UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA, INFORMÁTICA Y MECÁNICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA MECÁNICA

TEMA DE TESIS:

RESPUESTA EN RESONANCIA DE UNA ESTRUCTURA TIPO MARCO EXCITADA ARMÓNICAMENTE EN LA BASE

PRESENTADO POR:

BACH. DUSSAN BERLY SUAREZ MAMANI

ASESOR:

ING. ARTURO MACEDO SILVA

CUSCO – PERÚ

2017

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación está referido al tema de las vibraciones en las estructuras tipo marco. La vibración puede definirse como un movimiento repetitivo en un lapso de tiempo. Los elementos principales considerados en la vibración de las estructuras son la masa, rigidez, amortiguamiento, excitación (en forma de fuerza, desplazamiento, aceleración).

Las vibraciones en las estructuras pueden generar resonancia y puede presentarse una falla, para evitar ello se debe realizar un análisis vibracional de la estructura. Para el análisis vibracional analítico, se utilizara un modelo matemático (sistemas de uno o varios grados de libertad) que busca describir el comportamiento vibratorio de la estructura. También se realiza el análisis con elementos finitos mediante un software, esta herramienta nos permite visualizar las deformaciones de la estructura para distintas condiciones de excitación (frecuencias).

Los resultados obtenidos del modelo analítico y de la simulación por elementos finitos, se validan con los datos obtenidos de una experimentación anterior de la estructura tipo marco. En la práctica estos modelos matemáticos han logrado predecir adecuadamente el comportamiento la estructura, si son aplicados tomando en cuenta las características y propiedades de la estructura real.

AGRADECIMIENTO

A los profesores de la escuela profesional de ingeniera mecánica por sus sabios consejos y sugerencias hechas con el buen ánimo de considerar algunos detalles específicos y generales.

A mi tutor, por compartir sus conocimientos y por su apoyo brindado en el desarrollo de esta tesis.

DEDICATORIA

A mis padres y hermanos que siempre estuvieron apoyándome con incasable paciencia y mucho afecto para lograr mis metas y alcanzar mis sueños.

A mis compañeros que me apoyaron para culminar satisfactoriamente la tesis.

Gracias a todos.

RESUMEN

El objetivo de esta investigación tiene como finalidad determinar la respuesta (esfuerzo y deformación) en resonancia de una estructura tipo marco excitada armónicamente en la base.

Con esta finalidad se resume la teoría de estructuras, sistemas de un grado y varios grados de libertad (análisis modal), donde se definen varios conceptos como rigidez, masa, amortiguamiento, acciones dinámicas y cómo influyen en la respuesta. Se ha analizado un modelo experimental que representa un edificio ensayado en una investigación anterior, se ha utilizado los datos del ensayo de vibración libre y forzada para validar el modelo analítico y computacional.

Se ha realizado un análisis de vibración analítico y por elementos finitos (software). Con ambos análisis se obtienen tres frecuencias naturales que representan las frecuencias resonantes para la estructura. Cuando la estructura está sometida a una aceleración armónica ($a = Asen\omega t$) en la base, de amplitudes A_1= 6500 mm/s^2 y A_2 =13000 mm/s^2 con frecuencias resonantes $\omega = \omega_n$, se obtienen desplazamientos y esfuerzos. Así la máxima respuesta obtenida es para la primera frecuencia resonante donde el desplazamiento y esfuerzo superan la resistencia del material de la estructura lo que representa una falla por resistencia.

Las comparaciones echas para validar el análisis analítico y por elementos finitos con los datos experimentales muestran resultados aproximados.

PALABRAS CLAVES: Vibración, resonancia, frecuencia natural, esfuerzo, deformación, desplazamiento, respuesta, estructura, excitación.

CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo		Significado	Sistema internacional
m	:	Masa	Kg
m_{ij}	:	coeficientes de influencia de inercia	Kg
$[M]$	:	Matriz de masa	Kg
k	:	Constante de rigidez	N/m
k_{ij}	:	coeficiente de influencia de rigidez	N/m
$[K]$	:	Matriz de rigidez	N/m
F	:	Fuerza	N
$\{F\}$	:	Vector de fuerza	N
F_0	:	Amplitud de fuerza $F(t)$	N
$F(t)$	:	Función de fuerza	N
t	:	Tiempo	s
x	:	Coordenada (desplazamiento)	m
$\dot{x}$	:	Coordenada (Velocidad)	m/s
$\ddot{x}$	:	Coordenada (Aceleración)	m/s^2
$x(t)$	:	Función de desplazamiento	m
$x(0)$	:	Valor de x, cuando $t = 0$	m
$\dot{x}(0)$	:	Valor de $\dot{x}$, cuando $t = 0$	m/s
$y(t)$		Función de desplazamiento	m
y	:	Coordenada (desplazamiento)	m
$\dot{y}$	:	Coordenada (Velocidad)	m/s
$\ddot{y}$	:	Coordenada (Aceleración)	m/s^2

u	:	Coordenada relativa de desplazamiento	m
$u(t)$	:	Función de desplazamiento relativo	m
$\{U\}$	:	Vector de desplazamientos relativo	m
$\{x\}$	:	Vector de desplazamientos	m
Y	:	Amplitud de desplazamiento $y(t)$	m
X	:	Amplitud de desplazamiento $x(t)$	m
$v(t)$	:	Función de velocidad	m/s
v	:	Amplitud de velocidad	m/s
$a(t)$	:	Función de aceleración	m/s^2
a	:	Amplitud de aceleración	m/s^2
L	:	Longitud	m
E	:	Módulo de Young	Pas
I	:	Momento de inercia	m^4
c	:	Coeficiente de amortiguamiento viscoso	N s/m
c_{cr}	:	Amortiguamiento critico	N s/m
$[c]$	:	Matriz de amortiguamiento	N s/m
v	:	Velocidad lineal	m/s
δ_{est}	:	Deflexión estática	m
ω_n	:	Frecuencia natural	rad/s
$\omega_i, \omega_j, \omega_r$	:	Frecuencias naturales	rad/s
ω	:	Frecuencia de oscilación	rad/s
T_n	:	Periodo natural	s
f_n	:	Frecuencia natural	Hz

$\emptyset, \theta$	:	Angulo de fase	Rad
η	:	Coordenada generalizada	m
$\{\eta\}$	:	Matriz de coordenadas generalizadas	m
ξ	:	Fracción de amortiguamiento	
$\{\varphi^i\}, \{\varphi^j\}$	:	Vector de amplitudes (modos)	
$[\Phi]$	:	Matriz normalizada	
$f_i(t)$	:	Función de tiempo t.	
$C_1, \alpha, \beta, a_0, a_1$	:	Constantes	

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Acciones dinámicas. Es aquella cuya magnitud, dirección o punto de aplicación varia con el tiempo.

Metacrilato. Es un termoplástico de gran transparencia, rígido, bastante resistente y fácil de moldear en calor. Sus formas de comercialización habituales son en gránulos o en planchas.

Poliamida. Es un termoplástico con estructura semicristalina muy dúctil y duro. Es un material de bajo peso específico con gran resistencia a los aceites, grasas, disolventes, productos químicos, y a la corrosión.

Termoplástico. Es un plástico que a altas temperaturas puede fundirse, permitiendo luego darle diversas formas. Se derrite cuando se calienta y se endurece cuando se enfría.

Acelerómetro. Son instrumentos pensados para realizar una medida de aceleración o vibración, proporcionando una señal eléctrica según la variación física, en este caso la variación física es la aceleración o la vibración.

Arduino. Es una plataforma de prototipos electrónica de código abierto (open-source) basada en hardware y software flexibles y fáciles de usar.

Poliedro. Un poliedro es un cuerpo limitado por caras poligonales, los poliedros regulares son Tetraedro, hexaedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro.

CAPITULO I

1. GENERALIDADES

1.1. ANTECEDENTES

En el 2011 el investigador emérito del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) Jorge Flores Valdés junto a su equipo, realizaron un modelo por el cual explican lo que sucedió en el sismo de México en 1985. De acuerdo a un modelo estudiado concluye que por el suelo tipo lodo se amplifican las ondas sísmicas (comparado con un sismo en roca o en sedimento), se alarga la duración y genera una frecuencia de movimiento constante de 0.5 Hz (monocromático), como se puede observar en la figura 1.1.

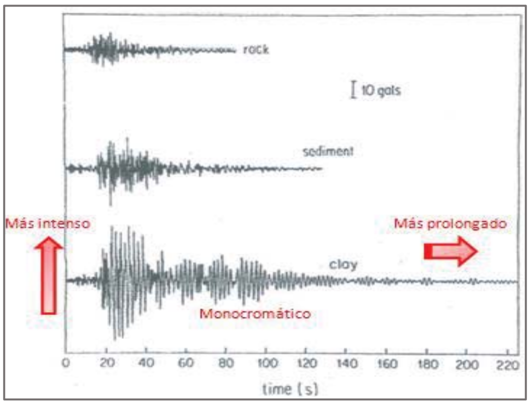


Figura 1.1 Función de sismo para distintas condiciones de suelo
Fuente: www.foroambiental.com.mx

Lo que recomienda para prevenir los colapsos en los edificios se debe evitarse que tengan frecuencias cercanas a la resonancia 0.5 Hz (de acuerdo al modelo).

Este trabajo está relacionado con la investigación en curso ya que representa un claro ejemplo de resonancia en los edificios, y resalta la importancia de este fenómeno en las estructuras.

El 2015 en la tesis de maestría titulado “ENSAYO A ESCALA DE EDIFICIO DE DOS ALTURAS SOMETIDO A DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES, de la universidad UPC de Barcelona, España. Escuela técnica superior de ingeniería de caminos, canales y puerto, presentado por Rolando Chacón Sergio Oller, cuya finalidad es la aplicación de herramientas digitales de bajo costo para estudiar el comportamiento de estructuras tipo pórtico (marco). Para esto ensaya dos edificios a escala reducida, simétricos de tres niveles con propiedades mecánicas y geométricas distintas.

Este trabajo está relacionado con la investigación en curso puesto que se analizara una de las estructuras ensayadas y se utilizaran los datos obtenidos de este ensayo para validar los cálculos y el análisis por elementos finitos.

1.2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las estructuras están sometidas a excitaciones dinámicas de diferente índole y magnitud, estas excitaciones generan en las estructuras esfuerzos y deformaciones. Cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural de la estructura se presenta el fenómeno de resonancia y la respuesta (esfuerzos y deformaciones) es máxima, que puede superar la resistencia de la estructura y presentarse una falla. Para evitar ello se debe conocer la respuesta en resonancia de la estructura.

Un caso particular es el modelo que representa un edificio de tres pisos, este modelo se compone de tres masas concentradas (m_1, m_2, m_3), soportadas por una estructura tipo marco como se muestra en la figura 1.2a.

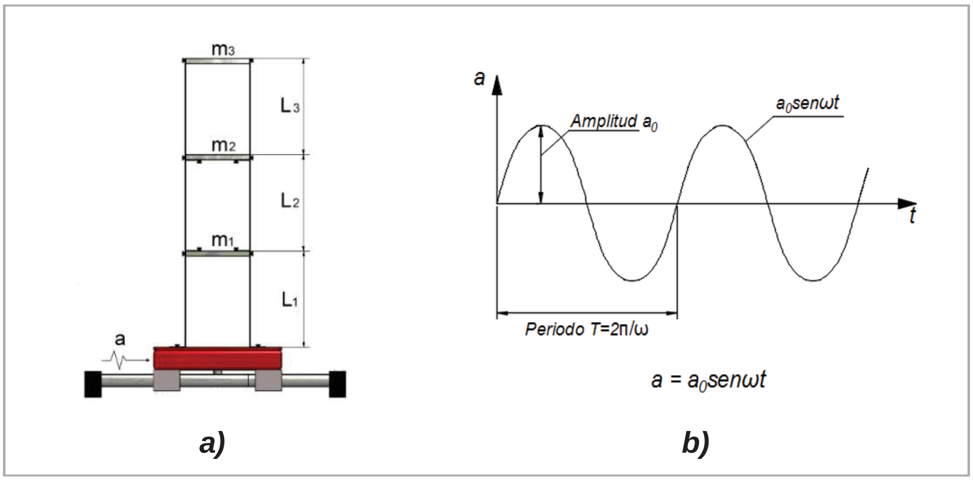


Figura 1.2 a) Estructura tipo marco, b) Excitación armónica
Fuente: Elaboracion propia

Esta estructura estará sometido a una excitación armónica simple (figura 1.1 b.) en la base y se quiere conocer la respuesta cuando está en resonancia.

1.2.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Por las consideraciones anteriores, el problema puede ser formulado con la siguiente pregunta de investigación.

¿Cuál es la respuesta en resonancia de una estructura tipo marco excitada amónicamente en la base?

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

Determinar la respuesta en resonancia de una estructura tipo marco excitada armónicamente en la base.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar la vibración de la estructura tipo marco excitada armónicamente en la base, mediante el análisis modal para sistemas de varios grados de libertad.

- Analizar la vibración de la estructura tipo marco excitada armónicamente en la base, utilizando el análisis computacional por elementos finitos.
- Validar el análisis modal y el análisis por elementos finitos con los datos del sistema experimental.

1.4. JUSTIFICACIÓN

- Conocer el efecto de la resonancia en la estructura tipo marco excitada armónicamente en la base.
- Si no se toma en cuenta el efecto de la resonancia en los edificios estos pueden colapsar o fallar por resonancia en un sismo.
- Generar las bases en futuras líneas de investigación del análisis modal aplicado a estructuras, ya que no hay trabajos de investigación de este tipo en la escuela profesional de Ingeniería Mecánica.

1.5. ALCANCES Y LIMITACIONES

1.5.1. ALCANCES

- Resumir la teoría directamente relacionada al análisis modal de sistemas de tres grados de libertad.
- Con el análisis modal se obtendrán las frecuencias, modos naturales, esfuerzos y desplazamientos.
- Con el análisis por elementos finitos se obtendrán las frecuencias, modos naturales y desplazamientos.
- El sistema analizado es un modelo experimental propuesto en una investigación anterior por Rolando Chacón Sergio Oller, en la tesis de maestría titulada “ENSAYO A ESCALA DE EDIFICIO DE DOS ALTURAS

SOMETIDO A DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES" de la universidad UPC de Barcelona-España en octubre del 2015.

1.5.2. LIMITACIONES

- Para este análisis la excitación en la estructura es una aceleración armónica aplicada en la base, con amplitudes constantes de 6500 y 13000 mm/s^2, en una sola dirección.

1.6. VARIABLES

Variables independientes	**Variables dependientes**
• Frecuencia de excitación.	• Respuesta (Esfuerzo y deformación).
• Amplitud de la aceleración.	

1.7. HIPÓTESIS

La estructura con excitación en la base falla por resistencia cuando está en resonancia.

1.8. METODOLOGÍA

1.8.1. PROCEDIMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

El desarrollo de la presente tesis, tiene un alcance exploratorio de una investigación cuantitativa, para lo cual se realizara el siguiente procedimiento:

- **Recopilación de la información.** Primero se revisara la bibliografía necesaria, así como la búsqueda de antecedentes, referidos con la resonancia en estructuras tipo marco.
- **Descripción del sistema.** Se realizara una descripción y especificación de las características del sistema con excitación en la base que se analizara.

- **Análisis analítico.** Se realizara el modelamiento matemático para calcular las frecuencias, modos naturales, desplazamientos y esfuerzos máximos cuando la estructura está en resonancia.
- **Análisis mediante elementos finitos.** Se realizara la modelación con software de análisis por elemento finitos para determinar las frecuencias, modos naturales y los desplazamientos.
- **Validación del análisis analítico y elementos finitos.** Se compararan los resultados del análisis mediante elementos finitos y calculados con los datos del sistema experimental.
- **Conclusiones y recomendaciones.** Para finalizar se realizarán las conclusiones y recomendaciones.

PROBLEMA

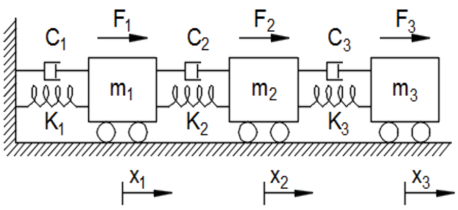
RECOPILACIÓN DE INFORMACIÓN

MARCO TEÓRICO

- 1 GDL
- MGDL (ANÁLISIS MODAL)

ESTRUCTURA TIPO MARCO

MODELAMIENTO DINAMICO



VIBRACION LIBRE

FRECUENCIAS NATURALES

ENSAYO DE VIBRACION LIBRE

DATO FRECUENCIAS NATURALES

VIBRACION FORZADA

DESPLAZAMIENTOS

ENSAYO DE VIBRACION LIBRE

DATO DESPLAZAMIENTO

RESPUESTA EN RESONANCIA

DESPLAZAMIENTOS
ESFUERZOS

COMPARACION Y VALIDACION

Figura 1.3 Esquema del proceso de investigación
Fuente: Elaboracion propia

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO.

2.1. RESPUESTA DINÁMICA

Se define como respuesta dinámica cualquier cantidad que pueda caracterizar el efecto de las cargas dinámicas en una estructura (Barbat, 1994). En la figura 2.1 se muestra que la respuesta dinámica de una estructura producida por un movimiento en la base puede consistir en desplazamientos, velocidades, aceleraciones, tensiones, deformaciones, etc.

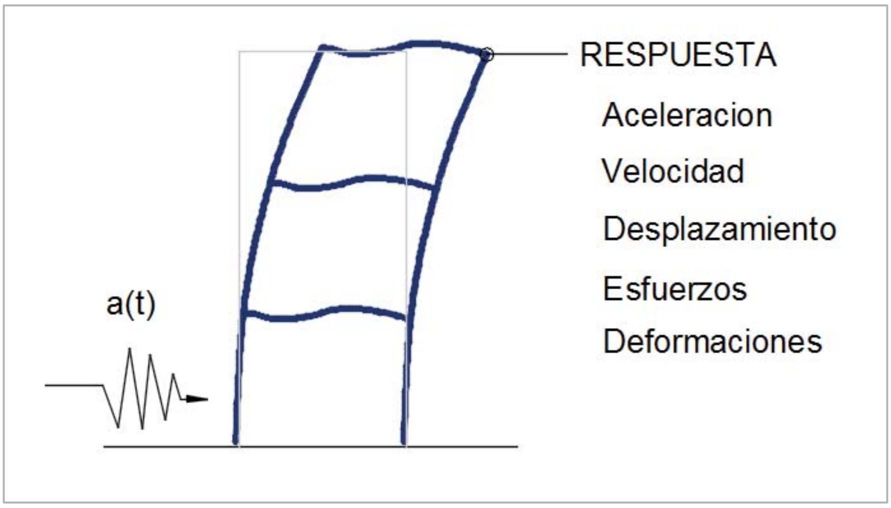


Figura 2.1 Respuesta dinámica
Fuente: Elaboracion propia

2.2. INTRODUCCIÓN AL DISEÑO ESTRUCTURAL

2.2.1. DEFINICIÓN DE UNA ESTRUCTURA

Una estructura se refiere a un sistema de partes conectadas que se utiliza para soportar cargas (Hibbeler, 2012). Las cargas producen en el material de la estructura deformaciones y esfuerzos internos. Los ejemplos más comunes son los puentes, torres, estructuras de barcos y aviones, los tanques, los recipientes a presión, las estructuras de soporte de líneas eléctricas.

2.2.2. ELEMENTOS QUE COMPONEN UNA ESTRUCTURA

Los elementos estructurales más comunes de los cuales están compuestos las estructuras son los siguientes:

Tensores. Los elementos estructurales sometidos a una fuerza de tensión suelen denominarse tensores o puntales.

Vigas. Las vigas son elementos rectos horizontales que se usan principalmente para soportar cargas verticales. Las vigas están diseñadas para soportar momentos de flexión, sin embargo si la viga es corta el esfuerzo cortante debe de considerarse en el diseño.

Columnas. Los elementos que generalmente son verticales y resisten cargas de compresión axial se conocen como columnas. Cuando estos elementos están sujetos a una carga axial y a un momento de flexión se le denomina columnas de viga. En la figura 2.2, se muestra estos elementos básicos de la estructura.

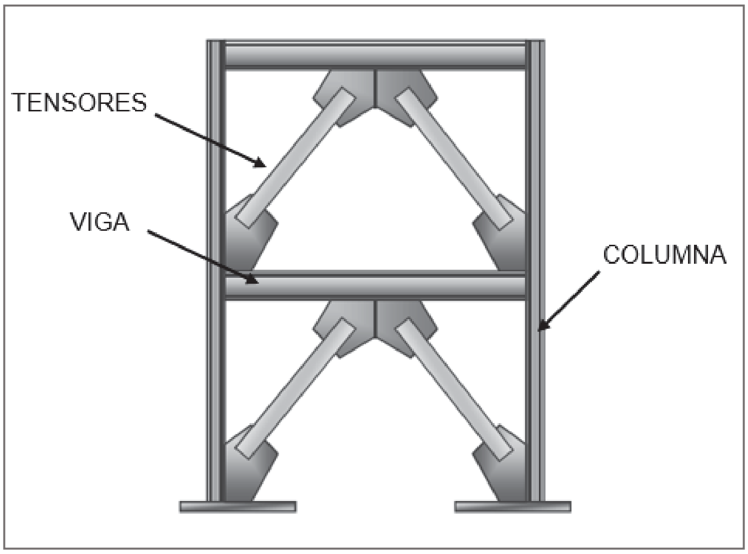


Figura 2.2 Elementos básicos de una estructura
Fuente: Hector A. Diaz C.

2.2.3. DISEÑO ESTRUCTURAL

El objetivo es lograr una estructura segura, funcional y económica para satisfacer una necesidad o función específica (Pasino, 2012). La estructura para ser segura debe soportar las cargas sin fallar durante su periodo de vida útil. Así mismo debe de tener un comportamiento adecuado bajo condiciones normales de servicio para esto se deben controlar las deflexiones, vibraciones, corrosión, durabilidad en caso de estructuras de acero. En forma general se pueden considerar los siguientes requisitos:

- Soportar las cargas de forma segura.
- Cumplir con los requisitos de funcionalidad, factibilidad, durabilidad, economía, estética.

En la figura 2.3 se resumen las etapas de un proyecto estructural:

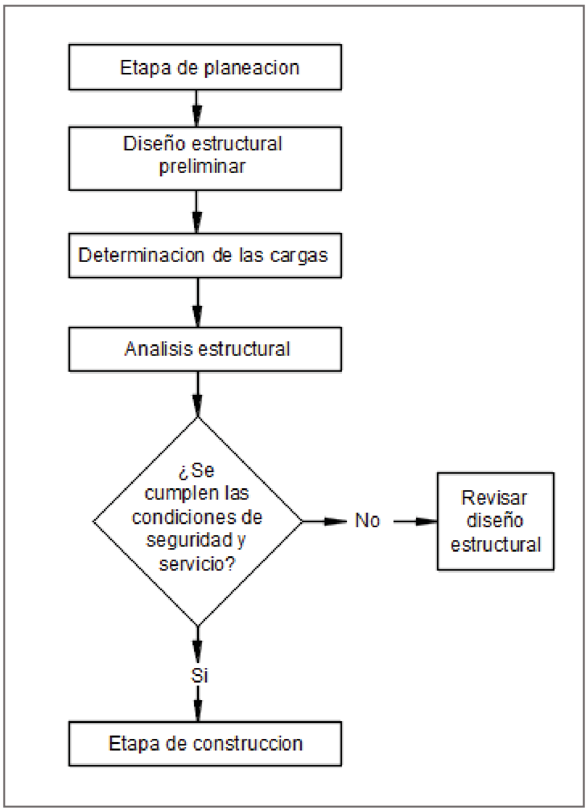


Figura 2.3 Etapas del proyecto estructural
Fuente: Kassimali, 2014

2.2.3.1. OBJETIVOS DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

El objetivo es el estudio del comportamiento o respuesta de la estructura frente a determinadas solicitación o acciones externas (Pasino, 2012). El análisis estructural es una herramienta para el diseño estructural.

La respuesta de una estructural comprende muchos aspectos entre ellos esta determinación de:

- Deformaciones, desplazamientos
- Esfuerzos.
- Fuerzas internas.
- Vibraciones, estabilidad, fatiga.
- comportamiento bajo condiciones de servicio.

La confiabilidad o calidad del análisis estructural, está directamente relacionada con la fidelidad del modelo utilizado (Pasino, 2012). Sobre la estructura real se realiza un proceso se idealización de los elementos que los componen, conexiones entre ellos y cargas actuantes. Se genera así un modelo analítico sobre el cual se aplican las herramientas del análisis estructural, esto se puede observar en la figura 2.4.

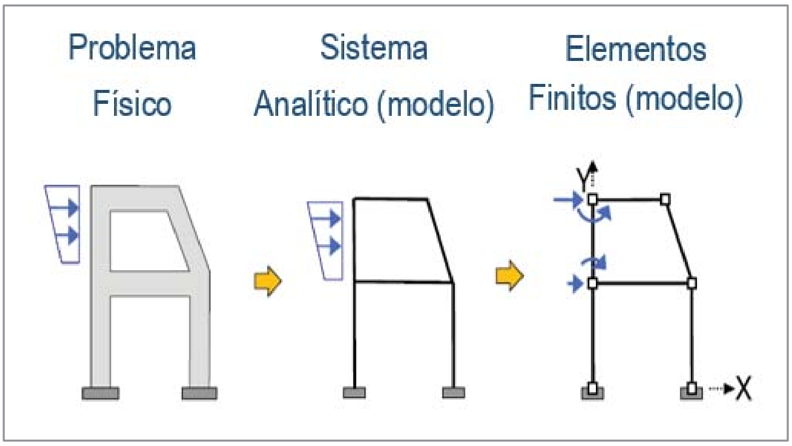


Figura 2.4 Idealización de una estructura
Fuente: ETH- Institute of Structural Engineering

En forma más detallada se puede considerar los siguientes parámetros:

- La geometría de la estructura.
- Los elementos constituyentes y sus propiedades.
- Las conexiones entre los elementos.
- Las propiedades y comportamiento del material.
- Las masas (en los problemas dinámicos).
- Las cargas (solicitaciones).
- Los apoyos y condiciones de contorno.

2.3. VIBRACIONES

Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo se llama vibración u oscilación**.** El vaivén de un péndulo y el movimiento de una cuerda pulsada son ejemplos comunes de vibración. La teoría de la vibración tiene que ver con el estudio de los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas con ellos (Rao, 2012).

La vibración de un sistema implica la trasformación de su inercia potencial en energía cinética y de esta en energía potencial de manera alterna. Si el sistema se amortigua, una parte de su energía se disipa en cada ciclo de vibración y se debe reemplazar por una fuente externa para que se mantenga en un estado de vibración estable (Rao, 2012).

2.3.1. ELEMENTOS BÁSICOS

Los elementos necesarios para la existencia de la vibración son la inercia y la rigidez adicional mente está el amortiguamiento, la fuerza externa que actúa en el sistema. En la figura 2.5 a se muestra una viga en voladizo y su modelo dinámico idealizado.

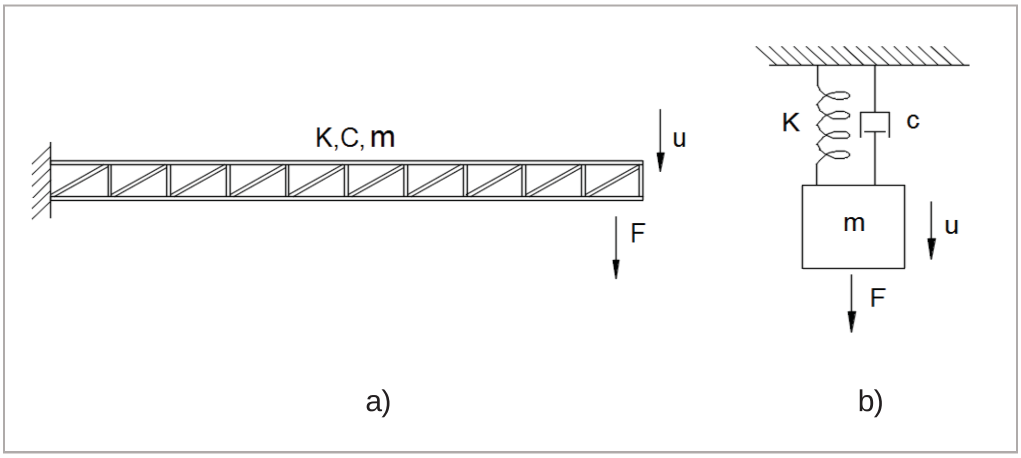


Figura 2.5 Elementos de un sistema vibratorio o dinámico
Fuente: Elaboración propia

La rigidez del sistema está determinado por las propiedades mecánicas y las dimensiones de los elementos de la viga, asimismo la rigidez depende de las conexiones y anclaje de la viga. El amortiguamiento de la estructura está dado por la fricción que se presenta cuando se deforma la viga, en las conexiones de los elementos, anclajes y el los mismos elementos que compones la viga.

Cada miembro de la viga contribuye con la rigidez, masa, amortiguamiento del sistema dinámico. Para fines del análisis matemático se considera que las propiedades del sistema están concentrados en tres elementos básicos: la rigidez (k), masa (m), el amortiguamiento (c), los que se consideran independientes entre sí como se muestra en la figura 2.5 b.

Rigidez. La rigidez es la capacidad que tiene un elemento o sistema estructural para soportar esfuerzos sin presentar grandes deformaciones (Gonzales, 2016). La relación entre las cargas y las deformaciones dependerá si el sistema tiene un comportamiento elástico o inelástico. Un caso particular de un sistema elástico se presenta cuando las fuerzas y las deformaciones se relacionan linealmente como se muestra en la figura 2.6.

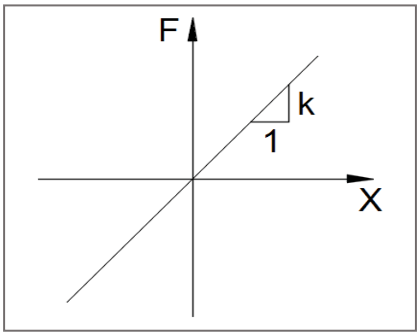


Figura 2.6 Relación fuerza - deformación.
Fuente: Gonzales, 2016

En un sistema elástico lineal, la relación entre la fuerza y su correspondiente desplazamiento x es lineal, donde se cumple:

$$F = kx \tag{2.1}$$

k: Es una constante que representa la rigidez del sistema sus unidades son fuerza/longitud.

Amortiguamiento. Para un sistema elástico simple la energía se disipa por mecanismos como el efecto térmico que se produce al deformar elásticamente en forma repetida algún material, además de la fricción interna del solido deformado. "En el caso de sistemas estructurales más complejos, en los que interactúan un mayor número de elementos la disipación de energía se da adicionalmente por otros factores, como la fricción que se produce entre los elementos propios del sistema estructural y aquellos considerados como no estructurales, además de la fricción que se presenta en las conexiones de los distintos elementos estructurales" (Gonzales, 2016).

En general no se puede identificar todos los mecanismos de disipación de energía de un sistema estructural. Para analizar un sistema se suele idealizar el amortiguamiento del sistema estructural como un modelo lineal de amortiguamiento viscoso equivalente.

El modelo se idealiza como una fuerza que varía de modo lineal en función de la velocidad con que trabaja el amortiguador es decir.

$$\boldsymbol{F_d = c\dot{x}} \tag{2.2}$$

Donde $\boldsymbol{F_d}$ es la fuerza de amortiguamiento y $\boldsymbol{c}$ es una constante denominada coeficiente de amortiguamiento viscoso, cuyas unidades son de $\boldsymbol{fuerza\ x\ tiempo\ /\ longitud}$. En la figura 2.7 se muestra la gráfica donde se representa la variación de la fuerza de amortiguamiento en función de la velocidad. Se puede observar que la relación es lineal y depende de $\boldsymbol{c}$.

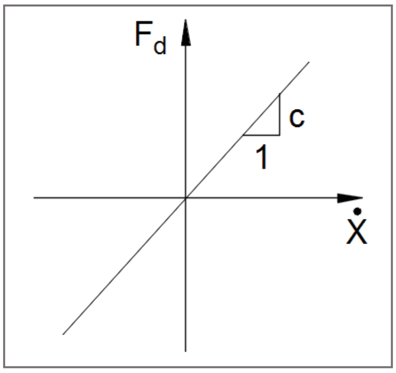


Figura 2.7 Relación fuerza de amortiguamiento - velocidad
Fuente: Gonzales, 2016

Físicamente un amortiguador viscoso, es un embolo que se mueve en algún fluido viscoso y para esto debe desplazar cierto volumen, en la figura 2.8 se muestra este tipo de amortiguador.

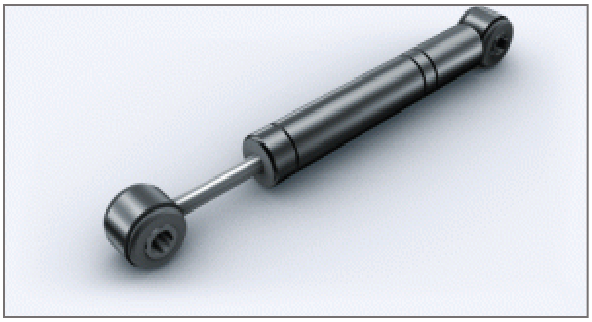


Figura 2.8 Amortiguador hidráulico
Fuente: www.buscadordetalleres.com

Acciones dinámicas. Las estructuras se ven afectadas por efectos dinámicos que van desde magnitudes despreciables, hasta efectos que pueden poner en peligro su estabilidad. Los tipos de excitación dinámica que pueden afectar la estructura se muestran en la figura 2.9:

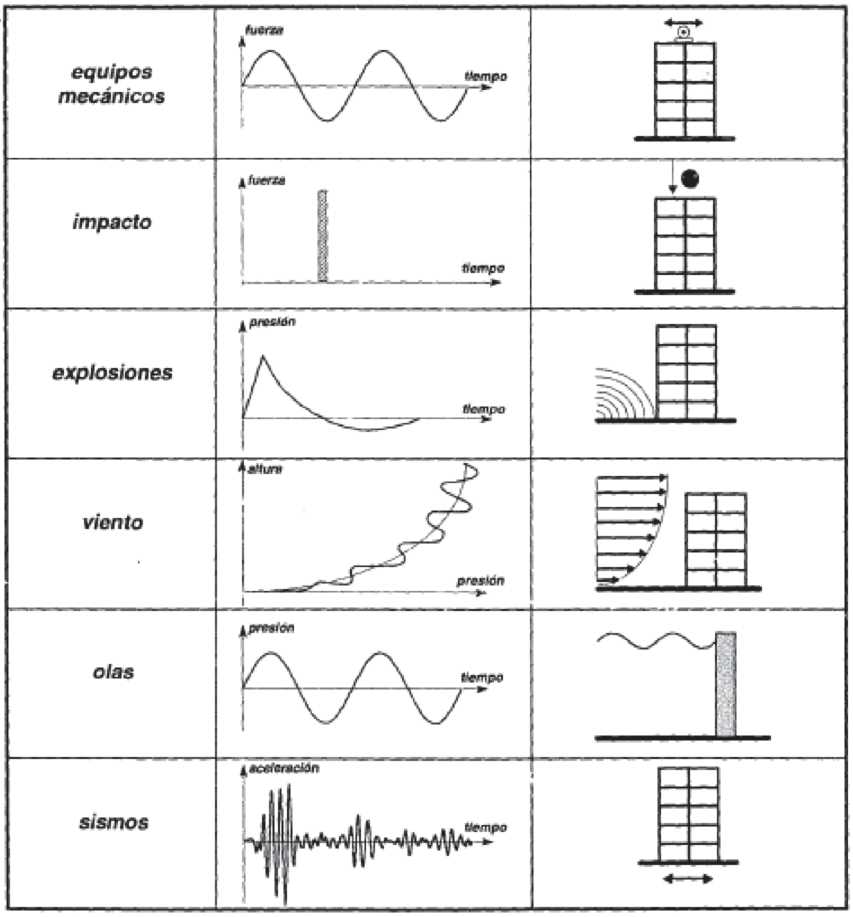


Figura 2.9 Tipos de excitación dinámica
Fuente: Reyes, 1998

2.3.2. MOVIMIENTO ARMÓNICO

El movimiento armónico es un movimiento vibratorio en el que la posición velocidad y aceleración se describen mediante funciones sinodales, es el más simple de todos los movimientos.

Este movimiento se puede generar cuando una masa suspendida de un resorte es movida de su posición de equilibrio y liberada para que vibre libremente, colocando un puntero en la masa para que marque el papel que se mueve a una velocidad constante como se muestra en la figura 2.10.

