.2.	Densidad del grafo	97
5.11.	DISCUSIÓN	98
	CONCLUSIONES	99
	RECOMENDACIONES	100
	BIBLIOGRAFÍA	101
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	102
	LINKOGRAFÍA	106
	ANEXOS.....	107
	ANEXO 1: Matriz de Consistencia	107
	ANEXO 2: Formato en blanco para el recojo de datos.	108
	ANEXO 3: Formato rellenado (datos de la calle Afligidos)	109
	ANEXO 4: Toma de medidas de las diferentes calles.....	110
	ANEXO 5: Matriz de Distancias.	111
	ANEXO 6: Matriz de flujo.	112
	ANEXO 7: Matriz de Adyacencia.	113
	ANEXO 8: Matriz de Accesibilidad.....	114

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Estimación del parque automotor según departamentos en Perú - 2018	3
Tabla 2 Proceso de simulación de un sistema.....	43
Tabla 3 Nodos considerados para el estudio según la intersección de las calles	74
Tabla 4 Aristas consideradas entre cada nodo según la intersección de las calles	76
Tabla 5 Cantidad de vehículos y distancia promedio de cada calle.....	80
Tabla 6 Índices que exponen la conectividad de las calles	83
Tabla 7 Tabla resumen a partir de la matriz de Conectividad	84
Tabla 8 Resumen de los índices de accesibilidad	86

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Evolución de la flota de transporte terrestre en la Ciudad del Cusco	4
Figura 2	Evolución de vehículos según año en la ciudad del Cusco	5
Figura 3	Disposición de vehículos en nuestra ciudad el Cusco, 2011	6
Figura 4	Distribución horaria de viajes en la Ciudad del Cusco	7
Figura 5	Representación de un grafo simple	21
Figura 6	Representación de un grafo dirigido	21
Figura 7	Representación de los grados de salida y entrada de un vértice.....	22
Figura 8	Representación de aristas múltiples y bucles	24
Figura 9	Grafo G provisto de dos subgrafos G_1 y G_2	24
Figura 10	Un recorrido en un grafo, delimitado en color rojo.....	25
Figura 11	Grafo con ciclo delimitado	26
Figura 12	Un grafo Bipartito y grafo Bipartito completo.....	26
Figura 13	Representación de grafos regulares	27
Figura 14	Representación de un grafo simple con su matriz de adyacencia	28
Figura 15	Representación de un grafo no dirigido y su matriz de incidencia	28
Figura 16	<i>Representación de isomorfismo de grafos</i>	29
Figura 17	<i>Representación de las matrices de incidencia de los grafos anteriores</i>	30
Figura 18	<i>Representación de un grafo conexo e inconexo</i>	31
Figura 19	Representación de árboles y bosques	31
Figura 20	<i>Pseudocódigo que expresa la solución de un problema</i>	36
Figura 21	Simbología para trazar las diferentes labores en una determinada caja	36
Figura 22	Diagrama de flujo y sus cajas estándar	37
Figura 23	<i>Curva Experimental de la Velocidad y la Densidad</i>	50
Figura 24	Modelo Lineal de la Velocidad y la Densidad	50
Figura 25	Modelo Logarítmico de la Velocidad y la Densidad.....	51
Figura 26	<i>Modelo generalizado con $n=0$ de la Velocidad y la Densidad</i>	51
Figura 27	Relación entre la densidad y la intensidad	52
Figura 28	Relación de la densidad y la velocidad	53
Figura 29	Relación de la intensidad y la velocidad	53
Figura 30	Habilitación de algoritmos en el Software Grafo.....	60
Figura 31	Ámbito de Estudio del presente trabajo	65
Figura 32	Limitación del área de trabajo	66

Figura 33 <i>Mapa del Cusco con 7 secciones o zonas</i>	70
Figura 34 <i>Zona o Seccion 1, Centro Histórico del Cusco</i>	70
Figura 35 <i>Limitación del área de estudio</i>	71
Figura 36 <i>Delimitación del Espacio de Trabajo</i>	72
Figura 37 <i>El espacio de trabajo con el sentido de Transito de las calles</i>	73
Figura 38 <i>Nodos o Vértices considerados a partir de la Tabla 3</i>	75
Figura 39 <i>Arcos o Aristas consideradas a partir de la Tabla 4</i>	77
Figura 40 <i>Formato para recoger información sobre el flujo vehicular</i>	78
Figura 41 <i>Flujo vehicular de la calle Afligidos</i>	79
Figura 42 <i>Proceso de toma de medidas</i>	79
Figura 43 <i>Matriz de Adyacencia del espacio de trabajo</i>	82
Figura 44 <i>Representación de las conexiones a partir de la matriz de adyacencia</i>	84
Figura 45 <i>Matriz de accesibilidad del espacio de trabajo</i>	86
Figura 46 <i>Nodos más accesibles y nodos poco accesibles (índice de Koning)</i>	88
Figura 47 <i>Nodos más accesibles y nodos poco accesibles (índice Shimbel)</i>	89
Figura 48 <i>Nodos más accesibles y nodos poco accesibles (índice Omega)</i>	90
Figura 49 <i>Nodos más accesibles y nodos poco accesibles (Centralidad Media)</i>	91
Figura 50 <i>Entorno de trabajo del Software Grafos</i>	92
Figura 51 <i>Ingreso de datos en el software Grafos</i>	93
Figura 52 <i>Construcción de Grafo de manera aleatoria</i>	94
Figura 53 <i>Grafo construido de acuerdo a nuestros datos</i>	95
Figura 54 <i>Resultado Algoritmo Dijkstra en el Software Grafos</i>	96
Figura 55 <i>Resultado Algoritmo Dijkstra en el Software Grafo</i>	97

CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD DEL PROBLEMA

La matemática aplicada, tiene como una de sus ramas a la matemática discreta, la cual posee como a su aliado principal, a la teoría de grafos, es así que utiliza diversos conceptos tales como álgebra, aritmética, probabilidad, geometría, topología, entre otros. Estos conceptos son los pilares para solucionar problemas en diversos campos de investigación, como flujo en redes, redes de tráfico, redes sociales, coloración de áreas, circuitos electrónicos, etc.

En nuestra ciudad del Cusco, el servicio del tránsito de unidades vehiculares se está haciendo cada vez más insoportable, si bien es cierto, día a día vemos que nuestras principales rutas para la movilidad de pasajeros están repletas de automóviles tanto de servicio público y privado, son estos que incentivan a una circulación desordenada y abrumada en la parte central como en los alrededores de nuestra ciudad del Cusco.

Según el “informe de investigación N° 76/2014-2015” visto en (Durand Vasquez, Patricia;, 2014) Cusco es una de las pocas ciudades que cuenta con un plan para regular las rutas de transporte urbano de pasajeros, aprobado hace varios años atrás. Según este plan, entre los principales problemas que afronta esta ciudad se encuentran:

- 1) Falta de nuevas rutas de tránsito a partir de la reorganización de las rutas que ya existen tomando en cuenta el crecimiento poblacional.
- 2) Falta de recursos para organizar adecuadamente los paraderos del transporte público de pasajeros.
- 3) Escasas rutas para clientes del transporte público.
- 4) Oferta excesiva de vehículos de baja capacidad de transporte.
- 5) Hay demasiados taxis. El 55% de estas viaja sin pasajeros a determinados momentos del día.
- 6) La dirección de las empresas de transporte no cuenta con planes de desarrollo a largo plazo.
- 7) Competencia entre rutas.
- 8) Atasco en el Centro de la ciudad.
- 9) Las situaciones para los peatones son malas y a veces peligrosas.

- 10) ampliación de espacios para estacionar por parte del transporte turístico que operan en los mismos horarios.
- 11) El diseño anormal de las rutas provoca accidentes en la ciudad.
Visto en (Municipalidad Provincial del Cusco, 2012)

1.1.1. Descripción general de las empresas

- a) **Movilidad.** Los estudios de movilidad tuvieron una revolución de importancia a consecuencia del desarrollo de las ciudades, pues el principal cambio que sufrieron son la del aumento del parque automotor, este último ha causado una crisis de movilidad, entre las cuales se tiene, exceso de unidades vehiculares, vehículos antiguos, no existe vías alternas, inadecuada organización en las rutas del transporte, entre otros, tomado de (Mediorreal Carrillo, 2014)

Es así que hoy en día, la sistematización de rutas de transporte es elaborada por los municipios Provinciales y Distritales, para esto se considera los diversos factores como son: la longitud del vehículo, masa del vehículo, capacidad de carga, año de fabricación, cilindrada del motor, número de asientos, entre otros.

Por otro lado, tenemos que, según el “boletín informativo del Ministerio de Transportes y Comunicaciones de Perú”, el Departamento del Cusco ocupa el cuarto lugar en cuanto a la cantidad de los vehículos circulantes en sus calles, tal como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1*Estimación del parque automotor según departamentos en Perú - 2018*

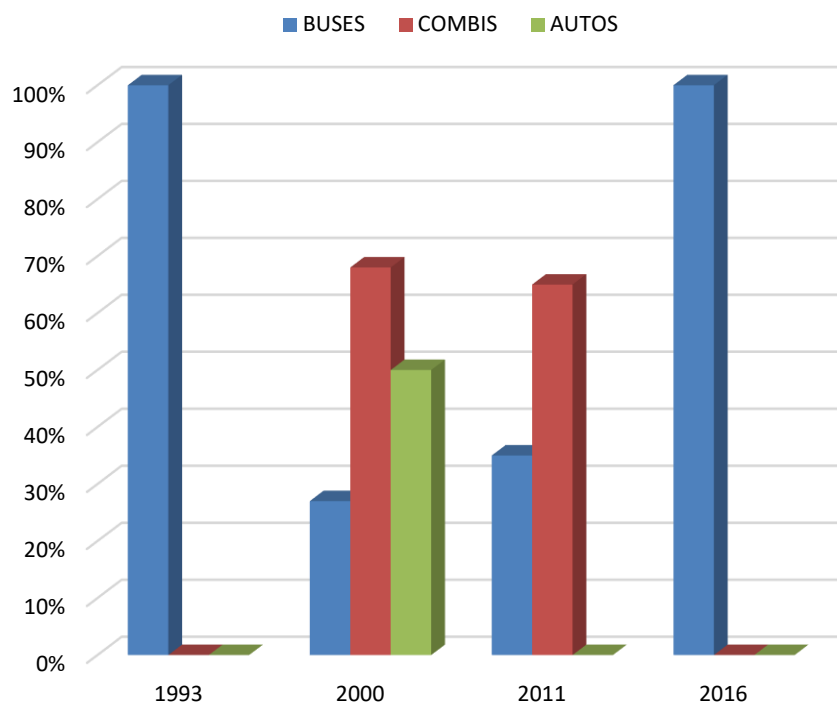
DEPARTAMENTO	TIPOS DE MOVILIDAD									
	TOTAL	AUTOMÓVILES	STATION WAGON	CAMIONETAS			OMNIBUS	CAMIONES	REMOLCADOR	REMOLQUE SEMIREMOLQUE
				PICK UP	RURAL	PANEL				
Lima	1908672	862 480	334 248	178 910	253 880	31 781	57 006	120 595	31 980	37 792
Arequipa	211735	97 928	20 325	24 043	29 863	2 118	6 363	17 653	5 137	8 305
La Libertad	202558	82 165	24 762	25 897	19 193	1 428	7 885	21 633	4 976	14 619
Cusco	84942	35 098	14 601	10 103	12 603	638	3 244	8 204	348	103
Lambayeque	74092	33 522	7 455	9 669	10 012	1 044	1 567	8 022	613	2 188
Junín	72316	24 316	13 524	9 195	11 121	340	2 281	9 096	919	1 524
Piura	60006	26 218	6 429	10 790	8 209	425	1 498	5 519	561	357
Tacna	52161	19 487	12 107	5 127	5 731	1 516	1 861	4 756	621	955
Puno	51041	10 092	9 591	5 107	14 675	3 148	2 863	4 907	317	341
Ancash	36190	15 930	6 189	4 249	5 804	250	949	2 386	209	224
Cajamarca	27674	7 458	5 188	4 955	5 758	390	796	2 211	237	681
Ica	27558	13 918	3 841	3 089	2 475	279	1 080	2 219	343	314
Huánuco	17367	7 751	1 684	2 932	1 987	87	453	1 966	128	379
Moquegua	14810	4 840	3 462	1 889	2 558	402	531	954	103	71
San Martín	13052	2 776	1 341	4 275	2 053	68	285	1 920	160	174
Ucayali	9918	2 888	1 448	2 026	1 307	35	222	946	49	997
Pasco	6545	1 132	1 923	317	761	83	432	1 531	167	199
Ayacucho	5918	1 982	983	716	800	63	252	1 010	55	57
Loreto	5477	2 014	515	936	861	70	337	718	12	14
Apurímac	4120	791	1 436	364	705	56	147	588	18	15
Tumbes	3375	1 202	481	480	555	60	82	448	23	44
Amazonas	2182	252	670	405	325	24	62	294	56	94
Madre de D.	1383	356	357	226	202	23	30	175	11	3
Huancavelica	1235	207	395	155	153	21	89	180	31	4
TOTAL	2 894 327	1 254 803	472 955	305 855	391 591	44 349	90 315	217 931	47 074	69 454

Nota: origen y elaboración de la tabla es el MTC – OGPP – oficina de estadística, Boletín estadístico II. Ministerio de transportes y comunicaciones. 2018. Recuperado de: https://portal.mtc.gov.pe/estadisticas/publicaciones/boletines/boletin_estadistico_II_semestre_2018.pdf

b) Parque de vehículos del Cusco. En estos últimos tiempos la cuantía vehicular se ha incrementado en nuestra ciudad. La figura 1 presenta el progreso del transporte público en la ciudad del Cusco, en cuanto a los buses, combis y autos en general, visto en el “plan regulador de rutas de transporte público urbano e interurbano en la ciudad del Cusco, 2016.”

Figura 1

Evolución de la flota de transporte terrestre en la Ciudad del Cusco

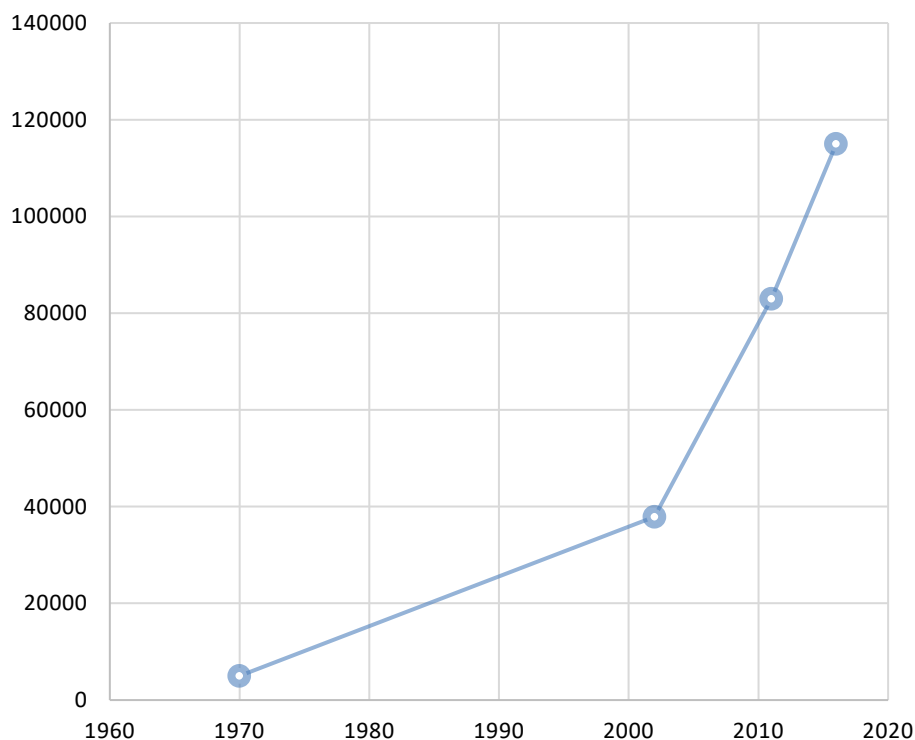


Nota: elaboración y adaptación del Plan de desarrollo provincial concertado Cusco al 2021, fuente: ayuda memoria – resumen N° 003. El transporte urbano en la ciudad de Cusco, propuesta del nuevo sistema de transporte público. Comité automotor – cámara de comercio de cusco (transportistas). Marzo de 2016

Es así que se muestra el crecimiento del parque automotor, el cual se incrementó notablemente durante los últimos 10 años, como se muestra:

- 1) Para el año de 1970 se cuenta con 5000 vehículos
- 2) Para el año de 2002 se cuenta con 37870 vehículos
- 3) Para el año de 2011 se cuenta con 82917 vehículos
- 4) Para el año de 2016 se cuenta con 115000 vehículos

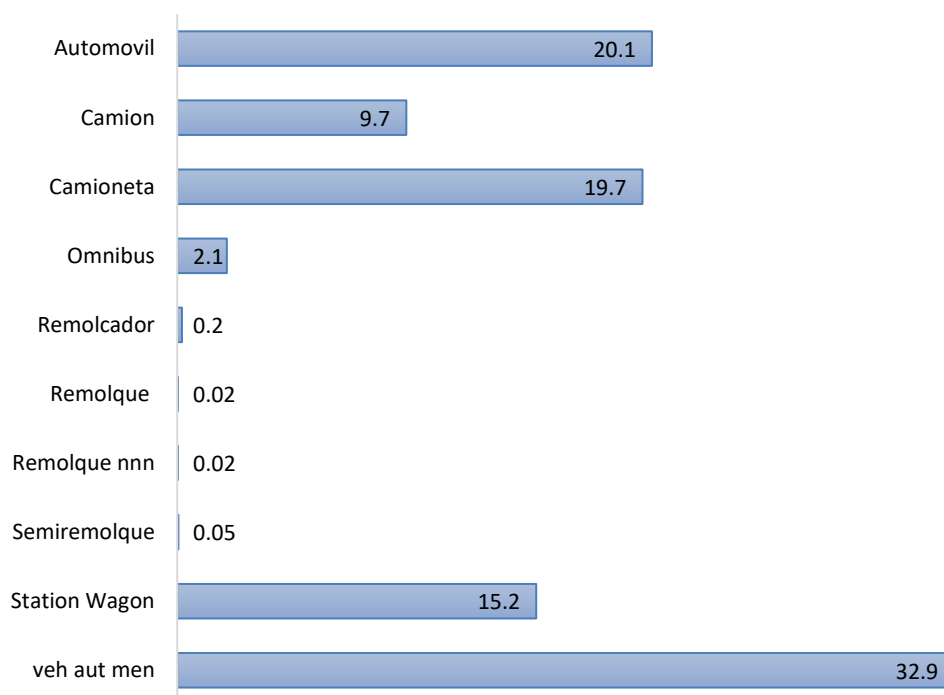
El cual se aprecia en la figura 2. Datos obtenidos del “Plan de desarrollo provincial concertado Cusco al 2021, 2013” y “Plan Cusco, movilidad y espacios públicos, 2016”.

Figura 2*Evolución de vehículos según año en la ciudad del Cusco*

Nota: elaboración y adaptación de Plan de desarrollo provincial concertado Cusco al 2021

El incremento vehicular que se tiene hoy en día en Cusco, no tendría que representar una dificultad, pues la construcción de las vías en la ciudad en un inicio no fue dispuesta para soportar altos índices de flujo vehicular, esto sobre todo por la parte del centro histórico.

- c) **Composición del Parque Automotor.** Sobre la constitución de carros en nuestra ciudad, la Municipalidad del Cusco realizó un estudio de análisis en el cual mencionan que la totalidad de vehículos en nuestra provincia está compuesta por vehículos no motorizados llamados menores (Bicicletas, triciclos o triciclos de pasajeros), automóviles, camionetas, remolques, camiones, ómnibus, entre otros, Como se ve en la figura 3. (Municipalidad del Cusco, 2015)

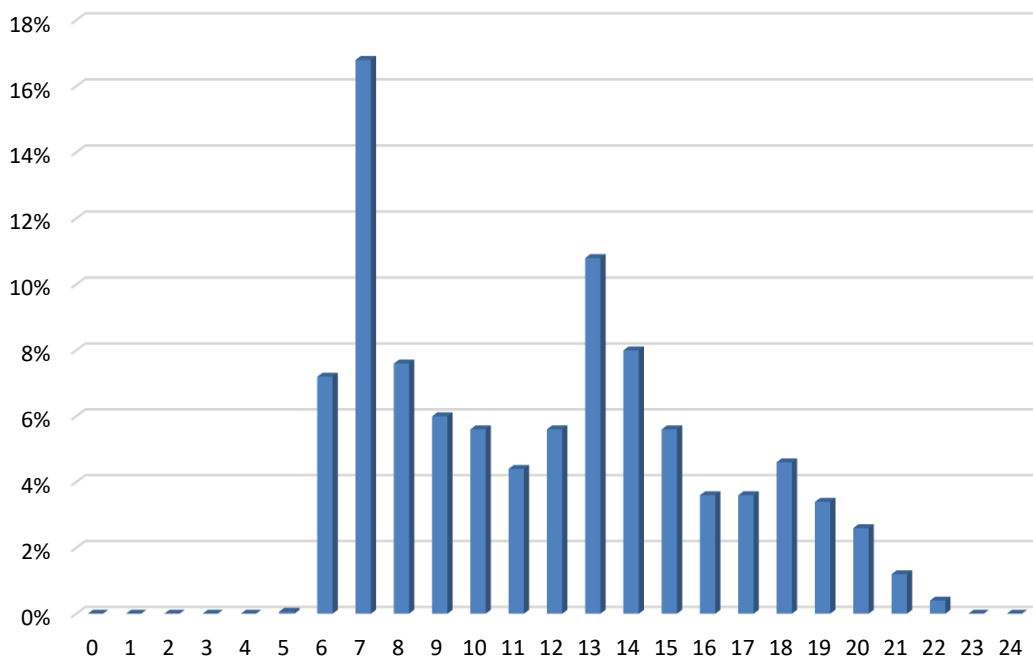
Figura 3*Disposición de vehículos en nuestra ciudad el Cusco, 2011*

Nota: elaboración y adaptación de Plan de desarrollo provincial concertado Cusco al 2021, Fuente: Plan de desarrollo provincial concentrado Cusco al 2021, Oficina general de planeamiento y presupuesto, Municipalidad del Cusco

- d) **Distribución horaria de viajes.** La distribución de la movilidad durante una determinada jornada es más sesgada en horas de la tarde que por la mañana, las fluctuaciones más sobresalientes se dan en la mañana entre las 6.00 am y 8.00 am y en al medio día entre las 12.00 pm y 2.00 pm, como se puede apreciar en la siguiente figura 4. Estos datos fueron obtenidos de los documentos que hacen posible el desarrollo de la provincia de Cusco.

Figura 4

Distribución horaria de viajes en la Ciudad del Cusco



Nota: elaboración y adaptación de Plan de desarrollo provincial concertado Cusco al 2021”, “Plan de movilidad y espacio público de Cusco y Plan de Desarrollo Urbano Cusco al 2023

1.1.2. Transporte urbano

Según al gobierno municipal de la provincia del Cusco, desde la oficina de transporte y vialidad, informan que el transporte urbano en la Provincia de Cusco está compuesto tanto por sociedades de servicio de taxi como por compañías de buses de pasajeros, en esta oficina reporta que: “coexisten 41 compañías de transporte público con 1.186 vehículos en total, de los cuales el 31.76% son compañías en concesión, mientras que el 68.3% son compañías con permiso excepcional. Del total aproximadamente 410 vehículos son microbuses urbanos y 776 camionetas urbano-rurales (combis)”, visto en (Municipalidad del Cusco, 2015) actualmente operan 30 empresas de transporte, todos estos debidamente poseen una licencia ruta con miras a renovar.

- a) **Servicio de taxi.** Es un medio más para brindar transporte a las personas dentro de los lugares urbanos y rurales, este servicio tiene las siguientes características según el “plan de desarrollo urbano de cusco al 2023”: al mes

de diciembre del año 2012 se incrementó a 5625 la cantidad de unidades vehiculares inscritas, en su momento no existen asociaciones ni rutas establecidas. 1896 vehículos están inscritos particularmente. Por otro lado 404 unidades vehiculares nuevas fueron autorizados el año 2012 para brindar el servicio de taxi y ese mismo año, 1494 vehículos se registraron para su autorización en cuanto a la circulación, por otro lado 2665 taxis dejaron de circular por haber superado el período de circulación según el D.S. 017-2009-MTC, obtenido de (Municipalidad del Cusco, 2015). A la fecha actual son en promedio 3363 taxistas formales y 3708 cuentan con permiso provincial y fueron empadronados en cumplimiento a la Ordenanza Municipal Nro. 053-2017.

- b) **Servicio de Transporte Turístico.** La circulación de estos vehículos, conglomeran el transporte en ciertos lugares del centro de nuestra ciudad de Cusco. Por ser de gran tamaño, estos vehículos convierten en atolladeros las esquinas y plazuelas pequeñas, además de que el centro histórico posee vías angostas. Existen normas que impiden la circulación de estos vehículos por ciertas vías del centro de Cusco, pero estos transportistas hacen caso omiso a las normas por el simple hecho de ganar pasajeros para sus unidades. (referencia, plan de desarrollo urbano Cusco al 2023)
- c) **Servicio Escolar.** En nuestra ciudad el servicio de escolar es de manera libre, es decir que aún no se tienen una asociación de estos. Simplemente su presencia obedece a cumplir ciertas normas que el municipio solicita para su operatividad como unidades de servicio escolar.
- d) **Servicio de Reparto de Mercadería.** Según el plan presentado por la municipalidad del Cusco en el año 2012”, “los servicios de transporte como reparto de combustibles, reparto de mercadería, reparto de carga, reparto de mudanza, etc., fueron inscritos y autorización para su renovación de trabajo. De 154 vehículos, el 81% pertenece al reparto de mercadería, 12% a mudanza, y 6% a reparto de combustibles y materiales peligrosos”, visto en (Municipalidad del Cusco, 2015)

El problema es de alguna manera complejo, pues reside en encontrar las rutas óptimas de los automotores de uso público en centro de la Ciudad de Cusco. los automotores pueden ir de un punto a otro, ya sea con pasajeros, mercancías o simplemente sin ocupantes a excepción del conductor. Al utilizar

la teoría de grafos, organizaremos, describiremos y expresaremos los datos en términos matemáticos. Este nuestro problema de flujo vehicular puede ser modelado matemáticamente a través de un ordenador.

La descripción matemática de un problema, llamados modelos matemáticos se corresponden con algoritmos que son como las ilustraciones para solucionar dichos modelos. Dichos algoritmos se implementan como programas de computadora. Por tal motivo, la elección óptima de rutas de transporte en el casco urbano nos da la posibilidad de poder elegir o variar algunas redes de transporte, esto para que el tránsito de los vehículos sea más fluido, y así tener la posibilidad de elegir rutas de transporte óptimas mucho más eficaces al momento de movilizarse.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1. Problema general

¿Es posible simular y optimizar un sistema de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, que logre reducir los tiempos y costos de movilización, por medio de teoría de redes?

1.2.2. Problemas específico

- a) ¿Se puede describir y analizar el sistema de las rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco a través de una red?
- b) ¿Será posible analizar las rutas de transporte correspondiente a la red, mediante el empleo de índices de conectividad?

1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La herramienta utilizada en el trabajo es básicamente la teoría de grafos, que esencialmente, plantea cambiar la situación del problema a elementos amigables como puedes ser las figuras geométricas (nodos y arcos) para poder ver y desarrollar sus peculiaridades.

El siguiente estudio tiene su justificación por las siguientes razones:

- 1) Justificación teórica. El trabajo contribuye con una de las ramas muy significativas de la matemática que es la Investigación de Operaciones, más propiamente dicha en las matemáticas discretas.

- 2) Justificación metodológica. Este estudio descriptivo sirve como precedente para futuras investigaciones relacionadas con el transporte vehicular y la teoría de grafos.
- 3) Justificación práctica. El trabajo contribuye a la elección adecuada de las diferentes rutas óptimas de transporte, es decir elegir la ruta más corta para trasladarse de un lugar a otro, con lo cual se nos genera menor costo de movilidad en cuanto a tiempo y dinero.
- 4) Justificación social. El trabajo da a conocer que, mediante la aplicación de la teoría de redes al transporte de pasajeros, es posible que se genera rutas optimas de viaje y también reducción de tiempo de ir de un lugar a otro, con lo cual los usuarios tendrán buenas expectativas en cuanto al transporte público en su cotidiano vivir.

1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.4.1. Objetivo general

Simular y optimizar un sistema de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, que logre reducir los tiempos y costos de movilización, por medio de teoría de redes.

1.4.2. Objetivos específicos

- a) Describir y analizar el sistema de las rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco a través de una red.
- b) Analizar las rutas de transporte correspondiente a la red, mediante el empleo de índices de conectividad.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Inspeccionando algunos estudios relacionados con el problema, se consideraron trabajos realizados tanto en universidades del extranjero como en algunas universidades de nuestro país.

2.1.1 Antecedentes internacionales

Insaurrealde, J. A. y Cardozo, O. D. (2010). Análisis por medio de la teoría de grafos de la red vial de la provincia de Corrientes. Geografía digital. IGUNNE. Facultad de humanidades. UNNE. Año 7-N°13. ISSN 1668-5180. Resistencia, Chaco.