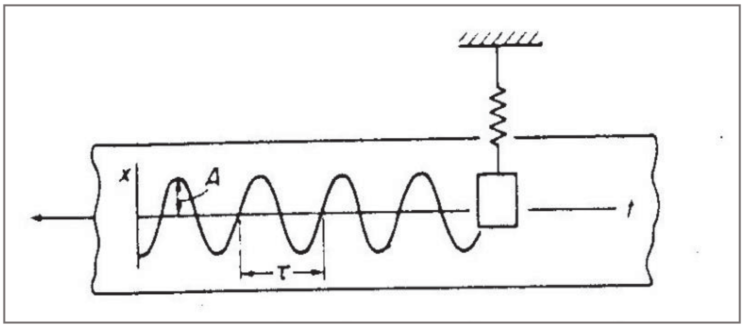


Figura 2.10 Registro de un movimiento armónico
Fuente: Thomson, 1981

Este movimiento se representa por la función armónica $\boldsymbol{x = Asen(\frac{2\pi t}{\tau})}$, en donde $\boldsymbol{A}$ es la amplitud de la oscilación, medida desde la posición de equilibrio de la masa y $\boldsymbol{\tau}$ es el periodo. El movimiento armónico se puede representar como la proyección sobre una línea recta, de un punto que se mueve en una circunferencia a velocidad constante, como se muestra en la figura 2.11, en donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la línea OP, el desplazamiento $\boldsymbol{x}$ puede escribirse como:

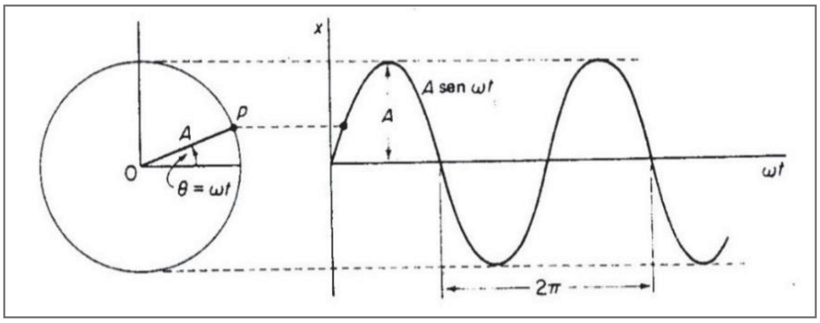


Figura 2.11 Proyección de un punto que se mueve en una circunferencia.
Fuente: Thomson, 1981

La cantidad $\boldsymbol{\omega}$ se denomina frecuencia circular. La velocidad y aceleración del movimiento armónico se determinan por diferenciación de la ecuación de desplazamiento.

Velocidad: Aceleración:

$$\dot{x} = \omega A cos\omega t \qquad \ddot{x} = -\omega^2 A sen\omega t$$

$$v(t) = vcos\omega t \qquad a(t) = asen\omega t \tag{2.3}$$

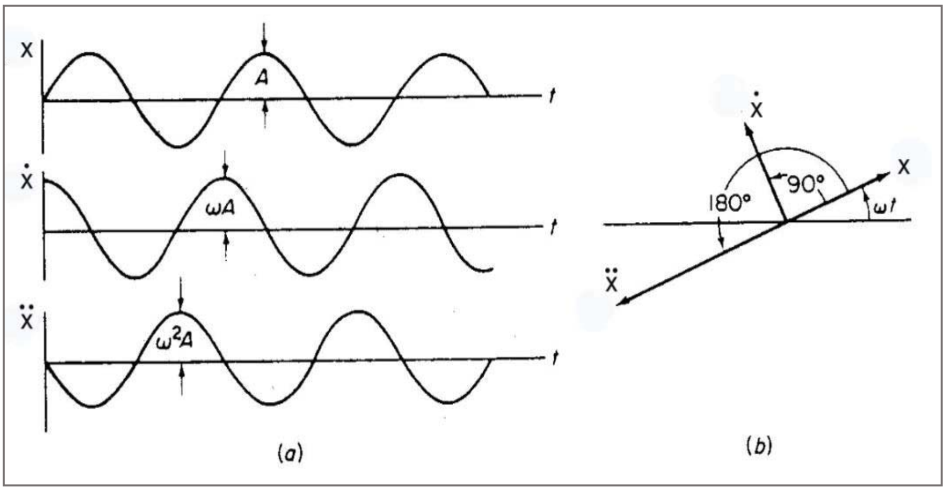


Figura 2.12 velocidad y aceleración armónicas
Fuente: Thomson, 1981

La velocidad y la aceleración son también armónicas con la misma frecuencia de oscilación pero aventajan al desplazamiento en $\pi/2$ y π radianes respectivamente.

2.3.3. SISTEMAS DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

2.3.3.1. VIBRACIÓN LIBRE NO AMORTIGUADA

Los sistemas de un grado se libertad se llaman simples porque pueden idealizarse como una masa concentrada $\boldsymbol{m}$ soportada por una estructura sin masa y de rigidez $\boldsymbol{k}$ en la dirección del movimiento. Un sistema de este tipo es un tanque elevado cuando se encuentra lleno de agua figura 2.13.a, esta estructura puede idealizarse para el análisis como sistema de masa concentrada $\boldsymbol{m}$, sostenida por un elemento flexible de rigidez $\boldsymbol{k}$ o un sistema masa resorte como se muestra en las figuras figura 2.13 b y c.

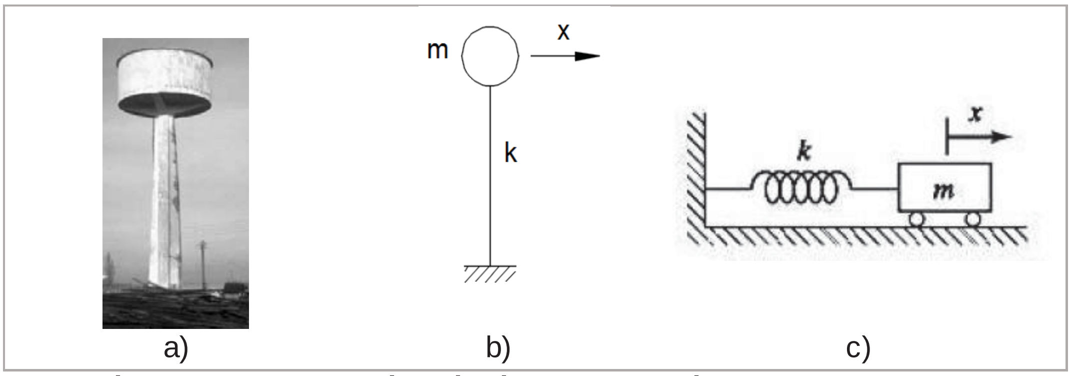


Figura 2.13 Tanque elevado de concreto, Sistema masa-resorte
Fuente: Chopra, 2014

Para determinar la respuesta del sistema se utilizando la segunda ley de newton y se obtiene la ecuación diferencial que describe este movimiento. Considerando una vibración libre sin amortiguamiento la ecuación resulta:

$$\boldsymbol{m\ddot{x} + kx = 0} \qquad (2.4)$$

La vibración libre se inicia al sacar al sistema de su posición de equilibrio estático, impartiendo a la masa cierto desplazamiento $x\ (0)$ y velocidad $\dot{x}\ (0)$ en el tiempo cero, definido como el instante en que se inicia el movimiento y la solución de la ecuación diferencial homogénea resulta:

$$\boldsymbol{x(t) = x(0)cos\omega_n t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}sen\omega_n t} \qquad (2.5)$$

El movimiento descrito por la ecuación 2.5, se muestra en la figura 2.14, este movimiento es armónico simple.

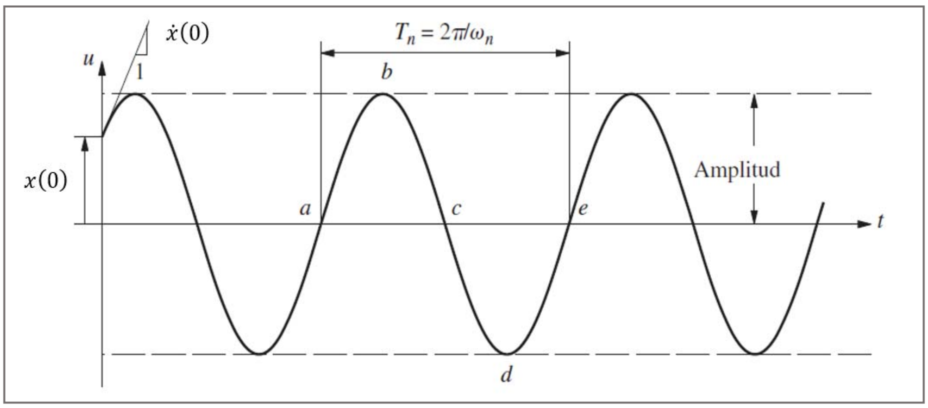


Figura 2.14 Vibración libre de un sistema sin amortiguamiento
Fuente: Chopra, 2014

Donde $\boldsymbol{\omega_n}$, es la frecuencia natural del sistema y se expresa como:

$$\boldsymbol{\omega_n} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}\ (\mathbf{rad/s}) \tag{2.6}$$

El tiempo requerido para que el sistema no amortiguado complete un ciclo de vibración libre es el periodo natural de vibración del sistema, que se denomina como Tn y cuyas unidades son segundos (Chopra, 2014).

La relación del periodo con la frecuencia circular natural de vibración ω_n, es:

$$\boldsymbol{T_n} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_n}}\ (\boldsymbol{s}) \tag{2.7}$$

La frecuencia cíclica se define como el número ciclos en un segundo que realiza el sistema y es la inversa del periodo $1/Tn$. Esta frecuencia cíclica natural de vibración se define mediante:

$$f_n = \frac{1}{T_n}\ (Hz) \tag{2.8}$$

Las unidades de f_n son Hertz (Hz) o ciclos por segundo (Cps) y está relacionada con la frecuencia ω_n a través de:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}\ (Hz) \tag{2.9}$$

El termino frecuencia natural de vibración se aplica tanto a ω_n como a f_n. La frecuencia y el periodo son propiedades de cada sistema, dependen solo de la masa y rigidez del sistema. Si consideramos tres sistemas de 1 GDL con la misma masa m y distintas rigideces $k_1 \neq k_2 \neq k_3$ como se muestra en la figura 2.15, el valor de la rigidez es inversamente proporcional a la longitud y se cumple que $k_1 > k_2 > k_3$, con la ecuación 2.5, podemos concluir que el sistema con rigidez k_1 tiene el mayor valor de frecuencia natural y un periodo bajo de vibración.

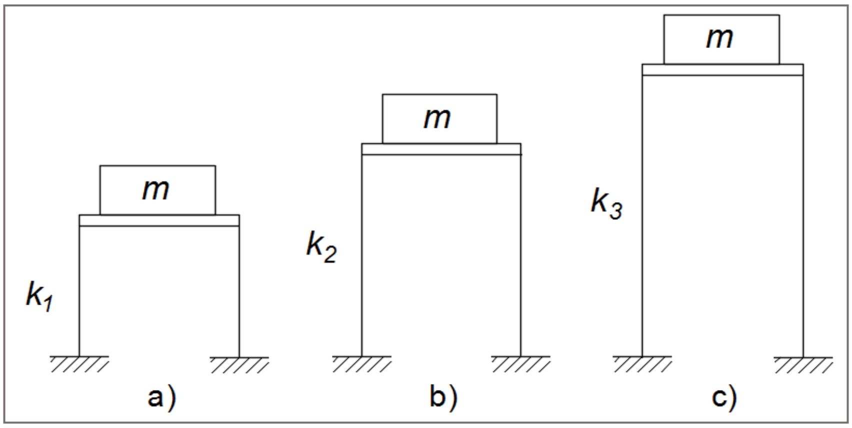


Figura 2.15 Sistemas de 1GDL (masa constante y rigidez variable)
Fuente: Elaboracion propia

La frecuencia natural y el periodo de los distintos tipos de estructuras varían en distintos valores como ejemplo se describen los periodos del puente Golden Gate ubicado en Sanfrancisco California figura 2.16:

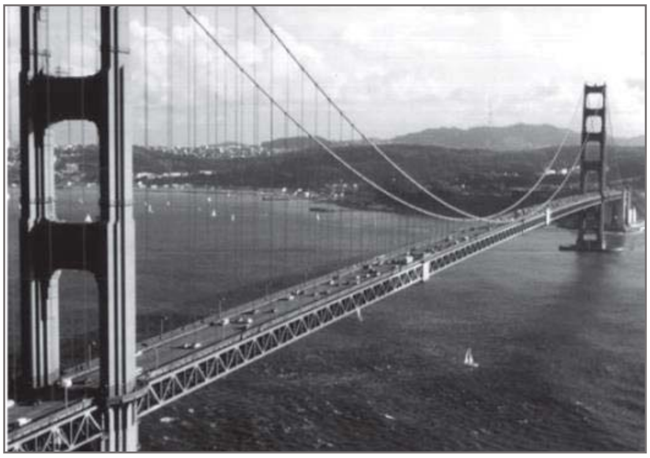


Figura 2.16 Puente Golden Gate
Fuente: Chopra, 2014

Los periodos fundamentales de vibración natural de este puente colgante con un tramo principal de 4200 pies son de 18.2 segundos para la dirección transversal, 10.9 segundos para la dirección vertical, 3.81 segundos para la dirección longitudinal y 4.43 segundos para la torsional (Chopra, 2014).

2.3.3.2. VIBRACIÓN LIBRE AMORTIGUADA.

Considerando el amortiguamiento en la ecuación de vibración libre, se obtiene la ecuación diferencial de los sistemas de un grado de libertad en vibración libre amortiguada:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.10}$$

Al dividir entre la masa resulta:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = 0 \tag{2.11}$$

Donde:

$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ = Frecuencia natural de oscilación no amortiguada.

$\xi = \dfrac{c}{2m\omega_n} = \dfrac{c}{c_{cr}}$ = Razón o fracción de amortiguamiento.

$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}$ = Amortiguamiento crítico.

La constante de amortiguamiento c es una medida de la energía disipada en un ciclo de vibración libre o en un ciclo de vibración forzada armónica. Sin embargo, la fracción de amortiguamiento (una medida adimensional de amortiguamiento) es una propiedad del sistema que depende también de su masa y rigidez (Chopra, 2014).

Esta es la forma más simple de amortiguamiento que puede utilizarse, puesto que la ecuación diferencial que rige el movimiento es lineal y, por lo tanto, susceptible de resolverse en forma analítica (Chopra, 2014).

En la figura 2.17 se muestra la gráfica del movimiento libre amortiguado, obtenida al solucionar la ecuación (2.11), en función de la fracción de amortiguamiento:

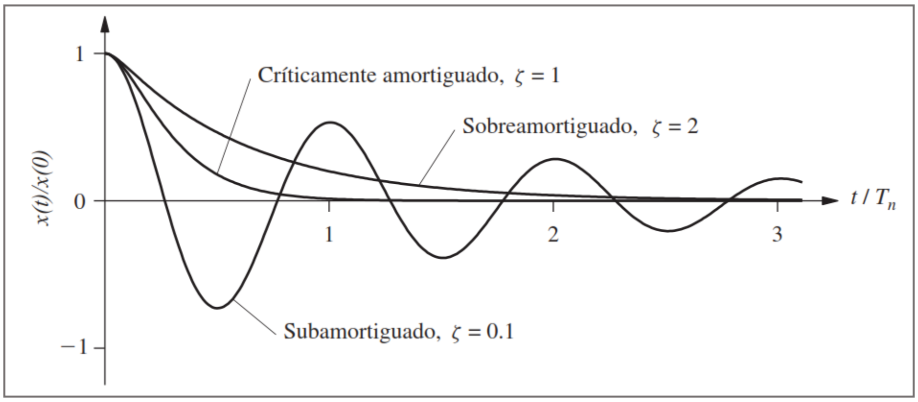


Figura 2.17 Sistema subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado
Fuente: Chopra, 2014

Para los tres valores de ξ se puede concluir lo siguiente:

Si $\xi < 1$, el sistema oscila alrededor de su posición de equilibrio con una amplitud que disminuye progresivamente.

Si $\xi = 1$, el sistema vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar.

Si $\xi > 1$, el sistema vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar pero más lentamente.

El amortiguamiento c_{cr} se denomina amortiguamiento crítico debido a que es el valor más pequeño de c que inhibe por completo la oscilación. Representa la línea divisoria entre el movimiento oscilatorio y no oscilatorio (Chopra, 2014).

En la tabla 2.1 se tienen valores de la fracción de amortiguamiento para algunos materiales.

Tabla 2.1 Amortiguamiento de algunos materiales

Material	$\xi = c/c_{cr}$	
Plomo	0.02	2%
Concreto	0.01	1%
vidrio	0.02	2%
Acero	0.01	1%

Fuente: Manual de instrucción vibraciones básicas de máquinas, Ronald L. Eshleman

La mayoría de los sistemas estructurales (edificios, puentes, presas, centrales nucleares, estructuras marítimas, etcétera) son sistemas subamortiguados y su fracción de amortiguamiento es menor 0.10 (Chopra, 2014).

Los sistemas de absorción de choques en automóviles, suelen tener un amortiguamiento menor a la mitad del amortiguamiento crítico, $\zeta < 0.5$ .También existen sistemas sobre amortiguados como el mecanismo de retroceso de la puerta automática (Chopra, 2014).

2.3.3.3. VIBRACIÓN ARMÓNICA CON AMORTIGUAMIENTO

La energía externa se puede suministrar ya sea mediante una fuerza aplicada o por una excitación de desplazamiento impuesta. La respuesta de un sistema a una excitación armónica se llama respuesta armónica**.** Si la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, la respuesta será muy grande, esta condición es conocida como resonancia que debe evitarse o controlarse.

Considerando un sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso, excitado por una fuerza armónica $\boldsymbol{F(t) = F_0 sen\omega t}$. La ecuación de movimiento es:

$$\boldsymbol{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 sen\omega t} \tag{2.12}$$

La solución costa de dos partes, la solución homogénea $\boldsymbol{x_h(t)}$ y la solución particular $\boldsymbol{x_p(t)}$ su suma proporciona la solución general.

$$\boldsymbol{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \tag{2.13}$$

La solución homogénea, representa el movimiento en vibración libre amortiguada vista anteriormente.

La solución particular es una oscilación estacionaria del sistema en la misma frecuencia que la excitación, es de la forma:

$$x(t) = Xsen(\omega t - \emptyset) \qquad (2.14)$$

Donde:

Amplitud de oscilación: $$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Angulo de fase: $$\emptyset = tan^{-1}\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

Deflexión estática: $$\delta_{est} = \frac{F_0}{k}$$

La cantidad $\frac{X}{\delta_{est}}$ es la relación de amplitud de movimiento dinámico con la amplitud de movimiento estático se le conoce como factor de amplificación o relación de amplitud. Esta relación y el ángulo de fase están en función de la relación de frecuencia $\frac{\omega}{\omega_n}$ y el factor de amortiguamiento ξ, como se muestra en la figura 2.18.

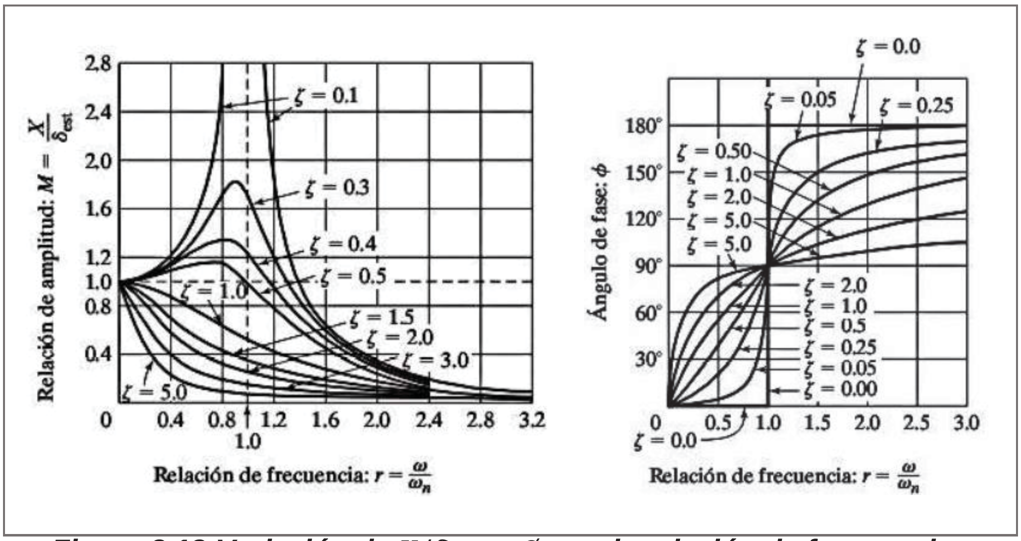


Figura 2.18 Variación de X/δ_{est} y $\emptyset$ con la relación de frecuencias
Fuente: Rao, 2012

Las siguientes características del factor de amplificación se derivan de la figura:

- Para cualquier valor especificado de $\frac{\omega}{\omega_n}$, un valor mayor de amortiguamiento reduce el valor del factor $\frac{X}{\delta_{est}}$.
- Para el valor de $\frac{\omega}{\omega_n} = 1, \xi = 0$, la amplitud se vuelve infinita. Esta condición, en la cual la frecuencia forzada ω es igual a la frecuencia natural del sistema ω_n, se llama *resonancia.*
- La reducción en el factor $\frac{X}{\delta_{est}}$ al haber amortiguamiento es muy significativa en o cerca de la resonancia.
- La amplitud de vibración forzada se reduce con valores crecientes de la frecuencia forzada.

Las siguientes características del ángulo de fase se derivan de la figura anterior:

- Para $\xi > 0$ y $0 < \omega/\omega_n < 1$, el ángulo de fase es $0 < \text{Ø} < 90°$, lo que implica que la respuesta se retrasa con respecto a la excitación.
- Para $\xi > 0$ y $\omega/\omega_n > 1$, el ángulo de fase es de $90° < \text{Ø} < 180°$, lo que implica que la respuesta se adelanta a la excitación.
- Para $\xi > 0$ y $r = 1$, el ángulo de fase es $\text{Ø} = 90°$, lo que implica que la diferencia de fase entre la excitación y la respuesta es de 90°.

La frecuencia de resonancia se define como la frecuencia de excitación en la que $\frac{X}{\delta_{est}}$ es máxima. Para un sistema no amortiguado, la frecuencia resonante es ω_n y $\frac{X}{\delta_{est}}$ es infinito en esta frecuencia. Sin embargo, la deformación vibratoria no se vuelve infinita de inmediato (Chopra, 2014).

El sistema que es excitado con su misma frecuencia natural requiere un tiempo determinado para que alcance su máxima amplificación figura 2.19.

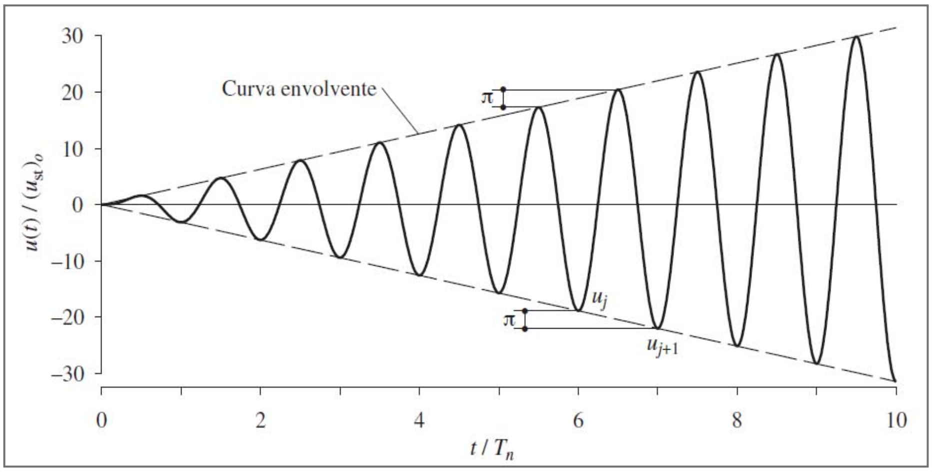


Figura 2.19 Sistema no amortiguado en resonancia $\omega_n = \omega$

Fuente: Chopra, 2014

La influencia del amortiguamiento esta en limitar la magnitud de la respuesta cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural, figura 2.20.

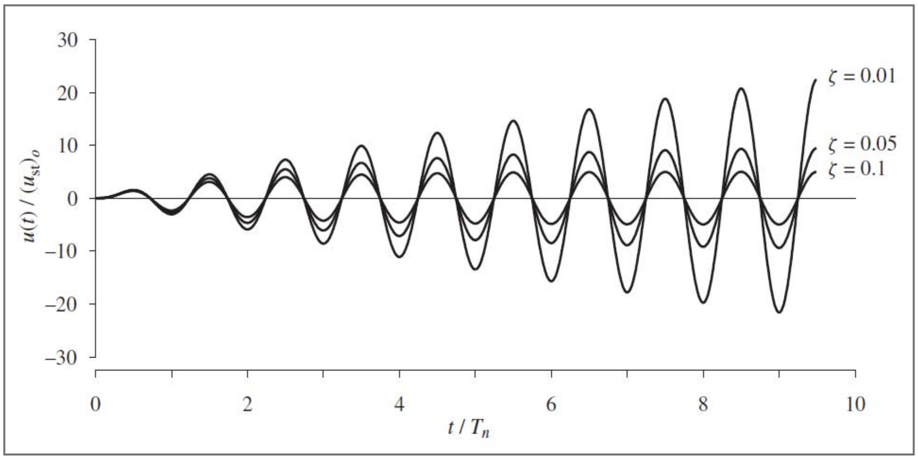


Figura 2.20 Respuesta de tres sistemas ($\xi = 0.01, 0.05, 0.1$) ante una fuerza sinusoidal de frecuencia $\omega_n = \omega$.

Fuente: Chopra, 2014

2.3.3.4. SISTEMA CON EXCITACIÓN EN LA BASE

El sistema de la figura 2.21, está sometido a una excitación en la base en la coordenada $y(t)$, la coordenada $x(t)$corresponde a la posición de la masa. La ecuación de movimiento del sistema se obtiene aplicando la segunda ley de newton al diagrama del cuerpo libre.

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

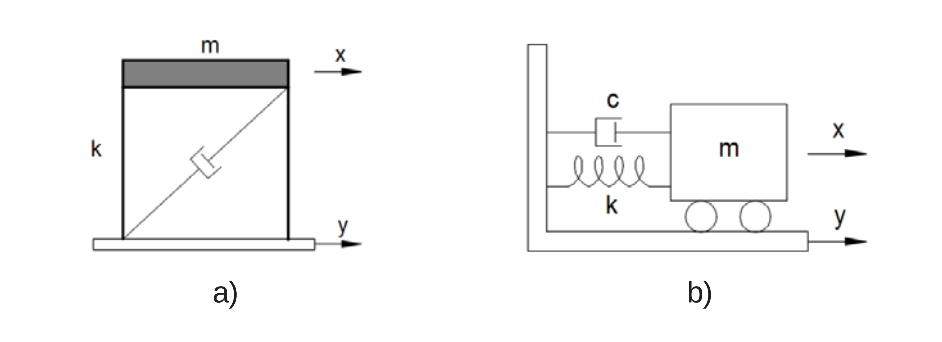


Figura 2.21 Excitación con movimiento en la base
Fuente: Elaboración propia

Para el análisis consideramos el movimiento relativo dado por la coordenada $u = x - y$, que indica el movimiento relativo de la masa con respecto a la base, la ecuación de movimiento se escribe como:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y} \qquad (2.15)$$

Esta ecuación indica que un sistema con movimiento en su base es equivalente a un sistema con su base fija al cual se le aplica una fuerza igual a la masa del sistema multiplicada por el negativo de la aceleración de la base.

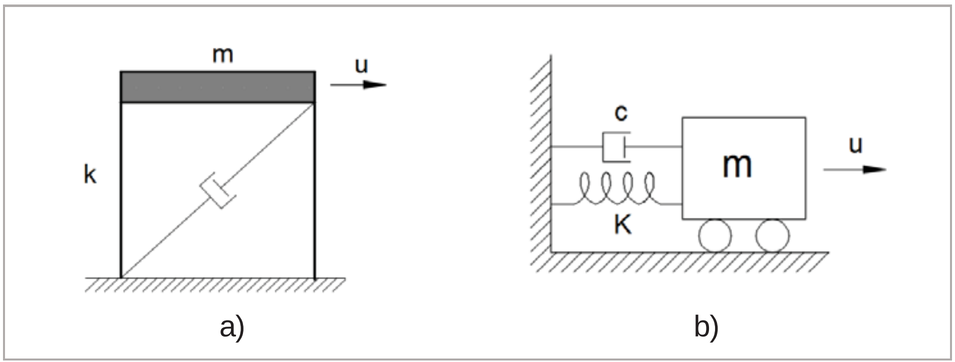


Figura 2.22 Excitación sin movimiento en la base.
Fuente: Elaboración propia

Si la excitación en la base es armónica $y(t) = Ysen\omega t$, reemplazando en la ecuación 2.15, la ecuación de movimiento del sistema resulta:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{y} = m\omega^2 Ysen\omega t = F_0 sen\omega t \qquad (2.16)$$

Esto significa que excitar la base armónicamente de un sistema equivale a aplicar una fuerza armónica, $F_0\, sen\omega t$, al sistema con la base fija.

2.3.4. SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

La mayoría de los sistemas tienen una infinidad de grados de libertad. El análisis de vibración de sistemas continuos requiere la solución de ecuaciones diferenciales parciales, la cual es bastante difícil. Para muchas ecuaciones diferenciales parciales, no existen soluciones analíticas. Por otra parte, el análisis de un sistema de varios grados de libertad, requiere la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, la cual es relativamente simple. Por consiguiente, por sencillez del análisis, a menudo los sistemas continuos se representan como sistemas de varios grados de libertad (Rao, 2012) .

Todos los conceptos presentados en el capítulo anterior se pueden extender directamente al caso de sistemas de varios grados de libertad. Por ejemplo, hay una ecuación de movimiento por cada grado de libertad; si se utilizan coordenadas generalizadas, hay una coordenada generalizada por cada grado de libertad.

Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener por la segunda ley del movimiento de Newton, matrices de influencia o por medio de ecuaciones de Lagrange.

2.3.4.1. MODELADO DE SISTEMAS CONTINUOS O DISCRETOS

Se pueden usar diferentes métodos para representar un sistema continuo como un sistema de varios grados de libertad. Un método sencillo implica reemplazar la masa distribuida o inercia del sistema por un número finito de masas concentradas o cuerpos rígidos. Se supone que las masas concentradas están conectadas por miembros amortiguadores elásticos sin masa. Tales modelos se conocen como *sistemas de parámetro concentrado* o de *masa concentrada* o de *masa discreta.* Naturalmente, cuanto mayor sea la cantidad de masas concentradas utilizadas en el modelo, mayor será la precisión del análisis resultante como se muestra en la figura 2.23, para una viga simplemente apoyada en sus extremos.

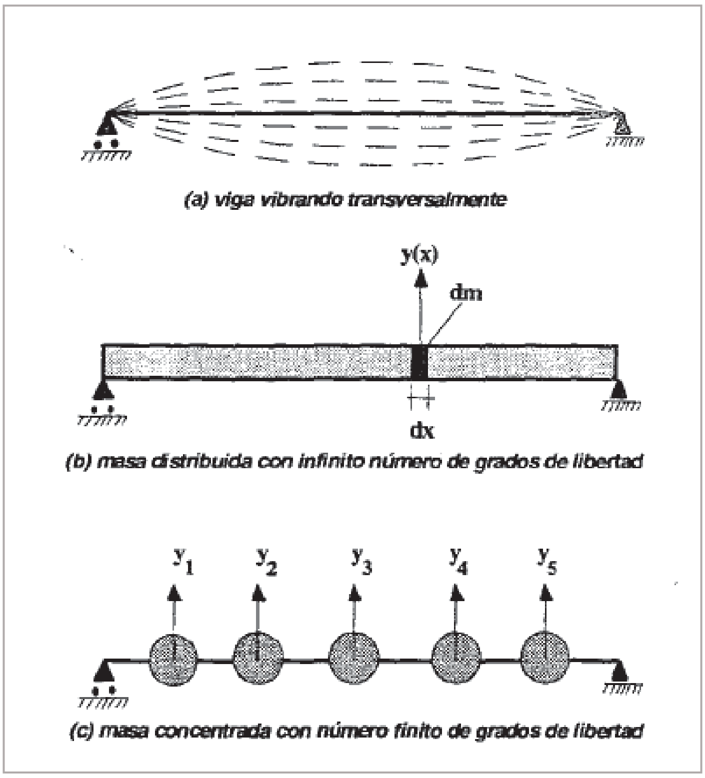


Figura 2.23 Sistema continuo y discreto
Fuente: Reyes, 1998

La cantidad de lugares donde se concentre la masa va a depender de la precisión que se requiera en la solución del problema y de otros factores. Los sistemas de masa concentrada, en la medida que el número de puntos donde esta se concentre se haga mayor, tiende en el límite a convertirse en sistemas continuos (Reyes, 1998).

La máquina de perforación radial puede modelarse con cuatro masas concentradas y cuatro elementos elásticos (vigas elásticas) figura 2.24.

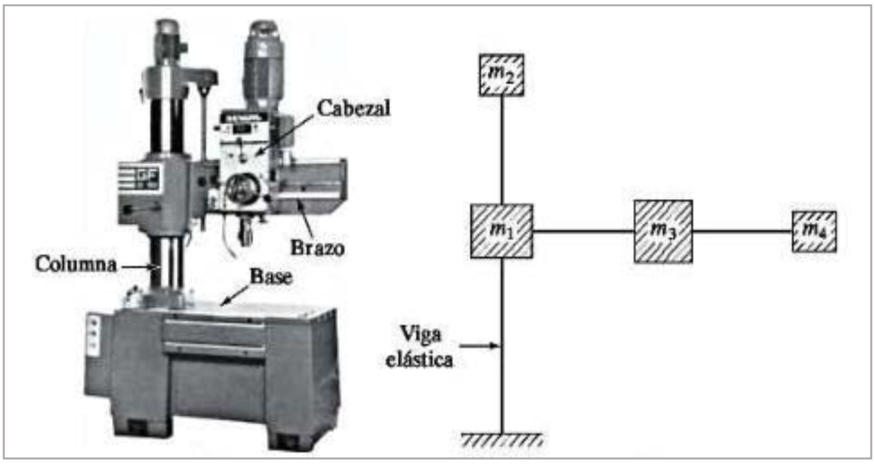


Figura 2.24 Maquina de perforación radial
Fuente: Rao, 2012

2.3.4.2. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

En la figura 2.25 se observa un sistema de tres grados de libertad y el diagrama de cuerpo libre para cada elemento de masa. Las fuerzas que actúan en cada masa son la fuerza de amortiguamiento, inercia, resorte y la fuerza externa.

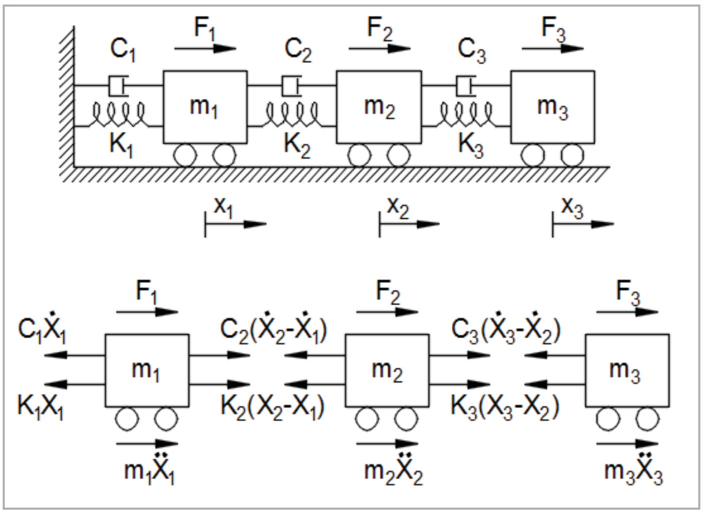


Figura 2.25 Sistema lineal amortiguado de tres grados de libertad
Fuente: Elaboración propia

Al plantear las ecuaciones de equilibrio utilizando la segunda ley de newton para cada una de las masas, reorganizando y factorizando se obtienen:

$$\boldsymbol{m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1}$$
$$\boldsymbol{m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 = F_2}$$
$$\boldsymbol{m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + k_3x_3 = F_3}$$

Las ecuaciones pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones se expresan en forma matricial como:

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{X}}\} + [\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{X}}\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{X}\} = \{\boldsymbol{F}\} \qquad (2.17)$$

- Cada línea de este sistema de ecuaciones simultáneas corresponde a una ecuación de equilibrio para un grado de libertad de la estructura, por lo tanto la fuerza aplicada al sistema debe ser colinial con el grado de libertad.
- Las ecuaciones diferenciales del sistema considerado están acopladas.
- Si las matrices tanto de rigidez como de masa tienen términos no cero fuera de la diagonal, se dice que el sistema está tanto estática como dinámicamente acoplado.

Este planteamiento es válido para sistemas de cualquier número de grados de libertad y es similar a la de un grado de libertad.

2.3.4.3. COEFICIENTES DE INFLUENCIA

Los coeficientes de influencia se utilizan extensamente en ingeniería estructural. Básicamente, se puede asociar un conjunto de coeficientes de influencia con cada una de las matrices implicadas en las ecuaciones de movimiento. Los coeficientes de influencia asociados con las matrices de rigidez y masa, se conocen, respectivamente, como coeficientes de influencia de rigidez e inercia.

2.3.4.3.1. COEFICIENTES DE INFLUENCIA DE RIGIDEZ

En un resorte lineal simple, la fuerza necesaria para producir un alargamiento unitario se conoce como rigidez del resorte. En sistemas más complejos podemos expresar la relación entre el desplazamiento en un punto y las fuerzas que actúan en varios otros puntos del sistema por medio de coeficientes de influencia de rigidez.

El coeficiente de influencia de rigidez, denotado como k_{ij}, se define como la fuerza en el punto i a consecuencia de un desplazamiento unitario en el punto j cuando todos los puntos aparte del punto j están fijos. La fuerza total en el punto i se determina sumando las fuerzas producidas por todos los desplazamientos x_j $(\mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{n})$ como:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j \qquad i = 1,2, \ldots\ldots n \tag{2.18}$$

La ecuación 2.18 se puede expresar en forma matricial como:

$$\{F\} = [K]\{X\} \tag{2.19}$$

Donde $\{X\}$, $\{F\}$ son los vectores de desplazamiento y fuerza, la matriz $[K]$ es la matriz de rigidez expresada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot\cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot\cdot & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdot\cdot & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot\cdot & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Las principales propiedades de la matriz de rigidez son:

- Los coeficientes de rigidez $\boldsymbol{k_{ij}}$ son simétricos, es decir $\boldsymbol{k_{ij} = k_{ji}}$.
- Los coeficientes de rigidez de la diagonal principal son siempre mayores qué cero, es decir $\boldsymbol{k_{ij} > 0}$.
- La matriz de rigidez es definida positiva, es decir su inversa existe.

2.3.4.3.2. COEFICIENTES DE INFLUENCIA DE INERCIA

Los elementos de la matriz de masa, m_{ij} se conocen como coeficientes de influencia de inercia. Los coeficientes m_{ij} se pueden calcular por medio de relaciones de impulso-cantidad de movimiento. Los coeficientes de influencia de inercia m_{1j}, m_{2j}........ m_{nj} , se definen como el conjunto de impulsos aplicados en los puntos $1,2 \dots\dots, n,$ respectivamente, para producir una velocidad unitaria en el punto j y una velocidad cero en cualquier otro punto (es decir, $\dot{x}_j = 1, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \cdots = \dot{x}_{j-1} = \dot{x}_{j+1} = \cdots = \dot{x}_n = 0$). Por lo tanto, para sistemas de varios grados de libertad, el impulso total en el punto i, se determina sumando los impulsos que producen las velocidades $\dot{x}_j$ $(j = 1,2,\dots,n)$ como:

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \vartriangle \dot{x}_j \qquad (2.21)$$

La ecuación (2.21) se puede expresar en forma matricial como:

$$\{F\} = [M]\{\vartriangle \dot{X}\} \qquad (2.22)$$

Donde: $\{\vartriangle \dot{X}\}$ y $\{F\}$ son los vectores de velocidad e impulso y la matriz de masa $[M]$ está dada por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdot\cdot & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdot\cdot & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdot\cdot & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdot\cdot & m_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

Los coeficientes de influencia de inercia son simétricos para un sistema lineal $\boldsymbol{m_{ij} = m_{ji}}$. El procedimiento consiste en, primero se aplicando un conjunto de impulsos $\boldsymbol{f_{ij}}$ en varios puntos $\boldsymbol{i}$ $(\boldsymbol{i = 1,2,\dots,n})$, para producir una velocidad unitaria en el punto $\boldsymbol{j}$ $(\boldsymbol{\dot{x}_j = 1\ con\ j = 1\ para\ comenzar})$ y una velocidad cero en los demás puntos $(\boldsymbol{\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \cdots = \dot{x}_{j-1} = \dot{x}_{j+1} = \cdots = \dot{x}_n = 0})$. Por definición el conjunto de impulsos $\boldsymbol{f_{ji}(i = 1,2,\dots\dots,n)}$ indican los coeficientes de influencia de inercia $\boldsymbol{m_{ji}(i = 1,2 \dots n)}$, luego se repite para los demás puntos $\boldsymbol{j = 2,3 \dots\dots n}$.

2.3.4.4. VIBRACIÓN LIBRE NO AMORTIGUADA

Para vibración libre sin amortiguamiento la ecuación 2.17, se convierte en un sistema de $\boldsymbol{n}$ ecuaciones simultáneas diferenciales, de equilibrio dada por la siguiente ecuación:

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{X}}\} + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{X}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{2.24}$$

En este caso, si el sistema recibe algo de energía en la forma de desplazamientos iniciales, velocidades iniciales o ambos y el sistema vibra durante un tiempo indefinido porque la energía no se disipa. Se asume una solución de la forma:

$$\boldsymbol{x_i(t)} = \{\boldsymbol{\varphi^i}\}\boldsymbol{f_i(t)} \tag{2.25}$$

Donde:

$\{\varphi^i\}$ = Vector de amplitudes.

$f_i(t)$ = Es una función de tiempo t.

La ecuación muestra que la relación de amplitudes de dos coordenadas $x_i(t)/x_j(t)$ es independiente del tiempo. Físicamente esto significa que todas las coordenadas tienen movimientos síncronos. La configuración del sistema no cambia de forma durante el movimiento pero si de amplitud. La configuración del sistema está dado por el vector:

$$\{\boldsymbol{\varphi^i}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi^1} \\ \boldsymbol{\varphi^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi^n} \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

Este vector se conoce como la forma de modo del sistema. Reemplazando la ecuación 2.25 en la ecuación 2.24 se obtiene:

$$[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\varphi^i}\}\ddot{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}) + [\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\varphi^i}\}\boldsymbol{f_i(t)} = \{\boldsymbol{0}\}$$

La ecuación anterior se escribe en forma escalar como $\boldsymbol{n}$ ecuaciones distintas:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\varphi_j^i\right)\ddot{f}_i(t) + \left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\,\varphi_j^i\right)f_i(t) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots n$$

De las cuales se obtiene la siguiente relación:

$$-\frac{\ddot{f}_i(t)}{f_i(t)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\,\varphi_j^i\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,\varphi_j^i\right)}, \qquad i = 1,2,\ldots n$$

El lado izquierdo depende del tiempo mientras que el lado derecho es independiente del tiempo. Esto quiere decir que ambos lados son iguales a una constante, que se denomina arbitrariamente como ω_i^2 . Por lo tanto la ecuación anterior se convierte en dos ecuaciones, una que depende del tiempo y la otra que no:

$$\ddot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t) = 0 \tag{2.27}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(k_{ij} - \omega_i^2 m_{ij})\,\varphi_j^i = 0, \qquad i = 1,2,\ldots\ldots n \tag{2.28}$$

La ecuación 2.28 se expresa en forma matricial como:

$$\Big[[K] - \omega_i^2[M]\Big]\{\varphi^i\} = \{0\} \tag{2.29}$$

La solución de la ecuación 2.27 es del tipo:

$$f_i(t) = C_1\cos(\omega_i t + \theta) \tag{2.30}$$

Las constantes C_1 y θ , son conocidas como amplitud y ángulo de fase, respectivamente. La frecuencia ω_i toma valores que satisfacen la ecuación 2.30, esto corresponde a un sistema de ecuaciones simultáneas homogéneo. Para la solución no trivial, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser cero.

$$\triangle = \Big|[K] - \omega_i^2[M]\Big| = 0 \tag{2.31}$$

La solución (raíces) de esta ecuación polinomial o característica da n valores de ω_i^2. Si $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots\ldots\ldots \omega_n^2$ indican las n raíces en orden de magnitud ascendente, sus raíces cuadradas positivas dan las n frecuencias naturales del sistema. El valor mínimo de las frecuencias se conoce como primera frecuencia natural o frecuencia fundamental.

Una vez obtenido las frecuencias, los valores de las amplitudes $\{\boldsymbol{\varphi}^{i}\}$ se obtienen, reemplazando los valores de $\boldsymbol{\omega}_i^2$ en la ecuación 2.29 para obtener así $\boldsymbol{n}$ ecuaciones del tipo:

$$\left[[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega}_i^2[\boldsymbol{M}]\right]\{\boldsymbol{\varphi}^{i}\} = \{\boldsymbol{0}\} \qquad (2.32)$$

Para cada valor de $\boldsymbol{\omega}_i$ existe un vector $\{\boldsymbol{\varphi}^{i}\}$ que es una solución no trivial del sistema de ecuaciones simultáneas. A este vector $\{\boldsymbol{\varphi}^{i}\}$ se le denomina *vector característico, modo de vibración* o *eigenvector*. Este vector está compuesto por elementos $\{\boldsymbol{\varphi}_i^{r}\}$, que son números reales y no tienen un valor determinado en el sentido estricto. Por lo tanto para cada frecuencia $\boldsymbol{\omega}_i$ tenemos un vector $\{\boldsymbol{\varphi}^{i}\}$ que tiene una forma definida pero una amplitud arbitraria. Como hay la posibilidad de que dos o más frecuencias sean iguales, en ese caso cualquier combinación lineal de los modos correspondientes, también es un modo.

Los modos de vibración del sistema son propiedades del mismo tal como lo son las frecuencias naturales, y dependen de las propiedades de rigidez y de masa del sistema. Cada uno de los modos puede ser excitado independientemente de los otros. Si las condiciones iniciales, o las excitaciones del sistema, se disponen de tal manera que se excite exclusivamente un modo $\{\boldsymbol{\varphi}^{i}\}$, el movimiento del conjunto de masas se asemejará totalmente a la forma del modo y el sistema se moverá con una oscilación armónica con una frecuencia de $\boldsymbol{\omega}_i$, en radianes/segundo, la cual es la frecuencia natural asociada con ese modo en particular (Reyes, 1998) .

Ortogonalidad de los modos. La ortogonalidad es una propiedad importante de los modos. Para las frecuencias naturales $\boldsymbol{\omega_i}, \boldsymbol{\omega_j}$ y el vector modal correspondiente $\{\boldsymbol{\varphi^i}\}$, $\{\boldsymbol{\varphi^j}\}$ satisfacen la ecuación 2.29 de modo que:

$$\Big[[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega_i^2}[\boldsymbol{M}]\Big]\{\boldsymbol{\varphi^i}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{2.33}$$

$$\Big[[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega_j^2}[\boldsymbol{M}]\Big]\{\boldsymbol{\varphi^j}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{2.34}$$

Ordenando y multiplicando por la transpuesta $\{\boldsymbol{\varphi^j}\}^{\boldsymbol{T}}$, en la primera ecuación:

$$\{\boldsymbol{\varphi^j}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\varphi^i}\} = \boldsymbol{\omega_i^2}\{\boldsymbol{\varphi^j}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\varphi^i}\} \tag{2.35}$$

Ordenando y multiplicando por la transpuesta $\{\boldsymbol{\varphi^i}\}^{\boldsymbol{T}}$, en la segunda ecuación:

$$\{\boldsymbol{\varphi^i}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\varphi^j}\} = \boldsymbol{\omega_j^2}\{\boldsymbol{\varphi^i}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\varphi^j}\} \tag{2.36}$$

Por la simetría de las matrices de masa y rigidez, la transpuesta de la matriz en el lado izquierdo de la ecuación 2.35 será igual a la transpuesta de la matriz en el lado derecho de dicha ecuación, por lo tanto se cumple:

$$\{\boldsymbol{\varphi^i}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\varphi^j}\} = \boldsymbol{\omega_i^2}\{\boldsymbol{\varphi^i}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\varphi^j}\} \tag{2.37}$$

Al restar las ecuaciones 2.36 y 2.37 se obtiene:

$$\left(\boldsymbol{\omega_i^2} - \boldsymbol{\omega_j^2}\right)\{\boldsymbol{\varphi^i}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\varphi^j}\} = \boldsymbol{0} \tag{2.38}$$

Esta ecuación es verdadera cuando $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, para los sistemas con frecuencias naturales positivas implica que $\omega_i \neq \omega_j$, esto demuestra las relaciones de ortogonalidad de los modos[1].

$$\{\boldsymbol{\varphi^i}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{\varphi^j}\} = \boldsymbol{0} \qquad \{\boldsymbol{\varphi^i}\}^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{M}]\{\boldsymbol{\varphi^j}\} = \boldsymbol{0} \tag{2.39}$$

Con respecto a su sentido físico, este se basa en el hecho de que al existir la propiedad de ortogonalidad a través de las matrices de masa y rigidez esto indica

[1] En el caso de vectores eigen repetidos, los vectores modales asociados son ortogonales a todos los vectores modales restantes pero no suelen ser ortogonales entre sí (Rao, 2012).

que los vectores modales componen un conjunto de vectores linealmente independientes (Reyes, 1998).

Los modos se organizan en una sola matriz modal de dimensiones nxn, en la cual cada columna corresponde a un modo:

$$[\{\varphi^1\},\{\varphi^2\},\ldots\ldots\ldots.,\{\varphi^3\}] \tag{2.40}$$

Normalización de los modos. En los análisis teóricos y los programas de computación es común normalizar los modos de manera que tenga valores unitarios. Es conveniente normalizar los modos respecto a la matriz de masa:

$$\{\boldsymbol{\varphi}^r\}^{\boldsymbol{T}}[\mathbf{M}]\{\boldsymbol{\varphi}^r\} = \mathbf{1} \tag{2.41}$$

Desacople de las ecuaciones de movimiento. El movimiento general de un sistema de $\boldsymbol{n}$ grados de libertad puede representarse por medio de la superposición de los modos del sistema multiplicados cada uno de ellos por unas constantes que dependen de las condiciones iniciales del movimiento, o de las excitaciones si se trata de movimiento forzado. Estas constantes indican el grado de participación de cada modo en el movimiento total (Reyes, 1998) .

El movimiento total se describe por medio de unos nuevos grados de libertad $\boldsymbol{\eta_i}$, de tal manera que se cumple:

$$\{\boldsymbol{X}\} = [\Phi]\{\boldsymbol{\eta}\} \tag{2.42}$$

La matriz $[\Phi]$, en la ecuación 2.42 es la matriz normalizada de los modos de vibración con respecto a la masa. Por lo tanto se ha obtenido una transformación de coordenadas simultáneas acopladas a un sistema de coordenadas generalizadas $\boldsymbol{\eta}$, donde cada una de ellas obra independientemente como si fuera un grado de libertad único que a su vez afecta todos los grados de libertad originales de tal forma que todos ellos se mueven armónicamente en la forma descrita por su modo correspondiente.

2.3.4.5. AMORTIGUAMIENTO EN ESTRUCTURAS

El amortiguamiento en las estructuras no se calcula a partir de las dimensiones de los elementos estructurales ni de las propiedades de amortiguamiento de los materiales utilizados.

El amortiguamiento suele especificarse mediante los valores numéricos de las fracciones de amortiguamiento modal; estos valores son suficientes para analizar los sistemas lineales con amortiguamiento clásico (Chopra, 2014).

Para determinar los valores de fracciones de amortiguamiento modal se realizan mediciones experimentales de movimiento libre o forzado en las estructuras.

2.3.4.5.1. MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO

Podría pensarse que es posible determinar la matriz de amortiguamiento para la estructura a partir de las propiedades de amortiguamiento de los distintos elementos estructurales, tal como se determina la matriz de rigidez estructural. Sin embargo, la determinación de la matriz de amortiguamiento en esta forma no resulta práctica porque a diferencia del módulo de elasticidad, que entra en el cálculo de la rigidez, las propiedades de amortiguamiento de los materiales no están bien establecidas (Chopra, 2014).

La matriz de amortiguamiento para una estructura debe determinarse a partir de sus fracciones de amortiguamiento modal, que representan todos los mecanismos de disipación de energía.

Si suponiendo que la matriz de amortiguamiento tiene una forma tal que sea una combinación lineal de las matrices de masa $[M]$ y rigidez $[K]$ de la siguiente manera:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \tag{2.43}$$

Donde a_0 y a_1 son constantes. Esto se conoce como amortiguamiento proporcional, por que $[C]$ es proporcional a una combinación lineal de $[M]$ y $[K]$. Esta matriz es desacoplable por medio de los modos de vibración de la estructura como:

$$[\Phi]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{C}][\Phi] = [\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{\omega_n^2}] \tag{2.44}$$

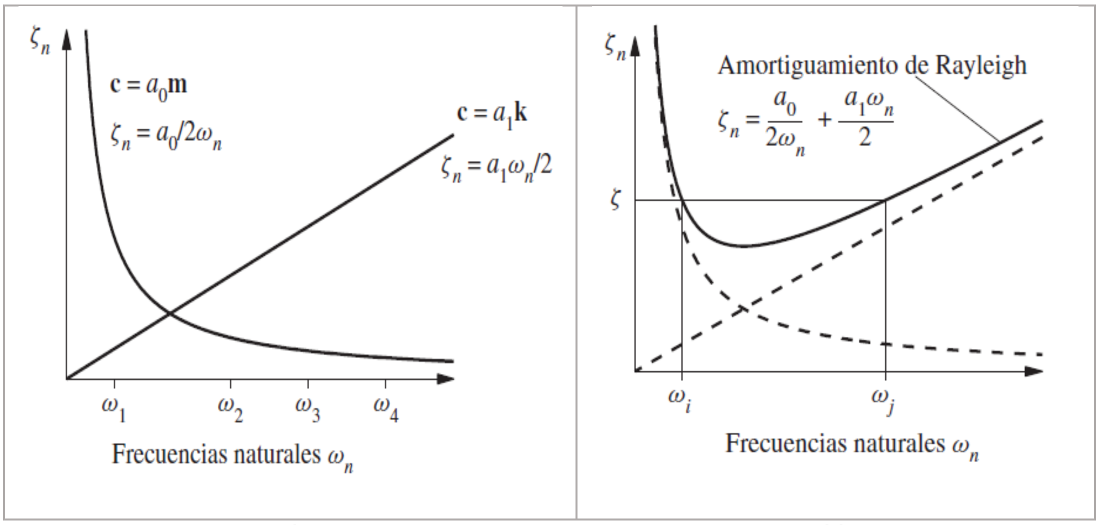
Esta matriz es una matriz diagonal y cada uno de los términos corresponde ha $2\xi_n\omega_n$, entonces el amortiguamiento ξ_n en cada una de las ecuaciones desacopladas es:

$$\xi_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \tag{2.45}$$

Los coeficientes a_0 y a_1 pueden determinarse a partir de las fracciones de amortiguamiento especificadas ξ_i y ξ_j para los modos i -ésimo y j -ésimo, respectivamente. Si la ecuación 2.45 para estos dos modos se expresa en forma matricial, resulta la ecuación:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

Ahora, la matriz de amortiguamiento se conoce a partir de la ecuación 2.46 y la fracción de amortiguamiento para cualquier otro modo, dada por la ecuación 2.45 que está en función de la frecuencia natural de ese modo, como se muestra en la figura 2.26 b.



a) b)

Figura 2.26 Variación de las fracciones de amortiguamiento modal
Fuente: Chopra, 2014

Al aplicar este procedimiento a un problema práctico, los modos i y j con las fracciones de amortiguamiento especificadas deben elegirse de manera que garanticen valores razonables para las fracciones de amortiguamiento en todos los modos que contribuyen de manera significativa a la respuesta.

Las fracciones de amortiguamiento recomendadas pueden utilizarse directamente para el análisis elástico lineal de las estructuras con amortiguamiento clásico. Para tales sistemas las ecuaciones de movimiento se desacoplan al transformarlas a los modos naturales de vibración del sistema no amortiguado, y las fracciones de amortiguamiento modal estimadas se utilizan en forma directa en cada ecuación modal (Chopra, 2014).

Al seleccionar las fracciones de amortiguamiento modal de una estructura deben estimarse a partir de los datos medidos en estructuras similares, estos datos deben utilizarse con discreción.

2.3.4.6. VIBRACIÓN FORZADA AMORTIGUADA

En muchos casos, la influencia del amortiguamiento en la respuesta de un sistema vibratorio es mínima y se puede omitir. Sin embargo, debe considerarse si la respuesta del sistema se requiere durante un lapso de tiempo relativamente largo comparado con los periodos naturales del sistema. Además, si la frecuencia de excitación (en el caso de fuerza periódica) es igual o se acerca a las frecuencias naturales del sistema, el amortiguamiento es de primordial importancia y debe ser tomado en cuenta. En general, dado que los efectos no se conocen con anticipación, el amortiguamiento debe considerarse en el análisis de vibración de cualquier sistema (Rao, 2012).

Para una vibración forzada viscosamente amortiguada de un sistema de varios grados de libertad, la ecuación matricial se expresa como:

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{X}}\}+[\boldsymbol{C}]\{\dot{\boldsymbol{X}}\}+[\boldsymbol{k}]\{\boldsymbol{X}\}=\{\boldsymbol{F}\} \tag{2.47}$$

Utilizando el amortiguamiento proporcional y sustituyendo en la ecuación 2.47 se obtiene:

$$[\boldsymbol{M}]\{\ddot{\boldsymbol{X}}\}+\left[\boldsymbol{a_0}[\boldsymbol{M}]+\boldsymbol{a_1}[\boldsymbol{K}]\right]\{\dot{\boldsymbol{X}}\}+[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{X}\}=\{\boldsymbol{F}\} \tag{2.48}$$

Expresando el vector de solución $\{X\}$ como una combinación lineal de los modos naturales del sistema no amortiguado como:

$$\{\boldsymbol{X}\}=[\Phi]\{\boldsymbol{\eta}\}$$

Reemplazando en la ecuación 2.48 obtenemos:

$$[\boldsymbol{M}][\Phi]\{\ddot{\boldsymbol{\eta}}\}+\left[\boldsymbol{a_0}[\boldsymbol{M}]+\boldsymbol{a_1}[\boldsymbol{K}]\right][\Phi]\{\dot{\boldsymbol{\eta}}\}+[\boldsymbol{K}][\Phi]\{\boldsymbol{\eta}\}=\{\boldsymbol{F}\}$$

Multiplicando por $[\Phi]^{\boldsymbol{T}}$ conduce a:

$$[\Phi]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{M}][\Phi]\{\ddot{\boldsymbol{\eta}}\}+\left[\boldsymbol{a_0}[\Phi]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{M}][\Phi]+\boldsymbol{a_1}[\Phi]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{K}][\Phi]\right]\{\dot{\boldsymbol{\eta}}\}+[\Phi]^{\boldsymbol{T}}[\boldsymbol{K}][\Phi]\{\boldsymbol{\eta}\}=[\Phi]^{\boldsymbol{T}}\{\boldsymbol{F}\}$$

Si los vectores Φ están normalizados esta ecuación se reduce a:

$$[I]\{\ddot{\eta}\} + \big[a_0[I] + a_1[\omega^2]\big]\{\dot{\eta}\} + [\omega^2]\{\eta\} = [\Phi]^T\{F\} = \{Q\}$$

Es decir en forma escalar para cada modo:

$$\ddot{\eta}_i(t) + [a_0 + a_1\omega_i^2]\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = Q_i$$

Donde $\boldsymbol{\omega_i}$ es la frecuencia natural $\boldsymbol{i}$-esima del sistema no amortiguado y $\boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{\omega_i^2} = \boldsymbol{2\xi_i\omega_i}$, donde $\boldsymbol{\xi_i}$, se conoce como relación de amortiguamiento modal para el modo normal $\boldsymbol{i}$-esimo de la ecuación anterior se escribe como:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = Q_i \qquad \boldsymbol{i = 1, 2, 3, \dots, n} \tag{2.49}$$

Se observa que cada una de las n ecuaciones representadas por esta expresión está desacoplada de todas las demás. Por consiguiente, podemos determinar la respuesta del modo $\boldsymbol{i-esimo}$ de la misma manera que la de un sistema viscosamente amortiguado de un solo grado de libertad.

La solución de estado estable de la ecuación (2.49), para una excitación armónica resulta:

$$\eta_i(t) = \eta_i \operatorname{sen}(\omega t - \emptyset) \tag{2.50}$$

Donde:

$$\eta_i = \frac{Q_i}{\omega_i^2}\frac{1}{\left[\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi_i\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad \emptyset_i = tan^{-1}\left\{\frac{2\xi_i\frac{\omega}{\omega_i}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}\right\}$$

2.4. MESAS VIBRATORIAS

La mesa vibratoria es un simulador que produce movimientos horizontales en la base de las estructuras, obteniéndose la respuesta de una estructura fijada a ella de manera precisa. Es una herramienta que en general consta de una plataforma móvil, una masa de reacción, actuadores, rodamientos lineales como se muestran en la figura 2.27.

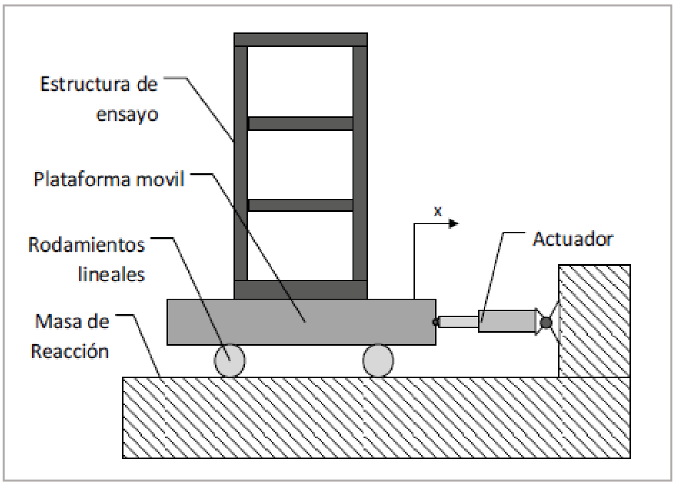


Figura 2.27 Esquema general de una mesa vibratoria
Fuente: www.scielo.org.co

El uso de las mesas vibratorias no solo está limitadas a la representación de movimientos sísmicos, también puede reproducir movimientos generados por equipos mecánicos armónicos, movimientos aleatorios, pulsos etc.

Existen distintos tamaños de mesas vibratorias desde las más complejas que pueden ensayar estructuras a escala real y las de menor tamaño que pueden ensayar modelos de estructuras a escala, dentro de este grupo están las mesas portables como se muestra en la figura 2.28. Algunas aplicaciones del uso de las mesas vibratorias se mencionan a continuación:

- Respuesta de las estructuras.
- Diseño de estructuras y componentes estructurales.
- Métodos experimentales, ensayos de estructuras y componentes.
- Movimiento del suelo y sismicidad.

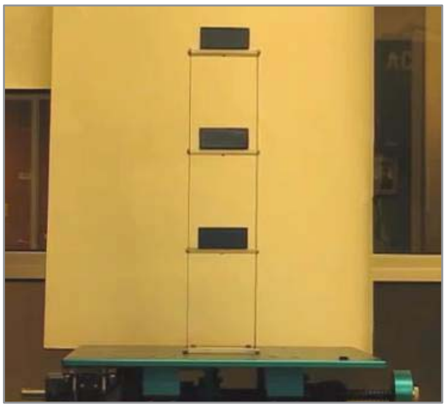


Figura 2.28 Mesa Vibratoria portable
Fuente: www.youtube.com

CAPITULO III

3. SISTEMA CON EXCITACIÓN ARMÓNICA EN LA BASE

3.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA ANALIZADO

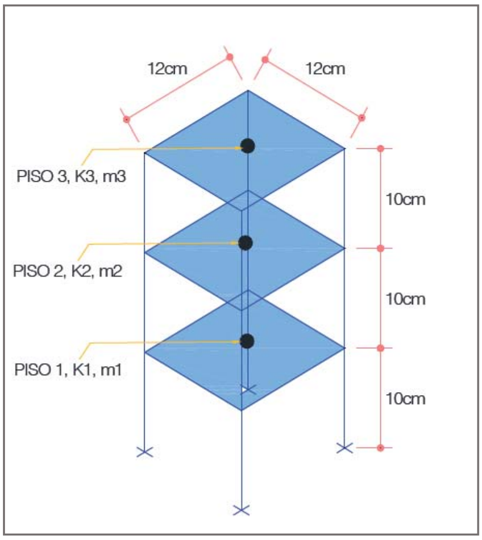
El sistema analizado es un modelo construido y ensayado en la tesis de maestría en ingeniería estructural y de la construcción titulada “ENSAYO A ESCALA DE EDIFICIO DE DOS ALTURAS SOMETIDO A DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES” de la universidad UPC Barcelona-España.

En el ensayo experimental se construyen dos estructuras de diferentes rigideces una estructura es flexible y la otra es más rígida, por el material del que están construidos. Las pruebas experimentales realizadas son de vibración libre y forzada, de estas pruebas se obtienen datos las frecuencias naturales, amortiguamiento y desplazamientos.

Para este estudio se utilizan los datos de las pruebas en la estructura más flexible (de esta estructura se obtuvieron más datos de frecuencias naturales). La estructura flexible está compuesta por cuatro columnas flexibles de un material denominado poliamida y tres placas rectangulares de material denominado metacrilato que tiene mayor rigidez que las columnas, las placas están unidas rígidamente alas columnas mediante pernos y arandelas a ambos lados de las placas como se muestra en la figura 3.1 a.

Las dimensiones de las placas son de 12x12 cm y 5 mm de espesor, separadas entre sí 10 cm, las columnas tiene una longitud de 30 cm y son de sección circular de diámetro 4 mm. Estas dimensiones se muestran esquemáticamente en la figura 3.1 b.

a)



b)

Figura 3.1 Estructura ensayada y dimensiones del sistema
Fuente: Oller, 2015

Otro aspecto constructivo importante es el soporte en la base de la estructura, está anclada en la base mediante pernos a una plataforma, esto representa una base empotrada tal como se detalla en la figura 3.2.

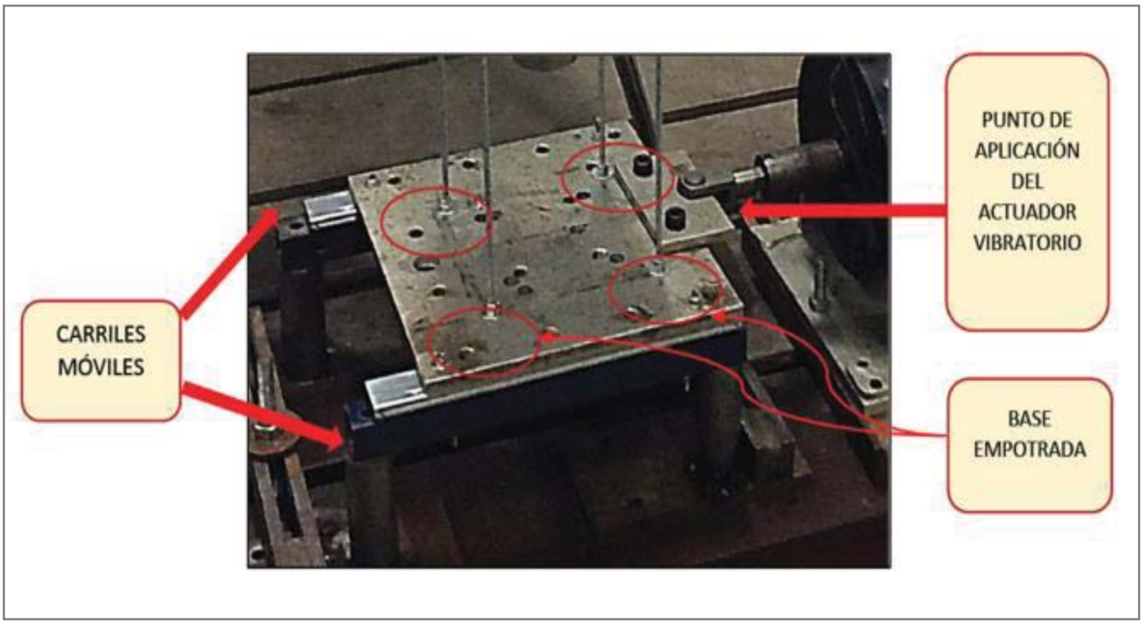


Figura 3.2 Base empotrada
Fuente: Oller, 2015

3.1.1. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

En la tabla 3.1, se resumen las propiedades más importantes de los materiales de la estructura para el análisis (se verifica con datos del anexo 3).

Tabla 3.1 Propiedades de los materiales

Metacrilato		
Propiedades	Valor	Unidad
Módulo de Young	3.3	Gpa
Densidad	1190	Kg/m3
Módulo de Poisson	0.45	
Poliamida		
Propiedades	Valor	Unidad
Módulo de Young	1.4	Gpa
Densidad	1140	Kg/m3
Resistencia a la flexión	40	Mpas
Resistencia a la tracción	45	Mpas
Módulo de Poisson	0.45	

Fuente: Oller, 2015

3.1.2. GENERADOR DE CARGAS EN EL SISTEMA

El generador de cargas está formado por un tambor vibratorio, un generador de onda en diferentes frecuencias y un amplificador de ondas generadas. El tambor vibratorio va conectado directamente a la plataforma en la base de la estructura a ensayar, para que genere movimientos en una dirección figura 3.3.

Figura 3.3 Esquema de conexión del generador de cargas
Fuente: Oller, 2015

3.1.3. INSTRUMENTOS PARA LA MEDICIÓN.

La instrumentación utilizada para la obtención de datos en la estructura consta de una computadora, un procesador (arduino), el acelerómetro como se muestra en la figura 3.4.

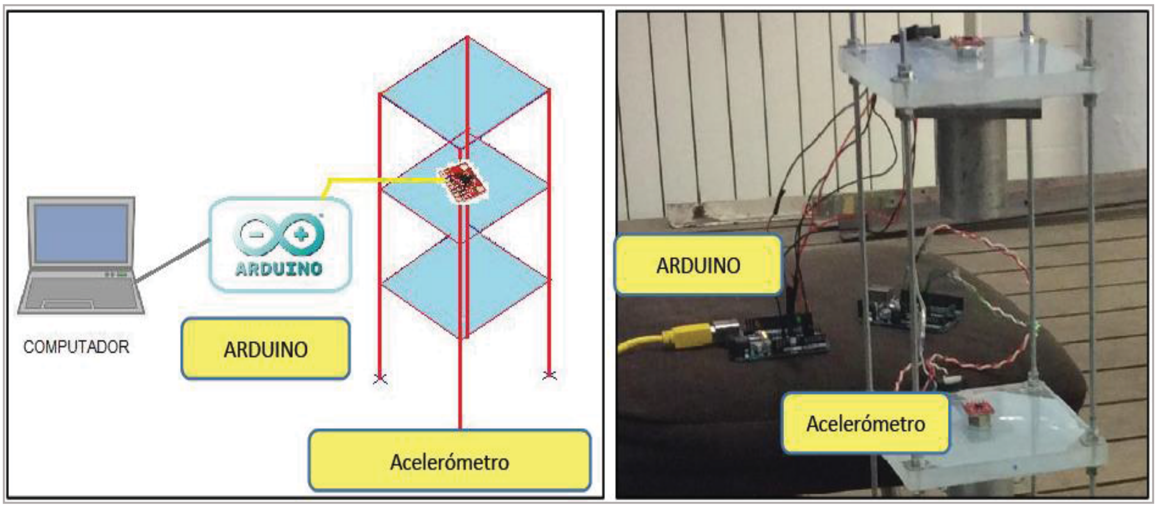


Figura 3.4 Esquema de extracción de datos
Fuente: Oller, 2015

El procedimiento que se ha seguido consiste en la colocación de un acelerómetro en la estructura que trasmite señales analógicas y mediante un dispositivo de adquisición de datos se convierte la señal analógica a digital, luego esta señal es visualizada en el ordenador, mediante un método implementado y se obtienen datos de frecuencias naturales, amortiguamiento, desplazamientos.