(Insaurrealde & Cardozo, 2010) el principal objetivo del autor fue la de realizar un estudio en la cual describe toda la organización de la distribución del conjunto de carreteras de Corrientes en Argentina. Esto se concretó estudiando las relaciones topológicas como son: la conectividad, la accesibilidad y la centralidad de dicho conjunto de carreteras. Las conclusiones de este trabajo son:

- a) Para analizar las relaciones topológicas de una red antes mencionadas, el concepto de la teoría de grafos es una herramienta muy buena, esta herramienta reduce la realidad a un grafo específico que facilita la investigación utilizando índices y matrices que facilitan la comprensión de esta estructura.
- b) En términos de conectividad, los índices calculados en las rutas de transporte de la provincia de Corrientes presentan niveles bajos, lo que permite tantear el tamaño de los elementos a agregar para lograr la máxima conectividad. Tenga en cuenta que, aunque la topología es buena, una red con alta conectividad no es realmente eficiente. Los resultados revelados se pueden tomar como referencia para compararlos con otras redes y también analizar su progreso en un temporal o planificar mejoras para aumentar el nivel de conectividad.
- c) La creación de un plan de accesibilidad con los datos de la sistematización de índices y matrices permitió emparejar regiones con buena accesibilidad en términos de accesibilidad (Medio Oeste) y zonas críticas donde la accesibilidad se está deteriorando y que se ubican preferentemente más alejadas. sectores. Provincia (noreste, sureste y sur).
- d) Las representaciones de los índices de Köning y el de Shimmel mejoran el análisis de accesibilidad. El primero nos muestra un bosquejo de la accesibilidad, puesto que los valores arrojados nos revelan la cercanía

topológica entre los nodos, y con el otro índice se consigue una valoración completa de la accesibilidad de cada nodo. Ahora viendo los resultados, concluimos en que hay nodos factibles que se ubican en la parte central y parte occidental de la provincia de Corrientes, Argentina.

- e) Además, en el mapa de isocentricidad promedio de Grafo, podemos observar lugares con mayor centralidad como San Roque, Mercedes, Lavalle.
- f) Topológicamente hablando, se puede observar que la provincia de Corrientes tiene excelentes accesos y una ubicación central en la región del centro parte oeste, esto muestra una disminución en los lugares más alejados y dificultando así el acceso. El humedal Iberá se nota en el diagrama porque no mantiene una conexión directa entre el oriente y el occidente de la provincia. Rutas nacionales pavimentadas (N° 12 y 14) y rutas provinciales (N° 123, N° 118 y N° 119 y otras rutas menores como N° 5, N° 6, N° 24, N° 27, N° 120, N°126) que conecta las ciudades de toda la provincia.
- g) Este estudio contiene principalmente una observación descriptiva, porque describe las rutas de la urbe de Corrientes, Argentina, también es un comienzo en el inicio para futuros estudios que pueden recomendarse, como desarrollo en varios períodos, mejoramiento de rutas que ya existen, o la proyección de nuevas rutas de comunicación en la red, también se recomienda trabajar con índices más complejos e integrarlo con información geográfica.

Gómez, Osvaldo, Cardozo y Parras. "Teoría de Grafos y Sistemas de Información Geográfica aplicados al Transporte Público de Pasajeros en Resistencia (Argentina)". Revista Transporte y Territorio N° 1, Universidad de Buenos Aires, 2009. ISSN: 1852-7175. pp. 89-111.

www.rtt.filo.uba.ar/RTT00105089.pdf.

En este estudio se hizo un análisis descriptivo de las características geográficas en la malla vial pública en la provincia de Resistencia (Argentina). El objetivo de este estudio es investigar cómo crear representaciones visuales temáticas

(mapas de densidad, símbolos de simetría y vistas 3D) de los datos obtenidos del análisis utilizando los símbolos relacionados con la teoría de grafos. Tomado de (Cardozo, Gomez, & Parras, 2009), cuyas conclusiones son:

- a) Los índices como son el de accesibilidad y el índice llamado número Asociado, revelan una fuerte correlación con valores bajos alrededor de la plaza central, lo que significa un mejor acceso a dichos nodos y una tendencia creciente hacia la periferia, donde las distancias topológicas son mayores. El índice de Shimmel, por su parte, muestra un comportamiento similar al anterior, con valores bajos de más fácil acceso ubicados alrededor de la plaza central de la ciudad y aumentando gradualmente hacia los extremos de la red, donde es menor alcanzable se encuentran nodos. Además, el AMI (Índice de Accesibilidad Promedio), que se estima en 241 como promedio de toda la red, permite monitorear los nodos por encima y por debajo de ella. La cartografía resultante confirma las situaciones descritas anteriormente, ya que la mayoría de los nodos con mejor accesibilidad promedio se encuentran distribuidos en el centro de la red.
- b) Al analizar la accesibilidad de las vías vehiculares públicas en la ciudad de Resistencia muestra una fuerte acumulación de prestación de servicios en la región Centro Oeste del área de estudio; Esto puede corresponder al uso comercial dominante del suelo, que puede generar un contacto diario significativo con la población y, por tanto, una alta demanda de viajes diarios. El fenómeno disminuye hacia la periferia, alcanzando la menor densidad de estacionamiento en las zonas este y noroeste donde domina el cultivo residencial. Por otro lado, se puede observar una expansión de la densidad promedio hacia el sector sureste, lo que indica la presencia de una de las principales rutas de transporte público de ciudad a ciudad, la Avenida 9 de Julio, hacia el centro de la ciudad.

Restrepo C, Jorge Hernán, & Sánchez C., John Jairo (2004). "Aplicación de la teoría de grafos y el algoritmo de Dijkstra para determinar las distancias y las rutas más cortas en una ciudad". *Scientia Et Technica*, vol. X, núm. 26,

[fecha de Consulta 30 de octubre de 2019]. ISSN: 0122-1701. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=849/84911640035>.

En este trabajo, en la localidad llamada Santa Rosa de Cabal se presenta geoméricamente un digrafo, (en donde dichos nodos son los encuentros de los caminos y las calles que conectan esos nodos son los arcos). A priori lo representamos en una matriz, la que se usara el algoritmo de Dijkstra para obtener la distancia más corta entre nodos (considerando a todo nodo como el punto de partida) y el camino de nodo a nodo. Visto en (Restrepo C & Sanchez C, 2004). Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- a) Lo más significativo en el estudio es la creación de una matriz de distancias mínimas dado entre todas las aristas que simbolizan a la urbe. Los efectos obtenidos de este estudio son muy valiosos porque son una fuente de información para solucionar situaciones que requieren conocer las distancias mínimas entre lugares diferentes, por ejemplo: entrega de periódicos, entrega de paquetes, ruta más corta para todo tipo de vehículos. Ruta más corta para los bomberos, entre otras cosas.

2.1.2 Antecedentes nacionales

Condori, D. R., (2016). Tesis: Organización espacial mediante teoría de grafos de las carreteras de la región puno. Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Perú.

El principal objetivo de este trabajo es conocer y entender de qué manera la teoría de grafos ayuda en la ordenación de la malla de vías al nivel nacional y al nivel regional, también en gestión de la matriz de adyacencia y accesibilidad topológica en la región Puno, para medir la conectividad, la accesibilidad y la accesibilidad. De centralidad, este trabajo se completa con la integración de los nodos externos y la malla vial en el mapa de la región Puno, además correlación del desarrollo económico y social tales son urbe y la relación de desarrollo humano. Por tal motivo se llamarán nodos las principales capitales de la provincia en la región lacustre, y los caminos que conectan estas

localidades se llaman arcos. La conclusión más importante a la que se llegó es que a través de las propiedades matemáticas como son los índices anteriormente vistos y que son conceptos propios de la teoría de grafos ayuda a la clasificación del sistema vial a nivel nacional y regional de la región Puno. Visto en (Condori Balcon, 2016)

Lía Athalia Pérez H. (1989). "Seminario de Desarrollo de Áreas. Conectividad y accesibilidad en el departamento de Lima: una aplicación de la teoría de grafos." Facultad de Arquitectura, Urbanismo y Artes. Universidad Nacional de Ingeniería. Visto en (Pérez H., 1990)

En este estudio se ajusta a uno de los afanes de la teoría de grafos, los trabajos son amplios: en física, biología, química, matemática, geografía, transportes, redes neuronales, economía, planificación, etc. El principal motivo de una teoría es representar mediante gráficos cualquier tipo de estructura. El propósito del estudio es la de verificar la Capital de la Región Lima a través de su conectividad y su accesibilidad a las capitales provinciales del Departamento de Lima. Para este estudio se compararon los sistemas de los años 1946 y 1987 y simulamos un caso particular. Al final del estudio se definió a la ciudad de Huaral como capital de la región y como opción a otras capitales provinciales. De esta manera, Huaral podría ser un centro dinámico generador de desarrollo regional. Visto en (Pérez H., 1990), y las conclusiones fueron las siguientes:

- a) Lima, capital del departamento. Atrae a otras provincias, y eso trae el incremento desmedido de la urbe. Sin embargo, la localidad capital Lima es la más viable y accesible a todas las demás capitales de la provincia.
- b) Al aplicar la teoría de grafos y la asistencia estadística mostró que la ciudad de Huaral es la ciudad más conectada y accesible en comparación con otras ciudades capitales de provincia. También se observó que Lima, que era la ciudad más accesible en 1946, tiene prioridad por el estado de las vías y la mayor población. Sin embargo,

la cronología muestra que Huara tiene una solución a situaciones de congestión y la centralidad de la capital del departamento, sería una alternativa a la ubicación de algunas otras funciones públicas generales y necesarias dirigidas a las ciudades provinciales. y cuya implementación podría traería bastante desarrollo de la región.

- c) También se describe las bases de la propuesta para crear una mejor interrelación en la zona quechua. Antes del siglo XVI, los únicos caminos en el antiguo Perú eran las montañas peruanas (zona quechua y yunga) y los caminos transversales que conectaban las regiones andinas, lo que permitía un buen manejo de los recursos agrícolas y ganaderos de la región. Con el triunfo de la tecnología moderna aparece la Carretera Panamericana, cambiando el funcionamiento de la zona andina, cambiando su economía, pero descuidando la conexión entre ellas.
- d) Aunque la zona está dividida en 2 pistas paralelas, cabe destacar que la accesibilidad viene determinada por su topografía. Esta antigua red no se recomienda repetir ni copiar, sino mejorarla o adaptarla a la situación actual, sabiendo que el incremento de las carreteras se relaciona con el proceso de aumento de la economía y el desarrollo regional.
- e) Con estudios relacionados con la observación regional, también con la teoría de graficas o grafos y las ciencias estadísticas, podemos conectarlos con el medio rural, probarlos y transformarlos según necesidades y las capacidades que se tiene. Entonces en nuestra pregunta original, Huaral respondería a capital regional según las condiciones analizadas.

2.1.3 Antecedentes locales

“Gamarra B. & Delgado J. (2014). Tesis: Calidad del servicio de transporte público urbano en la ciudad del cusco 2014. Universidad nacional de san Antonio Abad del Cusco. Escuela profesional de economía. Cusco, Perú.”

El objetivo principal en este estudio radica en la eficacia en el uso del transporte público en la ciudad del Cusco; y mostrar un modelo matemático mediante una regresión logística. Visto en

(Gamarra Santiesteban & Delgado Ccompí, 2014). Es así que se llega a la conclusión siguiente:

- a) Los elementos que establecen la buena disposición en la eficacia de un buen servicio de transporte público en nuestra ciudad imperial son el estilo de conducción de los choferes, el tiempo que se demora en llegar de un tramo a otro, el buen trato para con los usuarios, también la apariencia que muestra el conductor y por sobre todo la situación del automotor; Estas variables enfatizan el grado de percepción de las personas, estadísticamente tenemos que $R^2 = 0.766 = 76.6\%$ influyen en la eficacia del servicio de transporte público de la ciudad, estas variables son ponderadas como importantes en el modelo, a través de regresión logística polinómica reflejamos el sentir que los interesados comentan sobre el prestación, el 38% de los residentes piensa que el prestación del servicio es malo, y el 59% piensa que la eficacia es usual y el 3% mencionan que es bueno, según el usuario que respondió la encuesta.

2.2. BASES TEÓRICAS FILOSÓFICAS

- 1) De acuerdo al profesor de filosofía en la Universidad Carnegie Mellon Jeremy Avigad (1989), señala: “El conocimiento matemático ha sido considerado durante mucho tiempo un paradigma del conocimiento humano, cuyas verdades son a la vez necesarias y ciertas, por lo que la explicación del conocimiento matemático es una parte importante de la epistemología. Los objetos matemáticos como los números y los conjuntos son ejemplos arquetípicos de abstracciones, porque el tratamiento de tales objetos en nuestro discurso es independiente del tiempo y el lugar, por lo que se debe encontrar un lugar para este tipo de objetos en un marco de pensamiento más amplio. La tarea central de la ontología o la metafísica. El rigor y la precisión del lenguaje matemático dependen de su dependencia de un vocabulario limitado y una gramática altamente estructurada, y las explicaciones semánticas del discurso matemático son a menudo el punto de partida de una filosofía del lenguaje.”
- 2) La teoría de grafos tiene sus inicios con el pionero de la matemática en teoría de gráficas Leonhard Euler. Posteriormente incorporada en los sistemas Geográficos por W.L. Garrison y F.D. Marble en los años 1960, esto para estudiar las redes de transporte y los espacios geográficos.
- 3) Teorema. se tienen varias definiciones:
 - “Proposición demostrable a partir de otra(s) y cuyo enunciado consta de un supuesto o hipótesis y una conclusión o tesis”. (Sánchez, 1982)
 - “Un teorema es una proposición cuya verdad se ha demostrado”. (Johnsonbaugh, 2005)
 - “Proposición que requiere de demostración”. (Soto, 2011)
- 4) (Ruiz , Alfaro, & Gamboa, 2016) Las matemáticas son una ciencia deductiva de la lógica que utiliza símbolos para crear una teoría precisa del razonamiento y el razonamiento lógico basado en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y proposiciones más complejas.

2.3. MARCO LEGAL DEL TRANSPORTE PÚBLICO

las bases sobre las cuales se asientan las diferentes regulaciones del transporte público son los siguientes, estos fueron obtenidos de (Gamarra Santiesteban & Delgado Ccompi, 2014)

- a) Carta magna del Perú
- b) Ordenanza municipal, Ley N° 27972, artículo 81°
- c) Ley de circulación terrestre, Ley N° 27181, artículo 17° que instituye la competencia en materia de transporte y tránsito a las nupcialidades dentro de su jurisprudencia.
- d) Ley de procesos administrativos, ley N° 27444
- e) Decreto legislativo N° 651, establece la libre competencia del servicio de transporte.
- f) Decreto supremo N° 058-2003 MTC-PERU
- g) decreto supremo N° 017-2009-MTC-PERU funda que los encargados de una municipalidad renovaran sus planificaciones para regular el sistema de trasporte de su jurisdicción.
- h) Plan Estratégico Multianual Sector Transportes y Comunicaciones PESEM 2018 – 2022 (R.D. N° 1029-2018MTC/01)
- i) Plan intermodal de Transportes, 2004 – 2023 (R.D. N° 365-2006-MTC-02).
- j) Plan de Desarrollo de los Servicios Logísticos de Transporte. (PMLP) (R.D. N° 0602019-MTC/01)
- k) Mandato municipal N° 032-2013-MPC, que aprueba el plan de desarrollo urbano de la provincia del Cuco 2013 - 2023.
- l) Mandato municipal N° 005-2021-MPC, establece el reglamento para regular la prestación de servicios de taxi en la ciudad de Cusco.
- m) Decreto de alcaldía N° 05-2021-MPC, que establece el Plan de gestión de estacionamientos en el centro histórico la ciudad del Cusco.

2.4. TEORÍA DE GRAFOS

2.4.1. El grafo

Los grafos consisten en un conjunto de puntos de vértices y aristas, con líneas que unen cada par de vértices. (Alvarez Nuñez & Parra Muñoz, 2013)

2.4.2. Conceptos básicos

Definición 2.1 [Grafo] Un grafo es una terna dada por $G = (V, E, p)$, en donde V es un conjunto finito no vacío de elementos que se llaman vértices o nodos, y por otro lado E es un familia finita de pares sin orden (u, v) de elementos llamados nodos o aristas y p es la aplicación de incidencia del grafo que asigna a cada par de elementos del conjunto V un único elemento de la familia E .

Otros conceptos interesantes asociados a la definición lo damos en seguida.

- a) La cantidad de elementos del conjunto V determinan el orden del grafo, y se denota por $|V|$.
- b) La cantidad de elementos del conjunto E determinan el tamaño del grafo, y se denota por $|E|$.
- c) En el conjunto finito $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, su grafo correspondiente es finito.
- d) Alguna arista de G se expresa con (v_i, v_j) , decimos que sus nodos v_i y v_j son adyacentes si existe un arco entre los dos.

(Calvo Sanchez, Morais San Miguel, & Muel Muel, 2015)

Cuando no exista confusión denotaremos un Grafo por el par $G = (V, E)$ sin incluir la función p .

Definición 2.2 [Grafo Simple] El par $G = (V, E)$, en la cual V es una agrupación finita diferente del vacío, además E también una agrupación finita de pares no ordenadas (u, v) de nodos diferentes de V .

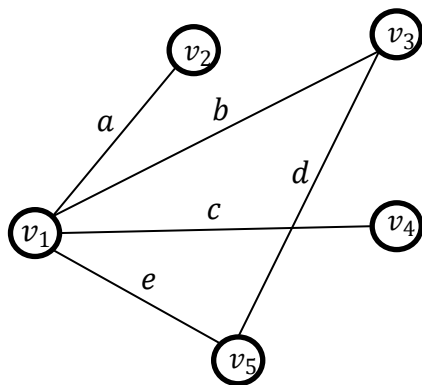
Otros conceptos interesantes asociados a la definición lo mencionamos en seguida.

- a) Si $a = (u, v)$ es un arco de G , entonces $(u, v) = (v, u)$,
- b) los nodos u y v serán adyacentes
- c) el arco (u, v) incide con los vértices u y v
- d) el arco (u, v) agrupa los nodos u y v .
- e) los nodos u y v son incidentes con el arco (u, v)
- f) los nodos u y v son extremos de (u, v) .
- g) el vértice u y la arista (u, v) son incidentes
- h) el nodo v y el arco (u, v) son incidentes

visto en (Chacon, 2005)

Figura 5

Representación de un grafo simple



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{a, b, c, d, e\}$$

$$p(a) = (v_1, v_2), p(b) = (v_1, v_3),$$

$$p(c) = (v_1, v_4), p(d) = (v_3, v_5),$$

$$p(e) = (v_1, v_5)$$

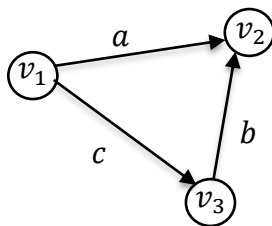
$$|V| = 5, |E| = 5$$

Nota: elaboración y adaptación de (Calvo Sanchez, Morais San Miguel, & Muel Muel, 2015)

Definición 2.3 [Digrafo o Grafo Dirigido] Sea G un grafo, este grafo consta de un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E , que binen a ser pares ordenados de elementos de V . (Chacon, 2005)

Figura 6

Representación de un grafo dirigido



$$V = \{v_1, v_2, v_3\}, E = \{a, b, c\}$$

$$p(a) = \{v_1, v_2\}, p(b) = \{v_3, v_2\}, p(c) = \{v_1, v_3\}$$

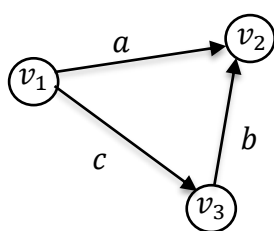
Nota: elaboración y adaptación propia

Definición 2.4 [Grado del Vértice] sea un grafo $G = (V, E)$, donde sus vértices u y v son de V , provisto de una arista (u, v) que son de E , definimos el grado del vértice u como la cantidad de vértices adyacentes al vértice en sí y se denota como $\delta(u)$.

En los grafos dirigidos, el grado del vértice de salida $\delta^-(u)$ es la cantidad de vértices adyacentes desde u , y recíprocamente respecto a su vértice de entrada $\delta^+(u)$

Figura 7

Representación de los grados de salida y entrada de un vértice



$$\delta^+(v_1) = 2, \quad \delta^-(v_1) = 0$$

$$\delta^+(v_2) = 0, \quad \delta^-(v_2) = 2$$

$$\delta^+(v_3) = 1, \quad \delta^-(v_3) = 1$$

Nota: elaboración y adaptación propia

Teorema 2.1 Sea $G = (V, E)$ la expresión de un grafo no dirigido. Entonces:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

Demostración. simplemente se observa que cada arista contribuye con “2” unidades a la suma de los grados, una por cada uno de los dos vértices a los que es incidente si no es un bucle, y “2” por cada bucle. Visto en (Calvo Sanchez, Morais San Miguel, & Muel Muel, 2015)

Teorema 2.2 todo gráfico sin dirección tiene una cifra par de vértices de grado impar.

Demostración. sea $G = (V, E)$ la representación un gráfico sin dirección y sean V_1 conjuntos de nodos de grado par y V_2 conjuntos de nodos de grado impar. Estas agrupaciones forman una partición del conjunto V , es decir, $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Luego al aplicar el teorema 2.1, se tiene:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v)$$

Si $v \in V_1$, $\delta(v)$ es un número par. Por tanto, $\sum_{v \in V_1} \delta(v)$ es par.

Por otra parte, $\sum_{v \in V_2} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \in V_1} \delta(v)$ es también par. En consecuencia,

$\sum_{v \in V_1} \delta(v)$ es una cantidad par que es suma de impares. Por consiguiente, tendría

que existir una cantidad par de sumandos. Por otro lado, la cantidad de sumandos viene a ser la cantidad de nodos del conjunto V_2 . De esta manera concluimos que existe un número par de vértices en V_2 . Visto en el texto (Calvo Sanchez, Morais San Miguel, & Muel Muel, 2015)

Definición 2.5 [Grafo Plano] Se define como el grafo G que se expresa bosquejado en el plano cartesiano sin una confluencia de aristas.

Teorema 2.3 Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces:

$$\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v) = |E|$$

Demostración. La de demostración de este teorema se puede observar en el texto Estructuras Discretas de Tomas Calvo página 99

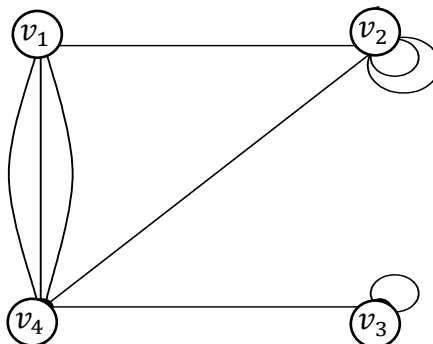
Definición 2.6 [Grafo Completo] Llamamos grafo completo de n vértices al grafico simple de n vértices el cual tiene un arco entre cada par de nodos diferentes. Lo expresamos de la siguiente manera K_n .

Definición 2.7 [Bucle] Sea el grafo $G = (V, E)$, decimos que es un bucle si la arista $a = uu$

Definición 2.8 [Arista Múltiple] Sea el grafo $G = (V, E)$, se llama arista múltiple, si dicha arista aparece repetida.

Figura 8

Representación de aristas múltiples y bucles



Nota: elaborado y adaptado de Estructuras Discretas, Calvo, Morais, Muel, 2015.

Definición 2.9 [Subgrafo] Dado un grafo $G = (V, E)$, se dice que $H' = (V', E')$ es un sub grafo de $G = (V, E)$ si, y solo si verifican las condiciones:

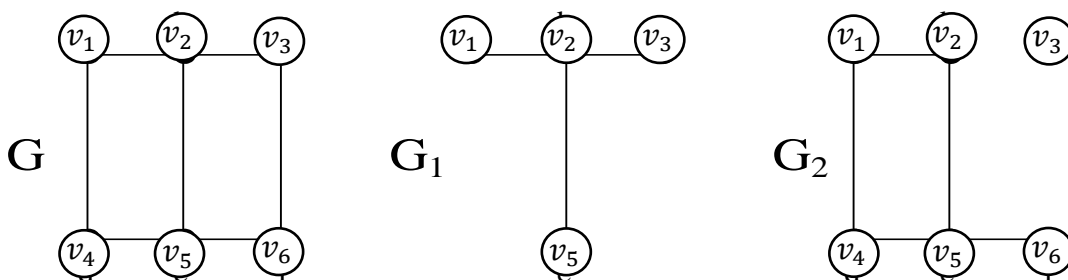
- a) $V' \subset V$
- b) $E' \subset E$

Si $V' = V$, decimos que H' es un subgrafo generador o recubridor.

(Calvo Sanchez, Morais San Miguel, & Muel Muel, 2015)

Figura 9

Grafo G provisto de dos subgrafos G_1 y G_2



Nota: elaborado y adaptado de Teoría de Grafos, Gutiérrez, Delgado, 2017.

Definición 2.10 [Recorrido] Diremos que un recorrido en un determinado grafo es una sucesión de nodos y arcos de la siguiente, manera

$v_0 a_1 v_1 a_2 \dots v_{k-1} a_k v_k$, aquí el arco a_i enlaza los nodos v_{i-1} y v_i . se dice que es un recorrido de v_0 a v_k , de longitud k , donde v_1, \dots, v_{k-1} serán los nodos interiores

del recorrido, dicho de otra manera el recorrido simplemente vincula los nodos v_0 y v_k .

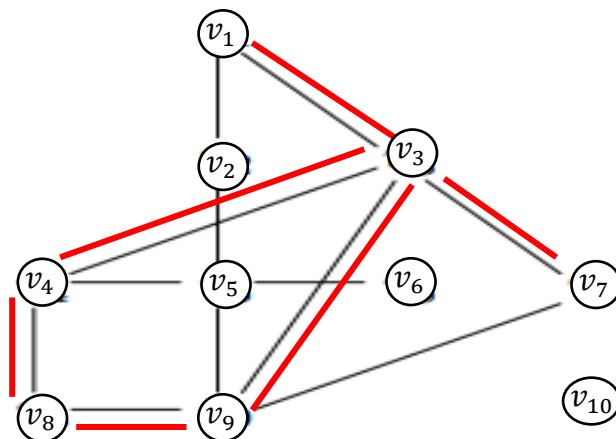
Un recorrido viene a ser par o recorrido impar siempre en cuando su longitud es par o impar, respectivamente.

Un recorrido es cerrado si, $v_0 = v_k$.

En ocasiones en un grafo simple describimos un recorrido simplemente por la disposición de sus vértices, puesto que no es prescindible detallar la cantidad de aristas que posee. Visto en (Gutiérrez & Delgado, 2017)

Figura 10

Un recorrido en un grafo, delimitado en color rojo



Nota: elaborado y adaptación propia, el recorrido es $(v_1, v_3, v_9, v_8, v_4, v_3, v_7)$

Definición 2.11 [Camino] sea G un grafo no dirigido y n una cifra entera positiva. Definimos un camino con longitud n de u a v en G como una secuencia de n arcos $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ de G tal que

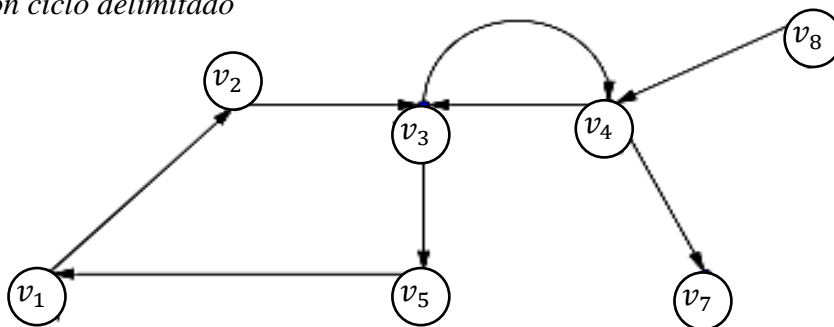
$e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, \dots, e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$. Bajo estos criterios diremos que los nodos u y v tienen una conexión.

Si el gráfico es simple, el camino queda expresada por su secuencia de nodos. Visto en (Gutiérrez & Delgado, 2017)

Definición 2.12 [Ciclo] Diremos que un camino es circuito o ciclo si comienza y finaliza en el mismo vértice, es decir, si $u = v$

Figura 11

Grafo con ciclo delimitado



Nota: elaborado, adaptado y recuperado de Alvarez_Nunez_Marcelino.pdf (ubiobio.cl)

$(v_1, v_2, v_3, v_5, v_1)$ y (v_3, v_4, v_3) son ciclos

Definición 2.13 [Grafos Bipartitos] Definimos al grafo simple como un grafo bipartito siempre en cuando la colección de sus vértices V se alcanza a fraccionar en un par de sub colecciones disjuntas V_1 y V_2 , de manera que las aristas del grafico vincula un vértices de V_1 con otro de V_2 .

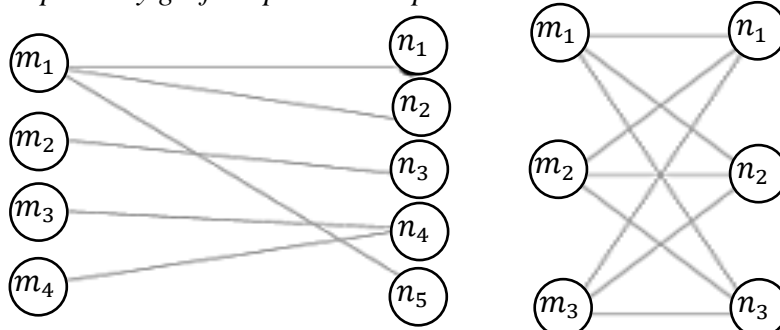
Definición 2.14 [Grafo Bipartito Completo] $K_{m,n}$ es aquel grafo en la cual la cantidad de vértices está formada por dos agrupaciones m y n de nodos, diremos que hay un arco entre dos arcos si y solo si, un arco está en el primer subconjunto y el otro está en el segundo subconjunto.

a) Llamamos estrella a aquel grafo bipartito completo $K_{1,n}$

Visto en (Gutiérrez & Delgado, 2017)

Figura 12

Un grafo Bipartito y grafo Bipartito completo



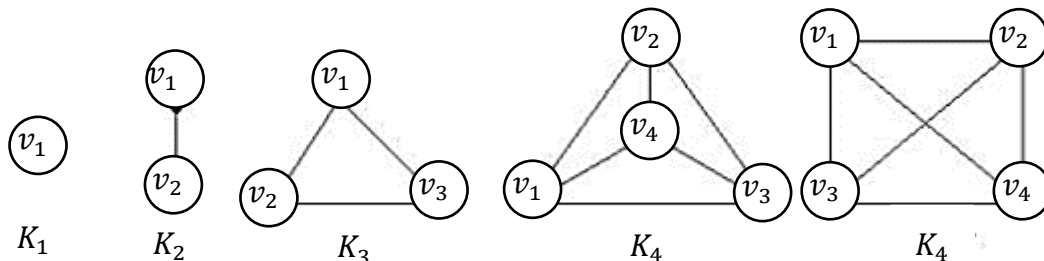
Nota: elaborado, adaptado y recuperado de algoritmos-oia:grafos:grafos-bipartitos [OIA-Wiki]

(unsam.edu.ar). En la figura de la izquierda se tiene un grafo Bipartito y en la izquierda un grafo Bipartito completo

Definición 2.15 [Grafos Regulares] sea el grafo de grado k , definimos un grafo regular si sus vértices poseen igual grado k .