3.1.4. ENSAYO DE VIBRACIÓN LIBRE

El ensayo de vibración libre se realizó aplicando una carga en la parte superior y soltando para que vibre libremente. Los resultados que se obtienen en este ensayo son las frecuencias naturales y el porcentaje de amortiguamiento crítico, estos valores están tabulados en la tabla 3.2.

Tabla 3.2 Frecuencias naturales y fracción de amortiguamiento

	Numero	Valor
f_1	Primera frecuencia	3.20 Hz
f_2	segunda frecuencia	11.43 Hz
f_3	tercera frecuencia	18.75 Hz
ξ	fracción de amortiguamiento	7.5%

Fuente: Oller, 2015

3.1.5. ENSAYO DE VIBRACIÓN FORZADA

El ensayo de vibración forzada se realizó aplicando una aceleración armónica en la base del sistema. La primera aceleración aplicada en la base tiene una amplitud 6500 mm/s^2 con una frecuencia de 3.1 Hz, figura 3.5.

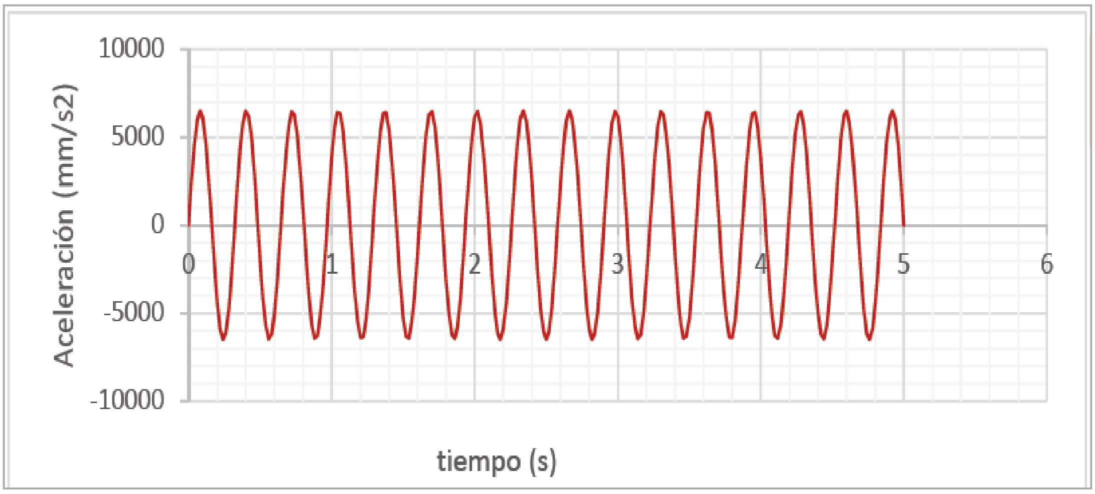


Figura 3.5 Aceleración aplicada (6500mm/s^2, 3.1 Hz)
Fuente: Oller, 2015

La segunda y tercera aceleración tienen una amplitud de 13000 mm/s^2 constante de aceleración, con frecuencias de 10.5 Hz y 15.8 Hz respectivamente, como se muestra en las figuras 3.6, 3.7.

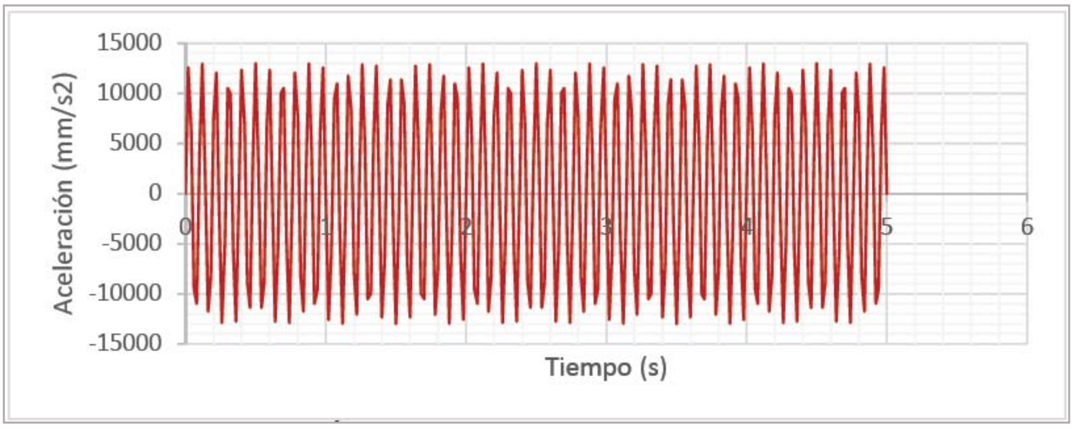


Figura 3.6 Aceleración aplicada (13000 mm/s^2, 10.5 Hz)
Fuente: Oller, 2015

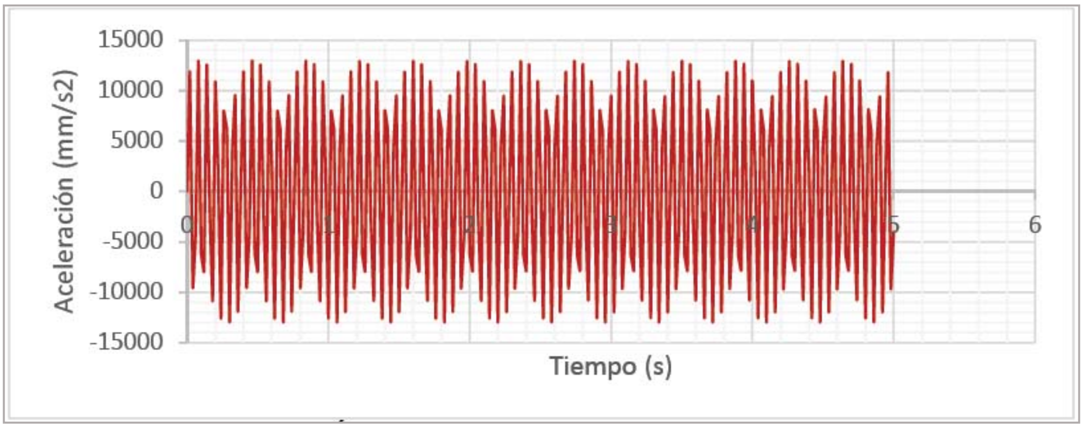


Figura 3.7 Aceleración aplicada (13000 mm/s^2, 15.8 Hz)
Fuente: Oller, 2015

Los datos que se obtuvieron con la instrumentación descrita anteriormente, son valores de desplazamientos y se resumen en la tabla 3.3.

Tabla 3.3 Desplazamientos máximos

Elemento	6500 mm/s^2 (3.1Hz)	13000 mm/s^2 (10.5 Hz)	13000 mm/s^2 (15.8 Hz)
Masa 1	15.62 mm	7.04 mm	2.38 mm
Masa 2	20.70 mm	2.32 mm	1.66 mm
Masa 3	27.90 mm	4.96 mm	1.37 mm

Fuente: Oller, 2015

CAPITULO IV

4. CALCULO DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA EXCITADO ARMÓNICAMENTE EN LA BASE.

4.1. MODELACIÓN DINÁMICA DE LA ESTRUCTURA

4.1.1. GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA

Para determinar la respuesta de la estructura primero se deben definir el modelo de análisis y los grados de libertad de la estructura.

La masa de toda la estructura está concentrado en los tres elementos rectangulares y representa el 93.7% de masa de todo el sistema como se observa en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Porcentaje en peso

Elementos	Cant.	Masa Unit.	TOTAL	% masa
Columnas	4	4.3 gr	17.2 gr	6.3 %
Placas	3	85 gr	225 gr	93.7 %
		TOTAL	272.2gr	100 %

Fuente: Elaboración propia

El sistema es un modelo masas concentradas o parámetros concentrados, donde la inercia de todo el sistema está concentrado en las tres masas y la rigidez del sistema estará representada por las columnas figura 4.1.

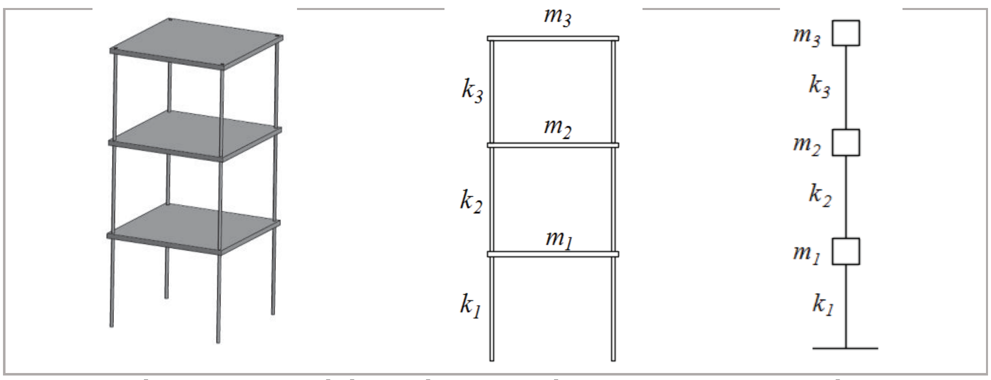


Figura 4.1 Modelo o sistemas de masas concentradas
Fuente: Elaboración propia

- Cada elemento de masa del sistema posee tres grados de libertad dos desplazamientos (x, y) y un giro (θ) alrededor de un eje, figura 4.2.
- La estructura estará sometido a una aceleración armónica en la base $(a(t) = asen\omega t)$, de amplitud constante (a), en la dirección x.

Por la regularidad de la estructura, las mayores aceleraciones y desplazamientos de las masas se presentaran en la dirección x, por lo tanto se considera únicamente las coordenadas (x_1, x_2, x_3).

El movimiento del sistema se considera únicamente en la dirección x , en el plano $x, z,$ como se muestra en la figura 4.2.

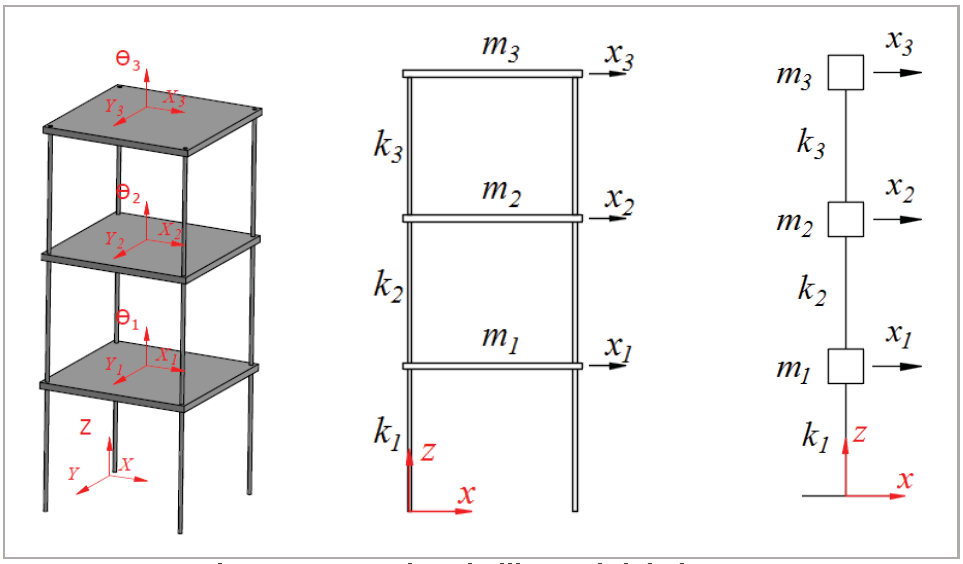


Figura 4.2 Grados de libertad del sistema
Fuente: Elaboración propia

4.1.2. EXCITACIÓN ARMÓNICA EN LA BASE

El sistema de la figura 4.3.a, con coordenadas en la dirección x y una aceleración en la base es equivalente al sistema de la figura 4.3 b, con una base fija con coordenadas relativas u en la misma dirección de x, con fuerzas que son iguales al producto de la masa por la aceleración aplicas en cada una de las masas.

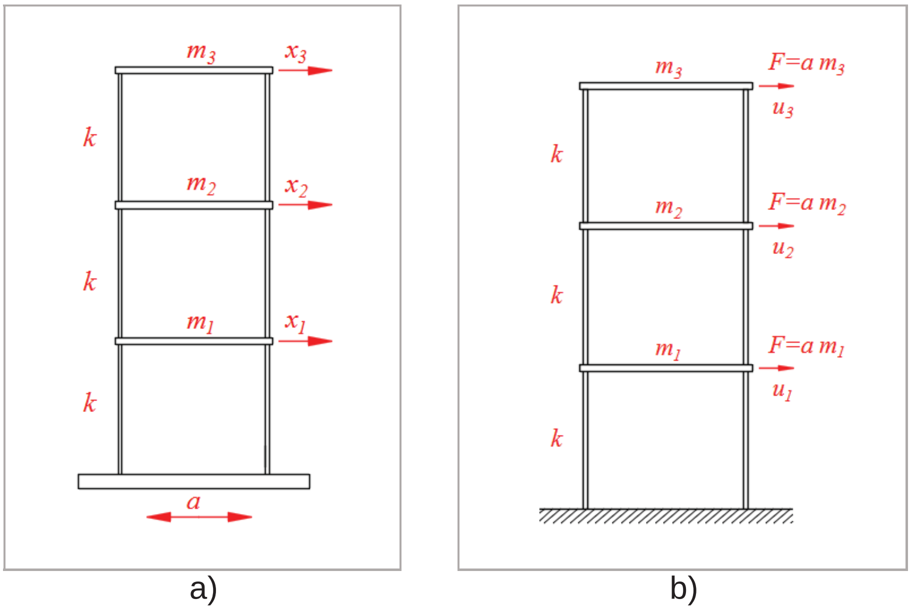


Figura 4.3 a) Coordenadas absolutas, b) Coordenadas relativas
Fuente: Elaboración propia

Aplicando una excitación armónica en la base, representada por la función de aceleración $a(t) = asen\omega t$, el sistema de tres grados de libertad experimenta una fuerza armónica en cada elemento de masa, figura 4.4.a, este sistema es equivalente a un sistema con excitación de masa desbalanceada en cada elemento de masa figura 4.4.b.

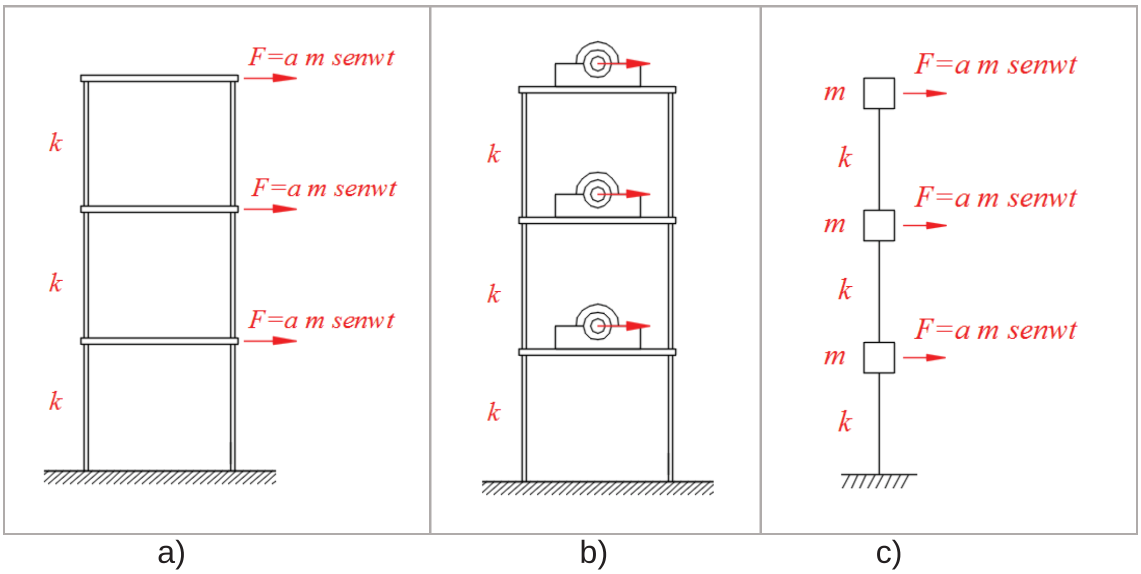


Figura 4.4 Modelos dinámicos equivalentes
Fuente: Elaboración propia

El modelo idealizado para nuestro análisis es un sistema de tres grados de libertad con excitación armónica en cada elemento de masa como se muestra en la figura 4.4.c.

Para determinar la respuesta del sistema primero se determinan las frecuencias naturales y los modos de vibración, con la combinación de estos modos se calculan los desplazamientos para una vibración forzada armónica.

4.2. CALCULO DE FRECUENCIAS Y MODOS NATURALES

Calculo de los coeficientes de influencia de inercia. Se generan velocidades unitarias en cada elemento de masa y el impulso necesario para esta condición define los coeficientes de masa, figura 4.5.

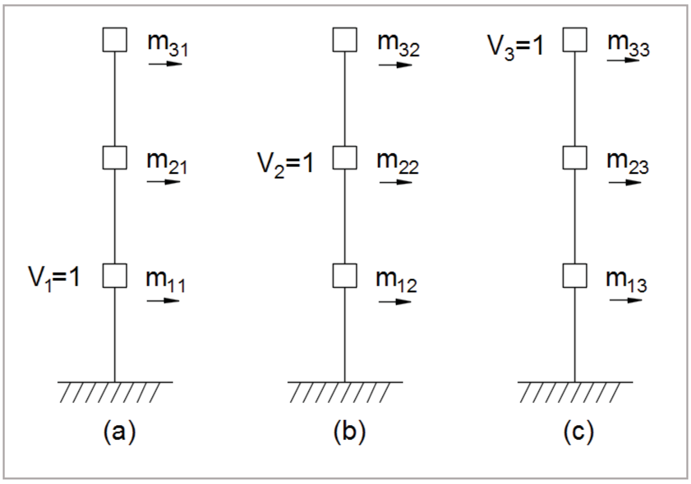


Figura 4.5 Velocidades unitarias ($V_1 = 1, V_2 = 1, V_3 = 1$)
Fuente: Elaboración propia

Considerando que todas las masas son iguales, los coeficientes de inercia de la matriz de masa resultan:

$$[\mathrm{M}] = \begin{bmatrix} \mathrm{m}_{11} & \mathrm{m}_{12} & \mathrm{m}_{13} \\ \mathrm{m}_{21} & \mathrm{m}_{22} & \mathrm{m}_{23} \\ \mathrm{m}_{31} & \mathrm{m}_{32} & \mathrm{m}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

La masa de cada elemento rectangular es 0.085 Kg y por lo tanto la matriz de masa resulta:

$$[\mathrm{M}] = \begin{bmatrix} 0.085 & 0 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix} (\mathrm{Kg})$$

Calculo de los coeficientes de influencia de rigidez. Se aplican desplazamientos unitarios en cada elemento de masa y por equilibrio estático se determina los coeficientes de rigidez como se muestra en la figura 4.6.

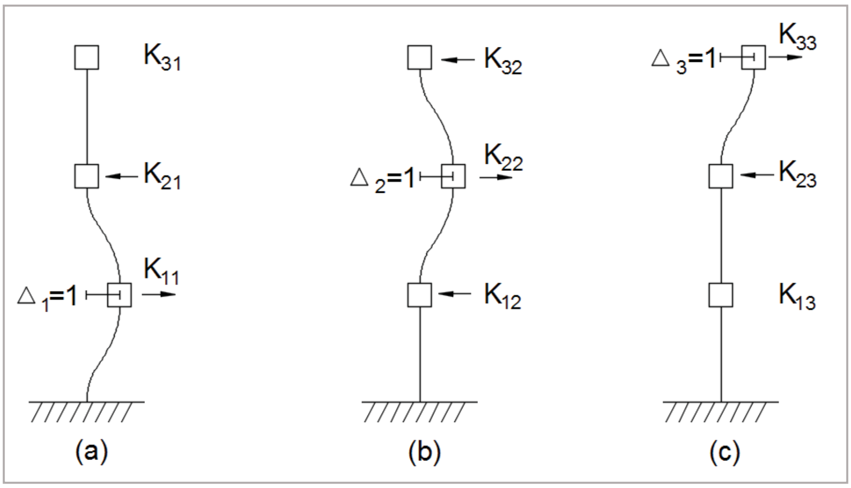


Figura 4.6 Desplazamiento unitarios (△₁=1, △₂=1, △₂=1)
Fuente: Elaboración propia

La estructura tiene la misma rigidez para cada tramo entre masas y los coeficientes de la matriz de rigidez resultan:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Utilizando la fórmula de rigidez para un elemento flexible y multiplicando por el número de columnas se obtiene la rigidez equivalente:

$$k = 4x\frac{3EI}{L^3} = \frac{12EI}{L^3}$$

Donde:

E	=	Módulo de elasticidad	=	1400 Mpa
I	=	Momento de inercia	=	12.56 mm^4

L	=	Longitud	=	95 mm
r	=	Radio de la sección	=	2 mm
I	=	Momento de inercia $(I = \pi r^3/4)$	=	12.56 mm^4

$$k = 240 \text{ N/m}$$

La matriz de rigidez resulta:

$$[\mathrm{K}] = \begin{bmatrix} 480 & -240 & 0 \\ -240 & 480 & -240 \\ 0 & -240 & 240 \end{bmatrix} (\mathrm{N/m})$$

Calculo de las frecuencias naturales. Las frecuencias naturales se obtienen al resolver la ecuación 2.31, como se escribe a continuación:

$$\triangle = \left|[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega}^2[\boldsymbol{M}]\right| = \mathbf{0}$$

$$\left|\begin{bmatrix} 480 & -240 & 0 \\ -240 & 480 & -240 \\ 0 & -240 & 240 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0.085 & 0 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix}\right| = 0$$

Expandiendo el determinante se obtiene el polinomio de grado seis:

$$\omega^6 - 14117.64\omega^4 + 47833910.03\omega^2 - 2.25x10^{10} = 0$$

Resolviendo el polinomio con la función roots de matlab (ver anexo 1), se obtienen seis raíces y solo se consideran las raíces positivas en radianes/segundo y Hertz:

Primera frecuencia	:	$\omega_1 = 23.87\ rad/s$	:	$f_1 = 3.80$ Hz
Segunda frecuencia	:	$\omega_2 = 67.04\ rad/s$	:	$f_2 = 10.67$ Hz
Tercera frecuencia	:	$\omega_3 = 96.88\ rad/s$	:	$f_3 = 15.42$ Hz

Calculo de los modos de vibración. Los modos de vibración se calculan resolviendo la ecuación 2.32 para cada valor de frecuencia natural:

$$\left[[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega}_i^2[\boldsymbol{M}]\right]\{\boldsymbol{\varphi}\} = \{\mathbf{0}\}$$

Para la primera frecuencia: $\omega_1 = 23.87\ rad/s$

$$\left[[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega_1^2}[\boldsymbol{M}]\right]\{\boldsymbol{\varphi}^1\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 480 & -240 & 0 \\ -240 & 480 & -240 \\ 0 & -240 & 240 \end{bmatrix} - 23.87^2 \begin{bmatrix} 0.085 & 0 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi_1^1} \\ \boldsymbol{\varphi_2^1} \\ \boldsymbol{\varphi_3^1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$431.57\varphi_1^1 - 240\varphi_2^1 = 0 \qquad \varphi_1^1 = 1$ (Asumiendo)

$-240\varphi_1^1 + 431.57\varphi_2^1 - 240\varphi_3^1 = 0 \qquad \varphi_2^1 = 1.8020\varphi_1^1$

$-240\varphi_2^1 + 191.57\varphi_3^1 = 0 \qquad \varphi_3^1 = 2.2468\ \varphi_1^1$

Primer modo de vibración: $\{\boldsymbol{\varphi^1}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi_1^1} \\ \boldsymbol{\varphi_2^1} \\ \boldsymbol{\varphi_3^1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1.8020} \\ \mathbf{2.2468} \end{Bmatrix}$

Para la segunda frecuencia: $\omega_2 = 67.04\ rad/s$

$$\left[[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega_2^2}[\boldsymbol{M}]\right]\{\boldsymbol{\varphi}^2\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 480 & -240 & 0 \\ -240 & 480 & -240 \\ 0 & -240 & 240 \end{bmatrix} - 67.04^{\ 2} \begin{bmatrix} 0.085 & 0 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} \varphi_1^2 \\ \varphi_2^2 \\ \varphi_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$97.98\varphi_1^2 - 240\varphi_2^2 = 0 \qquad \varphi_1^2 = 1$ (Asumiendo)

$-240\varphi_1^2 + 97.98\varphi_2^2 - 240\varphi_3^2 = 0 \qquad \varphi_2^2 = 0.4450\ \varphi_1^2$

$-240\varphi_2^2 - 142.02\varphi_3^2 = 0 \qquad \varphi_3^2 = -0.8018\ \varphi_1^2$

Segundo modo de vibración: $\{\boldsymbol{\varphi^2}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi_1^2} \\ \boldsymbol{\varphi_2^2} \\ \boldsymbol{\varphi_3^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0.4450} \\ \mathbf{-0.8018} \end{Bmatrix}$

Para la tercera frecuencia: $\omega_3 = 96.88\ rad/s$

$$\left[[\boldsymbol{K}] - \boldsymbol{\omega_3^2}[\boldsymbol{M}]\right]\{\boldsymbol{\varphi}^3\} = \{\boldsymbol{0}\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 480 & -240 & 0 \\ -240 & 480 & -240 \\ 0 & -240 & 240 \end{bmatrix} - 96.88^{\ 2} \begin{bmatrix} 0.085 & 0 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \\ \varphi_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-317.78\varphi_1^3 - 240\varphi_2^3 = 0 \qquad \varphi_1^3 = 1 \text{ (Asumiendo)}$$

$$-240\varphi_1^1 - 317.78\varphi_2^3 - 240\varphi_3^3 = 0 \qquad \varphi_2^3 = -1.2482\ \varphi_1^1$$

$$-240\varphi_2^3 - 557.78\varphi_3^3 = 0 \qquad \varphi_3^3 = 0.5552\ \varphi_1^1$$

$$\textit{Tercer modo de vibración: } \{\boldsymbol{\varphi^3}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi_1^3} \\ \boldsymbol{\varphi_2^3} \\ \boldsymbol{\varphi_3^3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1.2482} \\ \mathbf{0.5552} \end{Bmatrix}$$

Gráficamente los tres modos se representan como:

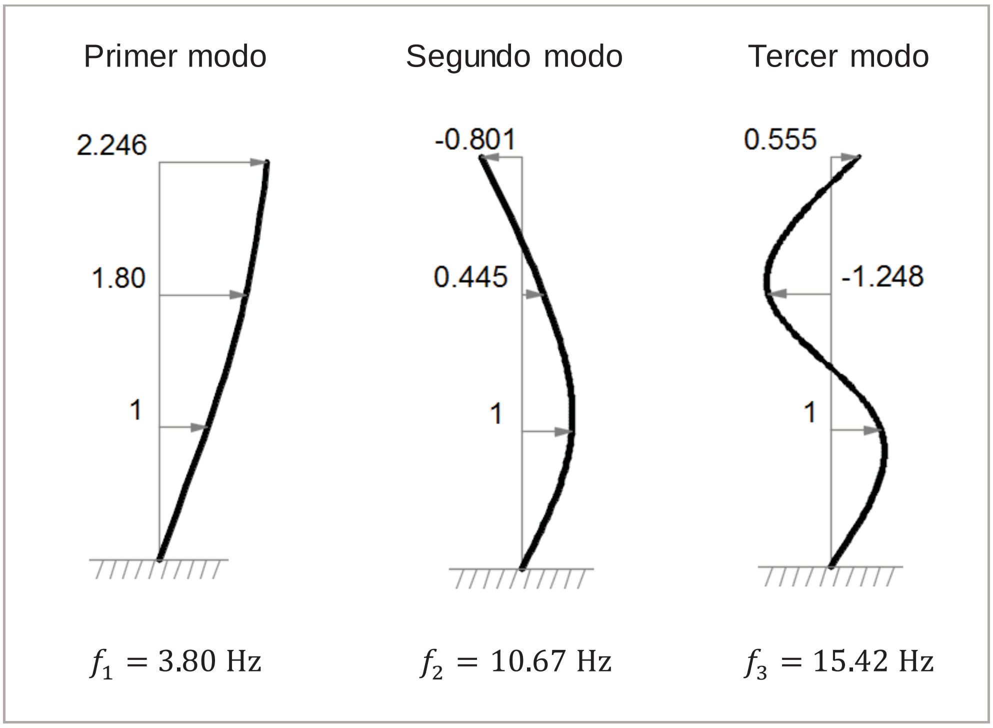


Figura 4.7 Modos de vibración
Fuente: Elaboración propia

- Como se observa en la figura 4.7 existen tres formas características de deformación de la estructura, cada una de estas formas se conoce como modo natural de vibración.
- El punto de desplazamiento cero se denomina nodo, no se mueve en absoluto como se muestra en la figura 4.8.

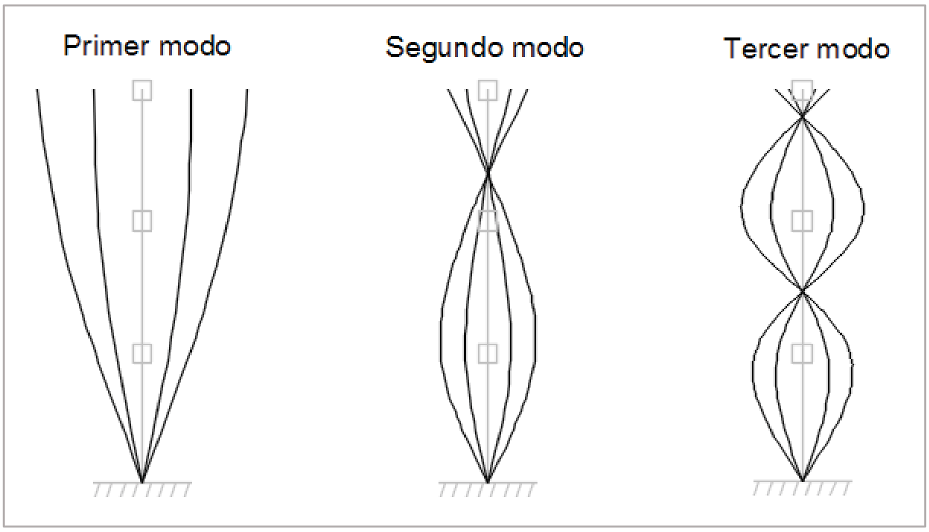


Figura 4.8 Nodos de los modos
Fuente: Elaboración propia

Los modos se normalizan con respecto a la matriz de masa de acuerdo a la ecuación 2.41:

$$\{\varphi^r\}^T[M]\{\varphi^r\} = 1$$

Para el primer modo $\{\varphi^1\}$:

$$(\varphi_1^1)^2\{1 \quad 1.8020 \quad 2.2468\}\begin{bmatrix} 0.085 & 0 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1.8020 \\ 2.2468 \end{Bmatrix} = 1 \qquad \varphi_1^1 = 1.1247$$

Se obtiene: $[\Phi^1] = 1.1247\begin{Bmatrix} 1 \\ 1.8020 \\ 2.2468 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1247 \\ 2.0264 \\ 2.5269 \end{Bmatrix}$

Para el segundo modo $\{\varphi^2\}$:

$$(\varphi_1^2)^2\{1 \quad 0.4450 \quad -0.8018\}\begin{bmatrix} 0.085 & 0 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.4450 \\ -0.8018 \end{Bmatrix} = 1 \qquad \varphi_1^2 = 2.5279$$

Se obtiene: $[\Phi^2] = 2.5279\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.4450 \\ -0.8018 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.5279 \\ 1.1247 \\ -2.0268 \end{Bmatrix}$

Para el tercer modo $\{\varphi^3\}$:

$$(\varphi_1^3)^2\{1 \quad -1.2482 \quad 0.5552\}\begin{bmatrix} 0.085 & 0 & 0 \\ 0 & 0.085 & 0 \\ 0 & 0 & 0.085 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.2482 \\ 0.5552 \end{Bmatrix} = 1 \qquad \varphi_1^3 = 2.0257$$

Se obtiene: $[\Phi^3] = 2.5279\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.2482 \\ 0.5552 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0257 \\ -2.5282 \\ 1.1247 \end{Bmatrix}$

Resumiendo se obtiene la matriz modal:

$$[\Phi] = [\Phi^1 \quad \Phi^2 \quad \Phi^3] = \begin{bmatrix} 1.1247 & 2.5279 & 2.0257 \\ 2.0264 & 1.1247 & -2.5282 \\ 2.5269 & -2.0268 & 1.1247 \end{bmatrix}$$

4.3. CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS (6500mm/s^2)

En esta parte se determinan los desplazamientos y esfuerzos máximos en la estructura, cuando está sometido a una aceleración armónica de amplitud constante igual a 6500 mm/s^2 en la base, para distintas frecuencias como se detalla en la tabla 4.2.

Tabla 4.2 Casos analizados

Descripción	Aceleración	Frecuencia
Caso 1	6500 mm/s^2	3.1 Hz
Caso 2 (Resonancia)	6500 mm/s^2	3.8 Hz
Caso 3 (Resonancia)	6500 mm/s^2	10.67 Hz
Caso 4 (Resonancia)	6500 mm/s^2	15.42 Hz

Fuente: Elaboración propia

En el primer caso se determinan únicamente los desplazamientos máximos, para el resto de casos se determinan desplazamientos y esfuerzos máximos. Todos los casos tienen las mismas ecuaciones desacopladas.

Datos:

Aceleración (a)	:	6500 mm/s^2
Masa (m)	:	0.085 Kg
Fuerza (F_0)	:	0.552 N
Amortiguamiento (ξ_i)	:	0.075

Con las siguientes frecuencias determinadas previamente:

MODO	$\omega_i^2\ (rad/s)^2$	$\omega_i (rad/s)$	$f_i\ (Hz)$
1	570.07	23.87	3.80
2	4494.57	67.04	10.67
3	9387.04	96.88	15.42

Las ecuaciones desacopladas de acuerdo a la ecuación 2.47, tienen la forma:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = Q_i(t)$$

El valor de $Q_i(t)$, se determina como:

$$\{Q\} = [\Phi]^T\{F(t)\} = \begin{bmatrix} 1.1247 & 2.0264 & 2.5269 \\ 2.5279 & 1.1247 & -2.0268 \\ 2.0257 & -2.5282 & 1.1247 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.552 \\ 0.552 \\ 0.552 \end{Bmatrix} sen\omega t$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.134 sen\omega t \\ 0.897 sen\omega t \\ 0.343 sen\omega t \end{Bmatrix}$$

Se obtienen tres ecuaciones desacopladas:

$$\ddot{\eta}_1(t) + 3.58\dot{\eta}_1(t) + 570.07\eta_1(t) = 3.134 sen\omega t$$

$$\ddot{\eta}_2(t) + 10.05\dot{\eta}_2(t) + 4494.57\eta_2(t) = 0.897 sen\omega t$$

$$\ddot{\eta}_3(t) + 14.53\dot{\eta}_3(t) + 9387.04\eta_3(t) = 0.343 sen\omega t$$

La solución de estado estable para las tres ecuaciones anteriores, está dado por las ecuaciones 2.48 que se vuelven a escribir:

$$\eta_i(t) = \eta_i \mathrm{sen}(\omega t - \emptyset_i)$$

$$\eta_i = \frac{Q_i}{\omega_i^2}\frac{1}{\left[\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi_i\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad \emptyset_i = tan^{-1}\left\{\frac{2\xi_i\frac{\omega}{\omega_i}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}\right\}$$

Esta solución varía dependiendo de la frecuencia de excitación, las frecuencias están definidas para cada caso en la tabla 4.2.

Caso 1: cuando la frecuencia de excitación es $f = 3.1\text{Hz}, \ \omega_1 = 19.47 \text{ rad/s}$

Reemplazando el valor de la frecuencia $f = 3.1$ Hz, en las ecuaciones 2.48, se obtienen los valores de $\eta_i, \emptyset_i$ y se resumen a continuación:

Ecuación	Q_i (N)	ω/ω_i	η_i (m)	$\tan\emptyset_i$	$\emptyset_i$ (rad)
1	3.134	0.816	0.0154365	0.4146	0.3930
2	0.897	0.291	0.0002178	0.0476	0.0476
3	0.343	0.201	0.0000381	0.0314	0.0314

Las ecuaciones desacopladas resultan:

$$\eta_1(t) = 0.0154365sen(\omega t - 0.3930)$$

$$\eta_2(t) = 0.0002178sen(\omega t - 0.0476)$$

$$\eta_3(t) = 0.0000381sen(\omega t - 0.0314)$$

Las ecuaciones se transforman utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - \emptyset) = sen(\omega t)\cos\emptyset - cos(\omega t)sen\ \emptyset$$

Ecuación	$\emptyset$	$\cos\emptyset$	$sen\emptyset$
1	0.3930	0.9237	0.3830
2	0.0476	0.9989	0.0475
3	0.0314	0.9995	0.0314

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.0142595sen(\omega t) - 0.00591222cos(\omega t)$$

$$\eta_2(t) = 0.0002176sen(\omega t) - 0.00001036cos(\omega t)$$

$$\eta_3(t) = 0.0000381sen(\omega t) - 0.00000120cos(\omega t)$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.0167\, sen\omega t - 0.0067\, cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.0290\, sen\omega t - 0.0120\, cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = 0.0356\, sen\omega t - 0.0149\, cos\omega t$

El valor máximo de desplazamiento se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero para obtener el valor de ωt, que da un valor máximo de desplazamiento:

$\dot{u}_1(t) = 0.0167\omega\, cos\omega t + 0.0067\,\omega\, sen\omega t = 0$ $\omega t = -2.495\, rad$

$\dot{u}_2(t) = 0.0290\,\omega\, cos\omega t + 0.0120\,\omega\, sen\omega t = 0$ $\omega t = -2.422\, rad$

$\dot{u}_3(t) = 0.0356\,\omega\, cos\omega t + 0.0149\,\omega\, sen\omega t = 0$ $\omega t = -2.388\, rad$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de desplazamiento, se obtienen los valores máximos en valor absoluto:

$|u_1(t)|_{max} = |0.0167\, sen(-2.495) - 0.0067\cos(-2.495)| = 17.95\, mm$

$|u_2(t)|_{max} = |0.0290\, sen(-2.422) - 0.0120\, cos(-2.422)| = 31.42\, mm$

$|u_3(t)|_{max} = |0.0356\, sen(-2.388) - 0.0149\, cos(-2.388)| = 38.63\, mm$

Caso 2 (Resonancia): cuando la frecuencia de excitación es $f = 3.8$ Hz, $\omega = 23.876$ rad/s

Reemplazando el valor de la frecuencia $f = 3.8$ Hz, en las ecuaciones 2.48, se obtienen los valores de $\eta_i, \emptyset_i$ y se resumen a continuación:

Ecuación	$\mathbf{Q_i}$ (N)	$\boldsymbol{\omega/\omega_i}$	$\boldsymbol{\eta_i}$ (m)	$\mathbf{tan\emptyset_i}$	$\emptyset_i$ (rad)
1	3.134	1.000	0.0366534	---------	1.5700
2	0.897	0.356	0.0002283	0.0612	0.0611
3	0.343	0.246	0.0000389	0.0394	0.0393

Las ecuaciones desacopladas resultan:

$$\eta_1(t) = 0.0366534 sen(\omega t - 1.5700)$$

$$\eta_2(t) = 0.0002283 sen(\omega t - 0.0611)$$

$$\eta_3(t) = 0.0000389sen(\omega t - 0.0393)$$

Las ecuaciones se transforman utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - \emptyset) = sen(\omega t)\cos\emptyset - cos(\omega t)sen\ \emptyset$$

Ecuación	$\emptyset$	$\cos\emptyset$	$sen\emptyset$
1	1.5700	0.000796	1.0000
2	0.0611	0.998134	0.0611
3	0.0393	0.999226	0.0393

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.0000292sen(\omega t) - 0.03665340cos(\omega t)$$

$$\eta_2(t) = 0.0002278sen(\omega t) - 0.00001394cos(\omega t)$$

$$\eta_3(t) = 0.0000389sen(\omega t) - 0.00000153cos(\omega t)$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.000688\ sen\omega t - 0.0413\ cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.000217sen\omega t - \ 0.0743\ cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = -0.000344sen\omega t - 0.0926\ cos\omega t$

El valor máximo de desplazamiento se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero para obtener el ángulo ωt , que da un valor máximo de desplazamiento:

$\dot{u}_1(t) = 0.000688\ \omega\ cos\omega t + 0.0413\ \omega\ sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = -0.0167\ rad$

$\dot{u}_2(t) = 0.000217\ \omega\ cos\omega t + \ 0.0743\ \omega\ sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = -0.0029\ rad$

$\dot{u}_3(t) = -0.000344\ \omega\ cos\omega t + 0.0926\ \omega\ sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = 0.0037\ rad$

Reemplazando estos ángulos en las tres ecuaciones de desplazamientos, se obtienen los máximos valores y se grafican en la figura 4.9:

$$u_1(t)_{max} = 0.000688\ sen(-0.0167) - 0.0413\ \cos(-0.0167) \quad = \quad -41.27\ mm$$

$$u_2(t)_{max} = 0.000217\ sen(-0.0029) - 0.0743\ cos(-0.0029) \quad = \quad -74.29\ mm$$

$$u_3(t)_{max} = -0.000344 sen(0.0037) - 0.0926\ cos(0.0037) \quad = \quad -92.59\ mm$$

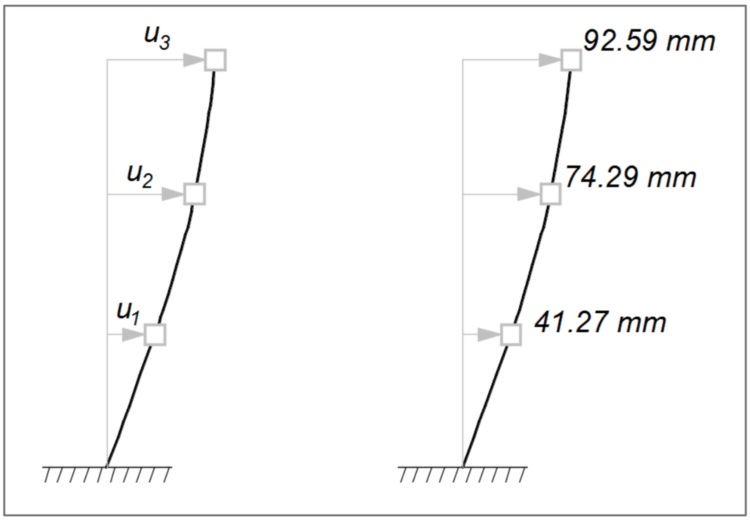


Figura 4.9 Desplazamientos-primer modo (3.8 Hz)
Fuente: Elaboración propia

Calculo de aceleraciones. Las ecuaciones de aceleraciones se obtienen al derivar por segunda vez las ecuaciones de desplazamientos, resultando las siguientes ecuaciones:

Ecuación I : $\ddot{u}_1(t) = -0.000688\omega^2 sen\omega t + 0.0413\omega^2 cos\omega t$

Ecuación II : $\ddot{u}_2(t) = -0.000217\omega^2 sen\omega t + 0.0743\ \omega^2 cos\omega t$

Ecuación III : $\ddot{u}_3(t) = +0.000344\omega^2 sen\omega t + 0.0926\omega^2 cos\omega t$

El valor máximo de aceleración se obtiene derivando cada ecuación de aceleración e igualando a cero, para obtener el ángulo ωt, que da un valor máximo de aceración.

$$\dddot{u}_1(t) = 0.000688\ \omega^3 cos\omega t + 0.0413\ \omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -0.0167\ rad$$

$$\dddot{u}_2(t) = 0.000217\ \omega^3\ cos\omega t + 0.0743\ \omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -0.0029\ rad$$

$$\dddot{u}_3(t) = -0.000344\ \omega^3\ cos\omega t + 0.0926\ \omega^3 sen\omega t = 0 \qquad \omega t = 0.0037\ rad$$

Reemplazando estos ángulos en las tres ecuaciones de aceleraciones, se obtienen los máximos valores de aceleraciones:

$$\ddot{u}_1(t)_{max} = -0.000688x23.876^2sen(-0.0167) + 0.0413x23.876^2\cos(-0.0167)$$

$$\ddot{u}_1(t)_{max} = 23.53\ m/s^2$$

$$\ddot{u}_2(t)_{max} = -0.000217x23.876^2sen(-0.0029) + \ 0.0743x23.876^2\cos(-0.0029)$$

$$\ddot{u}_2(t)_{max} = 42.35\ m/s^2$$

$$\ddot{u}_3(t)_{max} = +0.000344x23.876^2sen(0.0037)\ + 0.0926x23.876^2\cos(0.0037)$$

$$\ddot{u}_3(t)_{max} = 52.78\ m/s^2$$

Calculo de fuerzas. Las fuerzas que actúan en el primer modo de vibración se obtienen al multiplicar la masa de cada elemento por la aceleración máxima.

$$F_1 = ma_1 = m\ddot{u}_1(t)_{max} = 0.085x23.53 = 2.0\ N$$

$$F_2 = ma_2 = m\ddot{u}_2(t)_{max} = 0.085x42.35 = 3.6\ \mathrm{N}$$

$$F_3 = ma_3 = m\ddot{u}_3(t)_{max} = 0.085x52.78 = 4.5\ \mathrm{N}$$

Estos resultados se muestran gráficamente en la figura 4.10.

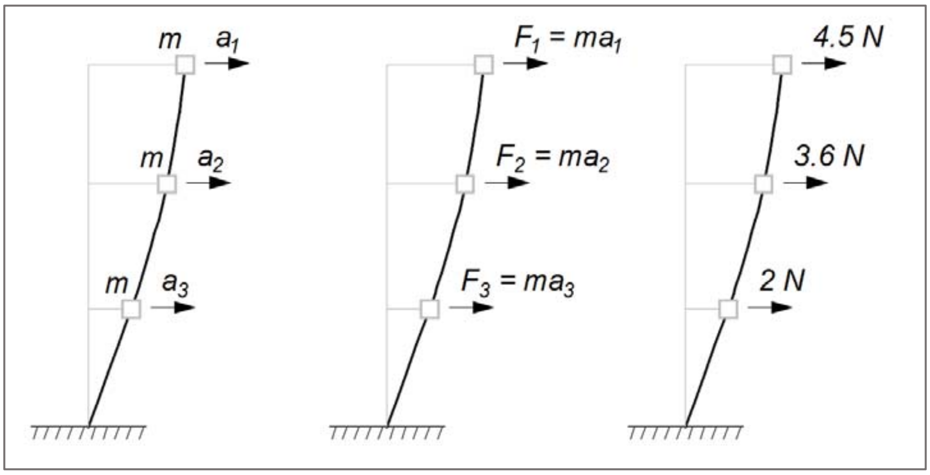


Figura 4.10 Fuerzas - primer modo de vibración - 3.8Hz
Fuente: Elaboración propia

La fuerza en cada columna se obtiene dividiendo las fuerzas calculadas entre cuatro. Con el método de las secciones se obtienen los diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas y momentos internos, figura 4.11.

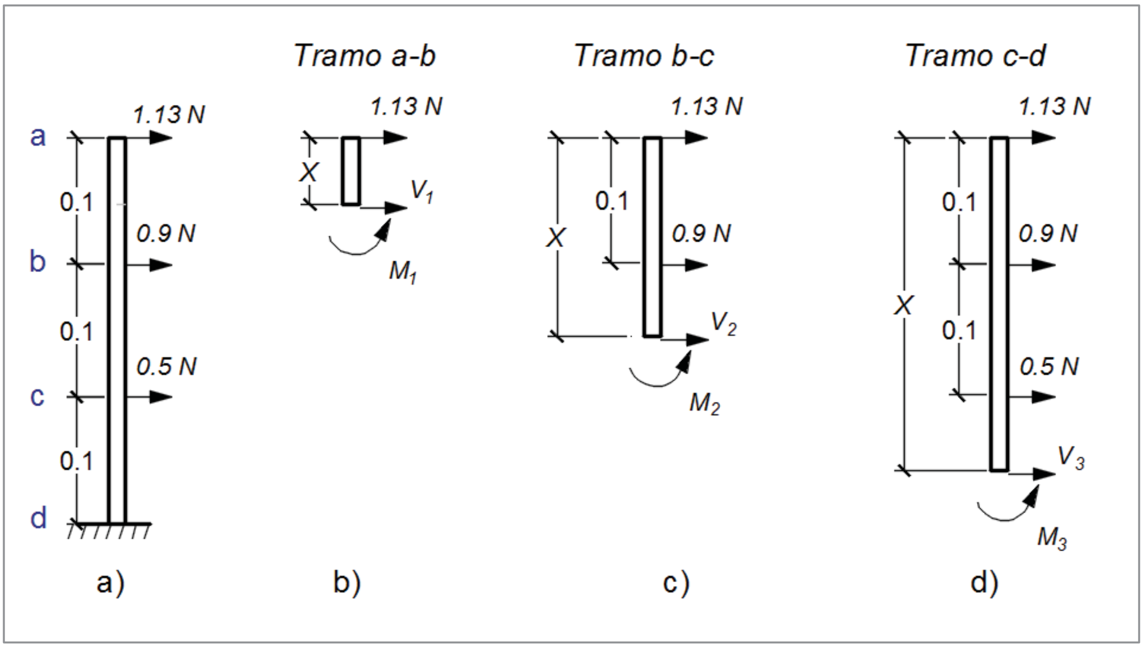


Figura 4.11 Diagrama de cuerpo libre
Fuente: Elaboración propia

Tramo a-b:

$\sum F_H = 0:$ $\qquad V_{ab} = -1.13\ \text{N}$

$\sum M_1 = 0:$ $\qquad M_1 = 1.13X \qquad M_b = 0.113\ \text{Nm}$

Tramo b-c:

$\sum F_H = 0:$ $\qquad V_{bc} = -2.03\ \text{N}$

$\sum M_2 = 0:$ $\qquad M_2 = 1.13X + 0.9(X - 0.1) \qquad M_b = 0.113\ \text{Nm}$

Tramo c-d:

$\sum F_H = 0:$ $\qquad V_{cd} = -2.53\ \text{N}$

$\sum M_3 = 0:$ $\qquad M_3 = 1.13X + 0.9(X - 0.1) + 0.5(X - 0.2) \qquad M_d = 0.57\ \text{Nm}$

Con las ecuaciones se obtienen los diagramas de momentos y fuerzas cortantes como se muestra en la figura 4.12.

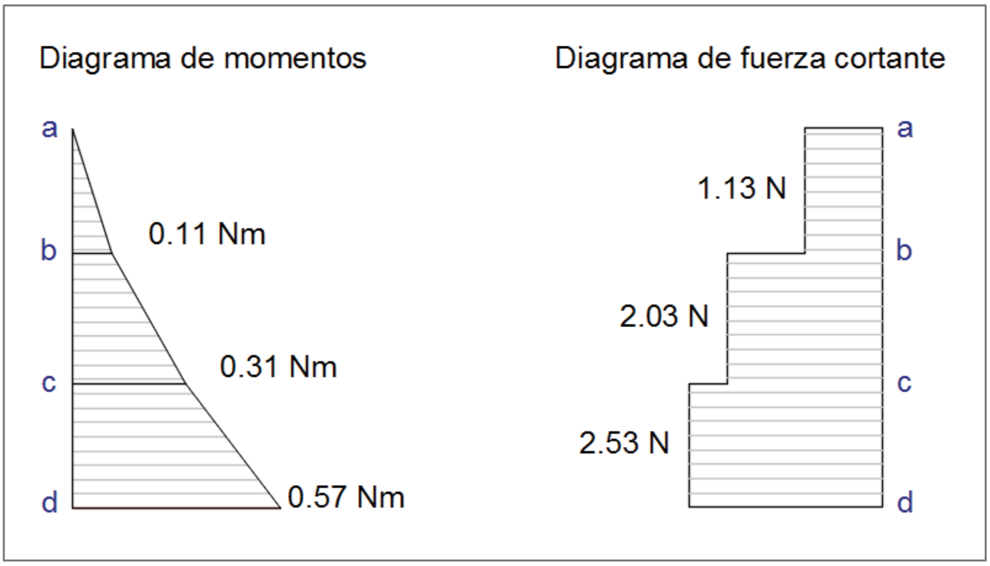


Figura 4.12 Diagramas de momento y fuerza cortante
Fuente: Elaboración propia

Calculo de esfuerzos. Con el diagrama de momentos se determina el esfuerzo máximo por flexión y con el diagrama de fuerza cortante el esfuerzo cortante máximo, en ambos casos el punto crítico es "d":

Esfuerzo de flexión : $\sigma_f = \frac{\mathrm{Mc}}{\mathrm{I}}$ $\sigma_f = \frac{0.57x0.002}{12.56x10^{-12}} = 90.76\ \mathrm{M}pa$

Esfuerzo cortante : $\tau_c = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$ $\tau_c = \frac{2.53}{1.256x10^{-5}} = 0.2\ \mathrm{M}pa$

El esfuerzo de flexión es mucho mayor al esfuerzo cortante, se considera a este último despreciable. El esfuerzo por flexión de 90.76 Mpa, es mucho mayor a la resistencia del material 40 Mpa. El material en este modo se deforma inelásticamente.

Caso 3 (Resonancia): cuando la frecuencia de excitación es $f = 10.67\ \mathrm{Hz}$, $\omega_1 = 67.04\ \mathrm{rad/s}$

Reemplazando el valor de la frecuencia $f = 10.67\ \mathrm{Hz}$, en las ecuaciones 2.48 se obtienen los valores de $\eta_i, \emptyset_i$ y se resumen en la siguiente tabla:

Ecuación	Q_i (N)	ω/ω_i	η_i (m)	$\tan\emptyset_i$	$\emptyset_i$ (rad)
1	3.134	2.808	0.0007971	-0.0693	-0.069
2	0.897	1.000	0.0013312	-------	1.570
3	0.343	0.692	0.0000688	0.1991	0.197

Las ecuaciones desacopladas resultan:

$$\eta_1(t) = 0.0007971 sen(\omega t + 0.069)$$

$$\eta_2(t) = 0.0013312 sen(\omega t - 1.570)$$

$$\eta_3(t) = 0.0000688 sen(\omega t - 0.197)$$

Las ecuaciones se transforman utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - \emptyset) = sen(\omega t)\cos\emptyset - cos(\omega t) sen\ \emptyset$$

Ecuación	$\emptyset$	$\cos\emptyset$	$sen\emptyset$
1	-0.069	0.997605	-0.069172
2	1.570	0.000796	1.000000
3	0.197	0.980741	0.195311

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.000795234 sen(\omega t) - 0.0000551 cos(\omega t)$$

$$\eta_2(t) = 0.00000106 sen(\omega t) - 0.0013312 cos(\omega t)$$

$$\eta_3(t) = 0.00006752 sen(\omega t) - 0.0000134 cos(\omega t)$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.00103\ sen\omega t - 0.00333\ cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.00144 sen\omega t - 0.00135\ cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = 0.00208 sen\omega t + 0.00282\ cos\omega t$

El valor máximo de desplazamiento se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero para obtener el ángulo ωt , que da un máximo desplazamiento:

$\dot{u}_1(t) = 0.00103\ \omega\ cos\omega t + 0.00333\ \omega\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -0.310\ rad$

$\dot{u}_2(t) = 0.00144\ \omega\ cos\omega t + \ 0.00135\ \omega\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -1.067\ rad$

$\dot{u}_3(t) = 0.00208\ \omega\ cos\omega t - 0.00282\ \omega\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = 0.738\ rad$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de desplazamientos, se obtienen los valores máximos y se muestra en el gráfico 4.13:

$u_1(t)_{max} = 0.00103\ \ sen(-0.310\ ) - 0.00333\ \ \cos(-0.310\ ) \quad = \quad -3.49\ mm$

$u_2(t)_{max} = 0.00144\ sen(-1.067\ ) - \ 0.00135\ cos(-1.067) \quad = \quad -1.98\ mm$

$u_3(t)_{max} = 0.00208sen(0.738) + 0.00282\ cos(0.738) \quad = \quad 3.51\ mm$

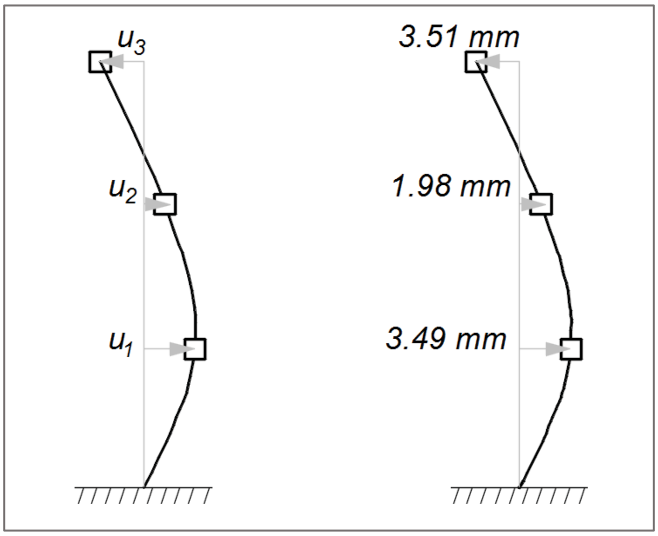


Figura 4.13 Desplazamientos-segundo modo (10.67 Hz)
Fuente: Elaboración propia

Calculo de aceleraciones. Las ecuaciones de aceleraciones se obtienen al derivar por segunda vez las ecuaciones de desplazamientos, resultando las siguientes ecuaciones:

Ecuación I : $\ddot{u}_1(t) = -0.00103\ \omega^2 sen\omega t + 0.00333\ \omega^2 cos\omega t$

Ecuación II : $\ddot{u}_2(t) = -0.00144\ \omega^2 sen\omega t + \ 0.00135\ \omega^2 cos\omega t$

Ecuación III : $\ddot{u}_3(t) = -0.00208\ \omega^2 sen\omega t - 0.00282\ \omega^2 cos\omega t$

El valor máximo de aceleración se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero, para obtener el ángulo ωt, que da un valor máximo de aceración.

$\ddot{u}_1(t) = -0.00103\ \omega^3 cos\omega t - 0.00333\omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -0.310\ rad$

$\ddot{u}_2(t) = -0.00144\ \omega^3\ cos\omega t - 0.00135\ \omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -1.067\ rad$

$\ddot{u}_3(t) = -0.00208\ \omega^3\ cos\omega t + 0.00282\ \omega^3 sen\omega t = 0 \qquad \omega t = 0.738\ rad$

Reemplazando estos ángulos en las tres ecuaciones de aceleraciones, se obtienen los máximos valores de aceleraciones:

$\ddot{u}_1(t)_{max} = -0.00103x67.04^2 sen(-0.310) + 0.00333x67.04^2 \cos(-0.310)$

$\ddot{u}_1(t)_{max} = 15.67\ m/s^2$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = -0.00144x67.04^2 sen(-1.067) + 0.00135x67.04^2 \cos(-1.067)$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = 8.60\ m/s^2$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = -0.00208x67.04^2 sen(0.738) - 0.00282x67.04^2 \cos(0.738)$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = -15.68\ m/s^2$

Calculo de fuerzas. Las fuerzas que actúan en el primer modo de vibración se obtienen al multiplicar la masa de cada elemento por la aceleración máxima.

$F_1 = ma_1 = m\ddot{u}_1(t)_{max} = 0.085x15.67 = 1.33\ \mathrm{N}$

$F_2 = ma_2 = m\ddot{u}_2(t)_{max} = 0.085x8.60 = 0.73\ \mathrm{N}$

$F_3 = ma_3 = m\ddot{u}_3(t)_{max} = -0.085x15.68 = -1.33\ \mathrm{N}$

Los resultados se muestran gráficamente en la figura 4.14.

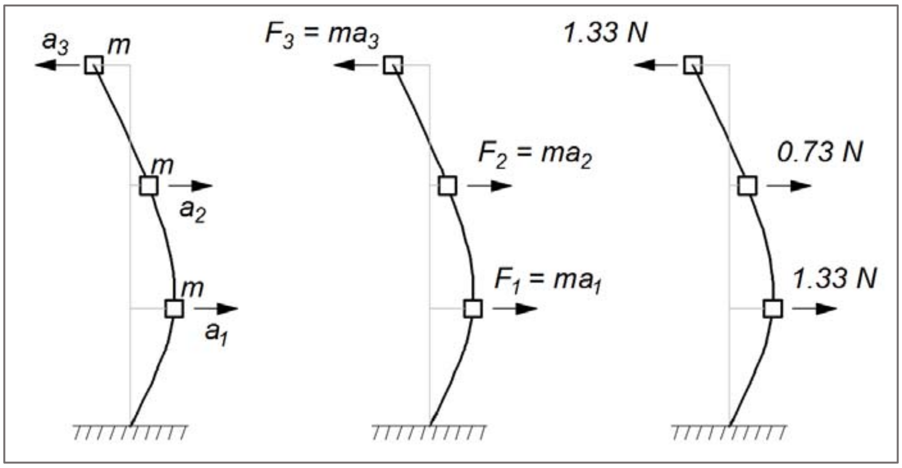


Figura 4.14 Fuerzas - segundo modo (10.67 Hz)
Fuente: Elaboración propia

La fuerza en cada columna se obtiene dividiendo las fuerzas calculadas entre cuatro. Con el método de las secciones se obtienen los diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas y momentos internos, figura 4.15.

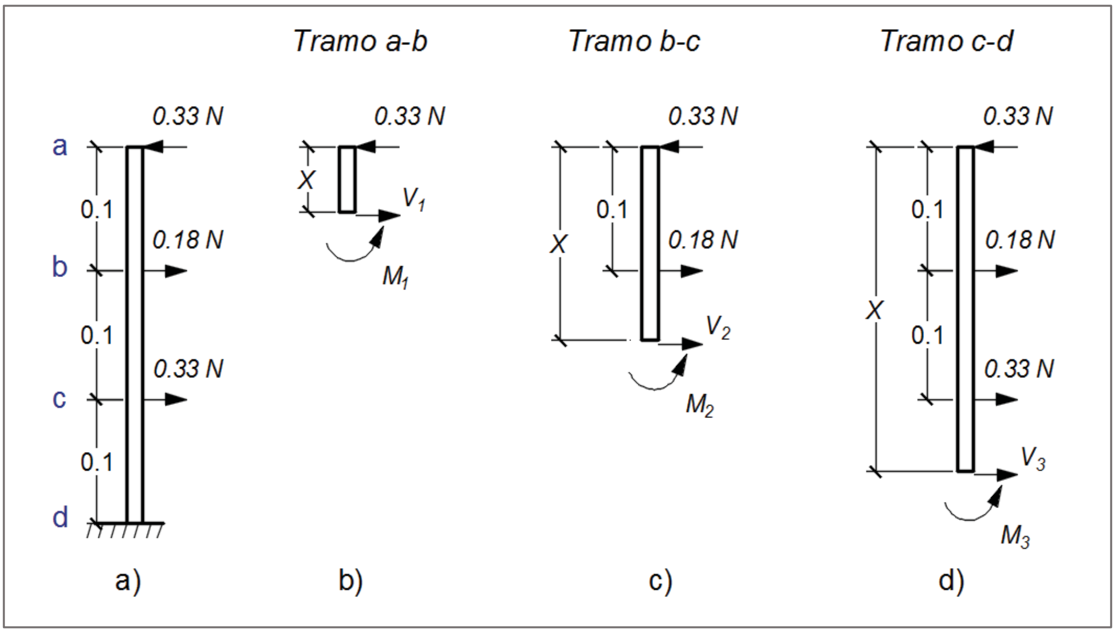


Figura 4.15 Diagrama de cuerpo libre
Fuente: Elaboración propia

Tramo a-b:

$$\sum F_H = 0: \qquad V_{ab} = 0.33\ \mathrm{N}$$

$$\sum M_1 = 0: \qquad M_1 = 0.33X \qquad M_b = -0.033\ \mathrm{Nm}$$

Tramo b-c:

$$\sum F_H = 0: \qquad V_{bc} = 0.15\ \mathrm{N}$$

$$\sum M_2 = 0: \qquad M_2 = 0.18(X - 0.1) - 0.33X \qquad M_b = -0.048\ \mathrm{Nm}$$

Tramo c-d:

$$\sum F_H = 0: \qquad V_{cd} = -0.18\ \mathrm{N}$$

$$\sum M_3 = 0: \quad M_3 = 0.18(X - 0.1) + 0.33(X - 0.2) - 0.33X \qquad M_d = -0.03\ \mathrm{Nm}$$

Con las ecuaciones se obtienen los diagramas de momentos y fuerzas cortantes como se muestra en la figura 4.16.

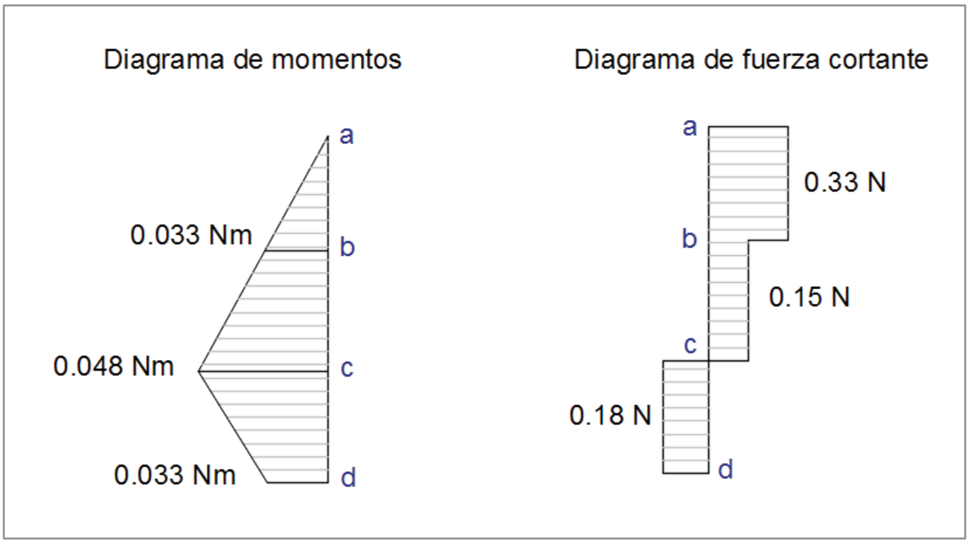


Figura 4.16 Diagramas de momento y fuerza cortante
Fuente: Elaboración propia

Calculo de esfuerzos. Con el diagrama de momentos se determina el esfuerzo máximo por flexión y con el diagrama de fuerza cortante el esfuerzo cortante máximo, en ambos casos el punto crítico es "c":

Esfuerzo de flexión : $\sigma_f = \frac{\mathrm{Mc}}{\mathrm{I}}$ $\quad \sigma_f = \frac{0.048x0.002}{12.56x10^{-12}} = 7.64\ Mpa$

Esfuerzo cortante : $\tau_c = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$ $\quad \tau_c = \frac{0.18}{1.256x10^{-5}} = 0.014\ Mpa$

El esfuerzo de flexión es mucho mayor al esfuerzo cortante, podemos considerar a este último despreciable. El esfuerzo por flexión de 7.64 Mpa, es menor a la resistencia del material 40 Mpa. La estructura en este modo se deforma elásticamente.

Caso 4 (Resonancia): cuando la frecuencia de excitación es $f = 15.42\ \mathrm{Hz}$, $\omega_1 = 96.88\ \mathrm{rad/s}$

Reemplazando el valor de la frecuencia $f = 15.42\ Hz$, en las ecuaciones 2.48 se obtienen los valores de $\eta_i, \emptyset_i$ y se resumen en la siguiente tabla:

Ecuación	Q_i (N)	ω/ω_i	η_i (m)	$\tan\emptyset_i$	$\emptyset_i$ (rad)
1	3.134	4.058	0.000355	-0.04460	-0.0446
2	0.897	1.445	0.000180	-0.19915	-0.1966
3	0.343	1.000	0.000244	-------	1.5700

La solución para las ecuaciones desacopladas es:

$$\eta_1(t) = 0.000355sen(\omega t + 0.0446)$$

$$\eta_2(t) = 0.000180sen(\omega t + 0.1966)$$

$$\eta_3(t) = 0.000244sen(\omega t - 1.5700)$$

Las ecuaciones se transforman utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - \emptyset) = sen(\omega t)\cos\emptyset - cos(\omega t)sen\,\emptyset$$

Ecuación	$\emptyset$	$\cos\emptyset$	$sen\emptyset$
1	-0.045	0.999007	-0.0446
2	-0.197	0.980741	-0.1953
3	1.570	0.000796	1.0000

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.000354851sen(\omega t) + 0.0000158cos(\omega t)$$

$$\eta_2(t) = 0.000176437sen(\omega t) + 0.0000351cos(\omega t)$$

$$\eta_3(t) = 0.000000194sen(\omega t) - 0.0000351cos(\omega t)$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.000846\,sen\omega t - 0.000387cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.000917sen\omega t + 0.000688\,cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = 0.000539sen\omega t - 0.000306cos\omega t$

El valor máximo de desplazamiento se obtiene derivado cada ecuación e igualando a cero para obtener el ángulo ωt , que da un máximo desplazamiento:

$$\dot{u}_1(t) = 0.000845\omega\ cos\omega t + 0.000387\ \omega\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -2.182\ rad$$

$$\dot{u}_2(t) = 0.000917\omega\ cos\omega t - \ 0.000688\ \omega\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = 1.332\ rad$$

$$\dot{u}_3(t) = 0.000539\ \omega\ cos\omega t + 0.000306\ \omega\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -1.764\ rad$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de desplazamientos, se obtienen los valores máximos y se grafican en la figura 4.17:

$$u_1(t)_{max} = 0.000846sen(-2.182\ ) - 0.000387\cos(-2.182\ ) \qquad = \qquad -0.93\ mm$$

$$u_2(t)_{max} = 0.000917sen(1.332\ ) + \ 0.000688cos(1.332) \qquad = \qquad 1.15\ mm$$

$$u_3(t)_{max} = 0.000539sen(-1.764) - 0.000306\ cos(-1.764) \qquad = \qquad -0.62\ mm$$

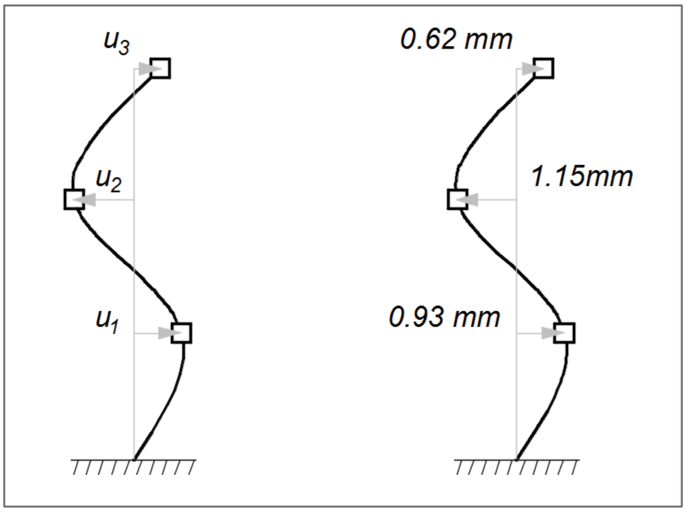


Figura 4.17 Desplazamientos-tercer modo (15.42 Hz)
Fuente: Elaboración propia

Calculo de aceleraciones. Las ecuaciones de aceleraciones se obtienen al derivar por segunda vez las ecuaciones de desplazamientos, resultando las siguientes ecuaciones:

$$\text{Ecuación I} \quad : \quad \ddot{u}_1(t) = -0.000845\ \omega^2 sen\omega t + 0.000387\ \omega^2 cos\omega t$$

$$\text{Ecuación II} \quad : \quad \ddot{u}_2(t) = -0.000917\ \omega^2 sen\omega t - \ 0.000688\ \omega^2 cos\omega t$$

$$\text{Ecuación III} \quad : \quad \ddot{u}_3(t) = -0.000539\ \omega^2 sen\omega t + 0.000306\ \omega^2 cos\omega t$$

El valor máximo de aceleración se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero, para obtener el ángulo ωt, que da un valor máximo de aceración.

$\ddot{u}_1(t) = -0.000845\ \omega^3 cos\omega t - 0.000387\omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -2.182\ rad$

$\ddot{u}_2(t) = -0.000917\ \omega^3\ cos\omega t + 0.000688\ \omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -1.332\ rad$

$\ddot{u}_3(t) = -0.000539\ \omega^3\ cos\omega t - 0.000306\ \omega^3 sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -\ 1.764\ rad$

Reemplazando estos ángulos en las tres ecuaciones de aceleraciones, se obtienen los máximos valores de aceleraciones:

$\ddot{u}_1(t)_{max} = -0.000845x96.88^2 sen(-2.182) + 0.000387x96.88^2 \cos(-2.182)$

$\ddot{u}_1(t)_{max} = 4.41\ m/s^2$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = -0.000917\ x96.88^2 sen(-1.332 -\ 0.000688x96.88^2 \cos(-1.332)$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = -10\ m/s^2$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = -0.000539x96.88^2 sen(-\ 1.764) + 0.000306x96.88^2 \cos(-\ 1.764)$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = 4.41\ m/s^2$

Calculo de fuerzas: Las fuerzas que actúan en el primer modo de vibración se obtienen al multiplicar la masa de cada elemento por la aceleración máxima.