Figura 13

Representación de grafos regulares



Nota: elaborado, adaptado y recuperado de Microsoft Word - 5-GRAFOS REGULARES Y ALEATORIOS.docx (us.es)

2.4.3. Matrices asociadas a los grafos

Los grafos a menudo se representan mediante matrices, los cuales son llamados Matriz de Adyacencia y Matriz de Incidencia.

Una matriz de adyacencia se forma etiquetando las filas y columnas con los vértices del grafo, y los elementos de la matriz se forman colocando el número de aristas que existen entre cada par de vértices, incluso si los vértices tienen aristas cíclicas. Y si los grafos son dirigidos, los puntos iniciales son filas y los puntos finales son columnas.

Definición 2.16 [Matriz de Adyacencia] sea $G = (V, E)$ un grafo simple y finito, con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, definimos a la matriz de adyacencia de G , como A_G , esta es una matriz de orden $n \times n$, donde sus coeficientes a_{ij} se dan como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

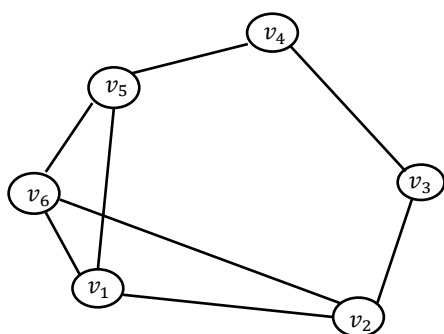
Observación. Tengamos en cuenta que si un grafo posee n vértices, entonces se tiene $n!$ matrices de adyacencia.

En lo posterior se considerará que $G = (V, E)$ una gráfica con sus vértices debidamente etiquetados, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

La figura que a continuación se muestra representa a un grafo etiquetado y su correspondiente matriz de adyacencia A . Visto en (Pakhrou & Tijani, 2013)

Figura 14

Representación de un grafo simple con su matriz de adyacencia



$$A = \begin{bmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: elaborado y adaptación propia, Cada fila y columna representan un vértice del grafo y cada posición interior representa una arista o la ausencia de esta.

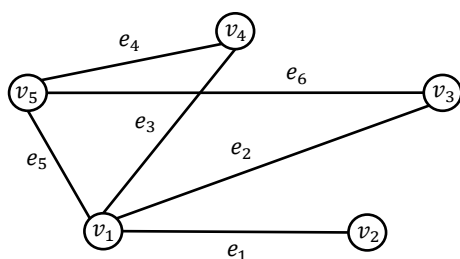
Definición 2.17 [Matriz de Incidencia] sea G un grafo con n nodos y m aristas, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Definimos la matriz de incidencia de dado por B_G , como la matriz de orden $n \times m$, donde sus coeficientes b_{ij} se dan como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si para } v_i \text{ existe una arista} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Visto en (Franco Galvin, 2016)

Figura 15

Representación de un grafo no dirigido y su matriz de incidencia



$$A = \begin{bmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: elaborado y adaptación propia, la fila y columna principal representan los vértices y aristas del grafo respectivamente y cada posición interior representa la incidencia de la arista con su respectivo vértice.

2.4.4. Isomorfismo de grafos

Lo importante de los grafos no es el nombre de los vértices ni su dibujo, la característica principal es la forma en que los vértices están fusionados por las aristas.

Definición 2.18 Dados un par de grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ decimos que son isomorfos si, solo si, existe la aplicación biyectiva $f : V_1 \rightarrow V_2$ que coteja que para cada par de nodos $u, v \in V_1$, con u y v son adyacentes en G_1 talque, $f(u)$ y $f(v)$ son adyacentes en G_2 .

Decimos que el vértice $f(u) \in V_2$ es vértice homólogo de $u \in V_1$. similarmente, el arco $\{f(u), f(v)\} \in E_2$ se llama arco homóloga $\{u, v\} \in E_1$ de tal manera la aplicación f se denominará isomorfismo entre el grafo G_1 y grafo G_2 respectivamente.

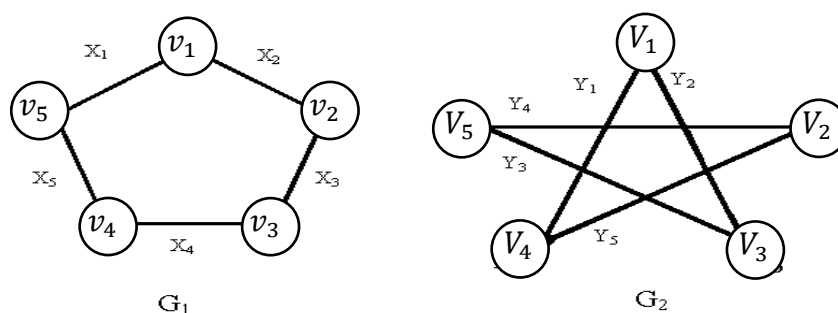
Si dos grafos simples son isomorfos, entonces existe una función biyectiva que resguarda la relación de adyacencia.

Generalmente nos encontramos con un grado de dificultad al establecer si dos grafos simples son isomorfos o no; en el caso de un grafo con n vértices hay $n!$ posibles biyecciones.

Los grafos isomórficos tienen algunas propiedades comunes. Estos se denominan invariantes isomórficas, por decir: la cantidad de nodos, la cantidad de arcos y también el grado de los vértices son invariantes bajo isomorfismo, de modo que es factible mostrar que dos grafos no son isomórficos solamente mostrando que no compatibilizan ninguna propiedad común bajo isomorfismos. Visto en (Soler, 2016)

Figura 16

Representación de isomorfismo de grafos



Nota: elaborado, adaptado y recuperado de 5.6 ISOMORFISMO DE GRAFOS (udg.mx)

Un isomorfismo para los grafos G_1 y G_2 está definido por:

$$f(v_1) = V_1$$

$$f(v_2) = V_2$$

$$f(v_3) = V_3$$

$$f(v_4) = V_4$$

$$f(v_5) = V_5$$

$$y \ g(X_i) = Y_i, \text{ con } i = 1, \dots, 5$$

se dice que los grafos G_1 y G_2 son isomorfos si, y solo si, para alguna disposición de vértices y aristas sus matrices de incidencia son iguales, veamos en el siguiente gráfico.

Figura 17

Representación de las matrices de incidencia de los grafos anteriores

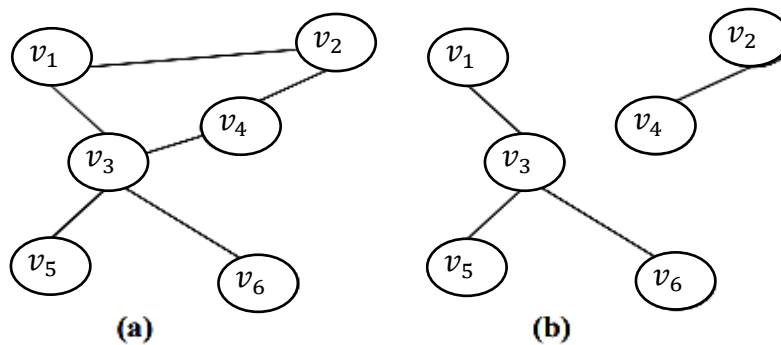
$$G_1 = \begin{bmatrix} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ V_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: elaborado, adaptado y recuperado de 5.6 ISOMORFISMO DE GRAFOS (udg.mx)

Definición 2.19 [Grafo conexo] Denominaremos grafico conexo a una gráfica no dirigida si, y solo si, existe un camino entre cada uno de los pares de nodos distintos en el gráfico.

Figura 18

Representación de un grafo conexo e inconexo



Nota: elaborado, adaptado y recuperado de Microsoft Word - Tema6-bis.doc (uniovi.es), el grafo (a) es conexo y el grafo (b) es inconexo

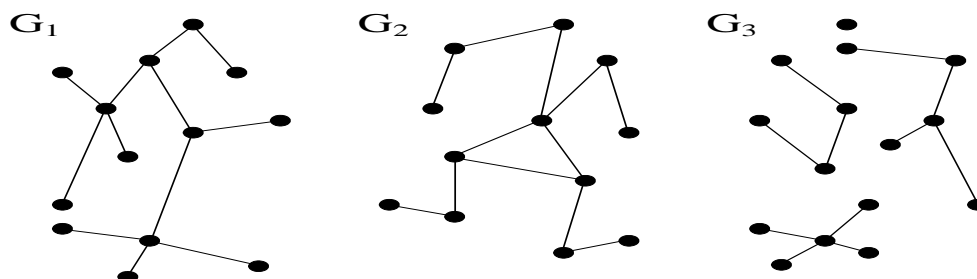
Definición 2.20 [Sub grafo conexo] Denominaremos subgrafos conexos a un grafo no dirigido que no es conexo, como la reunión de dos o más subgrafos conexos que “2” a “2” no poseen nodos en común, a estos subgrafos conexos de les denomina componentes conexas.

Definición 2.21 [Árbol] Denominamos árbol a todo grafo que no es conexo ni tiene dirección y que no tiene ciclos.

Definición 2.22 [Bosque] Un bosque es un grafo acíclico, también conocido como conjunto de árboles.

Figura 19

Representación de árboles y bosques



Nota: G_1 es un árbol, G_2 no es árbol ni bosque, puesto que posee un ciclo y G_3 es un conjunto de árboles (bosque)

2.5. TEORÍA DE REDES

Generalmente entendemos por el termino red, a un conjunto de formas definidas como podrían ser; personas, objetos, ciudades, caminos, entre otros, conectadas entre sí. Por lo tanto, una red permitirá que transiten diferentes tipos de elementos entre estos entes, todo esto según reglas claramente definidas.

Definición 2.23 [Red de Flujo] Una red de flujo es un grafo dirigido $G = (V, E)$ en la cual para cada arista (u, v) pertenece a E y la cantidad de aristas del gráfico tiene una capacidad no negativa.

Se diferencian dos aristas: la fuente o arista s , y el sumidero o arista t .

la red que asocia esta forma de dificultad la denotamos por $R = [V, E, q]$ en la cual:

- 1) V simboliza la agrupación de los “nodos”, en donde el cardinal de V es n .
- 2) E simboliza la agrupación de calles “arcos” entre las ciudades, de modo que es posible que se movilicen los vehículos, es decir,
 $E = \{(u, v) / u, v \in V, \text{es posible movilizarce de } u \text{ a } v\}$
- 3) q es una función $q: V \rightarrow E$ donde para cada $(u, v) \in A$ le relaciona la capacidad máxima de transporte de u a v . La función q se también se llama función de capacidad.

Visto en (Flores Ramos, 2021)

Cuando representamos por v^* la cantidad de flujo en la red del nodo s al nodo t y por f_{ij} la cantidad de flujo del nodo i al nodo j , por consiguiente el problema se expresa así:

maximizar v^*

sujeta a:

$$1. \quad \sum_{j \in \Gamma^+(i)} f_{ij} - \sum_{k \in \Gamma^-(i)} f_{ki} = \begin{cases} v & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s \text{ ó } i \neq t \\ -v & \text{si } i = t \end{cases}$$

$$2. \quad 0 \leq f_{ij} \leq q(i, j) \text{ para todo } (i, j) \in A$$

Donde:

- a) s nodo fuente
- b) t nodo destino
- c) $\Gamma^+(i)$ agrupación de los nodos sucesores de i
- d) $\Gamma^-(i)$ agrupación de los nodos antecesores de i .
- e) La condición 1) es conocida como ecuación de conservación de flujo “su lado izquierdo es la cantidad de flujo que sale menos la cantidad de flujo que entra a cada nodo”
- f) La condición 2) nos indica que “el flujo de cada arco debe ser menor o igual a la capacidad máxima de flujo permitida para él.”

Definición 2.24 [Flujo Factible] Sea una red $R = [V, E, q]$, definimos un flujo factible a la función $f : V \rightarrow E$ que cumple las condiciones 1) y 2) anteriormente mencionadas. Se dice que f es máximo cuando genera el mayor valor posible de v^* . Visto en (Gracia Gracia & Mateo Collazos, 2019)

Definición 2.25 [Cadena de Sucesión] Sea $R = [V, E, q]$ una red. Se llama cadena a una sucesión de la forma nodo-arco denotada por C y representada por $C = \{i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, a_k, i_{k+1}\}$ donde cada nodo i_j está conectado por el arco a_j al nodo i_{j+1} .

Obsérvese que si f es un flujo factible en R y $C = \{s = i_1, a_1, i_2, a_2, \dots, a_k, i_{k+1} = t\}$ una cadena desde s a t , los arcos de C se pueden separar en dos subconjuntos F y B , tales que:

$$a_j \in F \Leftrightarrow a_j = (i_j, i_{j+1})$$

Es decir, los arcos que estaban en F son los arcos de C que tienen el sentido de s a t y

$$a_j \in B \Leftrightarrow a_j = (i_{j+1}, i_j)$$

Los arcos que estarán en B serán los arcos C que poseen el sentido de t a s , denotaremos por $q_{ij} = q(i, j)$ la capacidad máxima de arco (i, j) , es decir, flujo máximo flujo que soporte el mencionado arco.

Definición 2.26 Sea la red $R = [V, E, q]$ y un flujo factible f sobre ella. Una cadena de s a t será aumentante si $f_{ij} < q_{ij}$ para todo $(i, j) \in F$ y $f_{ij} > 0$ para todo $(i, j) \in B$.

Definición 2.27 la agrupación de arcos (N, \tilde{N}) va a ser una cortadura de R siempre en cuando $s \in N$ y $t \in \tilde{N}$, en donde s y t son la arista fuente y la arista destino de R . Visto en (Gracia Gracia & Mateo Collazos, 2019)

2.6. ALGORITMOS

Luis Joyanes, programador experto nos dice: “en la ciencia de la computación y en la programación, un algoritmo se puede definir como una secuencia de instrucciones que representan un modelo de solución para determinado tipo de problema. O bien como un conjunto de instrucciones que realizadas en orden conducen a obtener la solución de un problema.” Además, también nos dice “los algoritmos son más importantes que los lenguajes de programación o las computadoras. Un lenguaje de programación es sólo un medio para expresar un algoritmo y una computadora es sólo un procesador para ejecutarlo. Los algoritmos son independientes de los lenguajes de programación. En cada problema el algoritmo puede escribirse y luego ejecutarse en un lenguaje diferente de programación. El algoritmo es la infraestructura de cualquier solución, escrita luego en cualquier lenguaje de programación.” visto en (Joyanes Aguilar, 2008)

2.6.1. Clasificación de los algoritmos

- a) Algoritmo Computacional. Algoritmo que se ejecuta en un ordenador
- b) Algoritmo no computacional. No se necesita un ordenador
- c) Algoritmo cualitativo. involucran elementos verbales
- d) Algoritmo cuantitativo. Involucran cálculos numéricos
- e) Algoritmo Determinístico. Cada resultado es de manera única.
- f) Algoritmo No-Determinístico. Se da dentro de un conjunto de posibilidades.

2.6.2. Características de los algoritmos

- a) **Secuenciales.** Se procesan uno a la vez
- b) **Precisos.** Sin ambigüedades, ni subjetividades
- c) **Ordenados.** Tienen secuencia precisa y exacta
- d) **Definidos.** Cada algoritmo tiene su resultado
- e) **Concretos.** Ofrece un resultado en base a las funciones que cumplen
- f) **Finitos.** Finaliza en momento dado.
- g) **Produce un resultado.** Los resultados son los datos de salida

Si se tienen dos algoritmos que busquen el mismo objetivo, el más óptimo siempre será el más corto, pues se busca la optimización de recursos y tiempos). Visto en (García, 2022)

Existen acuerdos para distinguir si los algoritmos son óptimos o no:

Los algoritmos constantes y polinomiales, son Polinomiales.

Los algoritmos exponenciales y factoriales, son exponenciales.

Los algoritmos polinomiales y exponenciales son óptimos y no óptimos respectivamente.

Al momento de establecer si un problema es fácil o no, se busca primero instituir la complejidad computacional del problema. En algunos casos se puede elegir algoritmos polinomiales a algoritmos exponenciales. Recordemos que la complejidad de las funciones exponenciales tiene un aumento desmedido y mayormente solo resuelven pequeños problemas. Visto en (García, 2022)

2.6.3. Representación de algoritmos

En (García, 2022) se presentan los diferentes tipos de algoritmos, se utilizan ciertos métodos de representación tanto escrita, gráfica o matemática. Estos son:

- a) Pseudocódigo
- b) Diagramas Nassi-Shneiderman
- c) Diagramas de flujo
- d) Palabras naturales
- e) Técnicas matemáticas

- a) **Pseudocódigo.** es una habilidad que utiliza palabras imperativas para formular el procedimiento óptimo de un problema a través de un algoritmo presentado con palabras simples de un determinado idioma como puede ser el idioma español o idioma inglés. Estas palabras por ejemplo son: iniciar, leer, imprimir, sumar, dividir, calcular, finalizar.

Figura 20

Pseudocódigo que expresa la solución de un problema

```

Inicie
{Calcule el salario neto y deducción de 6%} {Esto es un comentario}
Lea nombre, horas, valor_hora
Salario_bruto=horas*valor_hora
Deducccion=Salario_bruto*6%
Salario_netto=Salario_bruto – Deducccion
Imprima nombre, Salario_bruto, Deducccion, Salario_netto
Finalice


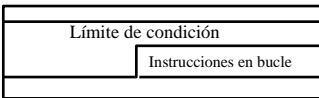
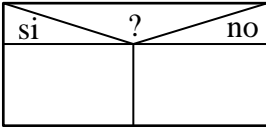
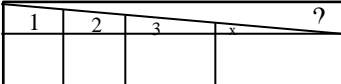
```

Nota: elaboración y adaptación de (García, 2022)

- b) **Diagramas Nassi Schneiderman.** A este lo conocemos también con el nombre de Diagramas de Chapín, corresponden a uno de los tipos de diagramación estructurada. Las acciones se escriben en rectángulos o cajas sucesivas. Se pueden escribir diferentes acciones en una caja.

Figura 21

Simbología para trazar las diferentes labores en una determinada caja

Acción secuencial, operación. asignación	
Ciclo o bucle definido un número de veces (para), o con centinela (mientras, hasta)	
Utilizado para tomar decisiones y bifurcar el programa de acuerdo con la necesidad del programador	
Utilizado para diseñar decisiones múltiples	

Nota: elaboración y adaptación de (García, 2022)

- c) **Diagramas de flujo.** También se suele llamarlo con el nombre de diagramas de lógica o también se le llama flujogramas, estos diagramas utilizan cajas estándar para su representación, estas son representaciones son las más antiguas, a continuación, veamos en la figura 15:

Figura 22

Diagrama de flujo y sus cajas estándar

Empezar o finalizar	
Ingresar datos	
Procesar datos	
Decidir lógicamente	
Conector de fin de pagina	
Conector dentro de pagina	
Repetir el proceso	
Imprimir datos de salida	
Llamada a subproceso o subrutina	

Nota: elaboración y adaptación de (García, 2022)

- d) **Palabras naturales.** en ocasiones este lenguaje no es preciso, admitiendo tergiversaciones, de tal manera no se obtiene una descripción agradable.
- e) **técnicas matemáticas.** Las fórmulas que se utilizan en el mundo de las matemáticas son buenas para representar sistemas, pero por lo general son difíciles de transfórmalo en programas.

2.7. ALGORITMO DE DIJKSTRA

2.7.1. Algoritmo De Dijkstra

Este algoritmo posiblemente es el más conocido por que su trabajo radica en hallar el camino más corto entre "2" nodos dados. Alrededor del año 1959. Edsger Dijkstra presentó este algoritmo con la intención de dar solución al problema de la ruta más corta desde el vértice fuente s a todos los demás vértices de la red i , tomando en cuenta que las distancias siempre sean positivas.

Es así que aun hoy en día forma la estructura de la teoría de gráficas y se considera como el algoritmo más potente para dar solución a problemas de rutas cortas.

Se emplea de la siguiente manera:

- 1) La etiqueta inicial es una cota superior de la longitud de la ruta del nodo s al nodo i .
- 2) Como el proceso es iterativo las etiquetas se reducen en cada iteración (etiquetas temporales), hasta obtener la mínima longitud de la ruta de s a i (etiquetas permanentes).

El algoritmo en mención nos permite visualizar secuencialmente el recorrido más óptimo a medida que se está examinando el grafo. A continuación, se explica cómo funciona el algoritmo y la secuencia a seguir para ir recorriendo el grafico y conseguir el camino más corto entre las dos aristas:

- 1) Establecer e iniciar el comando distancia d . luego fijar una distancia de "0" a la arista fuente s y un valor de un coste muy alto para el resto de las aristas del gráfico.
- 2) Elegir la arista fuente s como arista actual y crear un comando Q con todos los vértices de la gráfica, representando todos los vértices que todavía no se han frecuentado.
- 3) Indagar cuales son las aristas adyacentes que aún no se han visitado, o lo que es lo mismo, que están presentes en el comando Q, y examinar el coste potencial del enlace. Contrastar el nuevo costo del enlace con el

asignado actualmente en el comando distancias d para preferir el de menor valor.

- 4) Ya teniendo los nodos adyacentes analizados, remarcar el nodo como visitado, dicho de otro modo, suprimir la arista del array Q , que contiene la lista de aristas aun no visitados.
- 5) Cambiar la arista actual por la arista adyacente de menor costo y repetir el paso 3.
- 6) Si la arista destino D surge como visitado o si el array Q no contiene ningún elemento, se termina el algoritmo.

El problema del camino más corto se alcanza a resolver mediante programación lineal, pero dado que el método simple tiene una complejidad exponencial, se recomienda manejar algoritmos que aprovechen la estructura de red disponible para estos problemas. Para hacer esto, el algoritmo mantiene un conjunto de nodos S cuyos pesos de ruta mínimos finales desde el vértice de origen ya se han determinado. Veamos el algoritmo en sí.

```

"Dijkstra (G,s)
Inicializar
  for cada v perteneciente a V[G]
    do d[v] = infinito
      p[v] = nulo
  d[s] = 0
S = vacio
Q = V[G]
mientras Q no vacio
do u = nodo v con min d[v]
S = S unión u 'se añade al conjunto de nodos finalizados
for cada v perteneciente Adyacente u
  Relajación
    if d[v] > d[u] + w(u,v) then
      d[v] = d[u] + w(u,v)
      p(v) = u"

```

Nota: algoritmo_dijkstra "Grafos - software para la construcción, edición y análisis de grafos." (upv.es)

Al final del cumplimiento del algoritmo, repone, según el criterio, el camino más barato que se utilizó para llegar desde el punto de partida S al destino D .

Además, el algoritmo puede reponer el costo total alcanzado por agregando el coste de cada enlace de la ruta.

2.8. SIMULACIÓN

2.8.1. Sistema

Al igual que muchos otros conceptos, entendemos de forma intuitiva a un sistema como una colección de objetos u otros que están enlazados por alguna interacción para lograr una o más propósitos establecidos. Una definición formal sería la siguiente: “Conjunto de objetos o ideas que están interrelacionados entre sí como una unidad para la consecución de un fin.”

Visto en (Shannon , 1988)

Claramente podemos apreciar que una agrupación de objetos que interactúan entre sí, puede ser considerados como sistema, el principal carácter de un sistema es que se le puede considerar como un todo.

2.8.2. Modelo

Es una figura simplificada de un elemento, concepto o sistema del mundo real. Las hipótesis sobre el comportamiento del sistema informan nuestro modelo, que consiste en un conjunto de relaciones matemáticas o lógicas.

2.8.3. Tipos e modelos

- a) **De tiempo continuo y discreto.** Cuando el estado del sistema se especifica en cada momento, decimos que el modelo es de tiempo continuo. En cambio, los modelos de tiempo discreto se limitan a especificar el estado del sistema en determinados momentos.
- b) **De estado continuo o discreto.** las variables toman un papel muy prescindible al momento de observar los estados del modelo, es decir si las variables de estado son continuas, el modelo de estado será continua y recíprocamente.
- c) **Determinísticos y Probabilísticos.** Un modelo determinista, es aquel cuyos resultados pueden preverse con absoluta confianza. Un modelo se considera probabilístico, o un simulador de colas, si es posible obtener resultados diversos a partir de entradas repetidas.

- d) **Estáticos y dinámicos.** No puede haber un modelo dinámico si el tiempo no es una variable. Un sistema dinámico es aquel que experimenta cambios a lo largo del tiempo.
- e) **Lineales y no lineales.** la salida debe ser una aplicación lineal de la entrada, por ende, el modelo será lineal, y recíprocamente.
- f) **Cerrados y abiertos.** Si la entrada es independiente del modelo, el modelo será abierto. Cuando el modelo está cerrado, no hay entrada externa. Esto depende de los detalles de la simulación, de cómo se aborda el problema y de las suposiciones que se realicen.
- g) **Modelos estables e inestables.** El modelo se considera estable cuando la actuación del sistema se aproxima a un estado estacionario, independiente del temporal. Un modelo inestable cuyo comportamiento cambia constantemente.

2.8.4. Simulación

Para averiguar cómo funciona un sistema y corregir posibles errores antes de aplicar la investigación en un entorno real, la simulación es una herramienta útil. Consiste en imitar el comportamiento de un sistema real o potencialmente real. Sus raíces etimológicas muestran que nuestro objetivo último es imitar la apariencia de alguien o algo distinto de lo que somos en realidad. Se translitera como "similar" del latín *similis*.

- 1) “La simulación es un método para acercarse a la realidad. Su utilidad es múltiple en especial para los propósitos educacionales, de capacitación y de investigación” (Bolton, 1971, p 11)
- 2) H. Masiely G. Gnugnoli. “Es una técnica numérica para realizar experimentos en una computadora digital. Estos experimentos involucran ciertos tipos de modelos matemáticos y lógicos que describen el comportamiento de sistemas de negocios, económicos, sociales, biológicos, físicos o químicos a través de largos periodos de tiempo.”
- 3) “La simulación de sistemas en una computadora ofrece un método para analizar el comportamiento de un sistema” (Fishman, 1978, p 34)

2.8.5. Fases para iniciar una simulación

- 1) Definir el sistema: si queremos obtener una definición precisa del sistema que vamos a suponer, primero debe realizar un estudio de antemano del sistema para determinar otros sistemas y sus interacciones.
- 2) Formular el modelo: Una vez que los resultados de la investigación estén claramente definidos, el siguiente paso es identificar y desarrollar un modelo para lograr los resultados deseados.
- 3) Conseguir datos: Si algunos datos son fáciles de obtener u otros son difíciles, afecta el desarrollo y la creación de modelos.
- 4) Implementar el modelo en la computadora: Por lo general se puede implementar un lenguaje a utilizar en este caso, algunos de los cuales son los siguientes: Visual Basic, Matlab, Mathematica, GeoGebra, Java, Delphi. Paquetes como GBSS, SIMULA, PROMODEL, GRAFOS, etc.
- 5) Validar: Este paso permite la definición del formato del modelo o la definición de los datos ingresados al modelo.
- 6) Experimentar: Después de la verificación de la muestra, se realizan las pruebas
- 7) Interpretar: Interpretar los resultados de las simulaciones y tomar decisiones en base a ellos.
- 8) Documentar: Para aprovechar al máximo su modelo de simulación, necesita dos tipos de documentos.

Visto en (Marin Barella, 2017)

2.8.6. Tipos De Simulación

- a) **Monte Carlo.** Simulación estática. Se utiliza para modelar fenómenos estocásticos independientes del tiempo o para evaluar representaciones no estocásticas y procesos estocásticos. Esta definición es más sólida que la dada por otros autores que se refieren a las simulaciones de Monte Carlo como simulaciones que utilizan números aleatorios.
- b) **Por trazas.** Una señal es un pulso secuenciado de eventos en el sistema del cuerpo. Es muy utilizado para analizar diferentes especies. El seguimiento debe ser independiente del sistema que se esté estudiando.
- c) **Por Eventos Discretos.** Las simulaciones que utilizan un modelo de estado discreto, se denominan simulaciones de eventos discretos. En esta

clase de simulación la situación del sistema cambia sólo ocasionalmente, es decir, ocurren eventos.

- d) **Continua.** Los modelos de simulación continua con cuasi variables continuas, se describen mediante ecuaciones diferenciales y exponenciales. Estas variables dinámicas cambian constantemente a razón que continúa la simulación. Es decir, el estado del líquido en un pozo varía constantemente ya que el agua entra y sale del pozo sólo ocasionalmente, como al agregar y quitar baldes. Diversas simulaciones de eventos discretos involucran subsistemas continuos y viceversa. Podríamos realizarlo en una computadora analógica o digital. Las computadoras analógicas son máquinas autónomas.

Visto en (Marin Barella, 2017)

2.8.7. Proceso de simulación se un sistema

Tabla 2

Proceso de simulación de un sistema

SISTEMA	COMPONENTE	ATRIBUTO	ACTIVIDADES
trafico	Automóviles	Velocidad	Manejar
	reglamentos	Capacidad utilidad	normas

Nota: Elaborado y Adaptado de “Simulación de una red de transporte multimodal en Canarias, Universidad de la laguna, Vanessa Marín Barella, 2017”

2.8.8. Errores en Simulación

- a) **Clase de detalle inapropiado.** Los modelos analíticos son menos detallados que los modelos de simulación. El análisis es multifacético y sencillo. Los detalles del modelo de simulación son limitados cuando están disponibles para su desarrollo.
- b) **Lenguaje inapropiado.** Los lenguajes de simulación específicos toman menos tiempo para implementar modelos y realizar tareas como validación (usando elecciones de inferencia) y la observación estadística. Un lenguaje de programación general es más portátil y más manejable en términos de tiempo y eficiencia de simulación.