$F_1 = ma_1 = m\ddot{u}_1(t)_{max} = 0.085x4.41 = 0.37\ \text{N}$

$F_2 = ma_2 = m\ddot{u}_2(t)_{max} = -0.085x10 = -0.85\ \text{N}$

$F_3 = ma_3 = m\ddot{u}_3(t)_{max} = 0.085x4.41 = 0.37\ \text{N}$

Los resultados se muestran gráficamente en la figura 4.18.

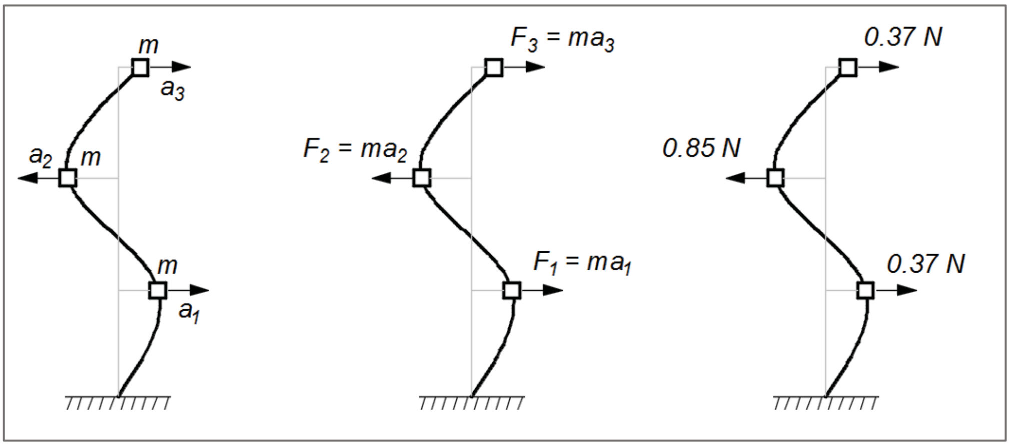


Figura 4.18 Fuerzas - Tercer modo (15.42 Hz)
Fuente: Elaboración propia

La fuerza en cada columna se obtiene dividiendo las fuerzas calculadas entre cuatro. Con el método de las secciones se obtienen los diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas y momentos internos, figura 4.19.

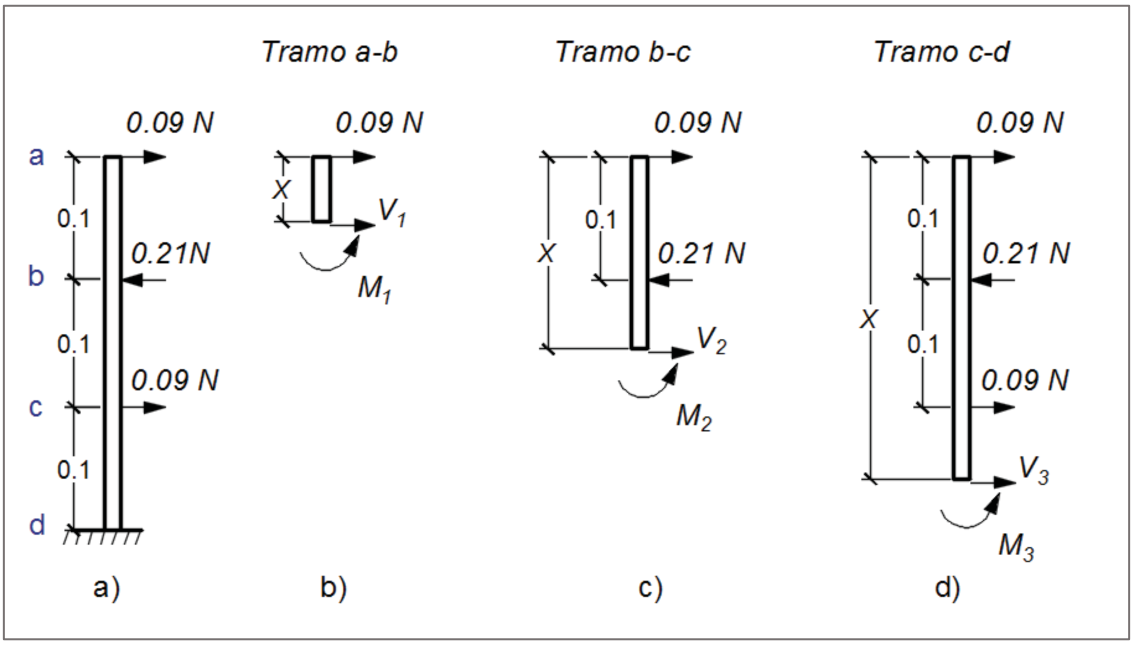


Figura 4.19 Diagrama de cuerpo libre
Fuente: Elaboración propia

Tramo a-b:

$\sum F_H = 0$: $V_{ab} = -0.09\ \mathrm{N}$

$\sum M_1 = 0$: $M_1 = 0.09X$ $M_b = 0.009\ \mathrm{Nm}$

Tramo b-c:

$\sum F_H = 0$: $V_{bc} = 0.12\ \mathrm{N}$

$\sum M_2 = 0$: $M_2 = 0.09X - 0.21(X - 0.1)$ $M_b = -0.003\ \mathrm{Nm}$

Tramo c-d:

$\sum F_H = 0$: $V_{cd} = 0.003\ \mathrm{N}$

$\sum M_3 = 0$: $M_3 = 0.09X + 0.09(X - 0.2) - 0.21(X - 0.1)$ $M_d = -0.006\ \mathrm{Nm}$

Con las ecuaciones se obtienen los diagramas de momentos y fuerzas cortantes como se muestra en la figura 4.20.

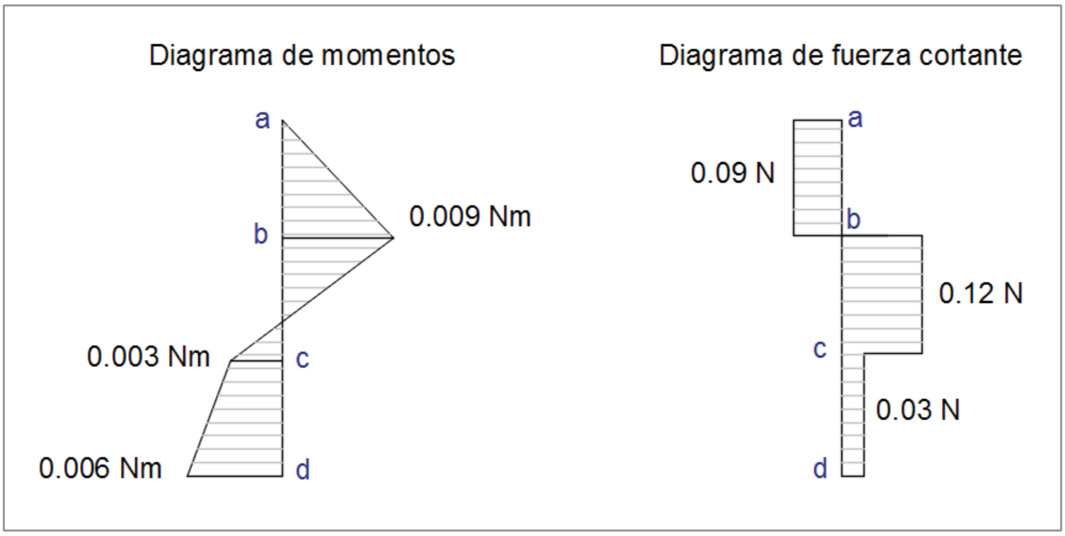


Figura 4.20 Diagramas de momento y fuerza cortante
Fuente: Elaboración propia

Calculo de esfuerzos: con el diagrama de momentos se determina el esfuerzo máximo por flexión y con el diagrama de fuerza cortante el esfuerzo cortante máximo, en ambos casos el punto crítico es "b":

Esfuerzo de flexión : $\sigma_f = \frac{\mathrm{Mc}}{\mathrm{I}}$ $\sigma_f = \frac{0.009x0.002}{12.56x10^{-12}} = 1.43\ \mathrm{M}pa$

Esfuerzo cortante : $\tau_c = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$ $\tau_c = \frac{0.12}{1.256x10^{-5}} = 0.0095\ \mathrm{M}pa$

El esfuerzo de flexión es mucho mayor al esfuerzo cortante, podemos considerar a este último despreciable. El esfuerzo por flexión de 1.43 Mpa, es mucho menor a la resistencia del material 40 Mpa. La estructura en este modo se deforma elásticamente.

4.4. CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS (13000mm/s^2)

En esta parte se determinan los desplazamientos y esfuerzos máximos en la estructura, cuando está sometido a una aceleración armónica de amplitud constante igual a 13000 mm/s^2 en la base, para distintas frecuencias como se detalla en la tabla 4.3.

Tabla 4.3 Casos analizados

Descripción	Aceleración	Frecuencia
Caso 1	13000 mm/s^2	10.50 Hz
Caso 2	13000 mm/s^2	15.80 Hz
Caso 3 (Resonancia)	13000 mm/s^2	3.80 Hz
Caso 4 (Resonancia)	13000 mm/s^2	10.67 Hz
Caso 5 (Resonancia)	13000 mm/s^2	15.42 Hz

Fuente: Elaboración propia

En el primer y segundo caso se determinan únicamente las amplitudes máximas, para el resto de casos se determinan desplazamientos y esfuerzos máximos. Todos los casos tienen las mismas ecuaciones desacopladas.

Datos:

Aceleración (a): 13000 mm/s^2

Masa (m): 0.085 Kg

Fuerza (F_0): 1.105 N

Amortiguamiento (ξ_i): 0.075

Con las siguientes frecuencias determinadas previamente:

MODO	$\boldsymbol{\omega_i}^2\ (\mathbf{rad/s})^2$	$\boldsymbol{\omega_i}(\mathbf{rad/s})$	$\mathbf{f}_i\ (\mathbf{Hz})$
1	570.07	23.87	3.80
2	4494.57	67.04	10.67
3	9387.04	96.88	15.42

Las ecuaciones desacopladas de acuerdo a la ecuación 2.47, tienen la forma:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = Q_i(t)$$

El valor de $Q_i(t)$ se determina como:

$$\{Q\} = [\Phi]^T\{F(t)\} = \begin{bmatrix} 1.1247 & 2.0264 & 2.5269 \\ 2.5279 & 1.1247 & -2.0268 \\ 2.0257 & -2.5282 & 1.1247 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.105 \\ 1.105 \\ 1.105 \end{Bmatrix} sen\omega t$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.274sen\omega t \\ 1.796sen\omega t \\ 0.687sen\omega t \end{Bmatrix}$$

Se obtiene tres ecuaciones desacopladas:

$$\ddot{\eta}_1(t) + 3.58\dot{\eta}_1(t) + 570.07\eta_1(t) = 6.274sen\omega t$$

$$\ddot{\eta}_2(t) + 10.06\dot{\eta}_2(t) + 4494.57\eta_2(t) = 1.796sen\omega t$$

$$\ddot{\eta}_3(t) + 14.53\dot{\eta}_3(t) + 9387.04\eta_3(t) = 0.687sen\omega t$$

La solución de estado estable para las tres ecuaciones está dado por las ecuaciones 2.48 que se vuelven a escribir:

$$\eta_i(t) = \eta_i \text{sen}(\omega t - \emptyset_i)$$

$$\eta_i = \frac{Q_i}{\omega_i^2}\frac{1}{\left[\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right\}^2 + \left(2\xi_i\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2\right]^{1/2}} \qquad \emptyset_i = tan^{-1}\left\{\frac{2\xi_i\frac{\omega}{\omega_i}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2}\right\}$$

Esta solución varía dependiendo de la frecuencia de excitación, las frecuencias están definidas para cada caso en la tabla 4.3.

Caso 1: cuando la frecuencia de excitación es $f = 10.5\text{Hz},\ \omega_1 = 65.97\ \text{rad/s}$

Reemplazando el valor de la frecuencia $f = 10.5$ Hz, en las ecuaciones 2.48 se obtienen los valores de $\eta_i, \emptyset_i$ y se resumen en la siguiente tabla:

Ecuación	Q_i (N)	ω/ω_i	η_i (m)	$\tan\emptyset_i$	$\emptyset_i$ (rad)
1	6.274	2.763	0.001656	-0.071	-0.071
2	1.797	0.984	0.002648	4.670	1.360
3	0.688	0.681	0.000134	0.190	0.188

Las ecuaciones desacopladas resultan:

$$\eta_1(t) = 0.001656sen(\omega t + 0.071)$$

$$\eta_2(t) = 0.002648sen(\omega t - 1.360)$$

$$\eta_3(t) = 0.000134sen(\omega t - 0.188)$$

Las ecuaciones se transforman utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - \emptyset) = sen(\omega t)\cos\emptyset - cos(\omega t)sen\ \emptyset$$

Ecuación	$\emptyset$	$\mathbf{cos\emptyset}$	$\boldsymbol{sen\emptyset}$
1	-0.0707	0.998	-0.0706
2	1.3598	0.209	0.9778
3	0.1882	0.982	0.1871

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.001651sen(\omega t) + 0.0001169cos(\omega t)$$

$$\eta_2(t) = 0.000554sen(\omega t) - 0.0025891cos(\omega t)$$

$$\eta_3(t) = 0.000132sen(\omega t) - 0.0000251cos(\omega t)$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.00353sen\omega t - 0.00646cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.00364sen\omega t - 0.00261cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = 0.00320sen\omega t + 0.00551cos\omega t$

El valor máximo de desplazamiento se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero para obtener el ángulo ωt , que da un valor máximo de desplazamiento:

$\dot{u}_1(t) = 0.00353\omega cos\omega t + 0.00646\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = -0.545\ rad$

$\dot{u}_2(t) = 0.00364\omega cos\omega t + 0.00261\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = -1.392\ rad$

$\dot{u}_3(t) = 0.00320\ \omega cos\omega t - 0.00551\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = 0.579\ rad$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de desplazamientos, se obtienen los valores máximos en valor absoluto:

$|u_1(t)|_{max} = |0.00353sen(-0.545\ ) - 0.00646\cos(-0.545\ )| \quad = \quad 7.36\ mm$

$|u_2(t)|_{max} = |0.00364sen(-1.392\ ) - \ 0.00261cos(-1.392)| \quad = \quad 4.48\ mm$

$|u_3(t)|_{max} = |0.00320sen(\ 0.579) + 0.00551\ cos(\ 0.579)| \quad = \quad 6.37\ mm$

Caso 2: cuando la frecuencia de excitación es $f\ = 15.8\text{Hz},\ \omega_1\ = 99.27\ \text{rad/s}$

Reemplazando el valor de la frecuencia $f\ = 15.8\ \text{Hz}$, en las ecuaciones 2.48 se obtienen los valores de $\eta_i, Ø_i$ y se resumen en la siguiente tabla:

Ecuación	Q_i (N)	ω/ω_i	η_i (m)	tan$Ø_i$	$Ø_i$ (rad)
1	6.274	4.158	0.000675	-0.0434	-0.0434
2	1.797	1.481	0.000329	-0.1862	-0.1841
3	0.688	1.025	0.000453	-3.0805	-1.2569

Las ecuaciones desacopladas resultan:

$$\eta_1(t) = 0.000675sen(\omega t + 0.0434)$$

$$\eta_2(t) = 0.000329sen(\omega t + 0.1841)$$

$$\eta_3(t) = 0.000453sen(\omega t + 1.2569)$$

Las ecuaciones se transforman utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - Ø)\ = sen(\omega t)\cos Ø - cos(\omega t)sen\ Ø$$

Ecuación	Ø	cosØ	senØ
1	-0.0434	0.999	-0.0434
2	-0.1841	0.983	-0.1831
3	-1.2569	0.309	-0.9511

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.000675sen(\omega t) + 0.0000293cos(\omega t)$$

$$\eta_2(t) = 0.000324sen(\omega t) + 0.0000603cos(\omega t)$$

$$\eta_3(t) = 0.000140sen(\omega t) + 0.0004311cos(\omega t)$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.00186sen\omega t + 0.001059\, cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.00138\, sen\omega t - \ 0.000963cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = 0.00121\ sen\omega t + 0.000437cos\omega t$

El valor máximo de desplazamiento se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero para obtener el ángulo ωt , que da un valor máximo de desplazamiento:

$\dot{u}_1(t) = 0.00186\omega cos\omega t - 0.001059\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = -1.757\ rad$

$\dot{u}_2(t) = 0.00138\omega cos\omega t + \ 0.000963\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = -1.430\ rad$

$\dot{u}_3(t) = 0.00121\ \omega cos\omega t - 0.000437\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = \ 2.761\ rad$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de desplazamiento, se obtienen los valores máximos en valor absoluto:

$|u_1(t)|_{max} = |0.00186sen(-1.757\ ) + 0.001059\cos(-1.757\ )| \ = \ 2.14\ mm$

$|u_2(t)|_{max} = |0.00138sen(-1.430\ ) - \ 0.000963cos(-1.430)| \ = \ 1.68\ mm$

$|u_3(t)|_{max} = |0.00121\ sen(\ 2.761) + 0.000437\ cos(\ 2.761)| \ = \ 1.28\ mm$

Caso 3 (Resonancia): cuando la frecuencia de excitación es $f = 3.80$ Hz, $\omega_1 = 23.87$ rad/s

Reemplazando el valor de la frecuencia $f = 3.80$ Hz, en las ecuaciones 2.48 se obtienen los valores de $\eta_i, \emptyset_i$ y se resumen en la siguiente tabla:

Ecuación	Q_i (N)	ω/ω_i	η_i (m)	$\tan\emptyset_i$	$\emptyset_i$ (rad)
1	6.274	1.000	0.0733732	--------	1.5700
2	1.797	0.356	0.0004569	0.0612	0.0611
3	0.688	0.246	0.0000779	0.0394	0.0393

Las ecuaciones desacopladas resultan:

$$\eta_1(t) = 0.0733732sen(\omega t - 1.5700)$$

$$\eta_2(t) = 0.0004569sen(\omega t - 0.0611)$$

$$\eta_3(t) = 0.0000779sen(\omega t - 0.0393)$$

Se transforman las ecuaciones utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - \emptyset) = sen(\omega t)\cos\emptyset - cos(\omega t)sen\ \emptyset$$

Ecuación	$\emptyset$	$\cos\emptyset$	$sen\emptyset$
1	1.5700	0.000796	1.0000
2	0.0611	0.998134	0.0611
3	0.0393	0.999226	0.0393

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.0000584sen(\omega t) - 0.07337320cos(\omega t)$$

$$\eta_2(t) = 0.0004561sen(\omega t) - 0.00002790cos(\omega t)$$

$$\eta_3(t) = 0.0000779sen(\omega t) - 0.00000306cos(\omega t)$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.001376sen\omega t - 0.0826cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.000434\ sen\omega t - 0.1487cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = -0.000689\ sen\omega t - 0.1854cos\omega t$

El valor máximo de desplazamientos se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero para obtener el ángulo ωt , que da un valor máximo de desplazamiento:

$\dot{u}_1(t) = 0.001376\omega cos\omega t + 0.0826\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = -0.01666rad$

$\dot{u}_2(t) = 0.000434\omega cos\omega t + 0.1487\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = -0.00292rad$

$\dot{u}_3(t) = -0.000689\ \omega cos\omega t + 0.1854\omega sen\omega t = 0$ $\qquad \omega t = 0.00372\ rad$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de desplazamiento, se obtienen los valores máximos y se grafican en la figura 4.21:

$$u_1(t)_{max} = 0.001376sen(-0.01666\ ) - 0.0826\cos(-0.01666\ ) \quad = \quad -82.61\ mm$$

$$u_2(t)_{max} = 0.000434\ sen(-0.00292\ ) - \ 0.1487cos(-0.00292) \quad = \quad -148.71\ mm$$

$$u_3(t)_{max} = -0.000689\ sen(\ 0.00372) - 0.1854\ cos(\ 0.00372) \quad = \quad -185.35\ mm$$

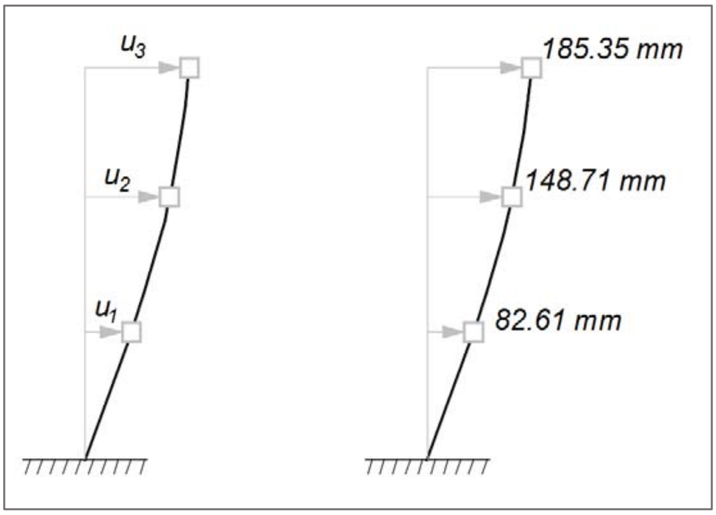


Figura 4.21 Desplazamientos – Primer modo (3.8 Hz)
Fuente: Elaboración propia

Calculo de aceleraciones: Las ecuaciones de aceleraciones se obtienen al derivar por segunda vez las ecuaciones de amplitudes, resultando las siguientes ecuaciones:

Ecuación I : $\ddot{u}_1(t) = -0.001376\omega^2 sen\omega t + 0.0826\omega^2 cos\omega t$

Ecuación II : $\ddot{u}_2(t) = -0.000434\omega^2 sen\omega t + \ 0.1487\ \omega^2 cos\omega t$

Ecuación III : $\ddot{u}_3(t) = 0.000689\omega^2 sen\omega t + 0.1854\omega^2 cos\omega t$

El valor máximo de aceleración se obtiene derivando cada ecuación de aceleración e igualando a cero, para obtener el ángulo ωt, que da un valor máximo de aceración.

$\ddot{u}_1(t) = -0.001376\ \omega^3 cos\omega t - 0.0826\ \omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -0.01666rad$

$\ddot{u}_2(t) = -0.000434\ \omega^3\ cos\omega t - 0.1487\omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -0.00292rad$

$\ddot{u}_3(t) = 0.000689\omega^3\ cos\omega t - 0.1854\ \omega^3 sen\omega t = 0 \qquad \omega t = 0.00372\ rad$

Reemplazando estos ángulos en las tres ecuaciones de aceleraciones, se obtienen los máximos valores de aceleraciones:

$\ddot{u}_1(t)_{max} = -0.001376x23.876^2 sen(-0.0167) + 0.0826x23.876^2 \cos(-0.0167)$

$\ddot{u}_1(t)_{max} = 47.09\ m/s^2$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = -0.000434x23.876^2 sen(-0.0029) +\ 0.1487x23.876^2 \cos(-0.0029)$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = 84.77\ m/s^2$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = 0.000689x23.876^2 sen(0.00372)\ + 0.1854x23.876^2 \cos(0.00372)$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = 105.66\ m/s^2$

Calculo de fuerzas: Las fuerzas que actúan en el primer modo de vibración se obtienen al multiplicar la masa de cada elemento por la aceleración máxima.

$F_1 = ma_1 = m\ddot{u}_1(t)_{max} = 0.085x47.09\ = 4.0\ \mathrm{N}$

$F_2 = ma_2 = m\ddot{u}_2(t)_{max} = 0.085x84.77 = 7.2\ \mathrm{N}$

$F_3 = ma_3 = m\ddot{u}_3(t)_{max} = 0.085x105.66 = 9.0\ \mathrm{N}$

Estos resultados se muestran gráficamente en la figura 4.22.

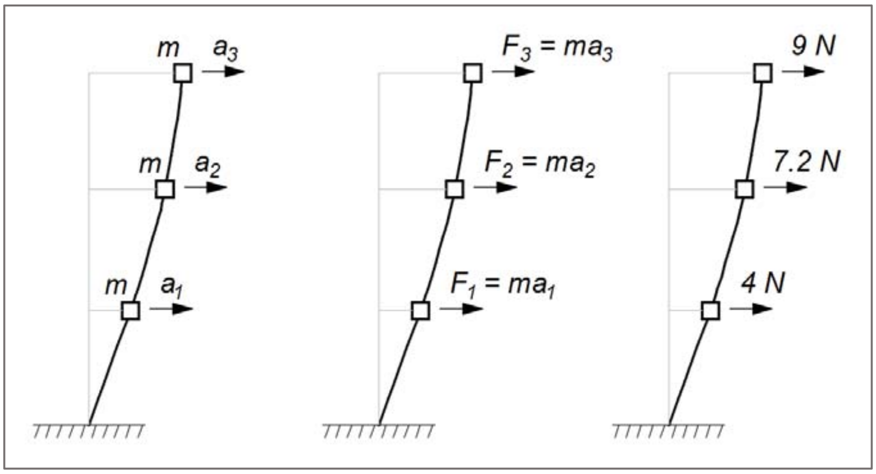


Figura 4.22 Fuerzas - Primer modo (3.8 Hz)
Fuente: Elaboración propia

La fuerza en cada columna se obtiene dividiendo las fuerzas calculadas entre cuatro. Con el método de las secciones se obtienen los diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas y momentos internos, figura 4.23.

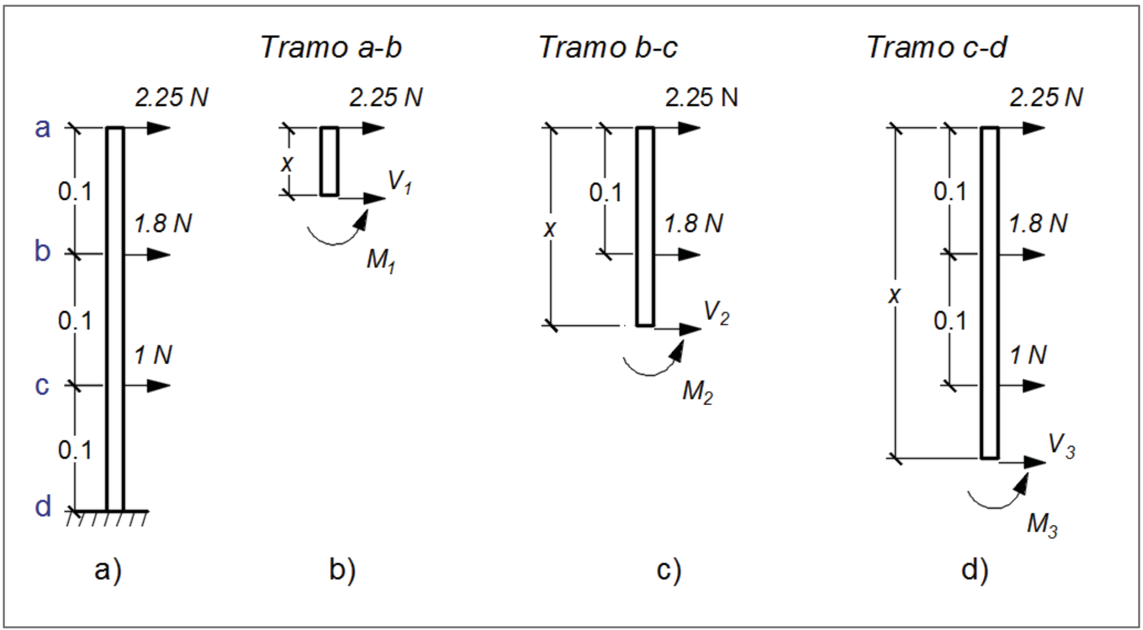


Figura 4.23 Diagrama de cuerpo libre
Fuente: Elaboración propia

Tramo a-b:

$\sum \mathrm{F_H} = 0$: $\qquad \mathrm{V}_{ab} = -2.25\ \mathrm{N}$

$\sum \mathrm{M_1} = 0$: $\qquad \mathrm{M_1} = 2.25\mathrm{X} \qquad \mathrm{M}_b = 0.225\ \mathrm{Nm}$

Tramo b-c:

$\sum \mathrm{F_H} = 0$: $\qquad \mathrm{V}_{bc} = -4.05\ \mathrm{N}$

$\sum \mathrm{M_2} = 0$: $\qquad \mathrm{M_2} = 2.25X + 1.8(X - 0.1) \qquad \mathrm{M}_b = 0.63\ \mathrm{Nm}$

Tramo c-d:

$\sum \mathrm{F_H} = 0$: $\qquad \mathrm{V}_{cd} = -5.05\ \mathrm{N}$

$\sum \mathrm{M_3} = 0$: $\qquad \mathrm{M_3} = 2.25X + 1.8(X - 0.1) + 1(X - 0.2) \qquad \mathrm{M}_d = 1.14\ \mathrm{Nm}$

Con las ecuaciones se obtienen los diagramas de momentos y fuerzas cortantes como se muestra en la figura 4.24.

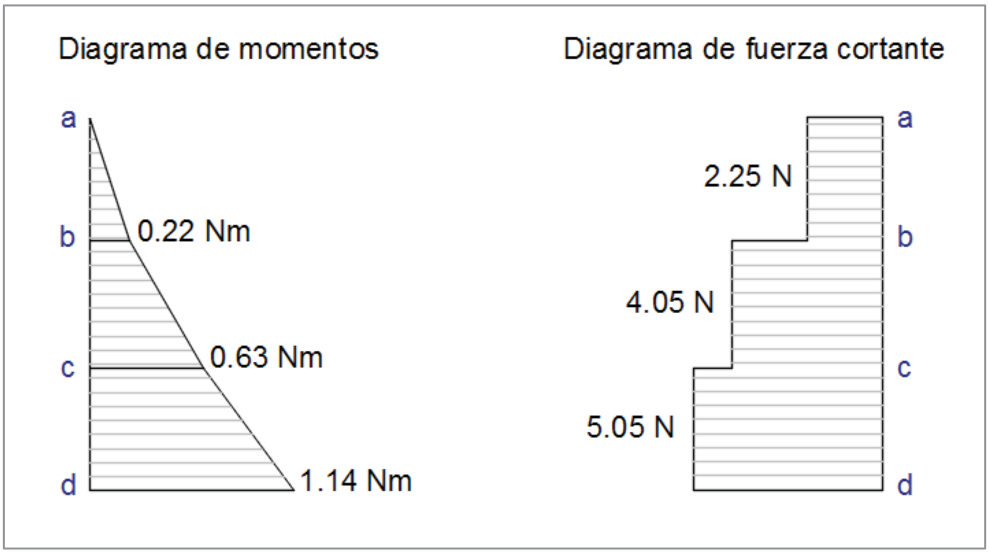


Figura 4.24 Diagramas de momento y fuerza cortante
Fuente: Elaboración propia

Calculo de esfuerzos: con el diagrama de momentos se determina el esfuerzo máximo por flexión y con el diagrama de fuerza cortante el esfuerzo cortante máximo, en ambos casos el punto crítico es "d":

Esfuerzo de flexión : $\sigma_f = \frac{\text{Mc}}{\text{I}}$ $\sigma_f = \frac{1.14x0.002}{12.56x10^{-12}} = 181.52\ \text{M}pa$

Esfuerzo cortante : $\tau_c = \frac{\text{F}}{\text{A}}$ $\tau_c = \frac{5.05}{1.256x10^{-5}} = 0.4\ \text{M}pa$

El esfuerzo de flexión es mucho mayor al esfuerzo cortante, podemos considerar a este último despreciable. El esfuerzo por flexión de 181.52 Mpa, que es mucho mayor a la resistencia del material 40 Mpa. El material en este modo se deforma inelásticamente.

Caso 4 (Resonancia): cuando la frecuencia de excitación es $f = 10.67$ Hz, $\omega_1 = 64.04$ rad/s

Reemplazando el valor de la frecuencia $f = 10.67$ Hz, en las ecuaciones 2.48 se obtienen los valores de $\eta_i, \emptyset_i$ y se resumen en la siguiente tabla:

Ecuación	F_i (N)	ω/ω_i	η_i (m)	$\tan\emptyset_i$	$\emptyset_i$ (rad)
1	6.274	2.808	0.001596	-0.0693	-0.0692
2	1.797	1.000	0.002665	--------	1.5700
3	0.688	0.692	0.000138	0.1991	0.1966

Las ecuaciones desacopladas resultan:

$$\eta_1(t) = 0.001596sen(\omega t + 0.0692)$$

$$\eta_2(t) = 0.002665sen(\omega t - 1.5700)$$

$$\eta_3(t) = 0.000138sen(\omega t - 0.1966)$$

Las ecuaciones se transforman utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - \emptyset) = sen(\omega t)\cos\emptyset - cos(\omega t)sen\ \emptyset$$

Ecuación	$\emptyset$	$\cos\emptyset$	$sen\emptyset$
1	-0.0692	0.997605	-0.0692
2	1.5700	0.000796	1.0000
3	0.1966	0.980741	0.1953

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.00159191sen\omega t + 0.0001104cos\omega t$$

$$\eta_2(t) = 0.00000212sen\omega t - 0.0026647cos\omega t$$

$$\eta_3(t) = 0.00013517sen\omega t - 0.0000269cos\omega t$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.00207sen\omega t - 0.00667cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.00289sen\omega t - 0.00271cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = 0.00417sen\omega t + 0.00565cos\omega t$

El valor máximo de desplazamientos se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero para obtener el ángulo ωt, que da un máximo desplazamiento:

$\dot{u}_1(t) = 0.00207\omega cos\omega t + 0.00667\omega sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -0.310 rad$

$\dot{u}_2(t) = 0.00289\omega cos\omega t + 0.00271\omega sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -1.067 rad$

$\dot{u}_3(t) = 0.00417\omega cos\omega t - 0.00565\omega sen\omega t = 0 \qquad \omega t = 0.738\ rad$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de desplazamientos, se obtienen los valores máximos y se muestran en la figura 4.25:

$u_1(t)_{max} = 0.00207 sen(-0.310\ ) - 0.00667\cos(-0.310) \qquad = \qquad -6.98\ mm$

$u_2(t)_{max} = 0.00289 sen(-1.067\ ) - \ 0.00271 cos(-1.067) \qquad = \qquad -3.96\ mm$

$u_3(t)_{max} = 0.00417 sen(\ 0.738) - 0.00565 cos(\ 0.738) \qquad = \qquad 7.02\ mm$

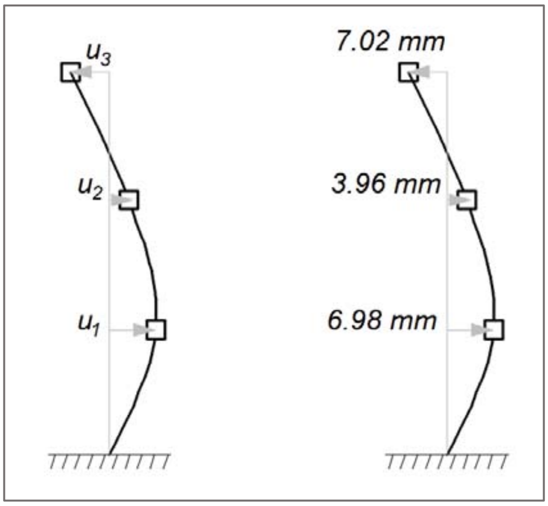


Figura 4.25 Desplazamientos – Segundo modo (10.67 Hz)
Fuente: Elaboración propia

Calculo de aceleraciones: Las ecuaciones de aceleraciones se obtienen al derivar por segunda vez las ecuaciones de amplitudes, resultando las siguientes ecuaciones:

Ecuación I : $\ddot{u}_1(t) = -0.00207\ \omega^2 sen\omega t + 0.00667\ \omega^2 cos\omega t$

Ecuación II : $\ddot{u}_2(t) = -0.00289\ \omega^2 sen\omega t + \ 0.00271\ \omega^2 cos\omega t$

Ecuación III : $\ddot{u}_3(t) = -0.00417\ \omega^2 sen\omega t - 0.00565\ \omega^2 cos\omega t$

El valor máximo de aceleración se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero, para obtener el ángulo ωt, que da un valor máximo de aceración.