- c) **Modelos no verificados.** Los modelos que se van a simular son un proyecto serio y, si no se toman las precauciones adecuadas, pueden producirse errores de programación que dejen el programa inutilizable.
- d) **Modelos inválidos.** Incluso si el programa está libre de errores, las suposiciones incorrectas en la formulación del modelo pueden hacer que el modelo no represente con precisión el sistema real. Es importante validar el modelo para asegurar que las conclusiones alcanzadas sean las mismas que las obtenidas de sistemas reales. Todos los modelos de simulación deben cuestionarse hasta que se prueben los modelos analíticos, cuantitativos o cuantitativos.
- e) **Tratamiento erróneo de las situaciones de inicio.** Corrientemente, la primera parte de la ejecución de la simulación debe descartarse ya que no es representativa del sistema en ejecución real.
- f) **Simulaciones muy cortas.** Para ahorrar tiempo de análisis y cálculo, los tiempos de ejecución de la simulación son muy cortos. En estos casos, el resultado dependerá de las situaciones iniciales y pueden no representar el sistema real. El tiempo de ejecución requerido depende de la precisión requerida (intervalo de confianza y la varianza de las cuantías vistas).
- g) **Generador de números aleatorios inconvenientes.** Las simulaciones que demanden números aleatorios se generan mediante una técnica llamada generador de números aleatorios. Usar una máquina bien filtrada es mejor que usar tu propia máquina. Incluso los mejores constructores tienen problemas.
- h) **Selección de cantidades aleatorias iniciales inadecuadas.** Un generador de números aleatorios es un método que a partir de un número aleatorio se genera otro. El primer número de la secuencia se llama semilla y debe ser proporcionado por el analista. Las semillas de diferentes series deben seleccionarse esmeradamente para mantener la autonomía entre series. Los analistas suelen utilizar el mismo proceso para diferentes secuencias o utilizar una única semilla para todos los procesos. Esto puede generar correlaciones entre los procesos y nos puede conllevar a decisiones incorrectas.

2.9. TRANSPORTE

Según (Spaggiari, 1990). “Tenemos que tener en cuenta que la movilidad y los medios de transporte son diferentes variables, pero complementarias e interconectadas en el ámbito urbano.” Es importante diferenciar entre la necesidad de movimiento y de portabilidad. Algunas de las necesidades de movilidad serán demanda de transporte motorizado como lo requiere la expansión y densidad de la ciudad, el resto será a pie.

También se menciona a (Miralles, 2002) “Las decisiones e indecisiones de las entidades públicas y privadas, resuelve el cómo se organiza y se planifica la movilidad”. Por tanto, el manejo de transporte urbano son todas las acciones de las compañías públicas y privadas para organizar y dirigir el movimiento de los ciudadanos.

TRANSPORTE PÚBLICO URBANO

El transporte viene a ser acción que viene de otras actividades que acontecen en un determinado lugar geográfico, como puede ser un país, una región, una ciudad o una comunidad. La combinación de diversos tipos de actividades como son: producción, consumo y ocio realizadas en un lugar, se denomina sistema de trabajo, este da lugar a necesidades específicas de viaje, necesidades de transporte. Estas demandas son cubiertas por una serie de carreteras, vehículos, puertos y su correcto funcionamiento de estos. Esto significa que la interacción entre los dos sistemas crea patrones de flujo que son movimientos entre orígenes y diferentes ubicaciones o diferentes tipos de rutas, y diferentes rutas y períodos de tiempo. La señal más cierta es el transporte urbano, esto se ve en el flujo de personas y vehículos en las zonas públicas de la ciudad (carreteras, calles, jirones, etc.)

Se dice que un buen servicio de viajes en el que un sistema de transporte satisface las exigencias del transporte. Los niveles de servicio afectan a los beneficiarios del sistema y al resto de la población.

- a) **Riesgo.** Incremento de la cantidad de accidentes de tránsito.
- b) **Intrusión visual.** Escasa visualización por parte de obstrucción de vehículos o construcciones.
- c) **Polución.** Incremento en la contaminación con gases en la atmosfera.

- d) **Segregación del entorno.** Incremento en espacio y tiempo en los cruces vehiculares.
- e) **Congestión.** Incremento de los tiempos de viaje de choferes, pasajeros y caminantes.
- f) **Ruido.** Incremento de los ruidos y sacudidas en calles y edificaciones.
- g)
- h) **Intimidación.** poco uso de las calles para otros motivos como son: vivir, jugar, pasear, etc.

Todos estos detalles estimularán cambios en el sistema de todo el transporte y también en el sistema de todas las actividades.

2.10. DEFINICIONES DE TRÁFICO

El concepto de flujo de tráfico proporciona datos cuantitativos con tres variables básicas: velocidad, flujo (o volumen) y concentración. Cuando se definen correctamente, estas métricas se logran utilizar para mostrar el tráfico a nivel de red. Estos parámetros deben ser lo suficientemente fuertes como para sobrellevar los problemas de la teoría de flujo actuales. Definimos algunos de los parámetros más utilizados. visto en (Ramos Ferrer, 2017)

2.10.1. La Intensidad en el tráfico (i)

Podemos definir como el conjunto de automotores que se movilizan por un sector de la carretera en un tiempo determinado. La intensidad se acopia a través de mediciones, de tal manera que se tiene lo siguiente:

$$i = \frac{N}{T}$$

Donde:

“ N ” es el número de vehículos

“ T ” tiempo transcurrido

La intensidad se crea en función del número de automotores en un lapso de una hora, pero el período de medición puede ser más corto. Dado que se trata de un fenómeno aleatorio, se utilizan diferentes distribuciones según el estado del flujo. Recogido de (Dómine Rueda, 2015)

- a) **Distribución de poisson.** Se utiliza si se tiene un tráfico liviano, de hasta por lo menos doscientos automotores por hora y carril, cada chofer está en la facultad de poder decidir con su moderación de marcha, la función de densidad es:

$$P(i) = e^{-qt} \frac{(qt)^i}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$P(i)$, nos indica el evento de que “ i ” automotores logren una parte fija de la carretera en un temporal “ t ”, y la constante “ q ” es la cantidad media de llegadas. Visto en (Dómine Rueda, 2015)

- b) **Distribución binomial.** Esta distribución se encarga cuando el tráfico es superior a doscientos vehículos por hora y carril, la cual se representa de la siguiente manera:

$$P(i) = \binom{m}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{m-i}$$

- c) **Binomial negativa.** Esta distribución se emplea cuando existe fuertes variaciones en el tráfico, tales pueden ser como en horas de exceso de saturación, se da incrementos y decrementos fuertes en la cantidad de vehículos, se utiliza lo siguiente:

$$P(i) = \binom{i+k-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^i$$

Visto en (Dómine Rueda, 2015)

2.10.2. Densidad De Tráfico (K)

Es una variable consistente en la cantidad de automotores que pasan por una unidad de longitud que circulan por un determinado lugar de la carretera en un instante determinado.

Gerlough y Huber mencionan lo siguiente: " Tradicionalmente, los ingenieros de tráfico han estimado la concentración según determinadas mediciones", de esta manera se puede estimar la intensidad del tráfico y la velocidad del tráfico dado.

$$K = \frac{i}{v}$$

La densidad del tráfico afecta directamente a la eficiencia del tráfico, pues cuando la densidad aumenta, al conductor le resulta más difícil mantener la velocidad deseada y tiene que realizar más movimientos, lo que dificulta cada vez más la conducción.

2.10.3. Velocidad (V)

La velocidad es una de las mediciones más esenciales al momento de ver los flujos de tráfico. Para medir la velocidad de un solo automotor se requiere bastante concentración en tiempo y espacio. Se cuenta con varias clases de velocidad: visto en (Ramos Ferrer, 2017)

- a) **Velocidad instantánea.** como la derivada del espacio respecto del tiempo. Depende de los contextos internos marcadas por el chofer y el propio automotor y otras condiciones externas provocadas por la carretera. Se calcula del siguiente modo:

$$V_i = \lim_{(t_2 - t_1) \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

- b) **Velocidad de recorrido media.** Se suele dar que los tiempos de parada sean más largos en ciertos tramos de la ruta, ya sean semáforos u otros eventos que aumentan el tiempo de viaje y afectan la velocidad.

$$V_r = \frac{D}{\frac{1}{N} \sum_i t_i}$$

- c) **Velocidad temporal media.** Es la media aritmética en cuanto a las velocidades de todos los automotores que circulan por cierto lugar en un determinado temporal dado.

$$V_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i$$

- d) **Velocidad espacial media.** Es la valía media de todas las velocidades que se aprecian en los automotores, los cuales están en cierto trecho de carretera en un tiempo dado.

2.10.4. Intervalo (h)

Se entiende por éste, al paso de dos vehículos seguidos por tramos homogéneos a través del corte transversal de la vía. En contextos de poco tráfico, se utilizan distribuciones estadísticas exponenciales negativas desplazadas para rastrear la imposibilidad de un intervalo cero; Funcionan precisamente porque el flujo de vehículos reduce las altas posibilidades.

2.10.5. Espaciamento (\bar{S})

Este es el tiempo entre dos automotores seguidos. Generalmente se mide desde la parte de atrás del automotor anterior y la parte de atrás del siguiente vehículo, lo que incluye la longitud total del siguiente vehículo. El inverso de la densidad es el espaciamento medio y se da:

$$\bar{S} = \frac{1}{K}$$

2.10.6. Modelos de flujo Ininterrumpido

Si no consideramos los elementos de señalización u otros dispositivos que puedan provocar interrupciones en la circulación de los automotores, este flujo se ve afectado únicamente por lo que pasa entre ellos y la interacción entre los vehículos y la vía. Con este enfoque, los automotores en teoría de debieran parar por motivos externos. Visto en “una simulación de un modelo microscópico de seguimiento de vehículos, Universidad Politécnica de Madrid, Carlos Ramos Ferrer, 2017.”

$$i = V.K$$

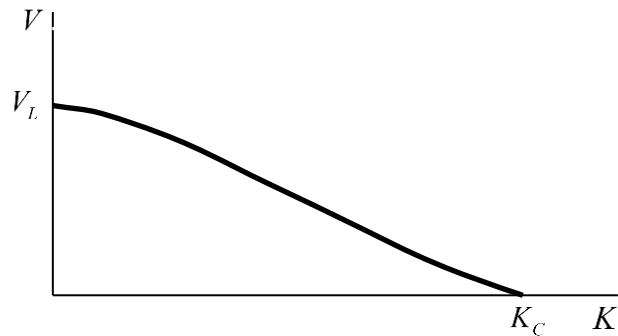
Donde:

i : Intensidad, V : Velocidad y K : Densidad

2.10.7. Relaciones velocidad, densidad e intensidad

Se puede apreciar que, si se incrementa la densidad del flujo en un tráfico dado, la velocidad desciende. De “Simulación de un modelo microscópico de seguimiento de vehículos, Universidad Politécnica de Madrid, Carlos Ramos Ferrer, 2017.”

Esta variación se representa en el siguiente gráfico:

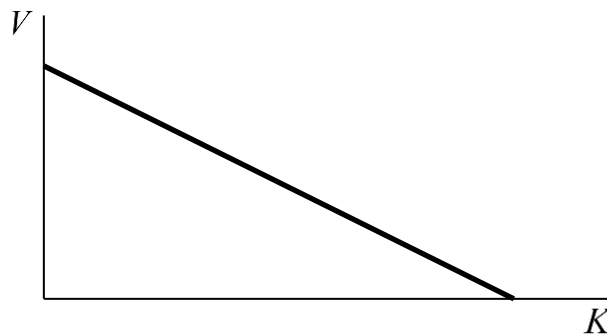
Figura 23*Curva Experimental de la Velocidad y la Densidad*

Nota: elaboración y adaptación de (Dómine Rueda, 2015)

En este esquema V_L se establece como la velocidad de circulación en ciertas condiciones de flujo independiente y K_C es la densidad de colapso en la cual todos los automotores están detenidos.

a) Se denomina modelo lineal y se expresa así:

$$V = V_L \cdot \left(1 - \frac{K}{K_C}\right)$$

Figura 24*Modelo Lineal de la Velocidad y la Densidad*

Nota: elaboración y adaptación de (Ramos Ferrer, 2017)

En este esquema vemos que V_L es la velocidad de circulación autónoma y K_C viene a ser la densidad de automotores estancados.

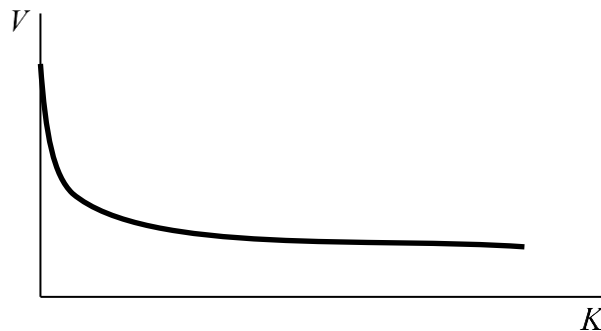
- b) El modelo que se utiliza para representar con exactitud las altas condiciones de densidad de tráfico, es el modelo logarítmico, este fue presentado por (Greenberg, 1959). y se establece así:

$$V = V_m \cdot \ln\left(\frac{K_c}{K}\right)$$

Aquí, V_m será la velocidad en la cual la intensidad es máxima.

Figura 25

Modelo Logarítmico de la Velocidad y la Densidad



Nota: elaboración y adaptación de (Dómine Rueda, 2015)

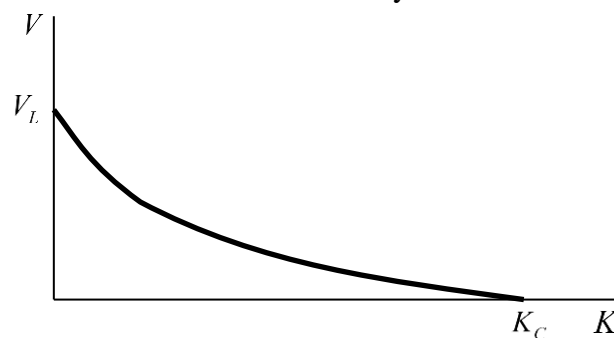
- c) Este modelo presenta el comportamiento del flujo de tráfico es el modelo generalizado, es independiente de la densidad y velocidad del automotor.

$$V = V_L = \left[1 - \left(\frac{K}{K_c} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right] \quad n > -1$$

Veamos que cuando $n = 1$, esta igualdad concuerda con el del modelo lineal.

Figura 26

Modelo generalizado con $n=0$ de la Velocidad y la Densidad



Nota: elaboración y adaptación de (Dómine Rueda, 2015)

2.10.8. Relaciones intensidad y densidad

Estas relaciones explican cómo funcionan las ondas de choque en las simulaciones de la circulación, esto se da para analizar los diferentes modos de manejo, según (Carlos Dómine Rueda, 2015). Viendo las ecuaciones anteriores llegamos a lo siguiente:

$$i = V \cdot K, \quad V = V_L \cdot \left(1 - \frac{K}{K_C}\right) \quad \text{entonces} \quad i = V_L \cdot \left(K - \frac{K^2}{K_C}\right)$$

$$\frac{di}{dK} = 0 \Rightarrow V_L \cdot \left(1 - \frac{2K_m}{K_C}\right) = 0 \Rightarrow K_m = \frac{K_C}{2}$$

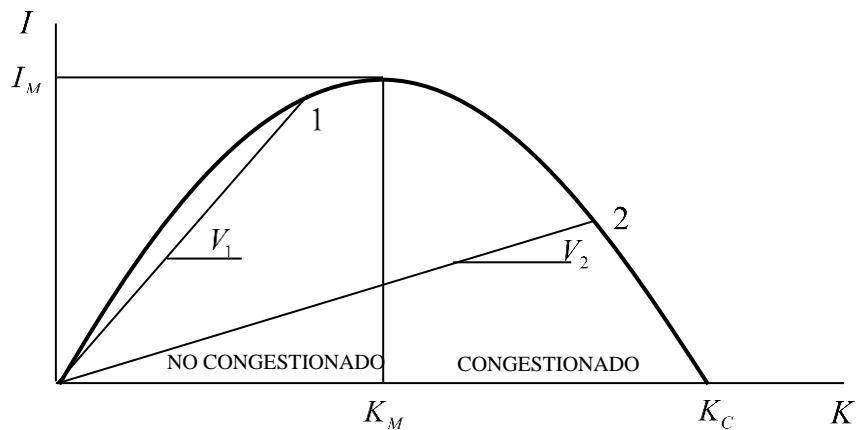
Tenemos que K_m es la densidad en la cual la intensidad es máxima. Por consiguiente, si queremos encontrar el máximo valor de la intensidad debemos reemplazar ese valor en la ecuación de la velocidad:

$$V_m = V_L \cdot \left(1 - \frac{K_C}{2K_C}\right) = 0 \quad \text{y} \quad i_m = V_m \cdot K_m = \frac{V_L \cdot K_C}{4}$$

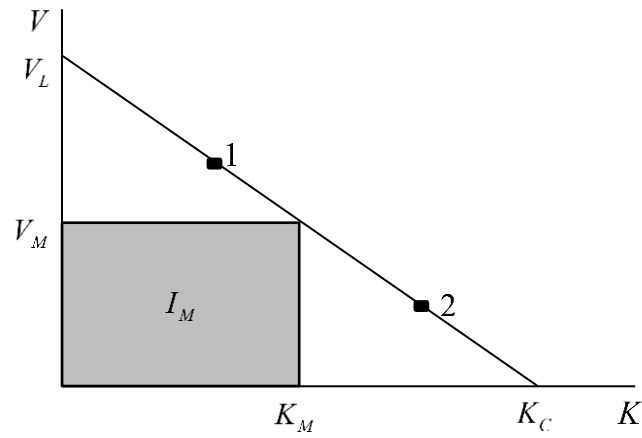
Las ecuaciones anteriores que se dan en las figuras siguientes, que se pueden utilizar para analizar diferentes situaciones que ayudan a entender los diferentes comportamientos de los flujos de tráfico en distintas condiciones.

Figura 27

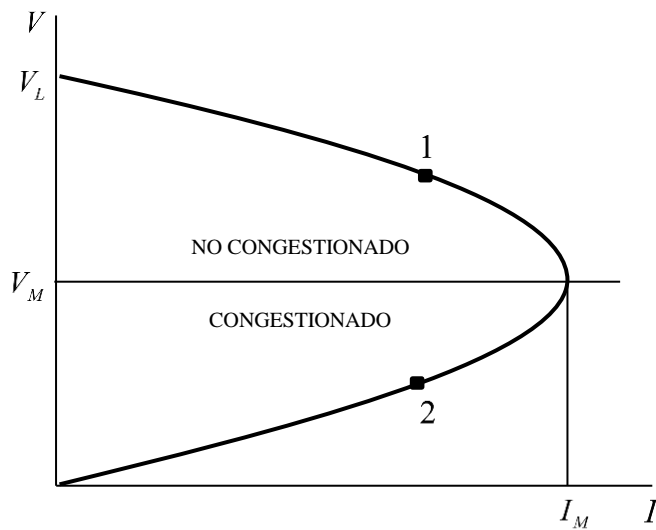
Relación entre la densidad y la intensidad



Nota: elaboración y adaptación de (Dómine Rueda, 2015)

Figura 28*Relación de la densidad y la velocidad*

Nota: elaboración y adaptación de (Dómine Rueda, 2015)

Figura 29*Relación de la intensidad y la velocidad*

Nota: elaboración y adaptación de (Dómine Rueda, 2015)

En todos los esquemas se ve los puntos 1 y el punto 2. El primero simboliza un tráfico no saturado, y el segundo simboliza un tráfico saturado.

Mientras que i_m , K_m , V_m representan los extremos entre lo saturado y lo no saturado.

Las ecuaciones empleadas son:

$$i = V_L \cdot \left(K - \frac{K^2}{K_C} \right) ; i = K_C \cdot \left(V - \frac{V^2}{V_L} \right) ; V = V_L \cdot \left(1 - \frac{K}{K_C} \right)$$

De manera se expresa cualquier tipo de tráfico mediante estas ecuaciones distintas con sus graficas dadas.

2.11. OPTIMIZACIÓN

La optimización es un desarrollo que nos permite preferir la mejor “solución óptima”, máxima o mínima, de un problema bajo ciertas limitaciones. Admite elegir la mejor opción entre las alternativas disponibles, dicho de otro modo, la que más se adapte a las necesidades. El flujo de entradas y salidas debe ajustarse para obtener la mejor calidad, el menor tiempo y el menor costo. El modelo de optimización utiliza la base de datos de decisión de la cadena de suministro y sus relaciones entre sí para analizar un problema de decisión específico y encontrar una solución óptima de acuerdo con preferencias específicas, visto en (Shapiro, 2006)

También tengamos en cuenta a aquellas situaciones que se utilizan para mejorar el proceso son los llamados factores internos y se debe tomar a vista las variables como son: la flexibilidad, la calidad, el tiempo y el costo, en cambio los factores que vienen del alrededor son los llamados factores externos, estos podrían ser previsibles hasta tal punto, siempre hay que vigilarlos lo más que se pueda.

2.12. MOVILIDAD Y TRANSPORTE EN ÁREAS URBANAS

Actualmente, empresas de transporte público y servicios de taxi prestan servicios de vialidad urbana en la provincia del Cusco. las compañías de transporte urbano de viajeros presentan “41” compañías de transporte público con 1.232 unidades, de las cuales el 34,6% son minibuses urbanos y el 65,4% furgonetas urbano-rurales. Cabe recordar que los monovolúmenes son de tamaño pequeño y los minibuses de mediana capacidad, visto en (Municipalidad del Cusco, 2015)

2.13. MEDIDAS DE CONECTIVIDAD

La conectividad también llamada cohesión define el nivel interrelación mutua entre nodos y este es el grado de conexión que proporciona una red para su marcha interna. Se basa en el principio de que cuantas más tarjetas haya en el gráfico, mayor será la conectividad. En realidad, se refiere a la mayor o menor complejidad estructural de la red, la cual se relaciona directamente con el número de vértices, aristas y su disposición espacial, visto en (Seguí Pons & Petrus Bey, 1991)

Estas medidas determinan el valor de enlace entre los vértices, es decir es una medida de interconexión que se da en una red para su funcionamiento, pues cuanto más arco tenga una red mayor será su grado de conectividad. Es decir, permiten ver la relación y vínculos entre los nodos específicos, visto en (Madrid Soto & Ortiz López, 2005)

2.13.1. Índice Beta

Según (Seguí Pons & Petrus Bey, 1991), este índice se encarga de relacionar las aristas y los vértices de un determinado gráfico, además mide el incremento de la conectividad cuando crece la cantidad de arcos en un sistema, aquí vemos que la variable a corresponde a los arcos y n a los nodos.

$$\beta = \frac{a}{n}$$

Entre 0 y 3 fluctúan los valores límite de este índice.

- a) Si es 0, muestra una red nula
- b) Si es menor a 1, muestra una red inconexa
- c) Si es 1, muestra una red de un solo circuito
- d) Si es de 1 a 3, muestra redes complejas

2.13.2. Índice gamma

Enlaza una cantidad finita de aristas que se tiene con la cantidad máxima de arcos que logra hallarse dentro de un gráfico dado, siempre verificando la cantidad de vértices de la red.

$$\gamma = \frac{2 \cdot a}{n \cdot (n-1)}$$

Se puede ver que a es la cantidad de aristas y n es la cantidad de vértices de una determinada red. Según (Bosque Sendra, 2000), el dato que resulta de este índice varía entre “0” y “1”, se da para un gráfico sin conexiones y para un grafo con conexiones completas correspondientemente.

2.13.3. Índice gamma %

Nos muestra la cantidad porcentual de las aristas que deben relacionarse en cada nodo de modo que se obtendrá una red más robusta e integra, un porcentaje a 100% nos predice una red ideal.

$$\gamma = \frac{a}{3 \cdot (n-2)} \cdot 100$$

2.13.4. Número Ciclomático

Este índice representa la cuantía de circuitos que tiene una red. Lo podemos obtener quitando a la cantidad total de arcos la cantidad necesaria para construir un árbol, se da del siguiente modo:

$$\mu = a - (n-1)$$

2.13.5. Índice alfa

Esta relación se puede obtener de interrelacionar entre la cantidad de circuitos que existe y lo máximo posible en la red.

$$\alpha = \frac{\mu}{2(n-5)}$$

2.14. MEDIDAS DE ACCESIBILIDAD

Estas medidas permiten estudiar las diferentes técnicas de competitividad de los nodos de una red, estos son clasificados de acuerdo a su disposición de acceso, desde cada uno en relación a todos los nodos que se encuentran en dicha red.

2.14.1. Matriz de Conectividad

Esta matriz llamada de conectividad es una representación de una tabla de doble entrada, en la cual se presentan la cantidad de aristas en filas y la cantidad de vértices en columnas, en esta matriz las relaciones topológicas se

muestran de forma binaria, con el valor de “1” cuando los nodos se encuentran debidamente acoplados por un arco y “0” en el caso opuesto.

Para visualizar los mejores o peores nodos conectados, debemos sumar la cantidad de conexiones en sentido horizontal. Visto en (Bautista, 2018)

2.14.2. Matriz topológicamente accesible.

Esta matriz está formada de la matriz de conectividad, se reemplazan los “0” por los distintos trayectos entre cada nodo de la red, a partir de ello podemos calcular el número asociado (NS), y el índice de Shimbél, todas estas variables con el propósito de analizar la accesibilidad en los nodos.

2.14.3. Índice Koning

Esta medida nos muestra como distancia topológica, la cual se expresa como la cantidad de aristas que llegan al vértice relativamente lejano por la vía más corta. Este índice simboliza el nivel de accesibilidad de este nodo a la parte más lejana de la red, dicho de otra manera “cuanto menor sea el número, mayor será el grado de accesibilidad.”

Este será el resultado del valor más grande de cada fila de la matriz de accesibilidad topológica.

2.14.4. Índice de Shimbél (SHI)

Este índice lo encontramos haciendo una sumatoria de cada fila de los valores de la matriz de accesibilidad topológica. Simboliza la cantidad de aristas que se deben mover de un vértice a otros vértices por el camino más corto. Se dice que el vértice con el índice más pequeño es más accesible; se utiliza el siguiente término para calcularlo.

$$SHI = \sum d_{xy}$$

Hay que distinguir que d es la cantidad de arcos que aparta a los nodos x y y por la distancia más corta.

Cuando los nodos posean similar Índice Koning, será más viable el de menor índice de Shimbél¹

Posterior a este último resultado, es posible evaluar la accesibilidad global de la red con los siguientes índices:

2.14.5. Índice de Dispersión (G).

Con este índice se puede medir el nivel en cuanto a la accesibilidad para el conjunto de la red, y se consigue con suma de todos los índices Shimbél del gráfico.

$$G = \sum SHI$$

Ahora, si enlazamos el valor con la toda cantidad de vértices, se obtiene un índice de accesibilidad con la cual podemos comparar la red con otras de análogas tipologías.

2.14.6. Índice de Accesibilidad Media (IAM)

Este índice establece un valor medio de accesibilidad en la red. Con este promedio podemos cotejar gráficos diferentes, o poder visualizar dentro de una misma red la accesibilidad de cada vértice (índice de Shimbél), de comparar dichos valores, los que superen el promedio, son los menos accesibles y viceversa.

$$IAM = \frac{G}{n}$$

Con G como índice de dispersión y n la cantidad de nodos del grafo.

2.14.7. Índice Omega²

Este índice nos sirve para encontrar cada vértice de la accesibilidad topológica relativa. Lo podemos encontrar al sumar la cantidad de aristas que aleja cada vértice de todos los demás por el tramo más corto.

¹ Este también es conocido como “Índice de accesibilidad Topológica.”

² También conocido como “índice de Accesibilidad Topológica Relativa o simplemente Índice de Dispersión.”

$$\Omega = \left(\frac{SHI_i \times SHI_{\min}}{SHI_{\max} - SHI_{\min}} \right) \times 100$$

Donde:

SHI : Índice de Shimbél

SHI_{\max} : Índice de Shimbél con el valor más alto

SHI_{\min} : Índice de Shimbél con el valor más bajo

En los nodos tanto de mayor como de menor accesibilidad, esos índices fluctúan entre “0” y “100” respectivamente.

Luego de haber encontrado dichos valores en la matriz de accesibilidad topológica, se puede encontrar las distancias ideales (di) y las distancias reales (dr), con las cuales veremos otras opciones para conocer la eficacia de la red.

2.15. MEDIDA DE CENTRALIDAD

Las medidas de centralidad tienen como objetivo identificar la ubicación topológica de los nodos en un gráfico y determinar su influencia en la región circundante.

La centralidad se encuentra en toda la red o en cada nodo.

2.15.1. Centralidad Media

Al calcular los valores promedio de cada vértice, esto nos ayuda a identificar la posición topológica de los vértices en la red, de manera que el vértice con valores mínimos es central y el nodo con valores altos es no central. Se calcula como:

$$C = \frac{SHI}{n-1}$$

2.16. SOFTWARE GRAFO

La forma de trabajar del software Grafos es la siguiente: diseñar, modelar, resolver y analizar. Su finalidad es dar al usuario total libertad para intentar resolver problemas en el diagrama. Puede dibujar el gráfico libremente sin preocuparse por el análisis o algoritmo que utilizará más adelante. Grafos le notificará si un determinado análisis no es factible o si existe otro requisito.

2.16.1. Análisis y casos

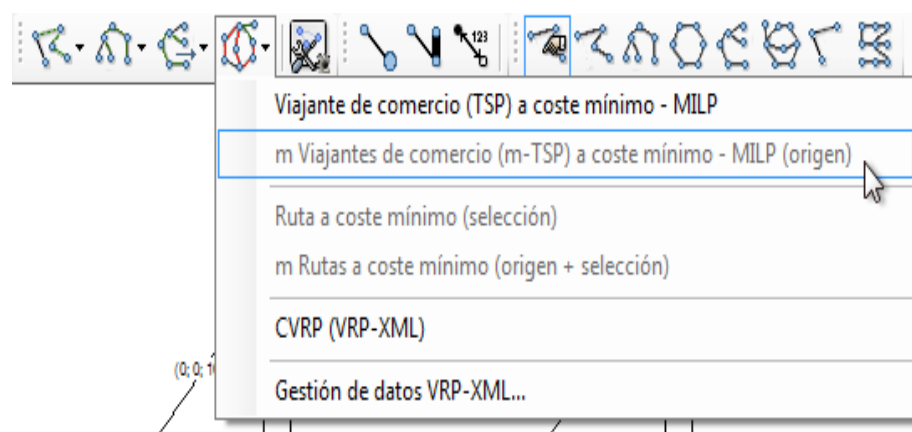
En seguida nos familiarizaremos con las diversas clases de análisis que se podrían ejecutar con el software Grafos, de modo que podemos ver una barra de herramientas que puede mostrar y manejar todos los algoritmos posibles de Grafos, se muestran las siguientes categorías:

“Caminos, camino mínimo, camino máximo, arboles, árbol mínimo, árbol máximo, árbol de valor total mínimo, árbol de valor total máximo, Flujos, flujo máximo, problema de transbordo, problema de asignación, localización a coste mínimo, Rutas, circuito euleriano, problema de viajante de comercio, problema de m viajeros de comercio, problema de rutas de vehículos y problema de rutas con vehículos capacitados.”