$\ddot{u}_1(t) = -0.00207\ \omega^3 cos\omega t - 0.00667\omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -0.310\ rad$

$\ddot{u}_2(t) = -0.00289\ \omega^3\ cos\omega t - \ 0.00271\ \omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -1.067\ rad$

$\ddot{u}_3(t) = 0.00417\ \omega^3\ cos\omega t + 0.00565\ \omega^3 sen\omega t = 0 \qquad \omega t = \ 0.738\ rad$

Reemplazando estos ángulos en las tres ecuaciones de aceleraciones, se obtienen los máximos valores de aceleraciones:

$\ddot{u}_1(t)_{max} = -0.00207\ x67.04^2 sen(-0.310) + 0.00667x67.04^2 \cos(-0.310)$

$\ddot{u}_1(t)_{max} = 31.37\ m/s^2$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = -0.00289x67.04^2 sen(-1.067) + \ 0.00271x67.04^2 \cos(-1.067)$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = 17.23\ m/s^2$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = -0.00417x67.04^2 sen(0.738)\ - 0.00565x67.04^2 \cos(0.738)$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = -31.4\ m/s^2$

Calculo de fuerzas: Las fuerzas que actúan en el primer modo de vibración se obtienen al multiplicar la masa de cada elemento por la aceleración máxima.

$F_1 = ma_1 = m\ddot{u}_1(t)_{max} = 0.085x31.37\ = 2.66\ \mathrm{N}$

$F_2 = ma_2 = m\ddot{u}_2(t)_{max} = 0.085x17.23 = 1.46\ \mathrm{N}$

$F_3 = ma_3 = m\ddot{u}_3(t)_{max} = -0.085x31.4 = -2.66\ \mathrm{N}$

Los resultados se muestran gráficamente en la figura 4.26.

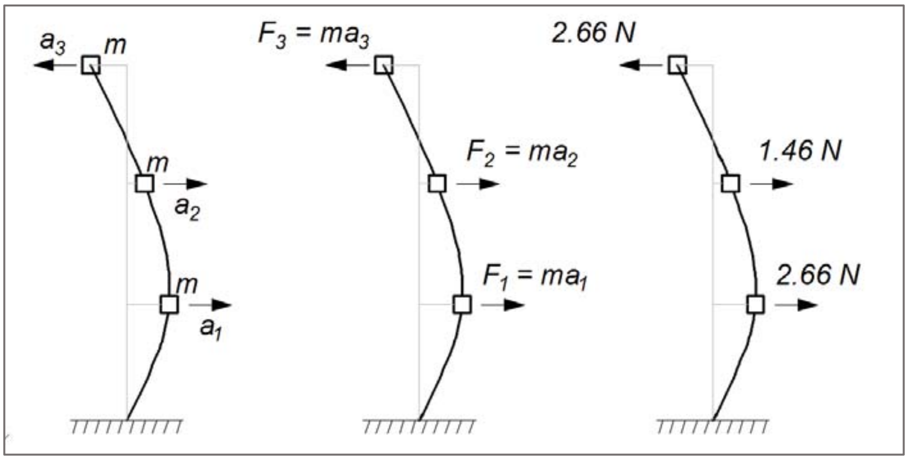


Figura 4.26 Fuerzas en el segundo modo de vibración
Fuente: Elaboración propia

La fuerza en cada columna se obtiene dividiendo las fuerzas calculadas entre cuatro. Con el método de las secciones se obtienen los diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas y momentos internos, figura 4.27.

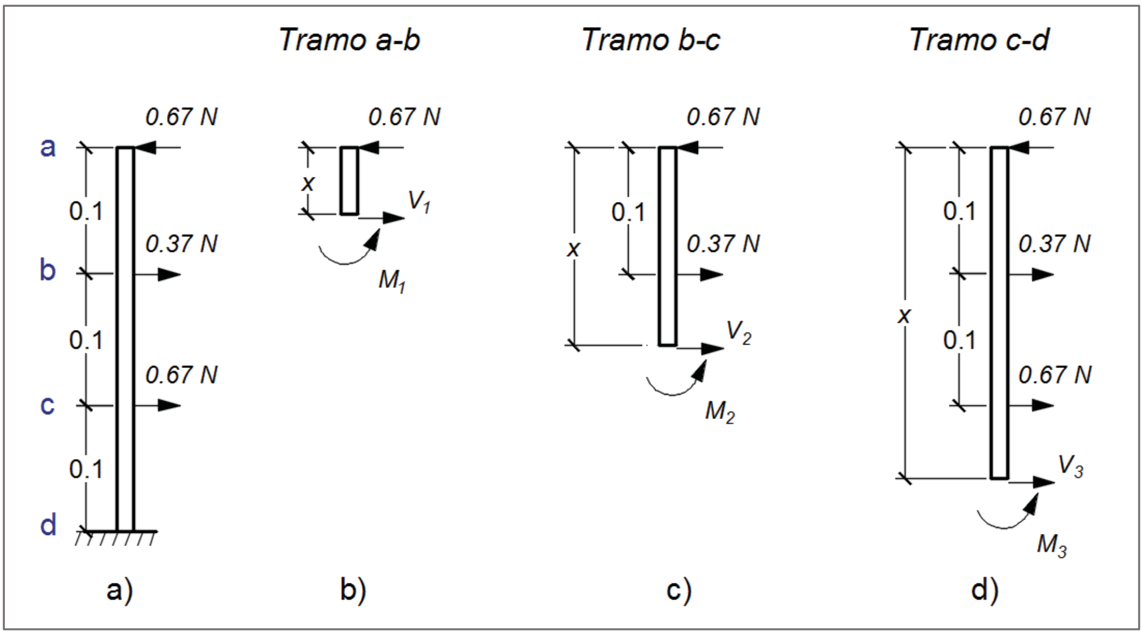


Figura 4.27 Diagrama de cuerpo libre
Fuente: Elaboración propia

Tramo a-b:

$\sum F_H = 0$: $\quad V_{ab} = 0.67\ \mathrm{N}$

$\sum M_1 = 0$: $\quad M_1 = 0.67X \quad M_b = -0.067\ \mathrm{Nm}$

Tramo b-c:

$\sum F_H = 0$: $\quad V_{bc} = 0.3\ \mathrm{N}$

$\sum M_2 = 0$: $\quad M_2 = 0.37(X - 0.1) - 0.67X \quad M_b = -0.097\ \mathrm{Nm}$

Tramo c-d:

$\sum F_H = 0$: $\quad V_{cd} = -0.37\ \mathrm{N}$

$\sum M_3 = 0$: $\quad M_3 = 0.37(X - 0.1) + 0.67(X - 0.2) - 0.67X \quad M_d = -0.06\ \mathrm{Nm}$

Con las ecuaciones se obtienen los diagramas de momentos y fuerzas cortantes como se muestra en la figura 4.28.

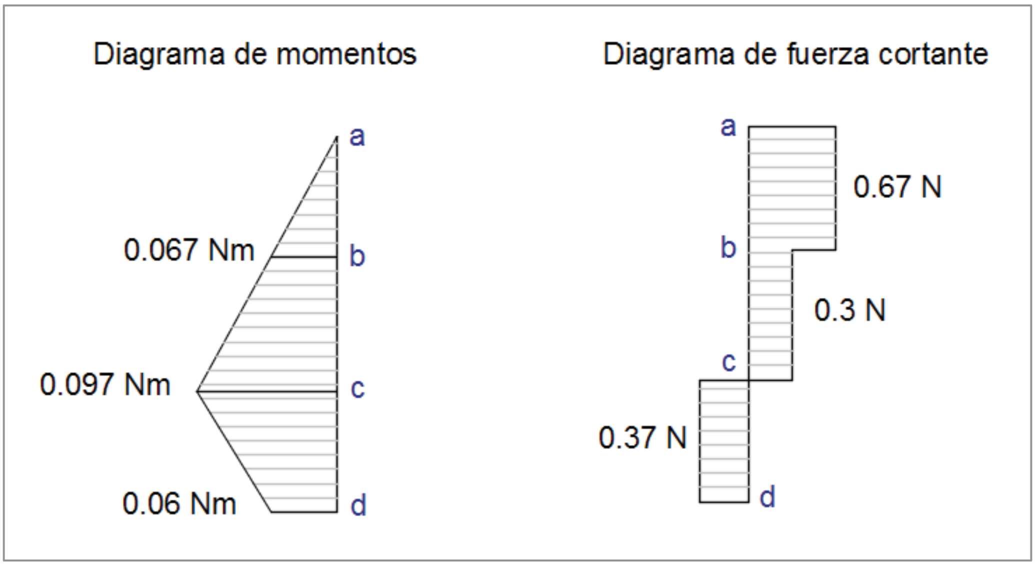


Figura 4.28 Diagramas de momento y fuerza cortante
Fuente: Elaboración propia

Calculo de esfuerzos: con el diagrama de momentos se determina el esfuerzo máximo por flexión y con el diagrama de fuerza cortante el esfuerzo cortante máximo, en ambos casos el punto crítico es "c":

Esfuerzo de flexión : $\sigma_f = \frac{\mathrm{Mc}}{\mathrm{I}}$ $\sigma_f = \frac{0.097x0.002}{12.56x10^{-12}} = 15.44\ \mathrm{M}pa$

Esfuerzo cortante : $\tau_c = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$ $\tau_c = \frac{0.37}{1.256x10^{-5}} = 0.03\ \mathrm{M}pa$

El esfuerzo de flexión es mucho mayor al esfuerzo cortante, podemos considerar a este último despreciable. El esfuerzo por flexión de 15.44 Mpa, es menor a la resistencia del material 40 Mpa. La estructura en este modo se deforma elásticamente.

Caso 5 (Resonancia): cuando la frecuencia de excitación es $f = 15.42\ \mathrm{Hz}$, $\omega_1 = 96.88\ \mathrm{rad/s}$

Reemplazando el valor de la frecuencia $f = 15.42\ \mathrm{Hz}$, en las ecuaciones 2.48 se obtienen los valores de $\eta_i, \emptyset_i$ y se resumen en la siguiente tabla:

Ecuación	Q_i (N)	ω/ω_i	η_i (m)	$\tan\emptyset_i$	$\emptyset_i$ (rad)
1	6.274	4.058	0.000711	-0.0446	-0.0446
2	1.797	1.445	0.000360	-0.1991	-0.1966
3	0.688	1.000	0.000488	----------	1.5700

Las ecuaciones desacopladas resultan:

$$\eta_1(t) = 0.000711sen(\omega t + 0.0446)$$

$$\eta_2(t) = 0.000360sen(\omega t + 0.1966)$$

$$\eta_3(t) = 0.000488sen(\omega t - 1.5700)$$

Se transforman las ecuaciones utilizando la fórmula trigonométrica:

$$sen(\omega t - \emptyset) = sen(\omega t)\cos\emptyset - cos(\omega t)sen\ \emptyset$$

Ecuación	$\emptyset$	$\cos\emptyset$	$sen\emptyset$
1	-0.044573	0.999007	-0.0446
2	-0.196575	0.980741	-0.1953
3	1.570000	0.000796	1.0000

Con lo cual las ecuaciones desacopladas se convierten en:

$$\eta_1(t) = 0.000710344sen(\omega t) + 0.0000317cos(\omega t)$$

$$\eta_2(t) = 0.000353193sen(\omega t) + 0.0000703cos(\omega t)$$

$$\eta_3(t) = 0.000000389sen(\omega t) - 0.0004883cos(\omega t)$$

Los desplazamientos resultan acoplando las ecuaciones desacopladas con la ecuación 2.42:

$$\{U\} = [\Phi]\{\eta\}$$

Ecuación I : $u_1(t) = 0.00169sen\omega t - 0.000776cos\omega t$

Ecuación II : $u_2(t) = 0.00184sen\omega t + 0.001378cos\omega t$

Ecuación III : $u_3(t) = 0.00108sen\omega t - 0.000612cos\omega t$

El valor máximo de desplazamiento se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero para obtener el ángulo ωt, que da un máximo desplazamiento:

$$\dot{u}_1(t) = 0.00169\omega cos\omega t + 0.000776\omega sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -2.182 rad$$

$$\dot{u}_2(t) = 0.00184\omega cos\omega t - 0.001378\omega sen\omega t = 0 \qquad \omega t = \ 1.332 rad$$

$$\dot{u}_3(t) = 0.00108\ \omega cos\omega t + 0.000612\omega sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -1.765\ rad$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de desplazamientos, se obtienen los valores máximos y se muestran en la figura 4.29:

$$u_1(t)_{max} = 0.00169 sen(-2.182\ ) - 0.000776 \cos(-2.182) \qquad = \quad -1.86\ mm$$

$$u_2(t)_{max} = 0.00184 sen(1.332\ ) + \ 0.001378 cos(1.332) \qquad = \quad 2.30\ mm$$

$$u_3(t)_{max} = 0.00108 sen(\ -1.765) - 0.000612 cos(\ -1.765) \qquad = \quad -1.24\ mm$$

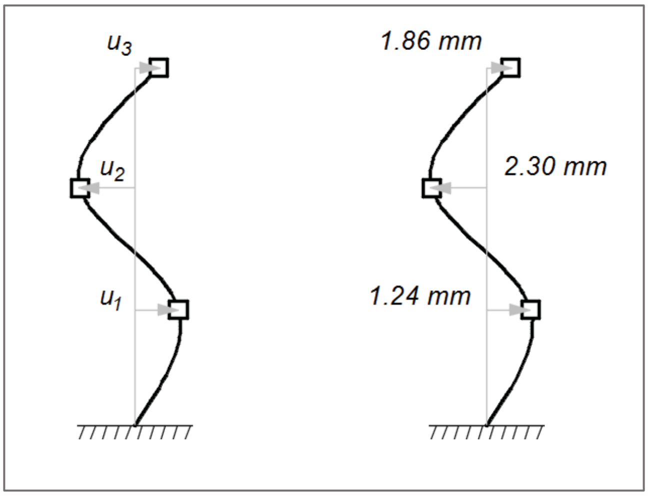


Figura 4.29 Desplazamientos – Tercer modo (15.42 Hz)
Fuente: Elaboración propia

Calculo de aceleraciones: Las ecuaciones de aceleraciones se obtienen al derivar por segunda vez las ecuaciones de amplitudes, resultando las siguientes ecuaciones:

$$\text{Ecuación I} \quad : \quad \ddot{u}_1(t) = -0.00169\ \omega^2 sen\omega t + 0.000776\ \omega^2 cos\omega t$$

$$\text{Ecuación II} \quad : \quad \ddot{u}_2(t) = -0.00184\ \omega^2 sen\omega t - \ 0.001378\ \omega^2 cos\omega t$$

$$\text{Ecuación III} \quad : \quad \ddot{u}_3(t) = -0.00108\ \omega^2 sen\omega t + 0.000612\ \omega^2 cos\omega t$$

El valor máximo de aceleración se obtiene derivando cada ecuación e igualando a cero, para obtener el ángulo ωt, que da un valor máximo de aceración.

$\ddot{u}_1(t) = -0.00169\ \omega^3 cos\omega t - 0.000776\omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -2.182\ rad$

$\ddot{u}_2(t) = -0.00184\ \omega^3\ cos\omega t + 0.001378\ \omega^3\ sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -1.332\ rad$

$\ddot{u}_3(t) = -0.00108\ \omega^3\ cos\omega t - 0.000612\ \omega^3 sen\omega t = 0 \qquad \omega t = -\ 1.764\ rad$

Reemplazando estos ángulos en las tres ecuaciones de aceleraciones, se obtienen los máximos valores de aceleraciones:

$\ddot{u}_1(t)_{max} = -0.00169x96.88^2 sen(-2.182) + 0.000776x96.88^2 \cos(-2.182)$

$\ddot{u}_1(t)_{max} = 8.83\ m/s^2$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = -0.00184x96.88^2 sen(-1.332) -\ 0.001378x96.88^2 \cos(-1.332)$

$\ddot{u}_2(t)_{max} = -19.8\ m/s^2$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = -0.00108x96.88^2 sen(-\ 1.764) + 0.000612x96.88^2 \cos(-\ 1.764)$

$\ddot{u}_3(t)_{max} = 8.83\ m/s^2$

Calculo de fuerzas: Las fuerzas que actúan en el primer modo de vibración se obtienen al multiplicar la masa de cada elemento por la aceleración máxima.

$F_1 = ma_1 = m\ddot{u}_1(t)_{max} = 0.085x8.83 = 0.75$ N

$F_2 = ma_2 = m\ddot{u}_2(t)_{max} = -0.085x19.8 = -1.68$ N

$F_3 = ma_3 = m\ddot{u}_3(t)_{max} = 0.085x8.83 = 0.75$ N

Los resultados se muestran gráficamente en la figura 4.30.

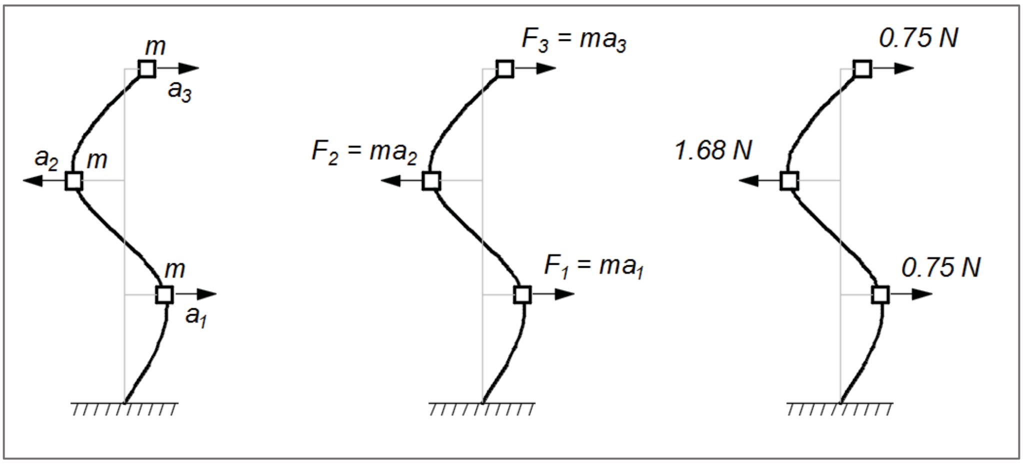


Figura 4.30 Fuerzas – Tercer modo (15.42 Hz)
Fuente: Elaboración propia

La fuerza en cada columna se obtiene dividiendo las fuerzas calculadas entre cuatro. Con el método de las secciones se obtienen los diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas y momentos internos, figura 4.31.

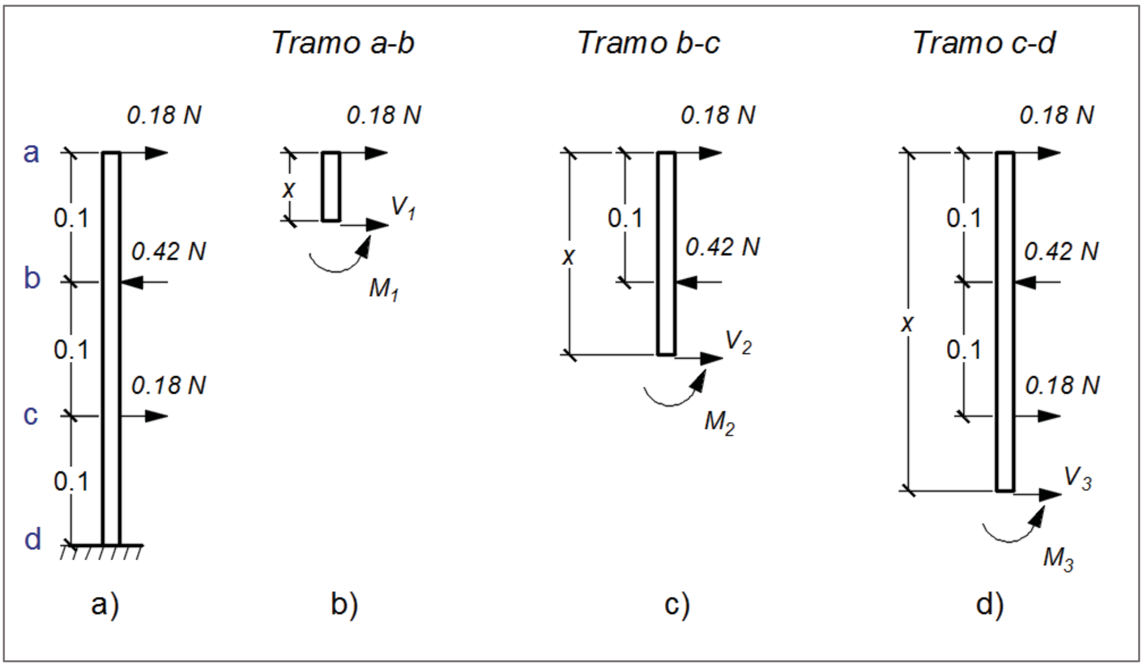


Figura 4.31 Diagrama de cuerpo libre
Fuente: Elaboración propia

Tramo a-b:

$\sum F_H = 0$: $\quad V_{ab} = -0.18$ N

$\sum M_1 = 0$: $\quad M_1 = 0.18X \quad M_b = 0.018$ Nm

Tramo b-c:

$\sum F_H = 0$: $\quad V_{bc} = 0.24$ N

$\sum M_2 = 0$: $\quad M_2 = 0.18X - 0.42(X - 0.1) \quad M_b = -0.006$ Nm

Tramo c-d:

$\sum F_H = 0$: $\quad V_{cd} = 0.006$ N

$\sum M_3 = 0$: $\quad M_3 = 0.18X + 0.18(X - 0.2) - 0.42(X - 0.1) \quad M_d = -0.012$ Nm

Con las ecuaciones se obtienen los diagramas de momentos y fuerzas cortantes como se muestra en la figura 4.32.

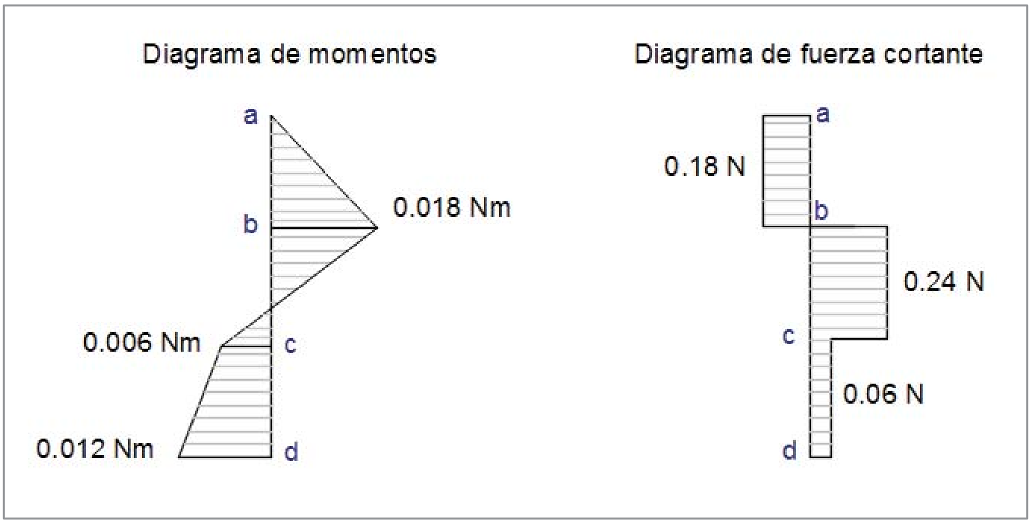


Figura 4.32 Diagramas de momento y fuerza cortante
Fuente: Elaboración propia

Calculo de esfuerzos: con el diagrama de momentos se determina el esfuerzo máximo por flexión y con el diagrama de fuerza cortante el esfuerzo cortante máximo, en ambos casos el punto crítico es "b":

Esfuerzo de flexión : $\sigma_f = \frac{\mathrm{Mc}}{\mathrm{I}}$ $\sigma_f = \frac{0.018x0.002}{12.56x10^{-12}} = 2.86\ \mathrm{M}pa$

Esfuerzo cortante : $\tau_c = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$ $\tau_c = \frac{0.24}{1.256x10^{-5}} = 0.019\ \mathrm{M}pa$

El esfuerzo de flexión es mucho mayor al esfuerzo cortante, podemos considerar a este último despreciable. El esfuerzo por flexión de 2.86 Mpa, es mucho menor a la resistencia del material 40 Mpa. La estructura en este modo se deforma elásticamente.

4.5. RESUMEN DE FRECUENCIAS, DESPLAZAMIENTOS Y ESFUERZOS CALCULADOS MEDIANTE EL ANÁLISIS MODAL

1. Las frecuencias naturales calculadas de la estructura se resumen en la tabla 4.4. La frecuencia 3.8 Hz, es la frecuencia fundamental de la estructura.

Tabla 4.4 Frecuencias naturales (Calculados)

	Numero	Valor
f_1	Primera frecuencia	3.8 Hz
f_2	segunda frecuencia	10.67 Hz
f_3	tercera frecuencia	15.42 Hz

Fuente: Elaboración propia

2. En la tabla 4.5 se muestran los desplazamientos de la estructura, cuando está sometido a una aceleración armónica en la base, con distintas amplitudes de aceleración y frecuencias.

Tabla 4.5 Desplazamientos (Calculados)

Elemento	6500 mm/s^2 (3.1Hz)	13000 mm/s^2 (10.5 Hz)	13000 mm/s^2 (15.8 Hz)
Masa 1	17.95 mm	7.36 mm	2.14 mm
Masa 2	31.42 mm	4.48 mm	1.68 mm
Masa 3	38.63 mm	6.37 mm	1.28 mm

Fuente: Elaboración propia

El desplazamiento máximo calculado es 38.63 mm en la tercera masa, para una aceleración de 6500 mm/s^2 a 3.1Hz, este desplazamiento es aceptable para la tercera masa, puesto que el sistema es flexible.

3. En las tablas 4.6, 4.7, se resumen los desplazamientos y esfuerzos calculados, cuando la estructura experimenta resonancia para las tres frecuencias naturales 3.8, 10.67, 15.42 Hz.

Tabla 4.6 Desplazamientos y esfuerzos calculados (6500 mm/s2)

Elemento	3.8 Hz	10.67 Hz	15.42 Hz
Masa 1	41.27 mm	3.49 mm	0.93 mm
Masa 2	74.29 mm	1.98 mm	1.15 mm
Masa 3	92.59 mm	3.51 mm	0.62 mm
Esfuerzo	90.76 Mpa	7.67 Mpa	1.43 Mpa

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.7 Desplazamientos y esfuerzos calculados (13000 mm/s2)

Elemento	3.8 Hz	10.67 Hz	15.42 Hz
Masa 1	82.61 mm	6.98 mm	1.86 mm
Masa 2	148.71 mm	3.96 mm	2.30 mm
Masa 3	185.35 mm	7.02 mm	1.24 mm
Esfuerzo	181 Mpa	15.44 Mpa	2.86 Mpa

Fuente: Elaboración propia

Como se observa en las tablas 4.6 y 4.7, los desplazamientos y esfuerzos máximos que experimenta la estructura se presentan cuando la frecuencia es 3.8 Hz, estos desplazamientos y esfuerzos son inaceptables para la estructura. La estructura experimentaría una deformación inelástica lo que representa una falla.

Los desplazamientos y esfuerzos calculados en la tabla 4.7, son el doble comparado con la tabla 4.6, esto se explica porque la amplitud de excitación armónica es el doble (6500mm/s^2 -.13000 mm/s^2).

4.6. SIMULACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

El estudio se realizó utilizando el software de análisis por elementos finitos ansys. Se realizaron dos análisis, primero se realiza un análisis modal y luego un análisis armónico figura 4.33.

- Análisis modal: Se utiliza para determinar la frecuencia y los modos naturales de vibración del sistema.
- Análisis de respuesta armónica: se utiliza para obtener las amplitudes de vibración del sistema.

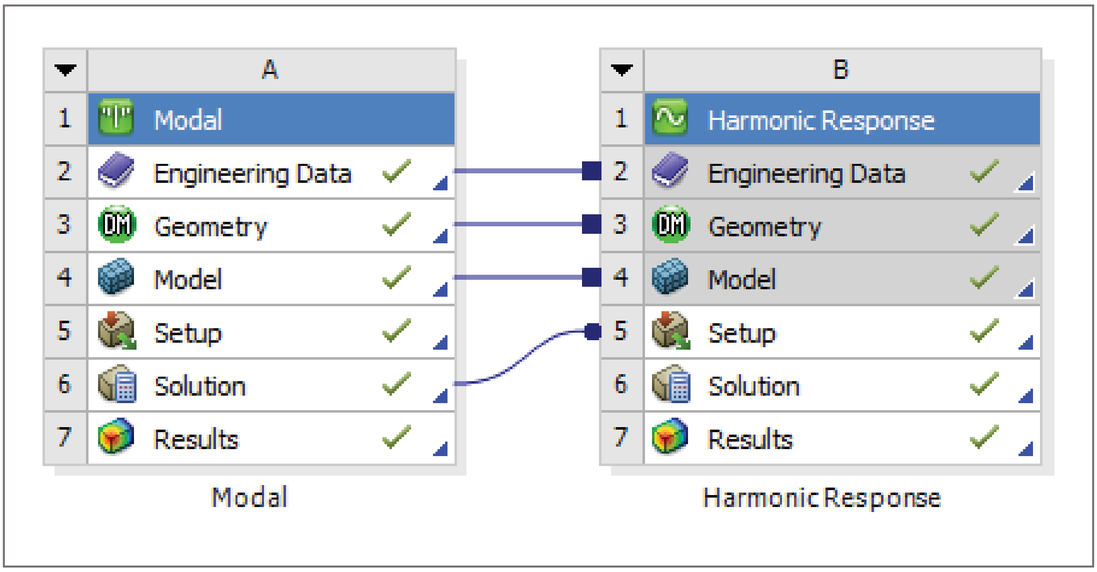


Figura 4.33 Análisis modal y armónico

Utilizando el programa se puede observar en forma gráfica las deformaciones correspondientes a cada modo en un gráfico 3D, lo cual hace más fácil comprender los modos de vibración del sistema. La respuesta armónica se obtiene en forma gráfica (amplitud vs frecuencia) para una excitación de amplitud constante y un rango de frecuencias que pueden elegirse de acuerdo a la respuesta que se está buscando.

Modelo geométrico 3D. El modelo geométrico fue realizado en el software inventor e importado desde Ansys. La rigidez de las columnas se consideró igual al de un elemento flexible como se puede apreciar en la figura 4.34.

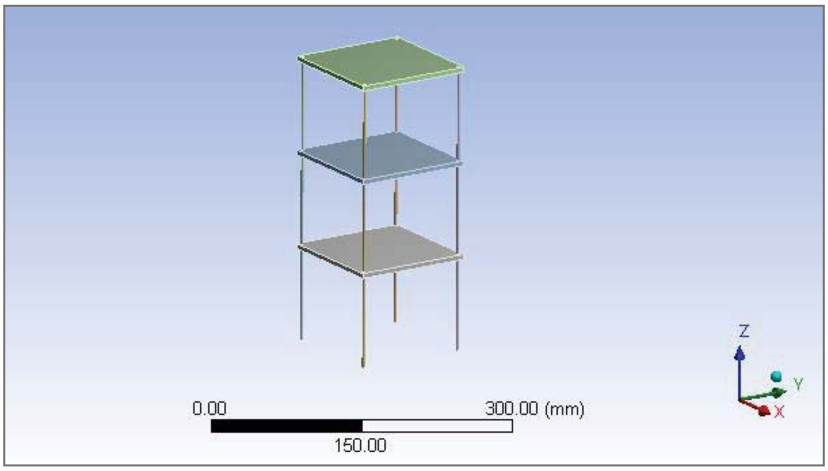


Figura 4.34 Geometría 3D

Mallado. La geometría se discretizo con elementos finitos poliédricos (hexaedro, prisma triangular) con refinamiento de malla en los detalles más pequeños, para obtener buenos resultados. En la figura 4.35, se muestra el mallado global del sistema con un total de 65000 elementos finitos.

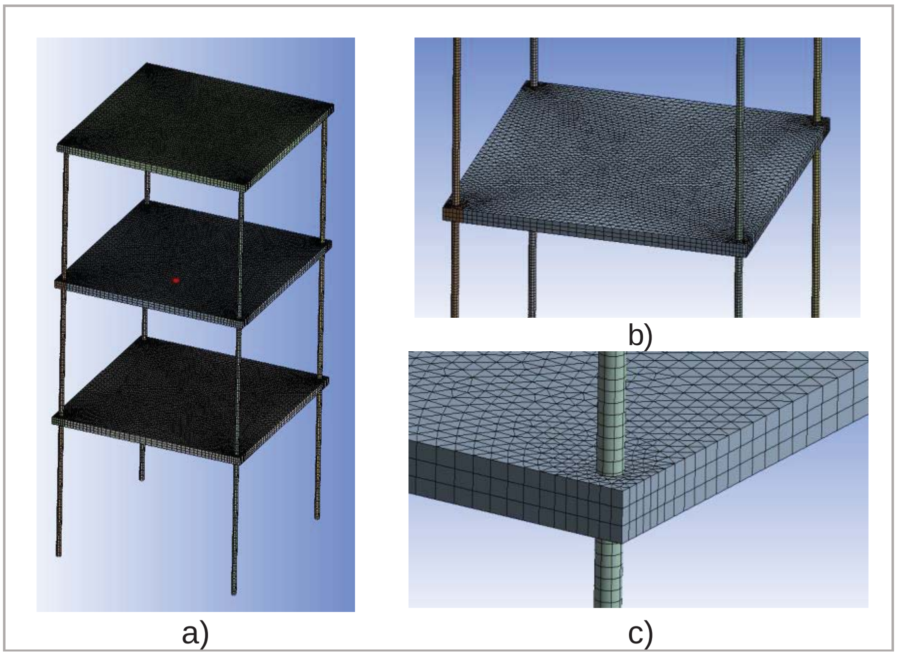


Figura 4.35 Mallado de la geometría

Condiciones de contorno. Para el análisis modal del sistema se considera fijo los cuatro soportes, se restringe el desplazamiento de las masas de tal manera que pueda desplazarse únicamente en la dirección horizontal x figura 4.36.

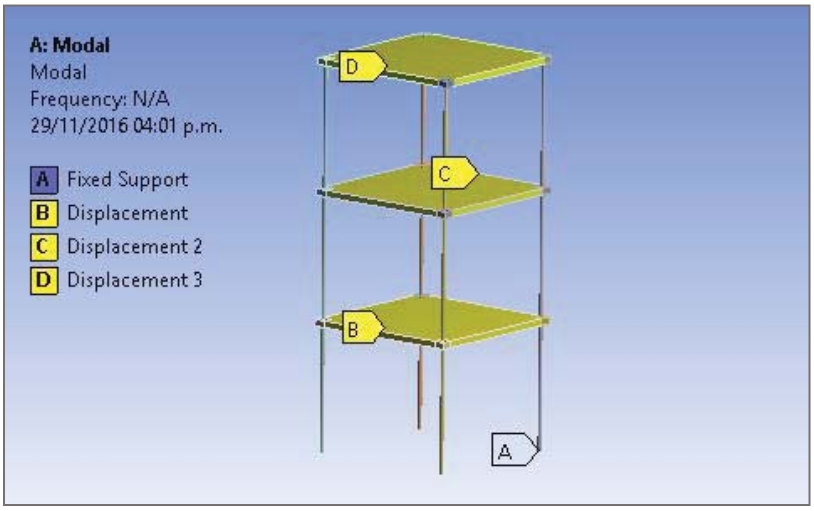


Figura 4.36 Condiciones de contorno

En el análisis harmónico, se aplica una aceleración armónica en la base del sistema con amplitudes constantes de 6500mm/s^2, 13000 mm/s^2, para cada análisis como se observa en la figura 4.37 y se considera una fracción de amortiguamiento modal de 7.5%.

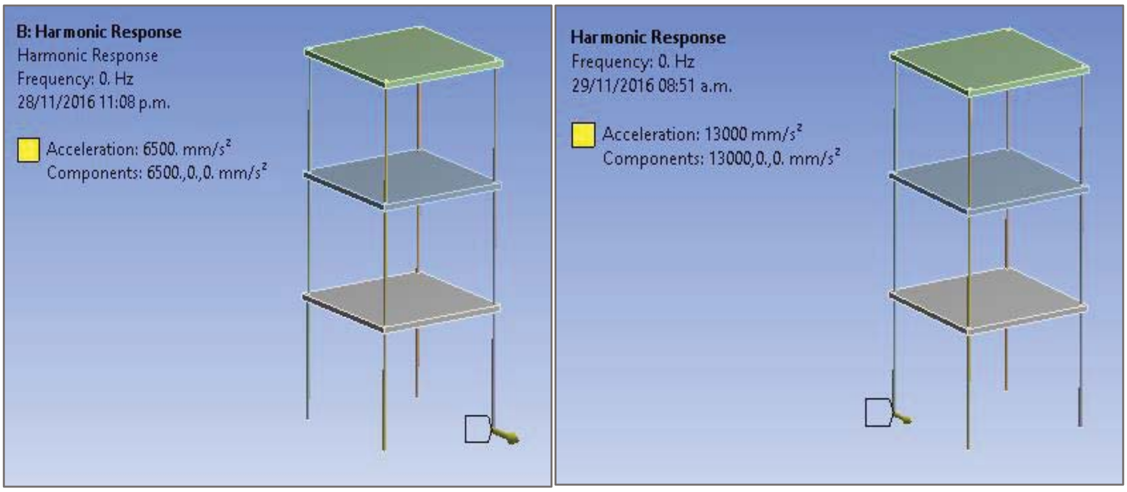


Figura 4.37 Excitación en la base

Propiedades de los materiales utilizados. Las propiedades requeridas para el análisis son el módulo de Young, relación de poisson y la densidad de las masas y columnas.