Si muestra cualesquiera de las categorías con un gráfico incrustado en la pantalla, notará que no todas las opciones están habilitadas. Para la implementación de algunos algoritmos se necesitan más información de inicio, como un vértice de origen, un vértice de destino, un conjunto de vértices seleccionados o metadatos. Los algoritmos que no necesitan entrada casi permanentemente están habilitados y pueden usarse directamente, no olvidarse de habilitar otros algoritmos como son el origen, el destino y otros, según la opción de menú que se seleccionó.

Figura 30

Habilitación de algoritmos en el Software Grafo



Nota: adaptado y elaborado del software Grafos

Recuerde que para iniciar con el nodo de inicio (Nd1), hay que seleccionar y clicar en la ventana propuesta, el vértice destino (Nd2) se elige de similar manera que el anterior. Una vez encontrado el modo de selección, notarás que las opciones del menú se activan o desactivan.

Si Grafos necesita más información, aparecerá otra ventana con la información que falta. Grafos puede analizar el mismo gráfico desde diversos puntos de vista y en cualquier momento, si la composición del gráfico no coincide con el algoritmo o faltan los datos o no son factibles, el software grafos siempre te informará al respecto. De esta manera se aprenderá sobre el uso de los diversos tipos de algoritmo y sus respectivas estructuras de datos del gráfico requerido. No te preocupes por intentarlo.

Si se ingresan los datos de buena manera, el algoritmo empezará con su cálculo, el tiempo que utilizará dependerá de la heurística utilizada, la complicación del problema a resolver y la potencia de su ordenador personal. Cualquiera sea el caso, los problemas de optimización de la clase de programación lineal entera mixta son muy complicados y se tarda en su cálculo.

CAPÍTULO III: HIPÓTESIS

3.1. HIPÓTESIS

3.1.1. Hipótesis General

El sistema de rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, se simula y optimiza por medio de la teoría de redes.

3.1.2. Hipótesis Especifica

- a) El sistema de las rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco se describe y analiza a través de una Red.
- b) Las rutas de transporte correspondiente a la red se analizan mediante el empleo de índices de conectividad.

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA

4.1. NIVEL DE INVESTIGACIÓN

La investigación actual incluye aspectos de investigación descriptiva y explicativa. Descriptivo porque el punto de inicio comienza con la delimitación temporal y geográfica de un hecho del sistema de transporte público en el centro de la ciudad del Cusco para caracterizar su comportamiento con más detalle. Explicativo, puesto que a partir de los resultados obtenidos se busca comprender las relaciones causa efecto del problema estudiado. (University, s.f.)

4.2. TÉCNICA DE INVESTIGACIÓN

En este Trabajo de investigación se utilizó las técnicas tales como la observación, análisis documental y análisis de contenidos. Estas técnicas son empleadas para el análisis, recojo de información sobre el tema de estudio y elegir las ideas más relevantes de los textos con la finalidad de recuperar contenidos. (Masters, s.f.)

4.3. TIPO DE INVESTIGACIÓN

El estudio que se muestra por su tipo de investigación cumple con la metodología de una investigación aplicada, pues se caracteriza por la búsqueda y utilización de conocimientos de las Ciencias Matemáticas y otras ciencias para aplicarlas en la simulación y optimización de rutas de transporte en el centro de la Ciudad del Cusco. (Veracruzana, s.f.)

4.4. MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

En esta investigación se utiliza el método deductivo. El estudio comienza con un proceso lógico de análisis de conceptos, leyes, supuestos y principios matemáticos de aplicación y validez universal para llegar a una conclusión específica en el estudio de las rutas de transporte optimas en el centro de la Ciudad del Cusco. (Suarez, 2023)

4.5. ÁMBITO DE ESTUDIO

4.5.1. Localización y ubicación

En cuanto a la ubicación, desde el meridiano de Greenwich, la ciudad del Cusco se sitúa en la cadena montañosa de los andes, ubicado al sureste del país del Perú entre las coordenadas “12° 71’ 11”” de latitud sur y coordenadas “72° 00’ 49”” de longitud oeste y a una altura medio de 3.300 msnm. El departamento el Cusco se encuentra ubicado al sur-oriental de nuestro país, tiene a su disposición lugares de selva y sierra. Entre sus colindas se tienen a las ciudades de Puno, Apurímac, Arequipa, Junín, Ucayali y Madre de Dios. El departamento del Cusco tiene “108” distritos y “13” Provincias. La capital es la provincia de Cusco que a su vez tiene “8” distritos.

Nuestro lugar de trabajo será propiamente dicho el distrito del Cusco, específicamente el Centro de la ciudad Histórica del Cusco.

Este último está ubicada en la zona noroeste del valle del Cusco, específicamente en términos cartográficos en la zona “19” entre las coordenadas “177 534” abscisa este y “8 503 762” ordenada norte del sistema de proyección UTM.

A continuación, mostramos nuestro ámbito de estudio en forma específica.

Figura 31*Ámbito de Estudio del presente trabajo*

Nota: adaptado y elaborado de varias imágenes de internet

4.5.2. Población y Muestra de estudio

Se estima al 2020 que la ciudad del Cusco cuenta con 91.802 vehículos automotores, dato obtenido de (Municipalidad Provincial del Cusco, 2012). Además, actualmente se cuenta con 28 rutas de autobús en la ciudad del cusco, con promedio de 1125 paradas de autobús, según (Moovit, 2024)

4.5.3. Técnicas de recolección de datos

Se elaboró una ficha para recolectar datos para el estudio, para su elaboración se consideró como criterio un tiempo de 30 minutos con secuencias de a 10 min, así mismo se tuvo en cuenta los tipos de vehículos, entre los cuales se tiene: autos, buses, camionetas, vehículos de reparto y motos. Los datos se obtuvieron en abril el año 2019 para luego ser actualizados el año 2023.

4.5.4. Delimitación del área de estudio

Para la presente exploración se ha tomado el área de estudio específico: casco urbano del centro de la ciudad del Cusco, el área corresponde a una parte del centro histórico del Distrito del Cusco. Consta de una superficie total de 40.2 Km^2 y una distancia total de 3.13 Km . Adaptado de (Google, s.f.)

Figura 32

Limitación del área de trabajo



Nota: adaptado de la plataforma Google Maps

CAPÍTULO V: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1. ALGORITMO DE DIJKSTRA

5.1.1. Descripción

Dado $G = (V, E)$ un digrafo ponderado de n vértices con pesos positivos. Supondremos que tanto a y tanto z son dos nodos en V , de tal manera que $z \neq a$ y por ende existe al menos un camino de a a z . El primordial objetivo del estudio consistirá en determinar un camino $a-z$ de costo mínimo. Esta situación la resolveremos de manera más eficaz atreves del algoritmo de Dijkstra. Este algoritmo comienza en el vértice a y construye un camino de costo mínimo $a = u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m = z$, donde $a-u_i$ es un camino de costo mínimo para cada $i = 0, 1, \dots, m$

Entrada: Grafo ponderado dirigido con pesos positivos y de n vértices, a y z son diferentes vértices tal que existirá algún camino de a a z .

Salida: viene a ser el peso de un camino de costo mínimo de a a z .

Primer paso: se define $S_0 = \phi$, $T_0 = V$. Y fijamos a cada vértice v en V una etiqueta que se muestra a continuación: $L(v) = 0$ si $v = a$ y $L(v) = \infty$ para $v \neq a$.

Segundo paso: Para $i = 1, 2, \dots, n$: Supongamos que hemos construido los conjuntos S_0, S_1, \dots, S_{i-1} . Hacemos $T_{i-1} = V \setminus S_{i-1}$. Si $z \in S_{i-1}$, definimos $S = S_{i-1}$ y detenemos la construcción. En caso contrario, escogemos el primer vértice u en T_{i-1} con la menor etiqueta, es decir, $L(u) = \min\{L(v) \mid v \in T_{i-1}\}$

Definimos $u_{i-1} = u$, $S_i = S_{i-1} \cup \{u_{i-1}\} = \{u_0, u_1, \dots, u_{i-1}\}$ (decimos que u entra), $T_i = V \setminus S_i$ y para cada vértice v en T_i adyacente a u cambiamos su etiqueta $L(v)$ por la nueva etiqueta $\min\{L(v), L(u) + p(u, v)\}$:

$$L(v) \leftarrow \min\{L(v), L(u) + p(u, v)\},$$

es decir, actualizamos la etiqueta de los "vecinos" de u por fuera de S_i .

Tercer paso: Si $i = n$, definimos $S = S_n$ y nos detenemos. Si $i < n$, hacemos $i = i + 1$ y vamos al Paso 2.

El algoritmo de Dijkstra termina en el momento en que encontramos el primer índice m para el cual $z \in S_m$. En ese momento, $S = S_m$.

5.2. TÉCNICAS APLICADAS: SOFTWARE Y HARDWARE

- 1) Para realizar el mapeo se utilizó un dispositivo móvil con las siguientes características.
 Marca: BLACKVIEW BV5800 PRO
 Memoria RAM: 2GB, 667 Mhz
 Procesador: ARM Cortex-A53, 1500 Mhz, 4 NUCLEOS
 Cámara principal: 8.04 MP
 Sistema operativo: ANDROID 8.1 OREO
- 2) Para la elaboración, análisis y procesamiento de la información se utilizó una laptop con las siguientes características.
 Marca: SONY VAIO
 Procesador: PENTIUM(R) DUAL-CORE CPU T4200, RAM: 3.00 GB
 Disco duro: 1 TB
 Sistema operativo: WINDOWS 10 PRO
- 3) Los softwares que se utilizaron para el procesamiento de la información fueron los siguientes: MATLAB, GRAFOS, DISKTRA, SYNCHRO, GOOGLE EARTH, MICROSOFT, entre otros.

5.3. TEORÍA DE REDES Y SISTEMAS DE INFORMACIÓN GEOGRÁFICA

Uno de los aspectos en cuanto a estructura del territorio, viene a ser la construcción unida al uso del transporte. Las redes de transporte inciden en forma directa en cuanto a límites, cohesión, conexión de un determinado territorio. La teoría de redes, admite relacionar a las redes de transporte una determinada estructura sencilla y a la vez abstracta de vértices y aristas conectados entre sí, es decir; con estas representaciones de nodos podríamos representar ciudades, carreteras, paraderos, aeropuertos, terrapuertos, etc. También de manera similar las aristas serían los que conectan a los nodos anteriormente descritos, y por ende a través de ellos se manifiestan mercaderías, personas, información, etc.

5.4. RED VIAL DEL CENTRO DE LA CIUDAD DEL CUSCO

En la presente investigación se ha tomado el área de estudio específico: casco urbano de la ciudad del Cusco, el espacio corresponde a parte del centro histórico del Distrito del Cusco. Consta de una superficie total de 40.2 Km^2 y una distancia total de 3.13 Km .

A partir de la definición 2.1, conocemos que un grafo tiene como componentes a una cantidad de nodos y arcos, para nuestro estudio se considera:

- a) **Nodo:** las diferentes intersecciones en el casco urbano de la ciudad del Cusco, el área corresponde a parte del centro histórico del Distrito del Cusco
- b) **Arco:** las diferentes calles que unen dichas intersecciones en el casco urbano de la ciudad del Cusco, el área corresponde a parte del centro histórico del Distrito del Cusco.

El análisis empieza tomando en cuenta el plano de la Ciudad del Cusco, en este plano se puede observar que el Centro Histórico de la Ciudad del Cusco está dividido en secciones:

Sección 1: Núcleo del Centro Histórico del cusco

Sección 2: Jurisdicción de San Cristóbal

Sección 3: Jurisdicción de Santo Domingo y san Agustín

Sección 4: Jurisdicción de San Blas

Sección 5: Jurisdicción de Santa Ana

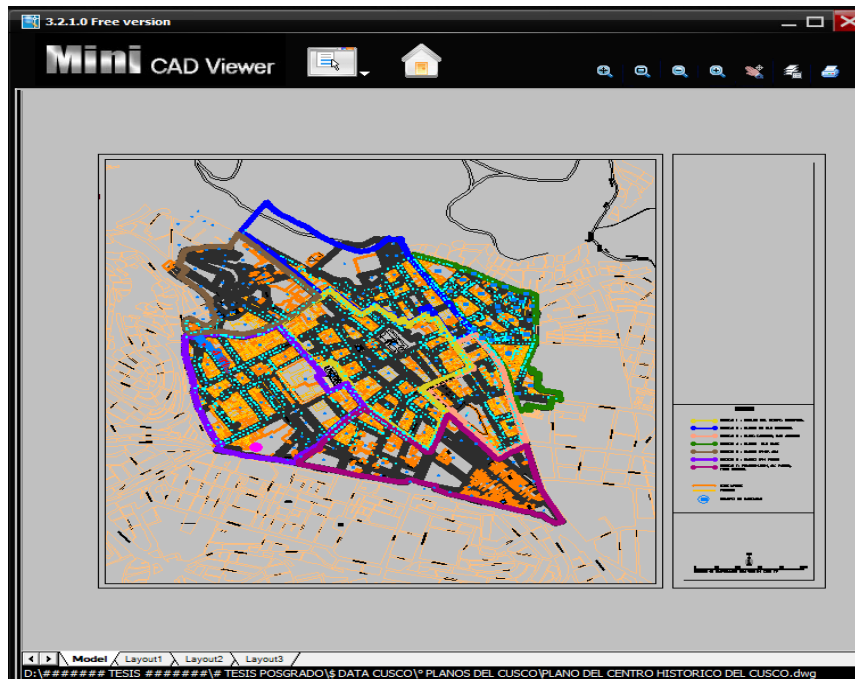
Sección 6: Jurisdicción de San Pedro

Sección 7: Jurisdicción PumaqChupan, Av. Pardo y tres Cruces

El trabajo se desarrolla en el Sección 1 (Casco Urbano de la Ciudad del Cusco).

Figura 33

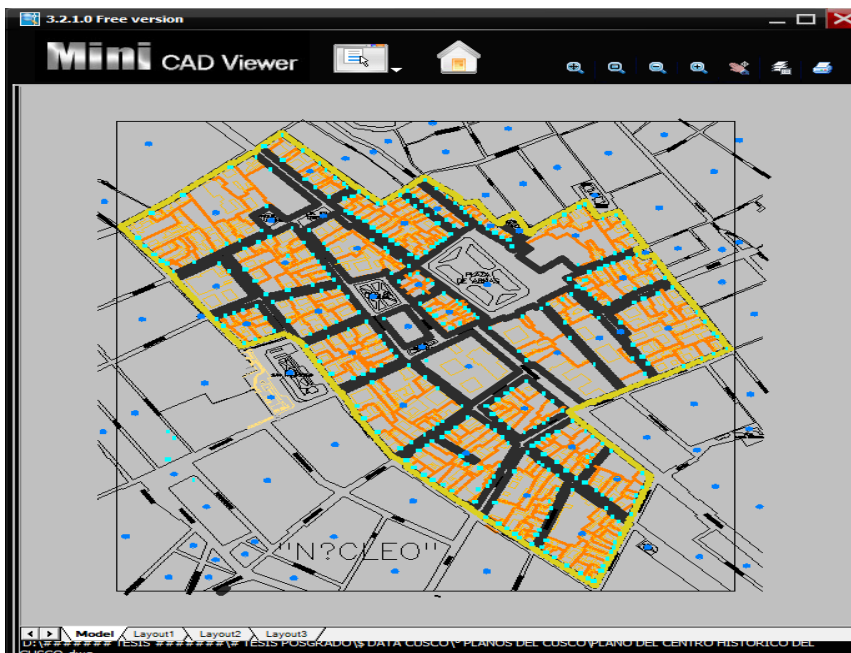
Mapa del Cusco con 7 secciones o zonas



Nota: adaptado del visor Mini CAD Viewer, free versión

Figura 34

Zona o Seccion 1, Centro Histórico del Cusco



Nota: adaptado del visor Mini CAD Viewer, free versión

Figura 35

Limitación del área de estudio



Nota: adaptado de la plataforma googleMaps, Vista satelital del área de estudio

Las fuentes de la información geográfica de este estudio han sido obtenidas de las plataformas Google Maps, Google Earth Pro y OpenStreetMap. Los cuales son versiones digitales de los mapas, estos nos ayudan a visualizar el mundo mediante imágenes, lo importante es que las imágenes que nos muestran son estáticas.

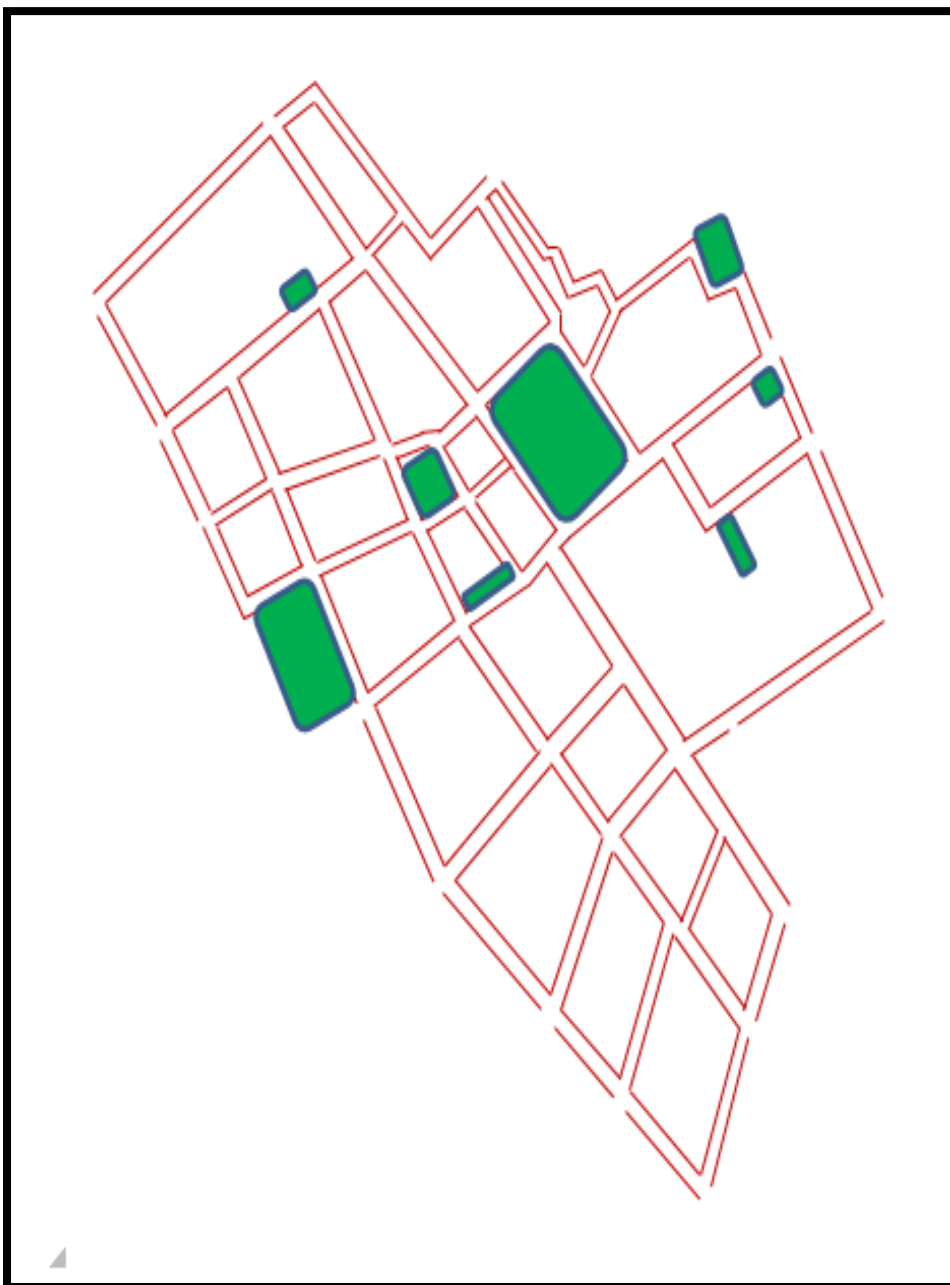
Nuestra investigación empezó delimitando todas las redes de transporte en el entorno de trabajo, de tal manera se hizo el reconocimiento de todos los espacios de trabajo a través de nodos y arcos.

5.4.1. Delimitación y simbolización del espacio de trabajo

Para la delimitación de nuestro espacio de trabajo se utilizó varias herramientas de visualización, además se contó con softwares de edición.

Figura 36

Delimitación del Espacio de Trabajo

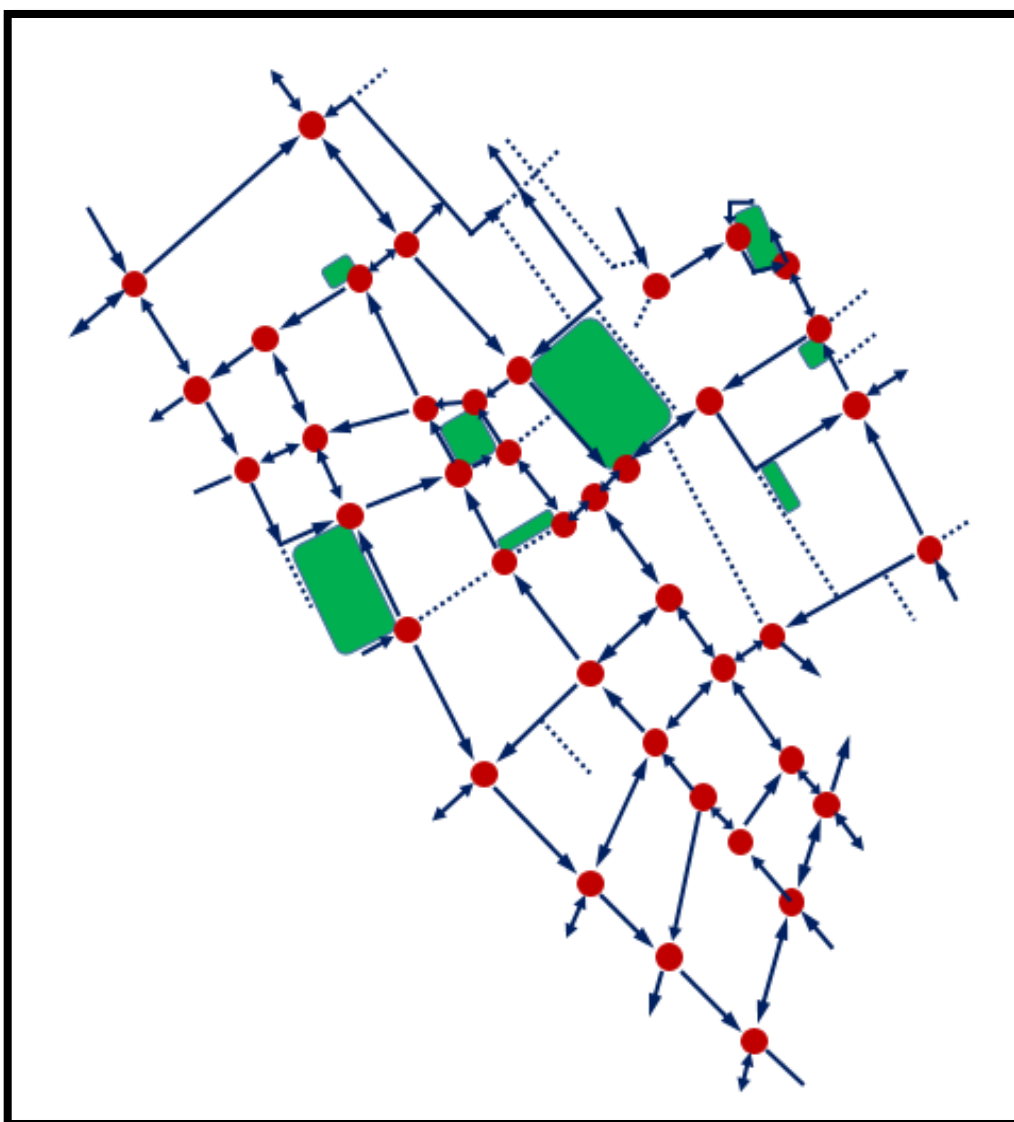


Nota: Elaboración propia, las zonas de color verde hacen referencia a parques y plazas

Aquí se puede apreciar nuestro espacio de trabajo debidamente representado mediante nodos y arcos, y también se puede apreciar el sentido de tránsito de las calles. Como referencia los puntos de color rojo hacen referencia a las intersecciones de las calles, las saetas indican las calles en sí, y las líneas entrecortadas de color azul señalan las calles peatonales, por las cuales no circulan vehículos.

Figura 37

El espacio de trabajo con el sentido de Transito de las calles



Nota: Elaboración propia, las zonas de color verde hacen referencia a parques y plazas, las saetas indican el sentido de circulación en las calles y los puntos rojos las intersecciones de las calles.

5.4.2. Nodos o Vértices

Dentro del ámbito de trabajo, tenemos un total de 40 nodos. Estos nodos en esencia son las intersecciones de las calles de nuestra red de transporte, a continuación, se presenta los nodos y su ubicación, lo representamos con círculos de color amarillo.

Tabla 3

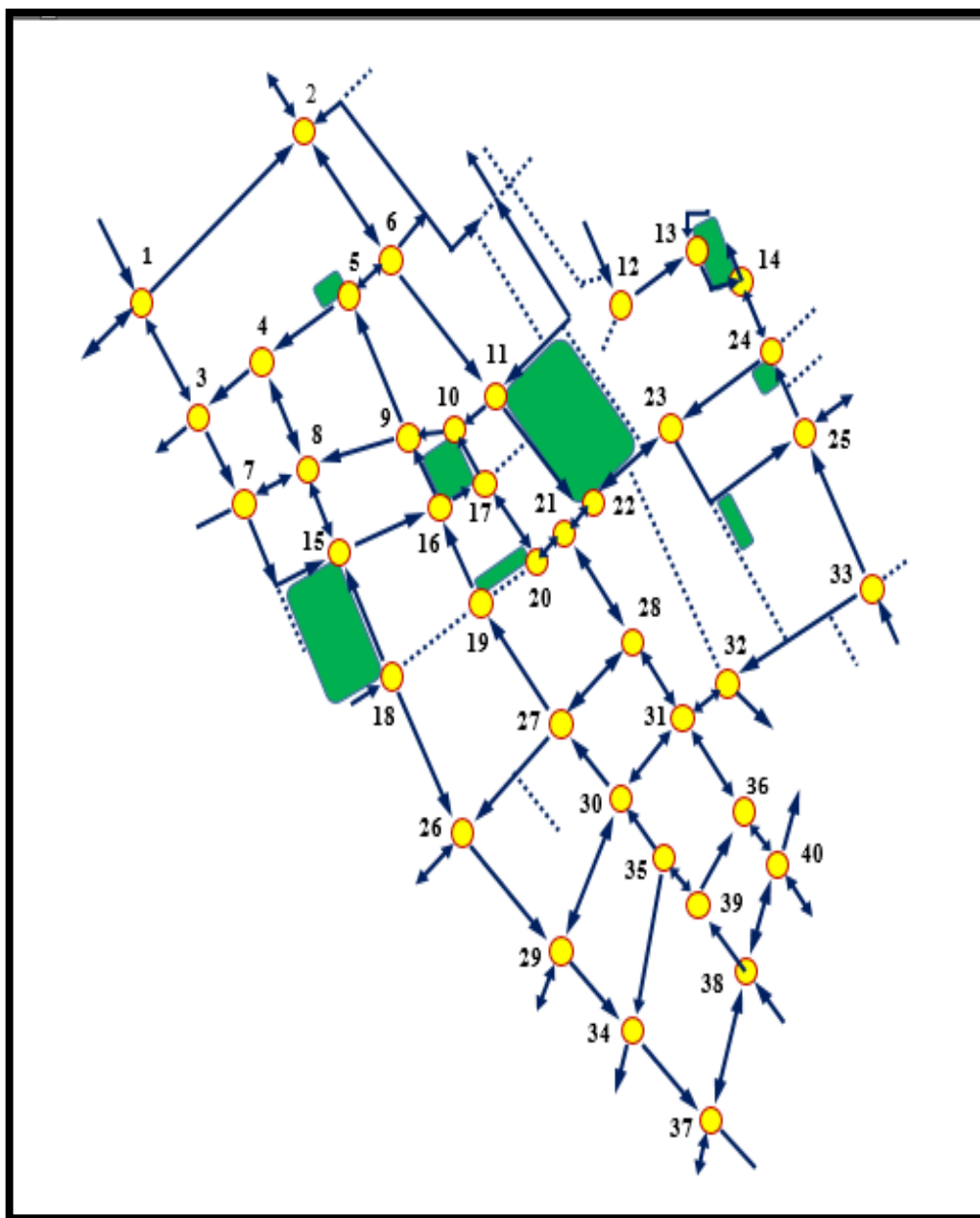
Nodos considerados para el estudio según la intersección de las calles

POSICIÓN DEL NODO	INTERSECCIÓN
1	Calle Meloq con calle ambo de montero
2	Calle Tambo de montero con calle Shapy
3	Calle Meloq con calle 7 Cuartones
4	Calle 7 Cuartones con calle Teatro
5	Calle 7 Cuartones con Santa Teresa
6	Calle 7 Cuartones con calle Plateros
7	Calle Educandas con calle Tordo
8	Calle San Juan de Dios con calle Granada
9	Calle Portal Espinar con calle Heladeros
10	Calle Espaderos con calle Portal Espinar
11	Calle Espaderos con calle Plateros
12	Calle Ataúd con calle Córdoba de Tucumán
13	Calle Córdoba de Tucumán con Nazarenas
14	Calle Nazarenas con calle Palacio
15	Calle Granada con calle Garcilaso
16	Calle del Medio con calle Heladeros
17	Calle del Medio con calle Espinar
18	Calle arque con calle Mesón de la Estrella
19	Calle san Bernardo con calle Marques
20	Calle Espinar con calle Mantas
21	Calle Mantas con Avenida el Sol
22	Calle Mantas con esquina Plaza de Armas
23	Calle Sunturwasi con calle Santa Catalina Angosta
24	Calle Sunturwasi con calle Herrajes
25	Calle Santa Catalina Ancha con calle San Agustín
26	Calle Qera con calle Matara
27	Calle San Bernardo con calle Qera
28	Calle Almagro con Avenida el Sol
29	Calle Matara con calle Ayacucho
30	Calle San Andrés con calle Ayacucho
31	Calle Ayacucho con Avenida el Sol
32	Calle Maruri con calle Pampa del Castillo
33	Calle Maruri con calle San Agustín
34	Calle Matara con calle Carmen Kijllu
35	Calle San Andrés con calle Carmen Kijllu
36	Calle Pulluchapata con Avenida el Sol
37	Calle Matara con calle Kuychipunku
38	Calle San Andrés con calle Kuychipunku
39	Calle San Andrés con calle Pulluchapata
40	Calle Puente Rosario con Avenida el Sol

Nota: elaboración propia a partir de las intersecciones de las calles en nuestro ámbito de estudio

Figura 38

Nodos o Vértices considerados a partir de la Tabla 3



Nota: Elaboración propia, las zonas de color verde hacen referencia a parques y plazas, las saetas indican el sentido de circulación en las calles y los puntos amarillos indican los nodos presentes en el área delimitada.

5.4.3. Arcos o Aristas

En el mapeo del entorno de trabajo se ha obtenido un total de 57 aristas, las cuales están distribuidos con saetas de color azul, también se indica el sentido de las aristas. Veamos su distribución a continuación.

Tabla 4

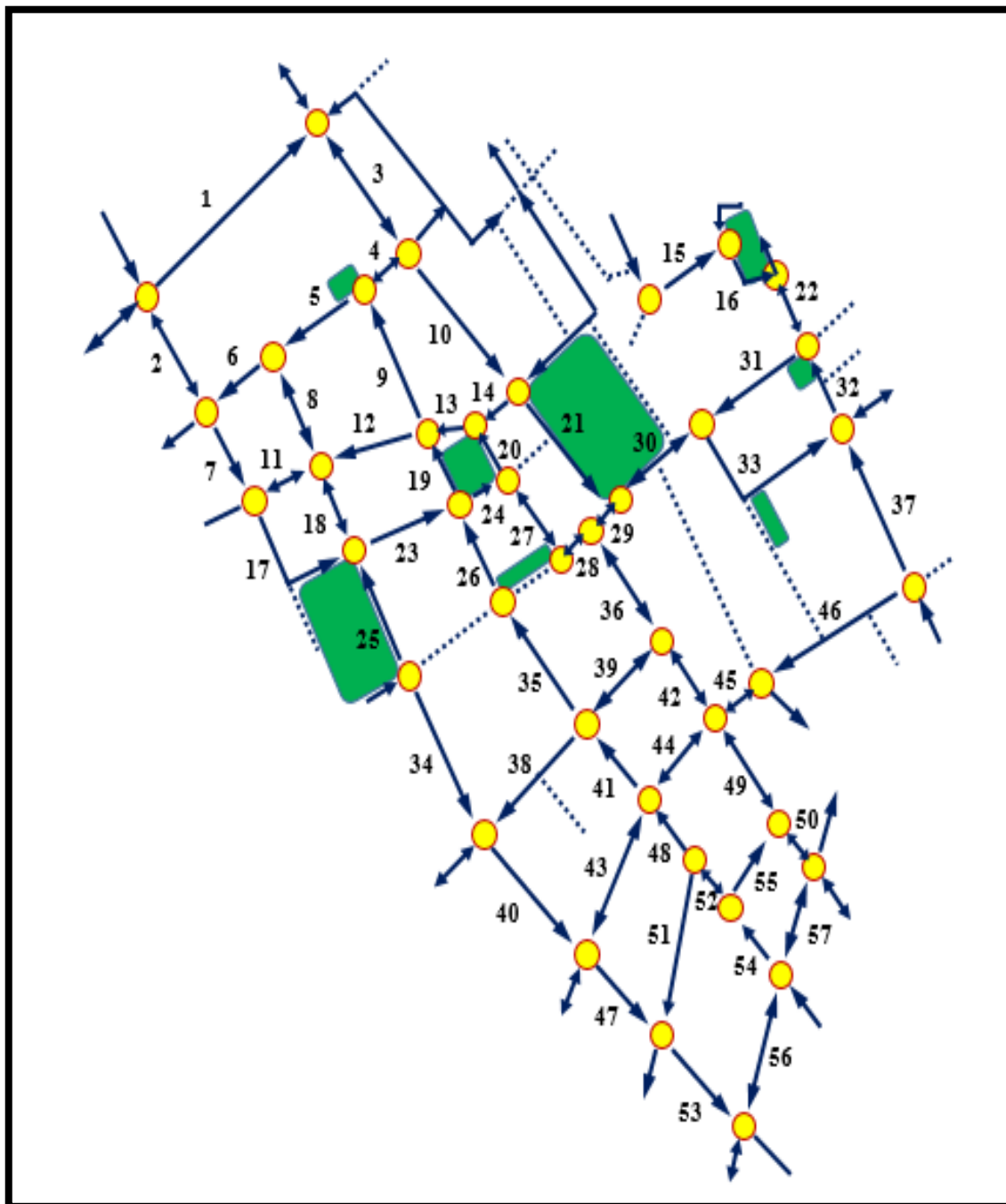
Aristas consideradas entre cada nodo según la intersección de las calles

ARISTAS	NOMBRE DE CALLES	ARISTAS	NOMBRE DE CALLES
1	TAMBO DE MONTERO	29	MANTAS - A LA MERCED
2	MELOQ	30	PLAZA HAUKAYPATA - PORTAL BELÉN
3	SAPHI	31	SUNTURWASI
4	SIETE CUARTONES C1	32	HERRAJES
5	SIETE CUARTONES C2	33	SANTA CATALINA ANCHA/ANGOSTA
6	SIETE CUARTONES C3	34	MESON DE LA ESTRELLA
7	ARONES	35	SAN BERNARDO
8	TEATRO	36	AVENIDA SOL C1
9	SANTA TERESA	37	SAN AGUSTIN
10	PLATEROS	38	QERA
11	EDUCANDAS	39	ALMAGRO
12	SAN JUAN DE DIOS	40	MATARA C1
13	PORTAL ESPINAR	41	SAN ANDRES C4
14	ESPADEROS	42	AVENIDA SOL C2
15	CÓRDOBA DE TUCUMÁN	43	AYACUCHO ENTRADA DE MATARA
16	NAZARENAS	44	AYACUCHO ENTRADA A AV SOL
17	TORDO	45	AFLIGIDOS
18	GRANADA	46	MARURI
19	PLAZA CUSIPATA - HELADEROS	47	MATARA C2
20	PORTAL ESPINAR	48	SAN ANDRES C3
21	PLAZA HAUKAYPATA (OESTE)	49	AVENIDA SOL C3
22	PALACIO	50	AVENIDA SOL C3 BAJADA TOTAL
23	GARCILASO	51	CARMEN KIJLLU
24	PLAZA CUSIPATA - DEL MEDIO	52	SAN ANDRES C2
25	PLAZA SAN FRANCISCO	53	MATARA C3
26	HELADEROS	54	SAN ANDRES C1
27	ESPINAR	55	PULLUCHAPATA
28	MANTAS - DE LA MERCED	56	KUYCHIPUNKU ENTRADA A AV SOL
		57	PUENTE ROSARIO ENTRADA A AV SOL

Nota: elaboración propia a partir de la visualización de las calles en nuestro ámbito de estudio

Figura 39

Arcos o Aristas consideradas a partir de la Tabla 4



Nota: Elaboración propia, las zonas de color verde hacen referencia a parques y plazas, los puntos amarillos indican los nodos y las saetas indican las aristas presentes en el área delimitada.

Luego de planear el sentido de las calles, procedimos a recoger los datos, estos datos se obtuvieron en el lapso de una semana. Se obtuvo el flujo el vehículo en todas las calles comprendidas en el estudio, además estos datos fueron levantados en horas normales de circulación. Estos datos se seleccionaron por tipo de vehículo y en un intervalo de cada 10 min por un total de 30 min. Los datos sobre los flujos de vehículos en las calles delimitadas se obtuvieron conforme a la siguiente tabla.

Dicha tabla la podremos apreciar mejor en el anexo 2.

Figura 40

Formato para recoger información sobre el flujo vehicular

FECHA		HORA				FECHA		HORA			
CALLE						CALLE					
TIEMPO	30 MIN	0 - 10 min	10 - 20 min	20 - 30 min	TIEMPO	30 MIN	0 - 10 min	10 - 20 min	20 - 30 min		
TIPO UNIDADES	AUTOS				TIPO UNIDADES	AUTOS					
	BUSES/ RENAULD					BUSES/ RENAULD					
	CAMIONETAS RURALES					CAMIONETAS RURALES					
	REPARTO					REPARTO					
	OTROS MOTOS					OTROS MOTOS					

TIEMPO	30 MIN	0 - 10	10 - 20	20 - 30	TOTAL	TIEMPO	30 MIN	0 - 10	10 - 20	20 - 30	TOTAL
TIPO UNIDADES	AUTOS					TIPO UNIDADES	AUTOS				
	BUSES						BUSES				
	CAMIONETAS						CAMIONETAS				
	REPARTO						REPARTO				
	OTROS						OTROS				
TOTAL						TOTAL					

Nota: Formato de elaboración y adaptación propia para recoger información

Figura 41

Flujo vehicular de la calle Afligidos³

FECHA	01-04-19				HORA	12:08			
CALLE	AFLIGIDOS				CALLE	AFLIGIDOS			
TIEMPO	30 MIN	0-10 min	10-20 min	20-30 min	TIEMPO	30 MIN	0-10 min	10-20 min	20-30 min
TIPO UNIDADES	AUTOS				AUTOS				
	BUSES/RENAULD				BUSES/RENAULD				
	CAMIONETAS RURALES				CAMIONETAS RURALES				
	REPARTO				REPARTO				
OTROS MOTOS				OTROS MOTOS					

TIEMPO	30 MIN	0-10	10-20	20-30	TOTAL
AUTOS	41	32	39	50	115
BUSES	15	17	18	20	50
CAMIONETAS	0	1	1	2	2
REPARTO	0	0	1	1	2
OTROS	4	2	1	1	8
TOTAL	60	52	60	74	172

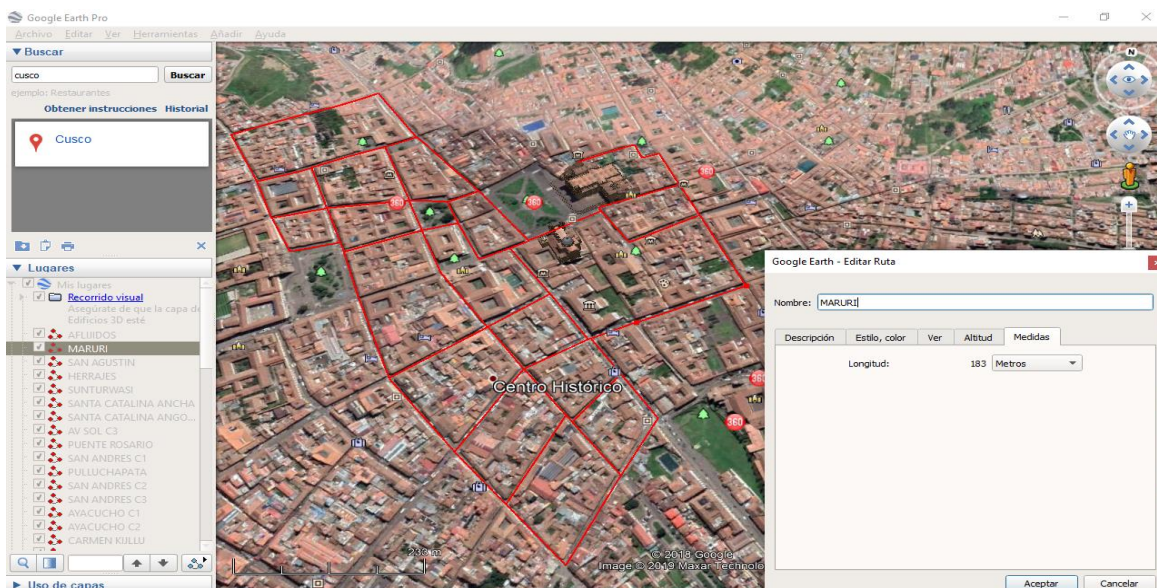
TIEMPO	30 MIN	0-10	10-20	20-30	TOTAL
AUTOS	56	53	43	31	152
BUSES	23	29	31	26	82
CAMIONETAS	11	6	9	3	26
REPARTO	0	1	2	1	4
OTROS	7	3	1	1	12
TOTAL	97	92	86	62	269

Nota: Formato de información de elaboración propia completada

Por otra parte, se obtuvieron las respectivas distancias a través del Software Google Earth Pro, el cual se muestra a continuación:

Figura 42

Proceso de toma de medidas⁴



Nota: adaptado de la plataforma google Earth Pro

³ Ver anexo 3.

⁴ Ver anexo 4.

Luego de haber completado con la recolección de todos los datos, se procedió al respectivo conteo teniendo la siguiente tabla global.

Tabla 5

Cantidad de vehículos y distancia promedio de cada calle

N°	NOMBRE CALLES	CANTIDAD DE VEHICULOS	DISTANCIA PROMEDIO (m)
1	TAMBO DE MONTERO	104	260
2	MELOQ (SUBIDA)	126	135
	MELOQ (BAJADA)	172	135
3	SAPHI (SUBIDA)	102	152
	SAPHI (BAJADA)	202	152
4	SIETE CUARTONES C1 (SUBIDA)	57	56,6
	SIETE CUARTONES C1 (BAJADA)	261	56,6
5	SIETE CUARTONES C2	202	126
6	SIETE CUARTONES C3	267	86,7
7	ARONES	203	98
8	TEATRO (SUBIDA)	87	110
	TEATRO (BAJADA)	54	110
9	SANTA TERESA	156	156
10	PLATEROS	217	189
11	EDUCANDAS (SUBIDA)	112	84,9
	EDUCANDAS (BAJADA)	6	84,9
12	SAN JUAN DE DIOS	246	129
13	PLAZA CUSIPATA – PORTAL ESPINAR	326	64,6
14	ESPADEROS	52	54,4
15	CÓRDOBA DE TUCUMÁN	34	103
16	NAZARENAS	54	69,4
17	TORDO	147	162,1
18	GRANADA (BAJADA)	122	110
	GRANADA (SUBIDA)	105	110
19	PLAZA CUSIPATA - HELADEROS	283	76,9
20	PLAZA CUSIPATA – PORTAL ESPINAR	377	58,2
21	PLAZA HAUKAYPATA (OESTE)	172	153
22	PALACIO (SUBIDA)	53	86,9
	PALACIO (BAJADA)	43	86,9
23	GARCILASO	167	123
24	PLAZA CUSIPATA – DEL MEDIO	343	57,6
25	PLAZA SAN FRANCISCO	327	112
26	HELADEROS	230	107
27	ESPINAR (SUBIDA)	325	93
	ESPINAR (BAJADA)	343	93

28	MANTAS - DE LA MERCED	343	84,3
29	MANTAS - A LA MERCED	148	84,3
30	PLAZA HAUKAYPATA - PORTAL BELÉN (S)	337	133
	PLAZA HAUKAYPATA - PORTAL BELÉN (B)	148	133
31	SUNTURWASI	183	143
32	HERRAJES	203	81,9
33	SANTA CATALINA ANCHA/ANGOSTA	517	225,6
34	MESON DE LA ESTRELLA	150	169
35	SAN BERNARDO	230	139
36	AVENIDA SOL C1 (SUBIDA)	334	121
	AVENIDA SOL C1 (BAJADA)	343	121
37	SAN AGUSTIN	26	174
38	QERA	269	161
39	ALMAGRO (SUBIDA)	251	109
	ALMAGRO (BAJADA)	93	109
40	MATARA C1	277	166
41	SAN ANDRES C4	200	102
42	AVENIDA SOL C2 (SUBIDA)	594	113
	AVENIDA SOL C2 (BAJADA)	290	113
43	AYACUCHO ENTRADA DE MATARA	205	166
	AYACUCHO SALIDA DE MATARA	153	166
44	AYACUCHO ENTRADA A AV SOL	271	110
	AYACUCHO SALIDA DE AV SOL	140	110
45	AFLIGIDOS (BAJADA)	269	73,8
	AFLIGIDOS (SUBIDA)	172	73,8
46	MARURI	247	183
47	MATARA C2	393	114
48	SAN ANDRES C3	131	106
49	AVENIDA SOL C3 BAJADA	466	179
	AVENIDA SOL C3 SUBIDA	608	179
50	AVENIDA SOL C3 BAJADA TOTAL	484	179
51	CARMEN KIJLLU	20	161
52	SAN ANDRES C2	233	14,6
53	MATARA C3	374	122
54	SAN ANDRES C1	267	114
55	PULLUCHAPATA	28	101
	KUYCHIPUNKU ENTRADA A AV SOL	246	149
56	KUYCHIPUNKU SALIDA DE AV SOL	116	149
	PUENTE ROSARIO ENTRADA A AV SOL	207	107
57	PUENTE ROSARIO SALIDA DE AV SOL	61	107

Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

Tabla 6*Índices que exponen la conectividad de las calles*

Índice	Total
El índice Beta	1.42
El índice Gamma	0.07
El índice Gamma %	50.00 %
El Número Ciclomático	18
El Índice Alfa	0.26

Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

- 1) El índice beta β , cuyo valor es de 1.42, este valor indica que la red en la cual trabajamos viene a ser una red bien conectada compleja, pues la cantidad de arcos supera al de los vértices, además en la mayoría de los casos, de cada nodo se desprenden 2 aristas, y en otras situaciones hasta 4.
- 2) El índice Gamma γ , cuyo valor es semejante a 0.07, precisa que la cantidad de aristas que existen son muy pequeño con relación a un número “ideal” de las mismas.
- 3) El índice Gamma $\gamma\%$, nos muestra que en cada vértice se puede ajustar un 50.00 % del total de aristas para tener un grafo más completo.
- 4) El número Ciclomático μ , este número nos indica el número de circuitos existentes, en nuestra red tenemos 18 circuitos, dichos datos concuerdan con un conteo sobre el gráfico.
- 5) El índice alfa α , nos da un valor igual a 0,26, ese valor enseña que la actual cantidad de circuitos de la red es muy baja.

Por otro lado, a partir de la matriz de conectividad, podemos deducir lo siguiente: El vértice mejor conectado pertenece al nodo 31, con un valor máximo de 4 conexiones o enlaces; mientras que los otros nodos tienen 3, 2 y 1 conexión, como se ve en la tabla siguiente.

Tabla 7

Tabla resumen a partir de la matriz de Conectividad

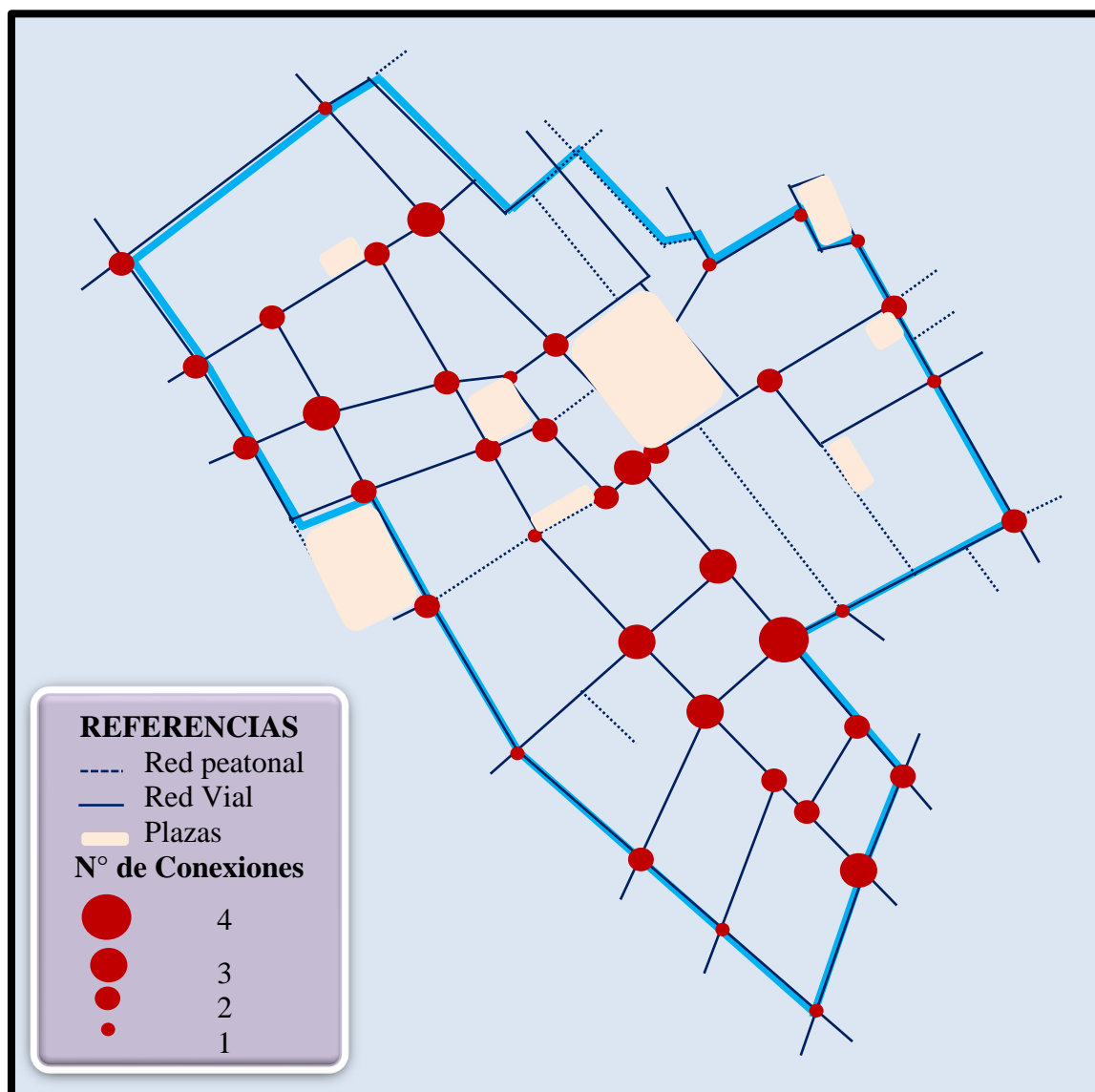
NODOS	N° DE CONEXIONES
31	4
6, 8, 21, 27, 28, 30, 38	3
1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 29, 33, 35, 36, 39, 40	2
2, 10, 12, 13, 14, 19, 25, 26, 32, 34, 37	1

Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

De tal manera que tales conexiones se pueden apreciar en la figura siguiente.

Figura 44

Representación de las conexiones a partir de la matriz de adyacencia



Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

La investigación en redes se centra en el análisis de distancias, el análisis de accesos y el análisis de interacciones espaciales, a través del análisis y procesamiento de los flujos y la jerarquía territorial que establecen. Debatimos y comparamos modelos de aplicación y utilizamos modelos de otros campos de forma similar. (Seguí 1995 P. 88)

El análisis de la estructura de la red en función del nivel de conectividad permite una descripción general de la red. El objetivo de este análisis es determinar el número de conexiones por nodo para maximizar el flujo y ahorrar dinero o reducir la distancia. Sin embargo, es bueno saber que usando algunos indicadores se puede hacer un análisis "perfecto", y considerando que hay más nodos y aristas, puede que no tenga sentido para la realidad espacial debido a condiciones físicas, requisitos estructurales y más importante necesidades específicas y prácticas de establecer relaciones. Es importante enfatizar que los indicadores encontrados hasta ahora son más útiles cuando se comparan dos redes y más útiles cuando se estudia el desarrollo de una sola red para identificar diferentes tipos. A través de la simulación también es posible ver los cambios que se introducen en la red al agregar nodos y bordes a la red. Es importante recordar que, al igual que el análisis dinámico, el análisis estructural se basa en nodos y bordes reales y/o posibles, pero no incluye otras variables que tienen el poder de cambiar la forma y condición de la red.

5.6. RESULTADOS DE MEDIDAS DE ACCESIBILIDAD

Matriz de accesibilidad topológica

Figura 45

Matriz de accesibilidad del espacio de trabajo⁶

Destino Origen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0	1	1	4	3	2	2	3	5	4	3	0	0	8	3	4	5	0	8	6	5	4	5	7	6	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9
2	5	0	4	3	2	1	5	5	4	3	2	0	0	7	5	6	6	0	7	5	4	3	4	6	5	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8
3	1	2	0	3	4	3	1	2	4	5	4	0	0	9	2	3	4	0	9	5	6	5	6	8	7	9	8	7	10	9	8	9	0	11	13	9	12	11	12	10
4	2	3	1	0	5	4	2	1	4	5	5	0	0	10	2	3	4	0	9	5	6	6	7	9	8	9	8	7	10	9	8	9	0	11	13	9	12	11	12	10
5	3	2	2	1	0	1	3	2	4	3	2	0	0	7	3	4	5	0	7	5	4	3	4	6	5	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8
6	4	1	3	2	1	0	4	4	3	2	1	0	0	6	4	5	5	0	6	4	3	2	3	5	4	6	5	4	7	6	5	6	0	8	10	6	9	8	9	7
7	4	5	3	2	5	6	0	1	3	4	7	0	0	10	1	2	3	0	8	4	5	6	7	9	8	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9
8	3	4	2	1	4	5	1	0	3	4	6	0	0	10	1	2	7	0	8	4	5	6	7	9	8	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9
9	4	3	3	2	1	2	2	1	0	4	3	0	0	8	2	3	4	0	8	5	5	4	5	7	6	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9
10	5	4	4	3	2	3	2	1	0	4	0	0	0	9	3	4	5	0	9	6	6	5	6	8	7	9	8	7	10	9	8	9	0	11	13	9	12	11	12	10
11	6	5	5	4	3	4	4	3	2	1	8	0	0	5	4	5	4	0	5	3	2	1	2	4	3	5	4	3	6	5	4	5	0	7	9	5	8	7	8	6
12	14	13	13	12	11	12	12	11	10	9	13	0	1	2	12	13	8	0	9	7	6	5	4	3	5	9	8	7	10	9	8	9	0	11	13	9	12	11	12	10
13	13	12	12	11	10	11	11	10	9	8	12	0	0	1	11	12	7	0	8	6	5	4	3	2	4	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9
14	12	11	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	0	10	11	6	0	7	5	4	3	2	1	3	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8
15	4	5	3	2	3	4	2	1	2	3	5	0	0	9	0	1	2	0	7	3	4	5	6	8	7	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8
16	5	4	4	3	2	3	3	2	1	2	4	0	0	8	3	0	1	0	6	2	3	4	5	7	6	6	5	4	7	6	5	6	0	8	10	6	9	8	9	7
17	6	5	5	4	3	4	4	3	2	1	5	0	0	7	4	5	0	5	1	2	3	4	6	5	5	4	3	6	5	4	5	0	7	9	5	8	7	8	6	
18	14	13	13	12	11	12	12	11	10	9	13	0	0	11	1	13	8	0	5	7	6	7	8	10	9	1	4	5	2	3	4	5	0	3	7	5	4	5	6	6
19	6	5	5	4	3	4	4	3	2	3	5	0	0	9	4	1	2	0	0	3	4	5	6	8	7	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8
20	7	6	6	5	4	5	5	4	3	2	6	0	0	6	5	6	1	0	4	0	1	2	3	5	4	4	3	2	5	4	3	4	0	6	8	4	7	6	7	5
21	8	7	7	6	5	6	6	5	4	3	7	0	0	5	6	7	2	0	3	1	0	1	2	4	3	3	2	1	4	3	2	3	0	5	7	3	6	5	6	4
22	9	8	7	6	7	7	6	5	4	8	0	0	4	7	8	3	0	4	2	1	0	1	3	2	4	3	2	5	4	3	4	0	6	8	4	7	6	7	5	
23	10	9	9	8	7	8	8	7	6	5	9	0	0	3	8	9	4	0	5	3	2	1	0	2	1	5	4	3	6	5	4	5	0	7	9	5	8	7	8	6
24	11	11	10	9	8	9	9	8	7	6	10	0	0	1	9	10	5	0	6	4	3	2	1	0	2	6	5	4	7	6	5	6	0	8	10	6	9	8	9	7
25	12	11	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	2	10	11	6	0	7	5	4	3	2	1	0	7	6	5	6	5	4	5	0	7	9	5	8	7	8	6
26	13	12	12	11	10	11	11	10	9	8	12	0	0	10	11	12	7	0	4	6	5	6	7	9	8	0	3	4	1	2	3	4	0	2	6	4	3	4	5	5
27	10	9	9	8	7	8	8	7	6	5	9	0	0	7	8	9	4	0	1	3	2	3	4	6	5	1	0	1	2	3	4	5	0	3	7	3	4	5	6	6
28	9	8	8	7	6	7	7	6	5	4	8	0	0	6	7	8	3	0	2	2	1	2	3	5	4	2	1	0	3	2	1	2	0	4	6	2	5	4	5	3
29	9	8	8	7	6	7	7	6	5	6	8	0	0	9	7	4	5	0	3	5	4	5	6	8	7	3	2	3	0	1	2	3	0	1	5	3	2	3	4	4
30	11	10	10	9	8	9	9	8	7	6	10	0	0	8	9	10	5	0	2	4	3	4	5	7	6	2	1	2	1	0	1	2	0	2	6	2	3	4	5	3
31	10	9	9	8	7	8	8	7	6	5	9	0	0	7	8	9	4	0	3	3	2	3	4	6	5	3	2	1	2	1	0	1	0	3	5	1	4	3	4	2
32	11	10	10	9	8	9	9	8	7	6	10	0	0	8	9	10	5	0	4	3	4	5	7	6	4	3	2	3	2	1	0	0	4	6	2	5	4	5	3	
33	12	11	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	3	10	11	6	0	5	4	5	6	8	7	5	4	3	4	3	2	1	0	5	7	3	6	5	6	4	
34	15	14	14	13	12	13	13	12	11	10	14	0	0	12	13	14	9	0	7	8	9	11	10	7	6	6	6	5	5	6	0	4	4	1	2	3	3	4	4	
35	12	11	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	9	10	11	6	0	3	5	4	5	6	8	7	3	2	3	2	1	2	3	0	1	0	3	2	3	4	4
36	11	10	10	9	8	9	9	8	7	6	10	0	0	8	9	10	5	0	4	3	4	5	7	6	4	3	2	3	2	1	2	0	4	4	0	3	2	3	1	
37	14	13	13	12	11	12	12	11	10	9	13	0	0	11	12	13	8	0	6	7	6	7	8	10	9	6	5	5	5	4	4	5	0	4	3	3	0	1	2	2
38	13	12	12	11	10	11	11	10	9	8	12	0	0	10	11	12	7	0	5	6	5	6	7	9	8	5	4	4	4	3	3	4	0	3	2	2	1	0	1	1
39	12	11	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	9	10	11	6	0	4	5	4	5	6	8	7	4	3	3	2	2	3	0	2	1	1	3	3	0	2	
40	12	11	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	9	10	11	6	0	5	5	4	5	6	8	7	5	4	3	4	3	2	3	0	4	3	1	2	1	2	0

Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

A partir de esta tabla, se genera los resultados para los diferentes índices.

Tabla de índices de accesibilidad.

Tabla 8

Resumen de los índices de accesibilidad

NODOS	SHIMBEL	INDICE KONING	Diferencia Promedio	CENTRALIDAD MEDIA	INDICE OMEGA
1	213	12	-3.3	5.5	31.9
2	202	11	-14.3	5.2	26.2
3	231	13	14.8	5.9	41.4
4	239	13	22.8	6.1	45.5
5	186	11	-30.3	4.8	17.8
6	168	10	-48.3	4.3	8.4
7	227	12	10.8	5.8	39.3

⁶ Ver en el anexo 8.

8	224	12	7.8	5.7	37.7
9	206	12	-10.3	5.3	28.3
10	237	13	20.8	6.1	44.5
11	165	9	-51.3	4.2	6.8
12	343	14	126.8	8.8	100.0
13	306	13	89.8	7.8	80.6
14	270	12	53.8	6.9	61.8
15	196	11	-20.3	5.0	23.0
16	174	10	-42.3	4.5	11.5
17	166	9	-50.3	4.3	7.3
18	275	14	58.8	7.1	64.4
19	203	11	-13.3	5.2	26.7
20	158	8	-58.3	4.1	3.1
21	152	8	-64.3	3.9	0.0
22	178	9	-38.3	4.6	13.6
23	206	10	-10.3	5.3	28.3
24	237	11	20.8	6.1	44.5
25	247	12	30.8	6.3	49.7
26	250	13	33.8	6.4	51.3
27	188	10	-28.3	4.8	18.8
28	158	9	-58.3	4.1	3.1
29	176	9	-40.3	4.5	12.6
30	194	11	-22.3	5.0	22.0
31	172	10	-44.3	4.4	10.5
32	195	10	-21.3	5.0	22.5
33	236	12	19.8	6.1	44.0
34	307	15	90.8	7.9	81.2
35	215	12	-1.3	5.5	33.0
36	196	11	-20.3	5.0	23.0
37	276	14	59.8	7.1	64.9
38	242	13	25.8	6.2	47.1
39	215	12	-1.3	5.5	33.0
40	221	12	4.8	5.7	36.1

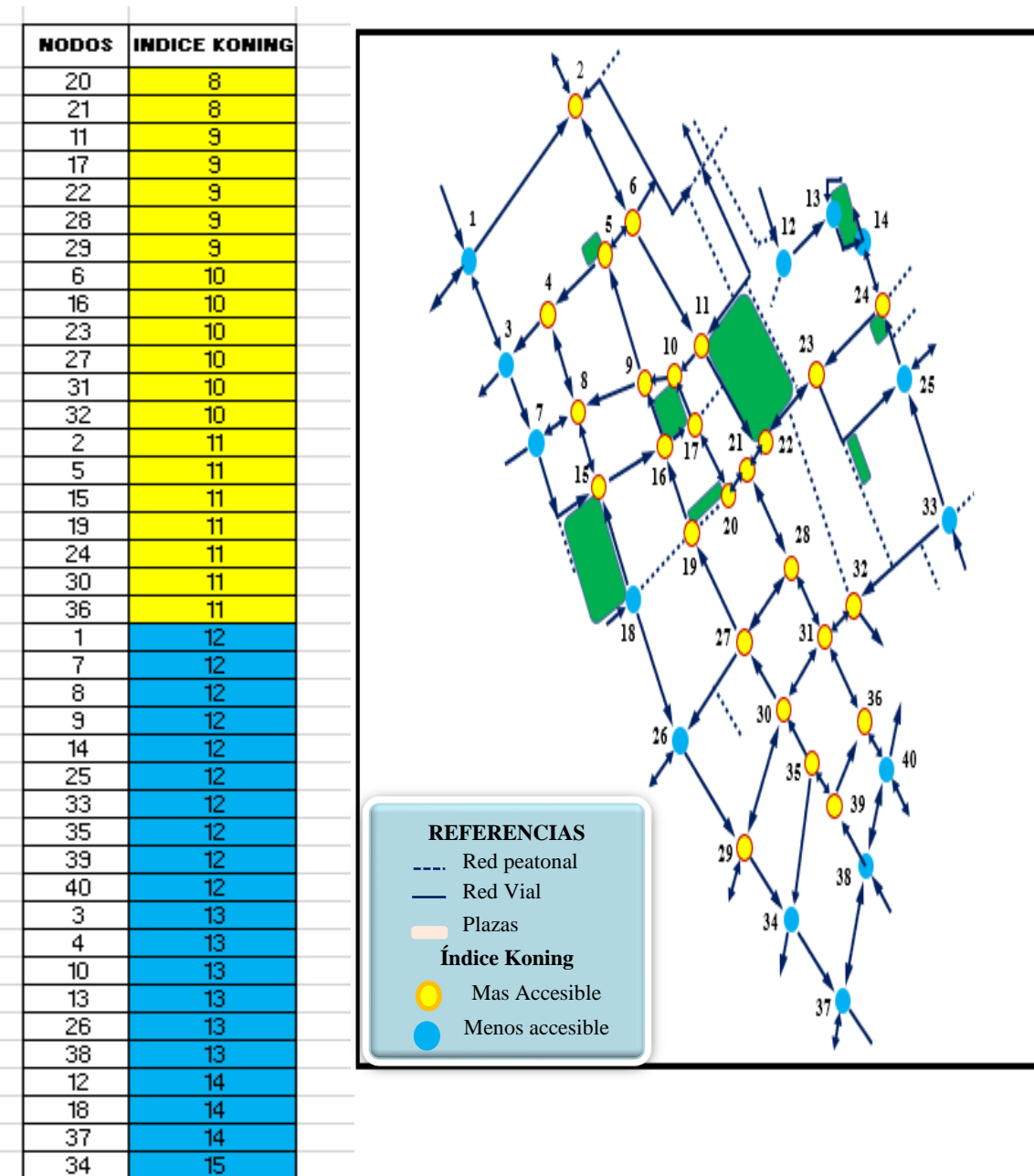
Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

Esta tabla ha sido generada a partir de la Matriz de Accesibilidad Topológica.

El Índice Koning, resultando que los nodos más accesibles son el nodo 20 y 21, seguidos de los nodos 11, 17, 22, 28 y 29, mientras que los otros nodos son poco accesibles.

Figura 46

Nodos más accesibles y nodos poco accesibles (índice de Koning)

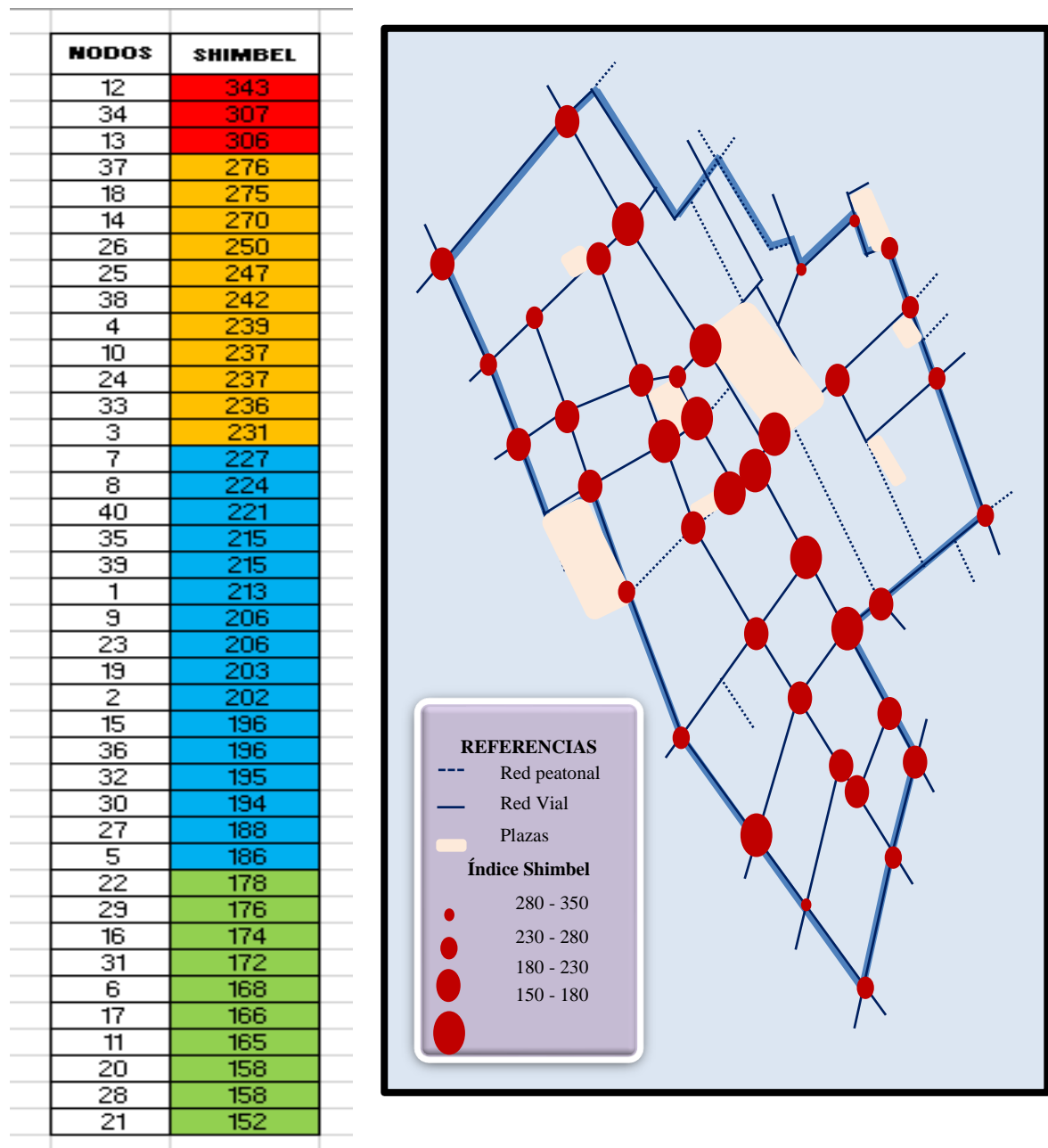


Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

Por otro lado, el índice de Shimbel o accesibilidad absoluta en comparación con el anterior, lo obtenemos en viendo la relación de integración en todos los nodos del grafo realizado, este nos brinda información mucho más precisa y fiable, dando como resultado que el nodo de mayor accesibilidad es el nodo 21, comparado con el nodo de menor accesibilidad nodo 12.

Figura 47

Nodos más accesibles y nodos poco accesibles (índice Shimbel)

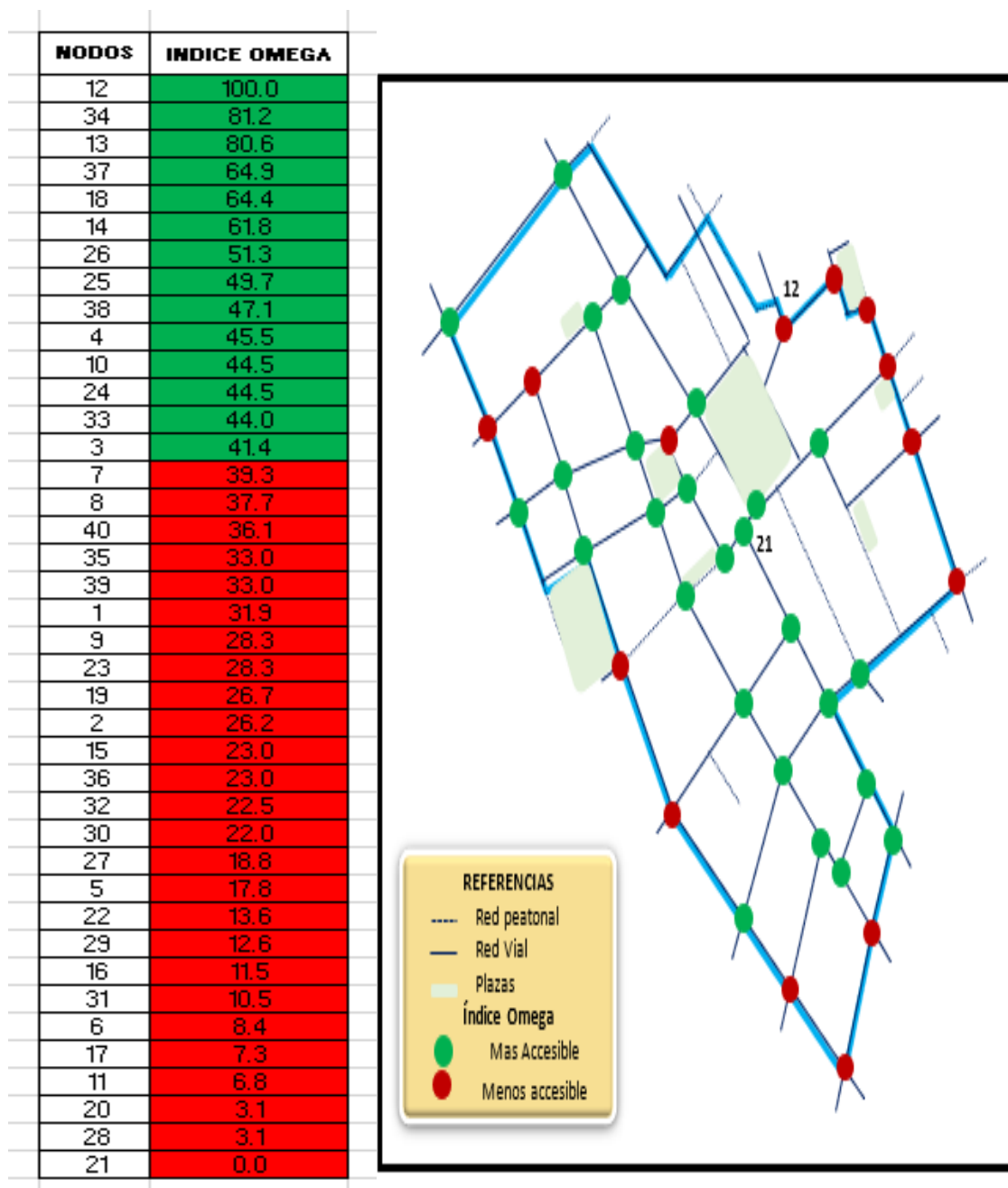


Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

Este resultado obtenido sobre la accesibilidad topológica relativa nos induce sobre el nodo central de mayor accesibilidad que es el nodo 21 que coincide con el (0) y por otro lado el de menor accesibilidad en este caso será el nodo 12 que conocido con (100).

Figura 48

Nodos más accesibles y nodos poco accesibles (índice Omega)



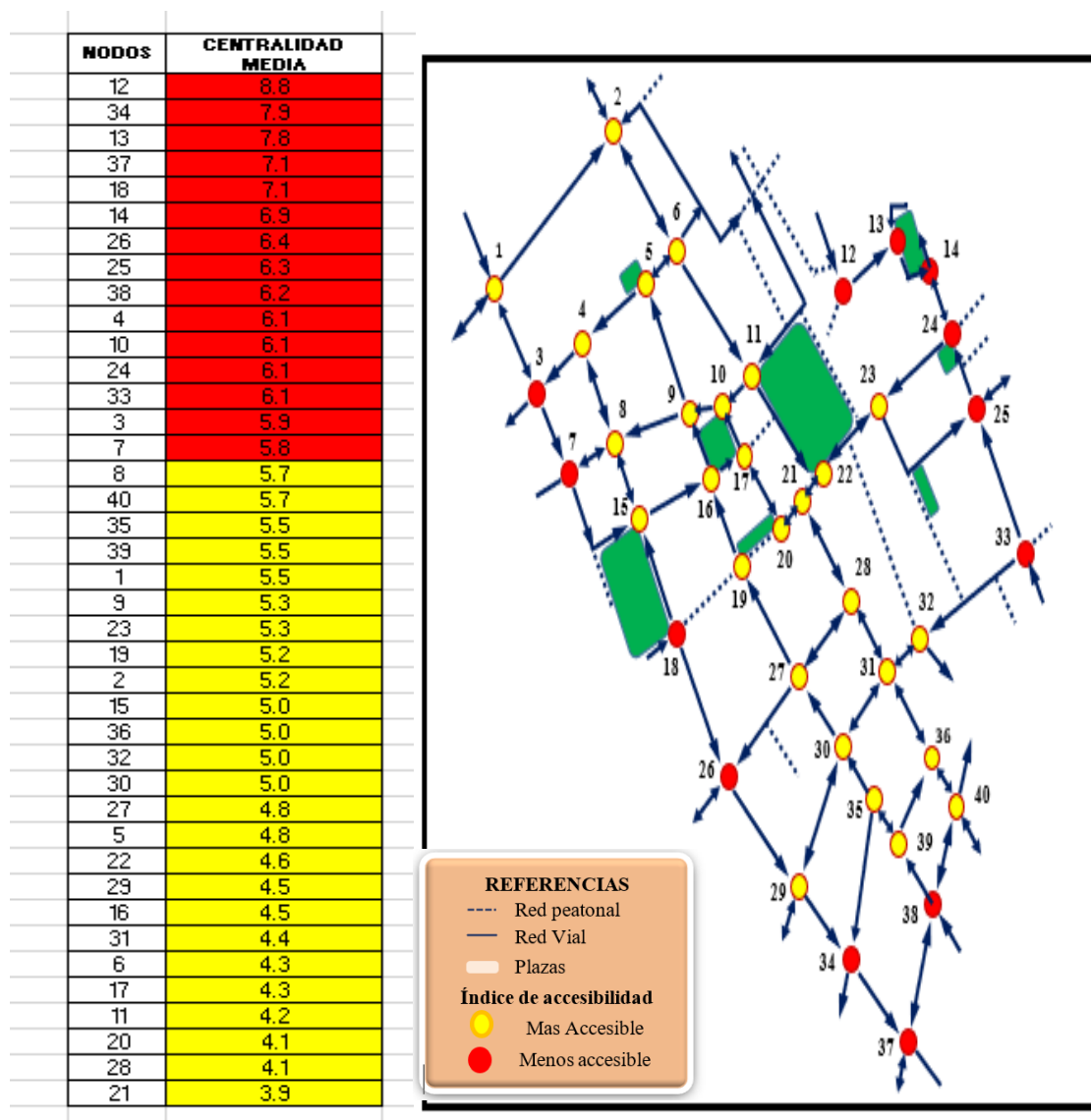
Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

5.7. RESULTADOS DE MEDIDAS DE CENTRALIDAD

La centralidad media nos da la posibilidad de estar al tanto sobre la posición de los nodos en el grafo. Los valores mínimos evidencian los nodos más centrales tales son los nodos 21, 20, 28, 11, entre otros y en los extremos se encuentran los nodos 12, 13, 34, entre otros.

Figura 49

Nodos más accesibles y nodos poco accesibles (Centralidad Media)



Nota: Formato de elaboración y adaptación propia

5.8. ANALISIS DE LAS REDES

Ahora usaremos la información que hasta el momento se tiene, y usando el Software Grafos dibujaremos la solución de la ruta más corta sobre el grafo, de manera que subrayaremos los arcos y nodos de la solución.

Primeramente, ingresaremos los datos en la plataforma, los datos ingresados son las respectivas distancias de las calles, las cuales se obtuvieron mediante la plataforma Google Maps.

Veamos el siguiente ingreso de los datos en el software.

Figura 50

Entorno de trabajo del Software Grafos



Nota: adaptado del Software Grafos – v. 1.3.5

Figura 51*Ingreso de datos en el software Grafos*

Grafos - v. 1.3.5 (cc) 2003.2012 - Alejandro Rodríguez Villalobos

Archivo Edición Ayuda

Valor (Nodos) Mínimo (Arcos) Máximo (Arcos) Coste (Arcos) Etiqueta (Arcos)

Origen\Destino	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1		260	135																																					
2						152																																		
3		135						98																																
4			86.7					110																																
5				126		56.6																																		
6		135			56.6					189																														
7							84.9								162.1																									
8				110			84.9								110																									
9					156			129																																
10									64.6																															
11										54.4													153																	
12												103																												
13													69.4																											
14																								86.9																
15								110								123																								
16									76.9								57.6																							
17										58.2												93																		
18															112													169												
19																107																								
20																	93						84.3																	
21																						84.3	84.3						121											
22																							84.3	133																
23																							133		225.6															
24													86.9											143																
25																									81.9															
26																																							166	

X=125 Y=0 0.60 C:\Users\HILARION\Pictures\CHAMBA CASI 4.graphml

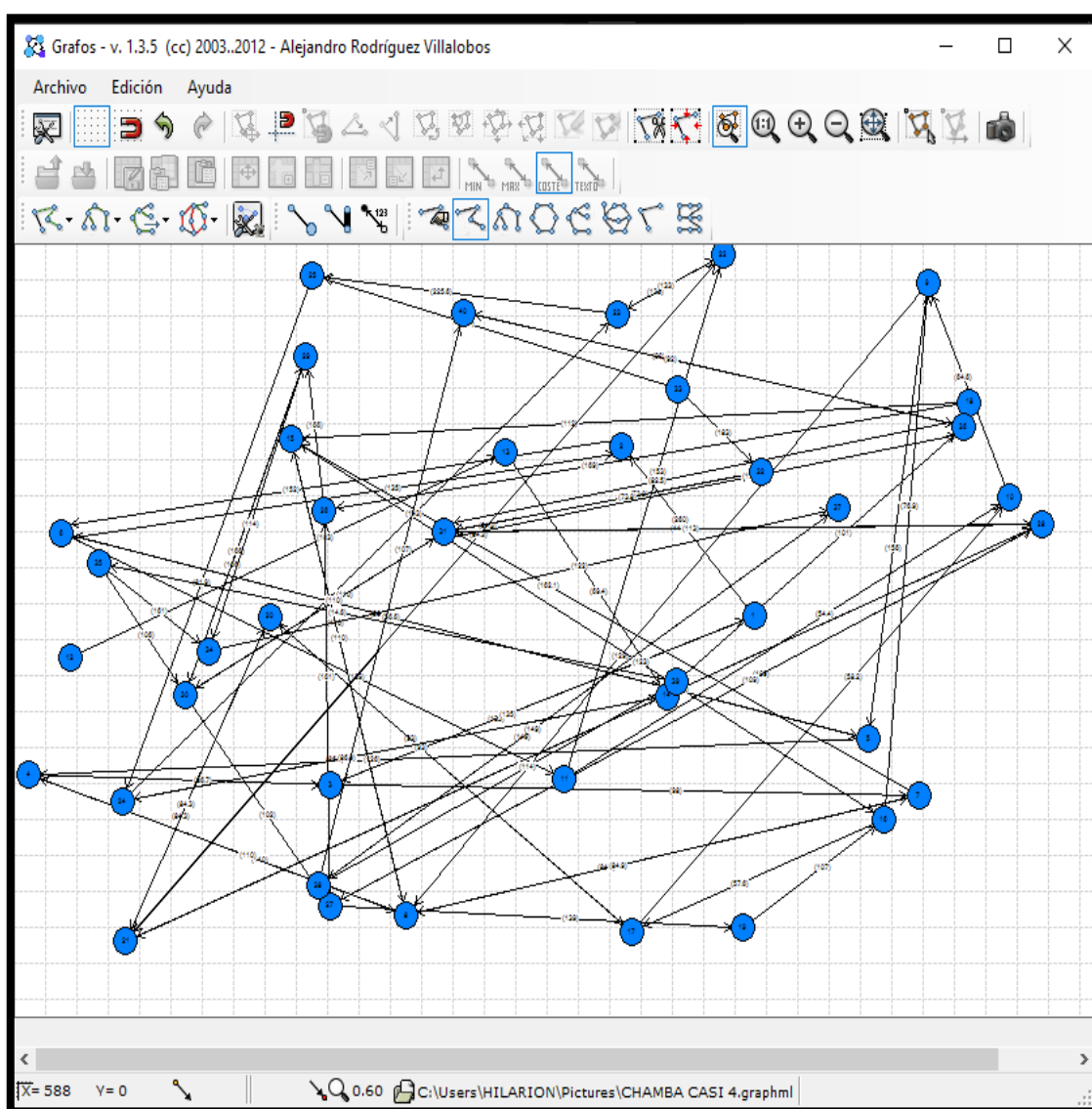
Nota: adaptado del Software Grafos – v. 1.3.5

5.9. CONSTRUCCION DEL GRAFO

- Con ayuda del software grafos y los datos de la investigación se obtuvo el siguiente grafo, este grafo está dado en forma aleatoria.
- Aquí presentamos el grafo con un papel tapiz y construido de acuerdo a los datos de la investigación

Figura 52

Construcción de Grafo de manera aleatoria



Nota: adaptado del Software Grafos – v. 1.3.5

Figura 53

Grafo construido de acuerdo a nuestros datos



Nota: adaptado del Software Grafos – v. 1.3.5

5.10. ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.10.1. Algoritmo De Dijkstra

Camino mínimo (origen destino), este algoritmo ya se encuentra implementado en el software GRAFOS, por ende, los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Figura 54

Resultado Algoritmo Dijkstra en el Software Grafos

```

Grafos - Resultados del Análisis
CAMINO MÍNIMO - ALGORITMO DE DIJKSTRA
-----
Tiempo de proceso = 0 segundos
Arcos calculados desde el nodo origen (33) hasta el nodo d
* 3 ----(135)----> 1
* 4 ----(86.7)----> 3
* 8 ----(110)----> 4
* 9 ----(129)----> 8
* 10 ----(64.6)----> 9
* 17 ----(58.2)----> 10
* 20 ----(93)----> 17
* 21 ----(84.3)----> 20
* 28 ----(121)----> 21
* 31 ----(113)----> 28
* 32 ----(73.8)----> 31
* 33 ----(183)----> 32

Coste total = 1251.6

Matriz de Arcos con coste mínimo:
N1\N2  1    2    3    4    5    6    7
1      0    0    0    0    0    0    0
2      0    0    0    0    0    0    0
3      1    0    0    0    0    0    0
4      0    0    1    0    0    0    0
5      0    0    0    0    0    0    0
6      0    0    0    0    0    0    0
7      0    0    0    0    0    0    0
8      0    0    0    1    0    0    0
9      0    0    0    0    0    0    0
10     0    0    0    0    0    0    0
11     0    0    0    0    0    0    0
12     0    0    0    0    0    0    0
13     0    0    0    0    0    0    0
14     0    0    0    0    0    0    0
15     0    0    0    0    0    0    0
16     0    0    0    0    0    0    0
17     0    0    0    0    0    0    0
18     0    0    0    0    0    0    0
19     0    0    0    0    0    0    0
20     0    0    0    0    0    0    0
21     0    0    0    0    0    0    0
22     0    0    0    0    0    0    0
23     0    0    0    0    0    0    0
24     0    0    0    0    0    0    0
25     0    0    0    0    0    0    0
26     0    0    0    0    0    0    0
27     0    0    0    0    0    0    0
28     0    0    0    0    0    0    0
29     0    0    0    0    0    0    0
30     0    0    0    0    0    0    0
31     0    0    0    0    0    0    0
32     0    0    0    0    0    0    0
33     0    0    0    0    0    0    0
34     0    0    0    0    0    0    0
35     0    0    0    0    0    0    0
36     0    0    0    0    0    0    0
37     0    0    0    0    0    0    0
38     0    0    0    0    0    0    0
39     0    0    0    0    0    0    0
40     0    0    0    0    0    0    0

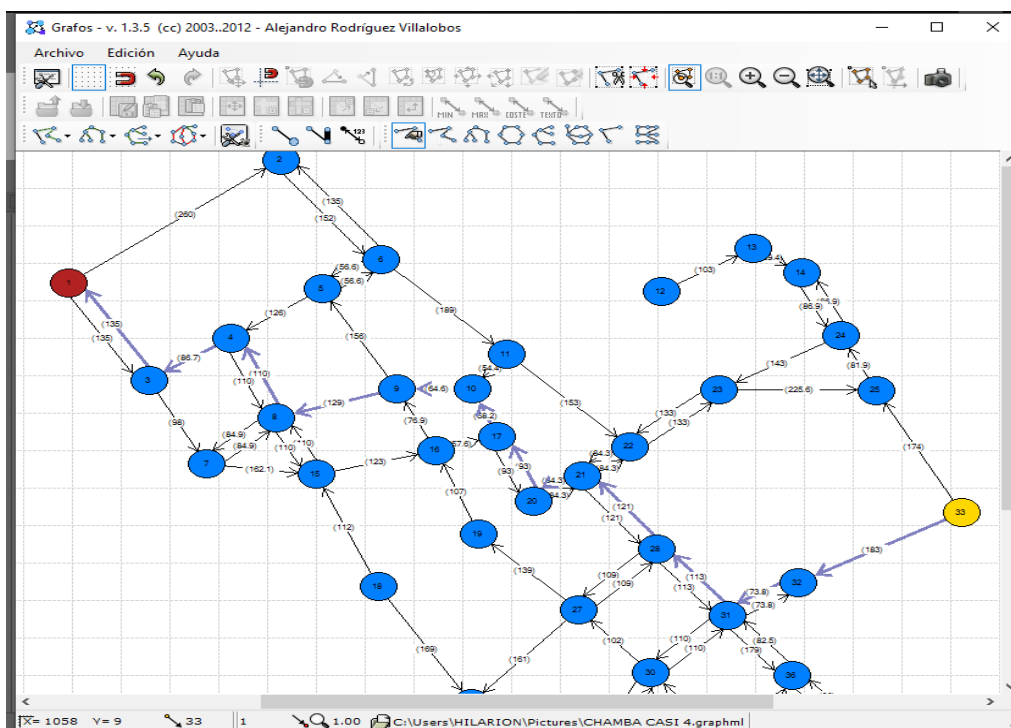
Resuelto con:
Grafos - v.1.3.5
(cc) 2003..2012 - Alejandro Rodriguez Villalobos
http://arodrigu.webs.upv.es/grafos
  
```

Nota: adaptado del Software Grafos – v. 1.3.5

De manera que también se puede apreciar su respectivo grafico en el cual nos indica la posible solución óptima en cuanto a la distancia mínima que recorren los vehículos para trasportarse de un extremo a otro. En este caso el nodo de inicio es el nodo 33 que corresponde a la intersección de las calles (San Agustín y Maruri) y como nodo final tenemos al nodo 1, que viene a ser la intersección de las calles (Meloq y Tambo de Montero).

Figura 55

Resultado Algoritmo Dijkstra en el Software Grafo



Nota: adaptado del Software Grafos – v. 1.3.5

5.10.2. Densidad del grafo

La densidad de un gráfico es la relación entre la cantidad de arcos del gráfico y el número máximo de arcos. Es decir, determina la proporción de aristas que posee.

$$D = \frac{2|E|}{|V|(|V|-1)}$$

Para nuestro estudio la densidad nos da el valor numérico de 0.07, el cual nos indica que posee poca conectividad el grafo de estudio.

5.11. DISCUSIÓN

es necesario discutir algunos aspectos de gran importancia respecto a los parámetros estimados, relacionados con las medidas de conectividad utilizado en este estudio. En primer lugar, estas medidas de conectividad estiman niveles bajos de conexión en la red de estudio, así como también se dio en el estudio de Insaurralde, J. A. y Cardozo. O. D. (2010). En cuanto a la accesibilidad, la elaboración de los mapas de isoaccesibilidad permitió distinguir en que puntos la accesibilidad es muy buena y en que otros puntos la accesibilidad es pésima. Además, estos mapas sirven para planificar el desarrollo urbano de nuestra ciudad del Cusco, mejorar la infraestructura y los servicios públicos, así como para evaluar la equidad en el acceso a recursos y oportunidades en nuestra ciudad. Por otra parte, también tenemos algunos inconvenientes al recolectar los datos para los análisis de medidas respectivos, se obvia algunos de los datos por el tan solo hecho de no complicar el estudio, es decir se suele evitar recolectar datos que complican el estudio, entre los cuales se tiene la presencia de semáforos, accidentes, presencia de policías de tránsito, estos últimos podrían desviar los sentidos de tránsito, etc. Por lo tanto, estas eventualidades influyen en los cálculos de los índices de conectividad, accesibilidad y centralidad, de manera que habrá un cierto grado de desvío en cuanto a los resultados. Además, la recolección de los datos se tomó de manera discontinua, es decir los diferentes flujos de vehículos se tomaron en diferentes tiempos, lo cual influye también en los valores de los índices. Entonces, lo conveniente e ideal será que los datos se obtengan de manera simultánea, es decir al mismo tiempo en toda el área de estudio. Este si sería un trabajo que realmente sea importante tanto para las instituciones que velan por el buen tránsito urbano de pasajeros y también sería muy buena metodología para futuros estudios.

En la hipótesis se planteó que el sistema de rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, se simula y optimiza por medio de la teoría de redes, efectivamente es posible simular las rutas de transporte en cuanto a su flujo, además es posible optimizar tanto en costos como es tiempo a través del algoritmo de la ruta más corta.

CONCLUSIONES

- 1) Al simular y optimizar el sistema de rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, los resultados del software grafos nos indica la ruta más corta para trasladarse de un lugar a otro, de tal manera se reduce tanto los costos y tiempos de movilización, con lo cual es posible reducir los tiempos y costos de movilización por medio de teoría de redes. Un aspecto importante para dicha conclusión fue la construcción de las redes en el ámbito de estudio en la ciudad. La Teoría de redes resulta ser una técnica conveniente al momento de estudiar las relaciones topológicas de una red, también facilitan el estudio al emplear los índices y matrices que nos ayudan a entender la estructura dada.
- 2) También fue posible describir y analizar el sistema de las rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco a través de una red, es así que, para poder resolver nuestro problema de rutas de transporte, el software “grafos” reúne y combina heurísticas con modelos de optimización. Grafos cuenta con la ayuda de varios solver. este solucionador resuelve modelos de programación lineal (mixta) puros, con variables enteras/binarias, entre otros.
- 3) Además, se logró analizar las rutas de transporte correspondiente a la red, mediante el empleo de índices de conectividad, también para la preparación del mapa de isoaccesibilidad a partir del cálculo de los índices y matrices, permitió visualizar lugares (sur y este), en los cuales se cuenta con una accesibilidad buena, mientras tanto en el (centro) donde la accesibilidad de alguna manera es buena, por otra parte también podemos contemplar lugares críticos, en la cual la accesibilidad se reduce, estos localizados preferente en los lugares periféricos (Noreste).

RECOMENDACIONES

En realidad, el término "problemas de rutas de transporte" engloba una amplia gama de variedades de problemas. Desde los más básicos hasta los más complejos, que incluso en la actualidad son objeto de estudio. No obstante, además de su desafío computacional, comparten una gran relevancia en la investigación operativa debido a su aplicación práctica en la vida real. Esta investigación solo examinó un aspecto limitado del potencial de la teoría de redes.

El mapeo de todo el distrito de Cusco sería uno de los muchos proyectos que serían de gran importancia tanto para los municipios distritales y provinciales como para los usuarios. Con este trabajo se podrían lograr resultados óptimos, como la reducción de tiempos y la reducción de los costos de transporte, entre otros aspectos.

BIBLIOGRAFÍA

- Durand, P. Problemática en el Servicio de Transporte Público de Pasajeros en Arequipa, Cusco, Chiclayo y Tacna, Lima, 2014.
- Eppen G., Gould F., Schmidt C., Moore J. y Weatherford. (2000) *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*, PRENTICE-HALL, México.
- Guerra M. (2010) *Manual de Publicaciones de la American Psychological Association*. Editorial El Manual moderno – México. 3e ed.
- Hillier F. S. & Lieberman G. J. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones*, México, The McGraw-Hill companies; Novena Edición.
- Marín V. (2017). Simulación de una red de transporte multimodal en canarias. Trabajo de fin de grado. Universidad de la laguna. Escuela superior de ingeniería y tecnología. Sección de ingeniería informática. Laguna.
- Obregón B. (2005). *El problema de la ruta más corta (Tesis Maestría)*. Universidad autónoma de México.
- Vega Bayo, Marta; Aplicación de teoría de grafos a redes con elementos autónomos; Escuela politécnica superior
- Winston W. (2004) *Investigación de Operaciones, Aplicaciones y Algoritmos*, México, Thomson. Cuarta Edición.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarez Nuñez, M. F., & Parra Muñoz, J. A. (2013). *Teoría de Grafos*. Chillan.
- Bautista, A. (2018). *Análisis de accesibilidad y conectividad de la red vial intermunicipal en el micro-sistema regional de la provincia Centro en Boyacá, Colombia*. Boyacá, Colombia.
- Bosque Sendra, J. (2000). *El uso de los sistemas de Información Geográfica en la planificación territorial*.
- Calvo Sanchez, T., Morais San Miguel, J. E., & Muel Muel, E. (2015). *Estructuras Discretas*. Madrid.
- Cardozo, O. D., Gomez, E. L., & Parras, M. A. (2009). Teoría de grafos y sistema de información geográfica aplicados al transporte público de pasajeros en Resistencia Argentina. *Revista transporte y territorio N° 1*.
- Chacon, J. L. (2005). *Introducción a la Teoría de Grafos*.
- Condori Balcon, D. (2016). Repositorio Institucional. *Organización Espacial de la Red de Carreteras de la Región Puno Mediante la Teoría de Grafos*. Puno.
- Dómine Rueda, C. (2015). Universidad Politécnica de Madrid. *Simulación de tráfico en circuitos urbanos para analizar el efecto de diferentes estilos de conducción*. Madrid.
- Durand Vasquez, Patricia;. (2014). *Problemática en el servicio de transporte público de pasajeros en Arequipa, Cusco, Chiclayo y Tacna*. Lima.
- Flores Ramos, S. (2021). (Trabajo Fin de Grado Inédito). Universidad de Sevilla. *Problemas de redes y flujos*. Sevilla.
- Franco Galvin, F. J. (2016). Aspectos algebraicos en teoría de grafos (trabajo de fin de grado). *Universidad de Sevilla*.
- Gamarra Santiesteban, B., & Delgado Ccompí, J. L. (2014). Calidad del servicio de transporte público urbano en la ciudad del Cusco 2014. *Alicia Concytec*.

- García, A. (2022). *Studocu*. Obtenido de <https://www.studocu.com/ec/document/universidad-nacional-de-chimborazo/metodos-numericos/alg-diag-apuntes-1/17008590>
- Google. (s.f.). *Google Maps*.
- Gracia Gracia, V., & Mateo Collazos, P. (2019). Universidad de Zaragoza, CIEN. *Algoritmos para el problema de Flujo Máximo*. España.
- Greenberg, H. (1959). *Investigación de Operaciones*.
- Gutiérrez, R., & Delgado, C. (2017). CApítulo 5, Introducción a la Teoría de Grafos.
- Insaurralde, J. D., & CARDOZO, O. D. (2010). Análisis de la red vial de la provincia de Corrientes por medio de la Teoría de Grafos. *Riunne*.
- Johnsonbaugh, R. (2005). *MATEMÁTICAS DISCRETAS. Sexta edición*. México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Joyanes Aguilar, L. (2008). *FUNDAMENTOS DE PROGRAMACION Algoritmos, estructura de datos y objetos Cuarta edición*. Mc Graw Hill.
- Madrid Soto, A., & Ortiz López, L. M. (2005). *Análisis y síntesis en cartografía: algunos procedimientos*. Universidad Nacional de Colombia.
- Marin Barella, V. (setiembre de 2017). UNiversidad de la Laguna. *Simulación de una red de transporte multimodal en Canarias*. La Laguna.
- Masters, T. y. (s.f.). *Técnicas de investigación*. Obtenido de <https://tesisymasters.com.co/tecnicas-de-investigacion/>
- Mediorreal Carrillo, A. F. (2014). Pontificia Univercidad Javeriana. *Modelo de ruteo de vehículos para la distribución de las empresas laboratorios veterland, Laboratorios Callbest y Cosméticos Marliouü París*. Bogota.
- Miralles, C. (2002). *Ciudad y transporte. El binomio imperfecto*. Barcelona.
- Moovit. (2024). *Rutas urbanas - Horarios, rutas y paradas*. Obtenido de https://moovitapp.com/index/es-419/transporte_p%C3%BAblico-lines-Cusco-5498-1208002

- Municipalidad del Cusco. (2015). *Plan de desarrollo urbano Cusco al 2023*. Cusco.
- Municipalidad Provincial del Cusco. (2012). *Plan regulador de transporte publico urbano de pasajeros*. Cusco.
- Pakhrou, & Tijani. (2013). Matemática Discreta. *Repositorio Institucional de la Universidad de Alicante*.
- Pérez H., L. A. (1990). Conectividad y accesibilidad en el departamento de Lima : una aplicación de la teoría de los Grafos. *Revistas Pucp*.
- Ramos Ferrer, C. (2017). E.T.S.I. Industriales (UPM). *Simulación de un modelo microscópico de seguimiento de vehículos. Proyecto Fin de Carrera / Trabajo Fin de Grado*.
- Restrepo C, J. H., & Sanchez C, J. J. (2004). Aplicación de la teoría de grafos y el algoritmo de Dijkstra para determinar las distancias y las rutas más cortas en una ciudad. *Scientia Et Technica, vol X, núm. 26*, pp. 121-126.
- Ruiz , A., Alfaro, C., & Gamboa, R. (2016). Aprendizaje de las matemáticas: conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas.
- Sánchez, E. (1982). *Análisis Matemático Tomo I: Teoría de Límites*. Pueblo y Educación.
- Seguí Pons, J. M., & Petrus Bey, J. M. (1991). Dialnet. *Geografía de redes y sistemas de transporte*.
- Shannon , R. E. (1988). *Simulación de sistemas: Diseño, desarrollo e implementación*. México: Editorial Trillas.
- Shapiro, J. (2006). Massachusetts Institute of Technology. *Modeling the Supply Chain Management. Second Edition*. U.S.A.
- Soler, J. (2016). Grafos, isomorfismos y ciclos. *Universidad Autónoma de Madrid*.
- Soto, E. (2011). *Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos (3a ed.)*.
- Spaggiari, P. L. (1990). *innovación tecnológica al funcionamiento del medio urbano* . Milán.

Suarez, E. (noviembre de 2023). *Experto universitario*. Obtenido de <https://expertouniversitario.es/blog/metodo-inductivo-y-deductivo/>

University, T. A. (s.f.). *Los niveles de investigación*. Obtenido de <https://tauniversity.org/los-niveles-de-investigacion#:~:text=La%201%C3%ADnea%20de%20investigaci%C3%B3n%20recorre,%2C%20explicativo%2C%20predictivo%20y%20aplicativo.>

Veracruzana, U. (s.f.). *Tipos de investigación*. Obtenido de <https://www.uv.mx/apps/bdh/investigacion/unidad1/investigacion-tipos.html>

LINKOGRAFÍA

1. Recuperado de <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/539/obregonquintana.pdf?sequence=12> el (08/02/2024)
2. Recuperado de dudasytareas.files.wordpress.com/2017/05/hillier_lieberman.pdf el (08/02/2024)
3. Recuperado de [matematicasdiscretas1.pdf \(uam.mx\)](#) el (08/02/2024)
4. Recuperado de [Matem.Discreta.pdf \(ugr.es\)](#) el (08/02/2024)
5. Recuperado de [Matemáticas discretas con aplicaciones, 4ta Edición \(wordpress.com\)](#) el (08/02/2024)
6. Recuperado de [20102BV02010230402010501119526.pdf \(uaa.mx\)](#) el (08/02/2024)
7. Recuperado de [Diapositiva 1 \(wordpress.com\)](#) el (08/02/2024)
8. Recuperado de [Microsoft PowerPoint - t_nf_ps.ppt \(wordpress.com\)](#) el (08/02/2024)
9. Recuperado de [Alg diag - Apuntes 1 - Algoritmos. Definición Un algoritmo se puede definir como una secuencia de - Studocu](#) el (08/02/2024)

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de Consistencia

PROBLEMA	OBJETIVO	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	TÉCNICA
<p>Problema general ¿Es posible simular y optimizar un sistema de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, que logre reducir los tiempos y costos de movilización, por medio de teoría de redes?</p> <p>Problemas específicos ¿Se puede describir y analizar el sistema de las rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco a través de una red?</p> <p>¿Será posible analizar las rutas de transporte correspondiente a la red, mediante el empleo de índices de conectividad?</p>	<p>Objetivo general Simular y optimizar un sistema de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, que logre reducir los tiempos y costos de movilización, por medio de teoría de redes.</p> <p>Objetivos específicos Describir y analizar el sistema de las rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco a través de una red.</p> <p>Analizar las rutas de transporte correspondiente a la red, mediante el empleo de índices de conectividad.</p>	<p>Hipótesis General El sistema de rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco, se simula y optimiza por medio de la teoría de redes.</p> <p>Hipótesis Específica El sistema de las rutas de transporte en el casco urbano de la ciudad del Cusco se describe y analiza a través de una Red.</p> <p>Las rutas de transporte correspondiente a la red se analizan mediante el empleo de índices de conectividad.</p>	<p>Tipo: Investigación aplicada</p> <p>Nivel: Descriptivo y explicativo</p> <p>Método: Deductivo</p>	<p>observación, análisis documental, análisis de contenido y observación</p>

ANEXO 2: Formato en blanco para el recojo de datos.

FECHA		HORA			
CALLE		HORA			
TIEMPO	30 MIN	0 - 10 min	10 - 20 min	20 - 30 min	
TIPO UNIDADES	AUTOS				
	BUSES/ RENAULD				
	CAMIONETAS RURALES				
	REPARTO				
	OTROS MOTOS				

TIEMPO	30 MIN	0 - 10	10 - 20	20 - 30	TOTAL
TIPO UNIDADES	AUTOS				
	BUSES				
	CAMIONETAS				
	REPARTO				
	OTROS				
TOTAL					

ANEXO 3: Formato relleno (datos de la calle Afligidos)

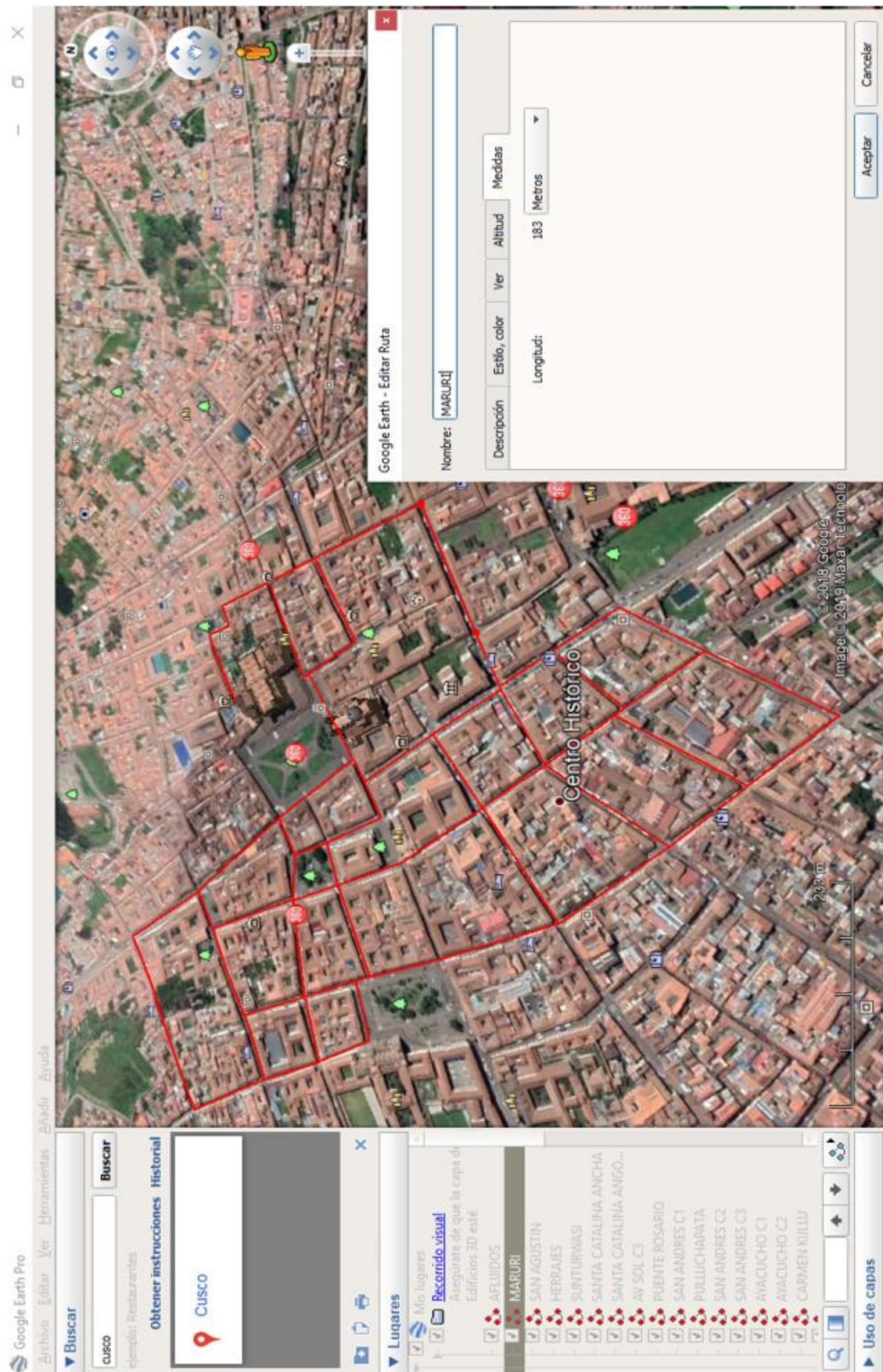
FECHA	01-04-19	HORA	12:08
CALLE	AFLIGIDOS	BAJADA	SUBIDA
TIEMPO	30 MIN	0 - 10 min	10 - 20 min
		0 - 10 min	20 - 30 min
TIPO UNIDADES	AUTOS		
	BUSES/ RENAULD		
	CAMIONETAS RURALES		
	REPARTO		
	OTROS MOTOS		

FECHA	01-04-19	HORA	12:08
CALLE	AFLIGIDOS	JUBEDA	OSTON
TIEMPO	30 MIN	0 - 10 min	10 - 20 min
		0 - 10 min	20 - 30 min
TIPO UNIDADES	AUTOS		
	BUSES/ RENAULD		
	CAMIONETAS RURALES		
	REPARTO		
	OTROS MOTOS		

TIEMPO	30 MIN	0 - 10	10 - 20	20 - 30	TOTAL
AUTOS	56	53	43	152	
BUSES	23	29	31	83	
CAMIONETAS	14	6	9	26	
REPARTO	0	1	2	3	
OTROS	1	3	1	5	
TOTAL	94	92	86	269	

TIEMPO	30 MIN	0 - 10	10 - 20	20 - 30	TOTAL
AUTOS	44	32	39	115	
BUSES	15	17	18	50	
CAMIONETAS	0	1	1	2	
REPARTO	0	0	1	1	
OTROS	1	2	1	4	
TOTAL	60	52	60	172	

ANEXO 4: Toma de medidas de las diferentes calles.



ANEXO 7: Matriz de Adyacencia.

Destino Origen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	SHIMBEL	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
6	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
8	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
9	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
	INDICE DE DISPERSION (G)																																								78	

ANEXO 8: Matriz de Accesibilidad.

Destino Origen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	0	1	1	4	3	2	2	3	5	4	3	0	0	8	3	4	5	0	8	6	5	4	5	7	6	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9	
2	5	0	4	3	2	1	5	5	4	3	2	0	0	7	5	6	6	0	7	5	4	3	4	6	5	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8	
3	1	2	0	3	4	3	1	2	4	5	4	0	0	9	2	3	4	0	9	5	6	5	6	8	7	9	8	7	10	9	8	9	0	11	13	9	12	11	12	10	
4	2	3	0	0	5	4	2	1	4	5	5	0	0	10	2	3	4	0	9	5	6	6	7	9	8	9	8	7	10	9	8	9	0	11	13	9	12	11	12	10	
5	3	2	2	1	0	1	3	2	4	3	2	0	0	7	3	4	5	0	7	5	4	3	4	6	5	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8	
6	4	1	3	2	1	0	4	4	3	2	1	0	0	6	4	5	5	0	6	4	3	2	3	5	4	6	5	4	7	6	5	6	0	8	10	6	9	8	9	7	
7	4	5	3	2	5	6	0	1	3	4	7	0	0	10	1	2	3	0	8	4	5	6	7	9	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9		
8	3	4	2	1	4	5	1	0	3	4	6	0	0	10	1	2	7	0	8	4	5	6	7	9	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9		
9	4	3	3	2	1	2	2	1	0	4	3	0	0	8	2	3	4	0	8	5	5	4	5	7	6	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9	
10	5	4	4	3	2	3	3	2	1	0	4	0	0	9	3	4	5	0	9	6	6	5	6	8	7	9	8	7	10	9	8	9	0	11	13	9	12	11	12	10	
11	6	5	5	4	3	4	4	3	2	1	8	0	0	5	4	5	4	0	5	3	2	1	2	4	3	5	4	3	6	5	4	5	0	7	9	5	8	7	8	6	
12	14	13	13	12	11	12	12	11	10	9	13	0	1	2	12	13	8	0	9	7	6	5	4	3	5	9	8	7	10	9	8	9	0	11	13	9	12	11	12	10	
13	13	12	12	11	10	11	11	10	9	8	12	0	0	1	11	12	7	0	8	6	5	4	3	2	4	8	7	6	9	8	7	8	0	10	12	8	11	10	11	9	
14	12	11	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	0	10	11	6	0	7	5	4	3	2	1	3	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8	
15	4	5	3	2	3	4	2	1	2	3	5	0	0	9	0	1	2	0	7	3	4	5	6	8	7	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8	
16	5	4	4	3	2	3	3	2	1	2	4	0	0	8	3	0	1	0	6	2	3	4	5	7	6	6	5	4	7	6	5	6	0	8	10	6	9	8	9	7	
17	6	5	4	3	4	4	3	2	1	5	0	0	7	4	5	0	0	5	1	2	3	4	6	5	4	6	5	4	3	6	5	4	5	0	7	9	5	8	7	8	6
18	14	13	13	12	11	12	12	11	10	9	13	0	0	11	13	8	0	5	7	6	7	8	10	9	1	4	5	2	3	4	5	0	3	7	5	4	5	6	6	6	
19	6	5	5	4	3	4	4	3	2	3	5	0	0	9	4	1	2	0	0	3	4	5	6	8	7	7	6	5	8	7	6	7	0	9	11	7	10	9	10	8	
20	7	6	6	5	4	5	4	3	2	6	0	0	0	6	5	6	1	0	4	0	1	2	3	5	4	4	3	2	5	4	3	4	0	6	8	4	7	6	7	5	
21	8	7	7	6	5	6	6	5	4	3	7	0	0	5	6	7	2	0	3	0	1	0	2	4	3	3	2	1	4	3	2	3	0	5	7	3	6	5	6	4	
22	9	8	7	6	7	7	6	5	4	8	0	0	0	4	7	8	3	0	4	2	1	0	1	3	2	4	3	2	5	4	3	4	0	6	8	4	7	6	7	5	
23	10	9	8	7	8	8	7	6	5	9	0	0	0	3	8	9	4	0	5	3	2	1	0	2	1	5	4	3	6	5	4	5	0	7	9	5	8	7	8	6	
24	11	10	9	8	9	9	8	7	6	10	0	0	1	9	10	5	0	6	4	3	2	1	0	2	6	5	4	7	6	5	6	0	8	10	6	9	8	9	7		
25	12	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	2	10	11	6	0	7	5	4	3	2	1	0	7	6	5	6	5	4	5	0	7	9	5	8	7	8	6		
26	13	12	12	11	10	11	10	9	8	12	0	0	0	10	11	12	7	0	4	6	5	6	7	9	8	0	3	4	1	2	3	4	0	2	6	4	3	4	5	5	
27	10	9	8	7	8	8	7	6	5	9	0	0	7	8	9	4	0	1	3	2	3	4	6	5	1	0	1	2	3	4	5	0	3	7	3	4	5	6	6		
28	9	8	7	6	7	7	6	5	4	8	0	0	6	7	8	3	0	2	2	1	2	3	5	4	2	1	0	3	2	1	2	0	4	6	2	5	4	5	3		
29	9	8	7	6	7	7	6	5	6	8	0	0	9	7	4	5	0	3	5	4	5	6	8	7	3	2	3	0	1	2	3	0	1	5	3	2	3	4	4		
30	11	10	9	8	9	9	8	7	6	10	0	0	8	9	10	5	0	2	4	3	4	5	7	6	2	1	2	1	0	1	2	0	2	6	2	3	4	5	3		
31	10	9	8	7	8	8	7	6	5	9	0	0	7	8	9	4	0	3	3	2	3	4	6	5	3	2	1	2	1	0	1	0	3	5	1	4	3	4	2		
32	11	10	10	9	8	9	8	7	6	10	0	0	8	9	10	5	0	4	3	4	5	7	6	4	3	2	3	2	1	0	0	4	6	2	5	4	5	3			
33	12	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	3	10	11	6	0	5	5	4	5	6	8	7	5	4	3	2	1	0	5	7	3	6	5	6	4				
34	15	14	13	12	13	13	12	11	10	14	0	0	12	13	14	9	0	7	8	7	8	9	11	10	7	6	6	5	5	6	0	5	4	4	1	2	3	4			
35	12	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	9	10	11	6	0	3	5	4	5	6	8	7	3	2	3	2	1	2	3	0	1	0	3	2	3	4	4		
36	11	10	9	8	9	9	8	7	6	10	0	0	8	9	10	5	0	4	3	4	5	7	6	4	3	2	3	2	1	2	0	4	0	3	2	3	1				
37	14	13	13	12	11	12	12	11	10	13	0	0	11	12	13	8	0	6	7	6	7	8	10	9	6	5	5	4	4	5	0	4	3	3	0	1	2	2			
38	13	12	12	11	10	11	10	9	8	12	0	0	10	11	12	7	0	5	6	5	6	7	9	8	5	4	4	3	3	4	0	3	4	0	2	1	0	1	1		
39	12	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	9	10	11	6	0	4	5	4	5	6	8	7	4	3	3	2	2	3	0	2	1	1	3	3	0	2			
40	12	11	11	10	9	10	10	9	8	7	11	0	0	9	10	11	6	0	5	4	5	6	8	7	5	4	3	3	4	3	2	3	0	4	3	1	2	1	2	0	