Tabla 4.8 Propiedades mecánicas y físicas

Metacrilato		
Propiedades	**Valor**	**Unidad**
Módulo de Young	3.3	Gpa
Densidad	1190	Kg/m3
Módulo de Poisson	0.45	
Poliamida		
Propiedades	**Valor**	**Unidad**
Módulo de Young	1.4	Gpa
Densidad	1140	Kg/m3
Módulo de Poisson	0.45	

Fuente: Oller, 2015.

4.6.1. ANÁLISIS MODAL

Con el análisis modal se obtuvieron tres frecuencias de 3.81, 10.78, 15.72 Hz y los modos de vibración correspondientes a las frecuencias naturales, se muestran en las figuras 4.38, 4.39, 4.40, donde se muestra una vista deformada isométrica y frontal de la estructura.

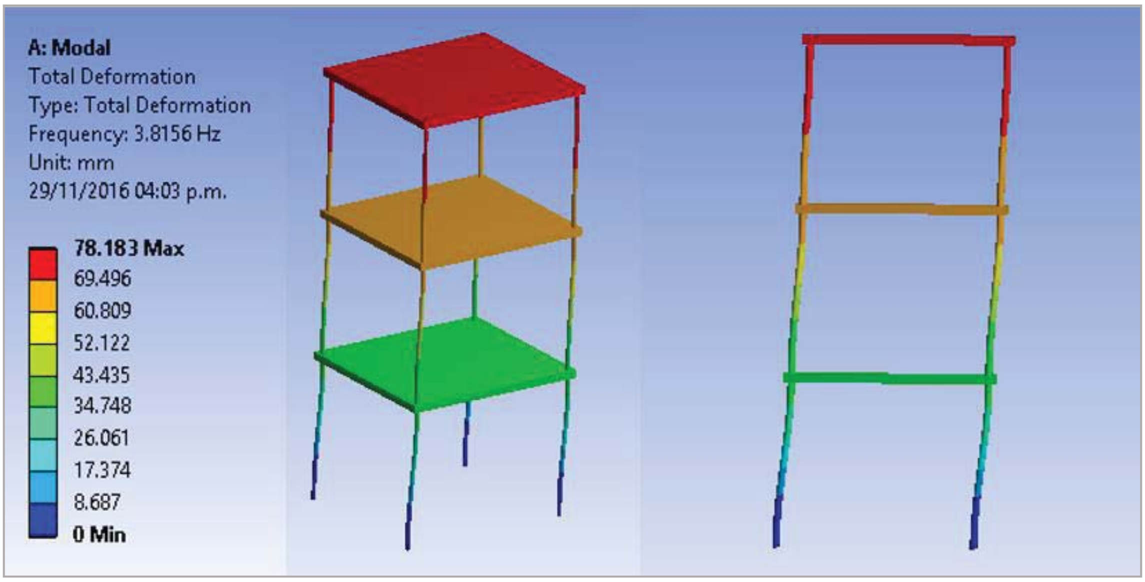


Figura 4.38 Primer modo de vibración - Frecuencia 3.81 Hz

Se puede observar en la figura 4.38, que la estructura se deforma flexionándose con respecto a los apoyos de la base.

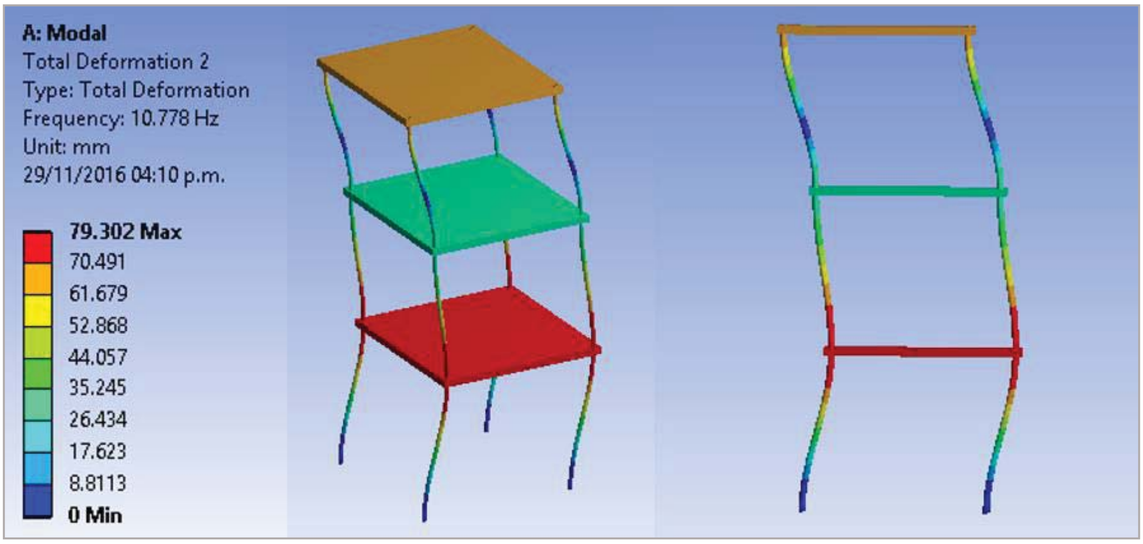


Figura 4.39 Segundo modo de vibración - Frecuencia 10.78 Hz

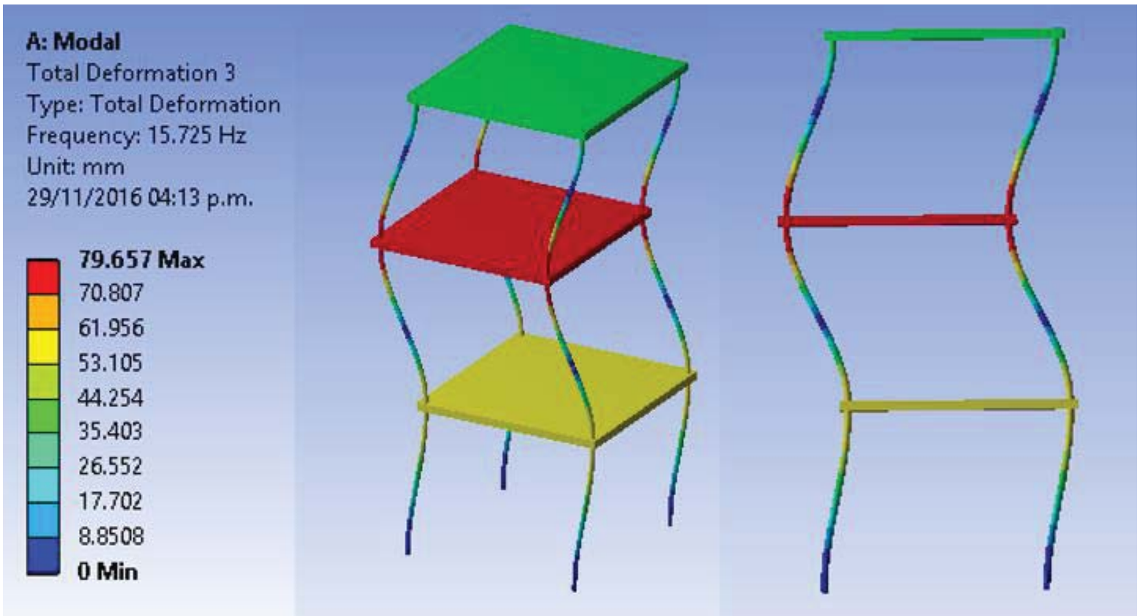


Figura 4.40 Tercer modo de vibración - Frecuencia 15.72 Hz

Se puede observar en las figuras 4.39, 4.40, que las deformaciones que generan un cizallamiento en la estructura.

4.6.2. ANÁLISIS ARMÓNICO (6500 mm/s2, 0-20Hz).

La respuesta armónica está representada en los gráficos (Amplitud- Frecuencia), para cada elemento de masa, en un intervalo de frecuencias de 0 a 20 Hz, como se muestran en las figuras 4.41, 4.42, 4.43. En el anexo 2, están tabulados los valores de los gráficos para cada masa.

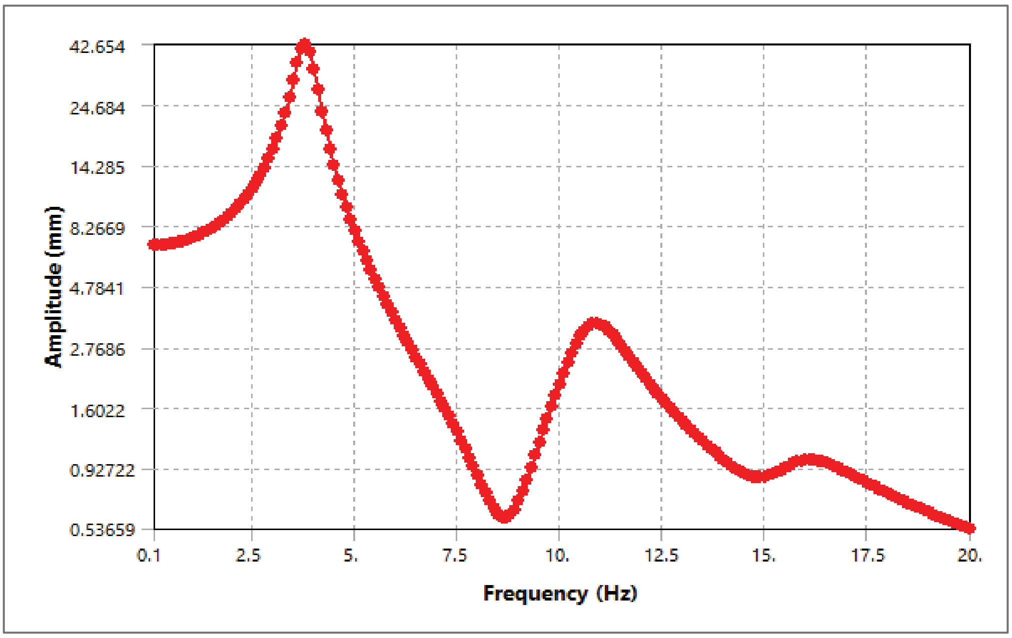


Figura 4.41 Relación amplitud - frecuencia (primera masa)

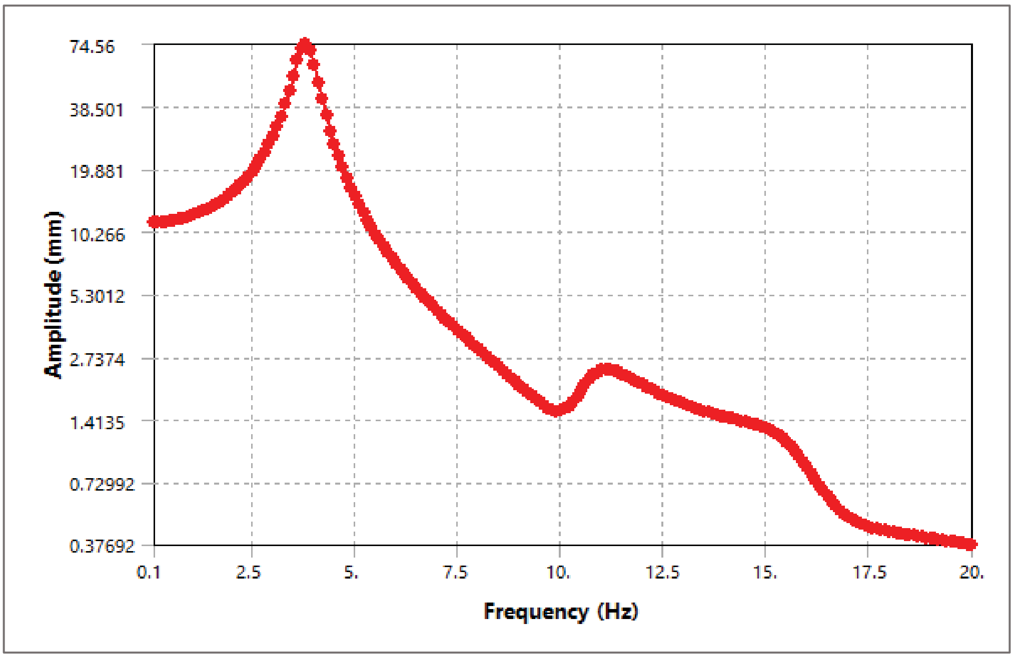


Figura 4.42 Relación amplitud - frecuencia (segunda masa)

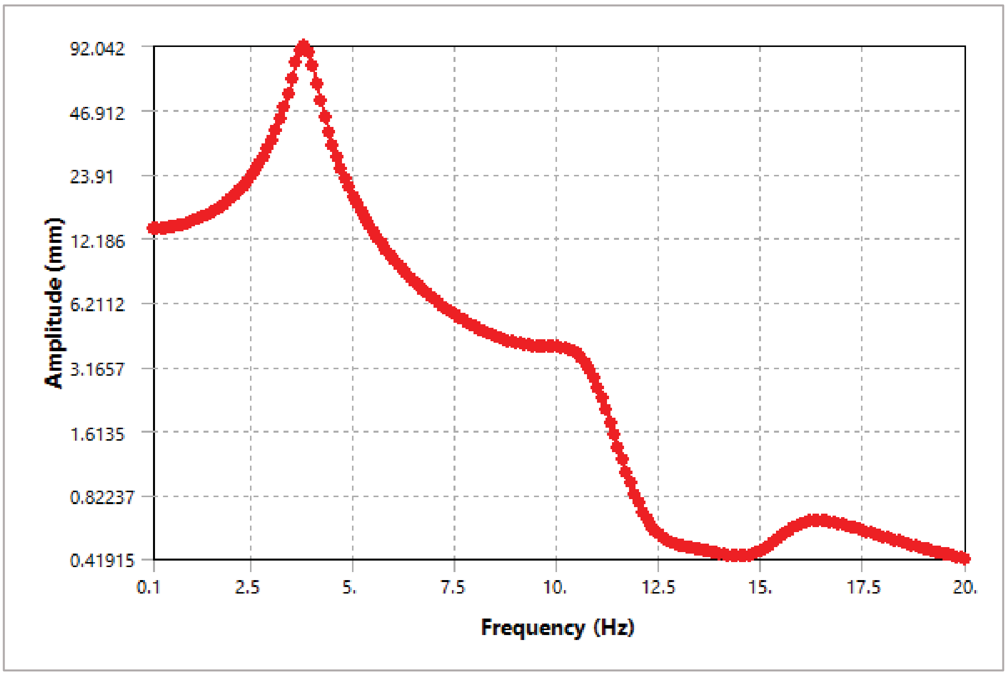


Figura 4.43 Relación amplitud - frecuencia (tercera masa)

Se puede apreciar que los máximos desplazamientos se dan para las tres frecuencias resonantes.

En las figuras 4.41, 4.42, 4.43, se muestran los desplazamientos de la primera, segunda y tercera masa respectivamente, para distintas frecuencias. Seleccionando los desplazamientos para las frecuencias de 3.1, 3.81, 10.78 y 15.72 Hz se resumen en la tabla 4.9:

Tabla 4.9 Desplazamientos para M1, M2, M3

DESCRIPCIÓN	3.1 Hz	3.81 Hz	10.78 Hz	15.72 Hz
Primera masa (M1)	18.21 mm	42.65 mm	3.42 mm	0.97 mm
Segunda masa (M2)	31.01 mm	74.56 mm	2.26 mm	1.02 mm
Tercera masa (M3)	37.79 mm	92.04 mm	3.07 mm	0.57 mm

Fuente: Elaboración propia.

4.6.3. ANÁLISIS ARMÓNICO (13000 mm/s2, 0 - 20Hz)

La respuesta armónica está representada en los gráficos (Amplitud- Frecuencia), para cada elemento de masa, en un intervalo de frecuencias de 0 a 20 Hz, como se muestra en las figuras 4.44, 4.45, 4.46.

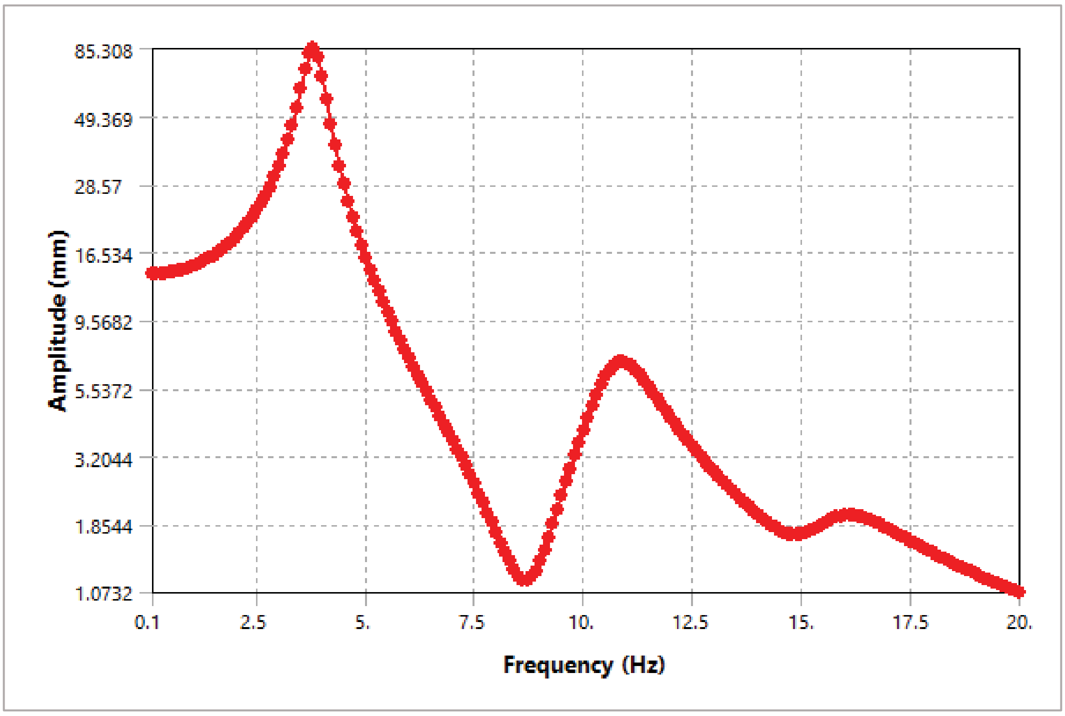


Figura 4.44 Relación desplazamiento - frecuencia (primera masa)

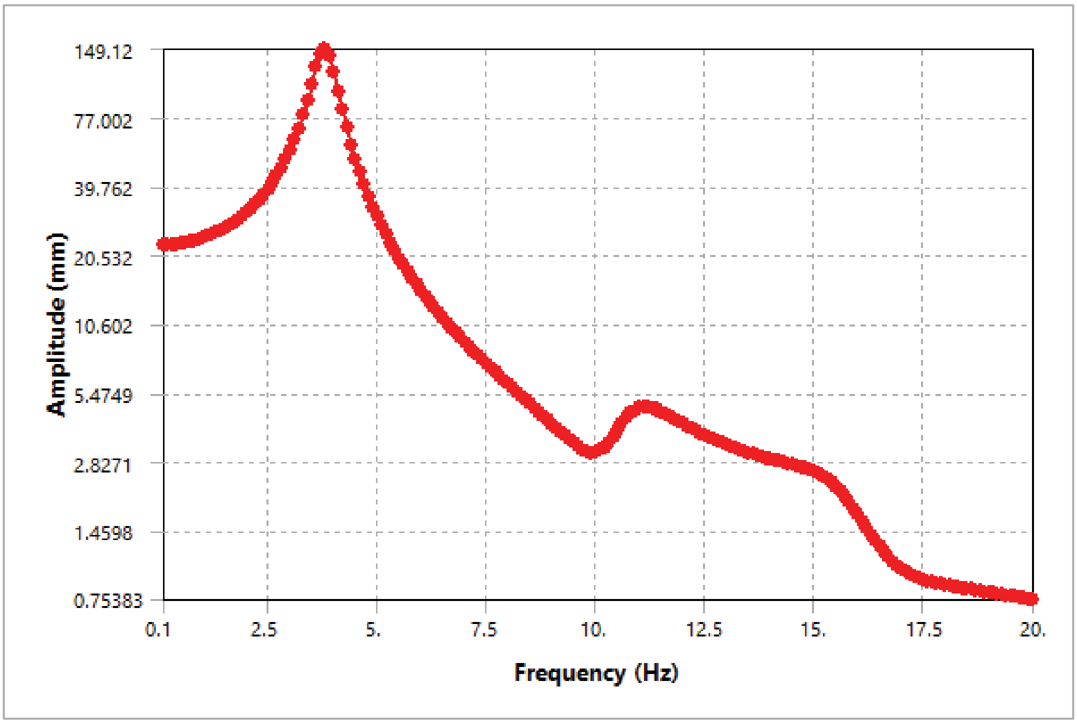


Figura 4.45 Relación desplazamiento - frecuencia (segunda masa)

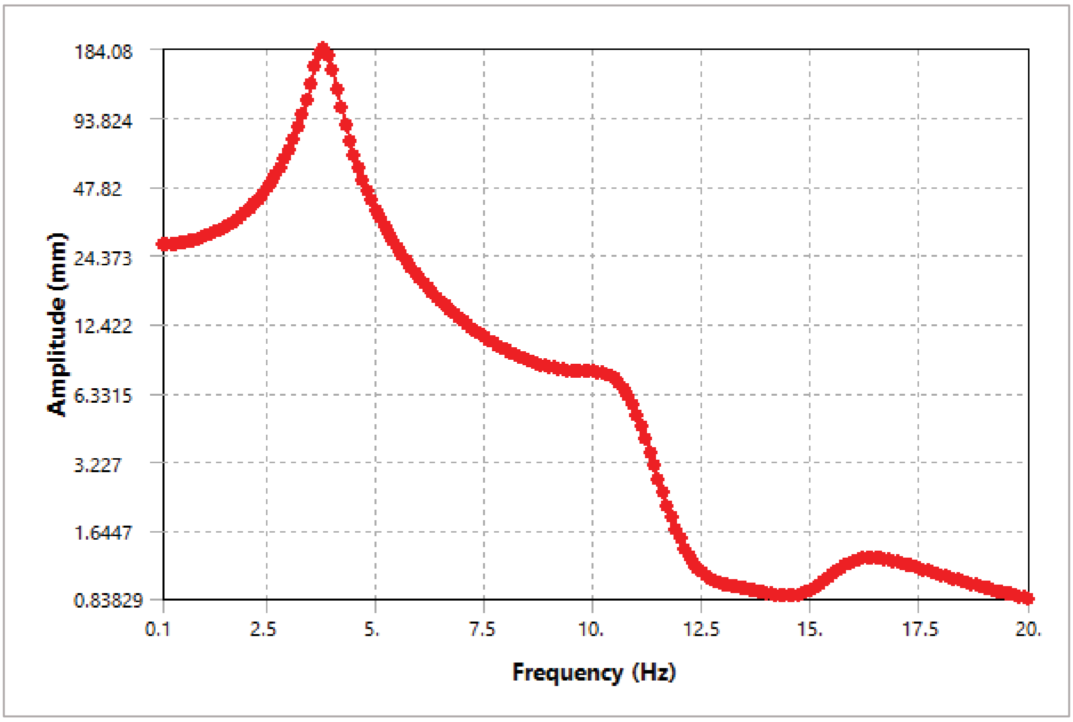


Figura 4.46 Relación desplazamiento - frecuencia (tercera masa)

También se puede apreciar que los máximos desplazamientos se dan para las tres frecuencias resonantes.

En las figuras 4.44, 4.45, 4.46, se muestran los desplazamientos de la primera, segunda y tercera masa respectivamente, para distintas frecuencias. Seleccionando los desplazamientos para las frecuencias de 3.1, 3.81, 10.78 y 15.72 Hz, se resumen en la tabla 4.10:

Tabla 4.10 Desplazamientos para M1, M2, M3

	10.5 Hz	15.8 Hz	3.81 Hz	10.78 Hz	15.72 Hz
M1	6.09 mm	1.96 mm	85.30 mm	6.83 mm	1.93 mm
M2	3.83 mm	1.92 mm	149.12 mm	4.51 mm	2.03 mm
M3	7.26 mm	1.16 mm	184.08 mm	6.13 mm	1.13 mm

Fuente: Elaboración propia.

4.7. RESUMEN DE FRECUENCIAS, DESPLAZAMIENTOS DEL ANÁLISIS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

1. En la tabla 4.11 se resumen las frecuencias naturales de la estructura. La frecuencia de 3.81 Hz es la frecuencia fundamental.

Tabla 4.11 Frecuencias naturales - FEM

	Numero	Valor
f_1	Primera frecuencia	3.81 Hz
f_2	segunda frecuencia	10.78 Hz
f_3	tercera frecuencia	15.72 Hz

Fuente: Elaboración propia

2. En la tabla 4.12 se muestran los desplazamientos de la estructura, cuando es sometido a una aceleración armónica en la base, con distintas amplitudes de aceleración y frecuencias.

Tabla 4.12 Desplazamientos - FEM

Elemento	6500 mm/s^2 (3.1Hz)	13000 mm/s^2 (10.5 Hz)	13000 mm/s^2 (15.8 Hz)
Masa 1	18.21 mm	6.09 mm	1.96 mm
Masa 2	31.01 mm	3.83 mm	1.92 mm
Masa 3	37.79 mm	7.26 mm	1.16 mm

Fuente: Elaboración propia

El desplazamiento máximo es 37.8 mm, para una aceleración de 6500 mm/s^2 a 3.1 Hz, este desplazamiento es aceptable para la tercera masa, puesto que el sistema es flexible.

3. En las tablas 4.13, 4.14, se muestra el resumen de desplazamientos, cuando la estructura experimenta resonancia para las tres frecuencias naturales 3.81, 10.78, 15.72 Hz.

Tabla 4.13 Desplazamientos – FEM (6500 mm/s²)

Elemento	3.81 Hz	10.78 Hz	15.72 Hz
Masa 1	42.65 mm	3.42 mm	0.97 mm
Masa 2	74.56 mm	2.26 mm	1.02 mm
Masa 3	92.04 mm	3.07 mm	0.57 mm

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4.14 Desplazamientos - FEM (13000 mm/s²)

Elemento	3.81 Hz	10.78 Hz	15.72 Hz
Masa 1	85.30 mm	6.83 mm	1.93 mm
Masa 2	149.12 mm	4.51 mm	2.03 mm
Masa 3	184.08 mm	6.13 mm	1.13 mm

Fuente: Elaboración propia

Como se observa en las tablas 4.13 y 4.14, los desplazamientos máximos se presentan cuando la frecuencia de excitación es 3.81 Hz, estas amplitudes son inaceptables para la estructura. La estructura experimentaría una deformación inelástica lo que representa una falla.

Los desplazamientos del análisis por elementos finitos en la tabla 4.14, son el doble comparado con la tabla 4.13, esto se explica porque la amplitud de excitación armónica es el doble (6500mm/s^2-.13000mm/s^2).

CAPÍTULO V

5. VALIDACIÓN DE LOS CÁLCULOS Y EL ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS

5.1. DESCRIPCIÓN DEL PROCEDIMIENTO

Para validar los resultados calculados mediante el análisis modal y del análisis por elemento finito, se realiza una comparación con los datos experimentales de frecuencias naturales y desplazamientos, el procedimiento se describe en la figura 5.1.

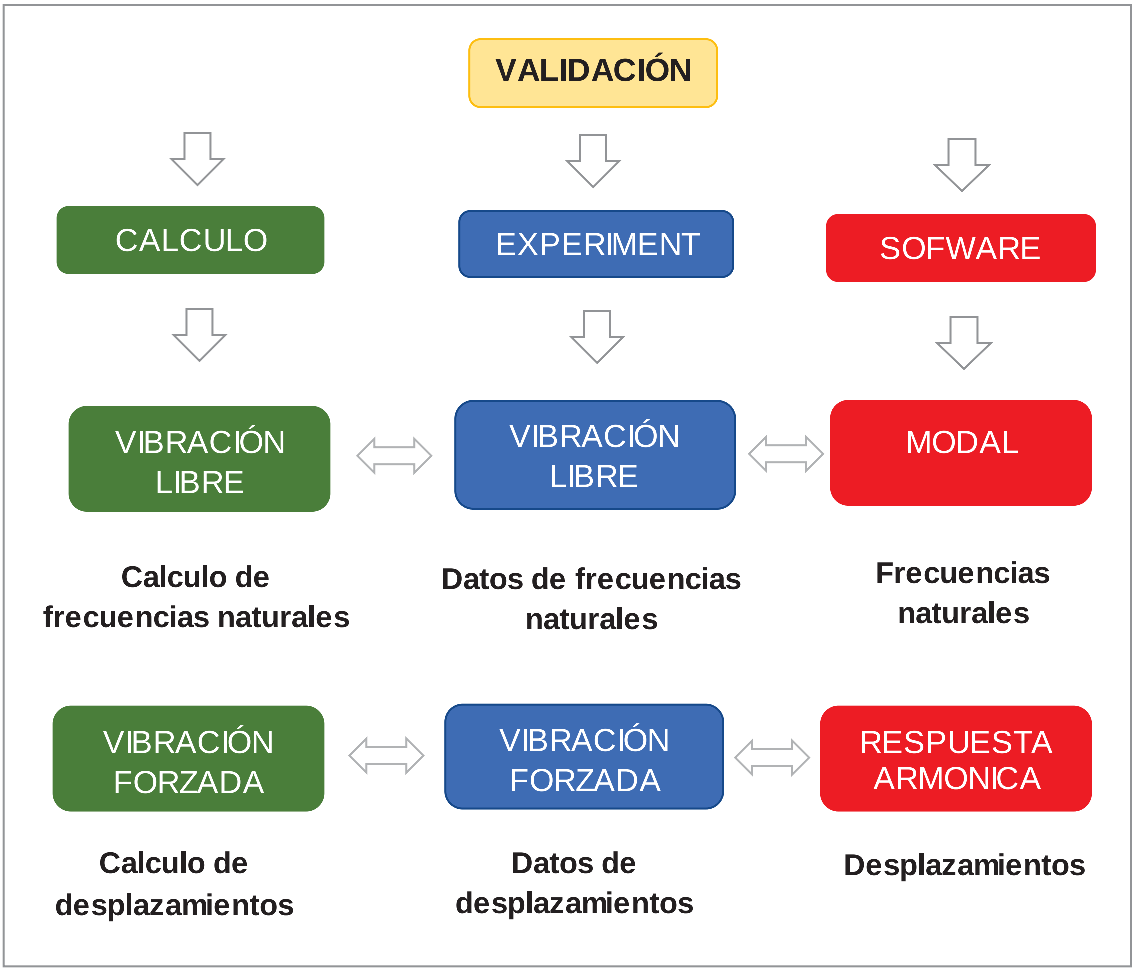


Figura 5.1 Validación del cálculo matemático

Fuente: Elaboración propia

5.2. COMPARACIÓN DE FRECUENCIAS NATURALES

Se comparan los resultados de frecuencias naturales del análisis mediante elementos finitos y los calculados mediante el análisis modal con los datos experimentales.

Para los cálculos mediante el análisis modal:

Tabla 5.1 Frecuencias naturales

	Dato	Calculo	% Aprox.
Primera frecuencia (Hz)	3.20	3.80	81%
Segunda frecuencia (Hz)	11.43	10.67	93%
Tercera frecuencia (Hz)	18.75	15.42	82%

Fuente: Elaboración propia

Se puede observar que existe una aproximación mayor al 80% para todos los valores de frecuencias naturales. La aproximación es bastante buena.

Para el análisis mediante elementos finitos:

Tabla 5.2 Frecuencias naturales

	Dato	Software	% Aprox.
Primera frecuencia (Hz)	3.20	3.81	80%
Segunda frecuencia (Hz)	11.43	10.78	94%
Tercera frecuencia (Hz)	18.75	15.72	82%

Fuente: Elaboración propia

Se aprecia que la aproximación mínima es 80% y mayor a 80% para el resto de frecuencias. La aproximación es también bastante buena.

5.3. COMPARACIÓN DE DESPLAZAMIENTOS

Se comparan los resultados para vibración forzada del análisis mediante elementos finitos y los calculados mediante el análisis modal con los datos experimentales.

Para los cálculos mediante el análisis modal:

- En la tabla 5.3 se comparan los desplazamientos cuando la amplitud de aceleración en la base es 6500 mm/s^2 con la frecuencia de 3.1 Hz.

Tabla 5.3 Amplitudes máximas (6500 mm/s2, 3.1 Hz)

Elemento	Dato	Calculo	% Aprox.
Masa 1	15.62 mm	17.95 mm	85%
Masa 2	20.70 mm	31.42 mm	48%
Masa 3	27.90 mm	38.63 mm	62%

Fuente: Elaboración propia

La aproximacion minima es 48% y superior al 50% para el resto. La aproximacion es regular.

- En la tabla 5.4 se comparan los desplazamientos cuando la amplitud de aceleración en la base es 13000 mm/s^2 con la frecuencia de 10.5 Hz.

Tabla 5.4 Amplitudes máximas (13000 mm/s^2, 10.5 Hz)

Elemento	Dato	Calculo	% Aprox.
Masa 1	7.04 mm	7.36 mm	95%
Masa 2	2.32 mm	4.48 mm	6%
Masa 3	4.96 mm	6.37 mm	71%

Fuente: Elaboración propia

El valor minimo de aproximacion es 6% y la diferencia de desplazamientos es 2.16 mm, esta diferencia es minima y aceptable. Para el resto la aproximacion es mayor al 70%. La aproximacion es regular.

- En la tabla 5.5 se comparan los desplazamientos cuando la amplitud de aceleración en la base es 13000 mm/s^2 con la frecuencia de 15.8 Hz.

Tabla 5.5 Amplitudes máximas (13000 mm/s2, 15.8 Hz)

Elemento	Dato	Calculo	% Aprox.
Masa 1	2.38 mm	2.14 mm	90%
Masa 2	1.66 mm	1.68 mm	98%
Masa 3	1.37 mm	1.28 mm	93%

Fuente: Elaboración propia.

La aproximacion minima es 90% y superior al 90% para el resto. La aproximacion es buena.

Para el análisis mediante elementos finitos:

- En la tabla 5.6 se comparan los desplazamientos cuando la amplitud de aceleración en la base es 6500 mm/s^2 con la frecuencia de 3.1 Hz.

Tabla 5.6 Amplitudes máximas (6500 mm/s2, 3.1 Hz)

Elemento	Dato	Software	% Aprox.
Masa 1	15.62 mm	18.21 mm	85%
Masa 2	20.70 mm	31.01 mm	50%
Masa 3	27.90 mm	37.79 mm	65%

Fuente: Elaboración propia.

La aproximacion minima es 48% y superior al 50% para el resto. La aproximacion es regular.

- En la tabla 5.7 se comparan los desplazamientos cuando la amplitud de aceleración en la base es 13000 mm/s^2 con la frecuencia de 10.5 Hz.

Tabla 5.7 Amplitudes máximas (13000 mm/s^2, 10.5 Hz)

Elemento	Dato	Software	% Aprox.
Masa 1	7.04 mm	6.09 mm	86%
Masa 2	2.32 mm	3.83 mm	34%
Masa 3	4.96 mm	7.26 mm	71%

Fuente: Elaboración propia.

La aproximacion minima es 34% y superior al 80% para el resto. La aproximacion es regular.

- En la tabla 5.8 se comparan los desplazamientos cuando la amplitud de aceleración en la base es 13000 mm/s^2 con la frecuencia de 15.8 Hz.

Tabla 5.8 Amplitudes máximas (13000 mm/s2, 15.8 Hz)

Elemento	Dato	Software	% Aprox.
Masa 1	2.38 mm	1.96 mm	82%
Masa 2	1.66 mm	1.92 mm	84%
Masa 3	1.37 mm	1.16 mm	85%

Fuente: Elaboración propia.

La aproximacion es mayor al 80% para todos los desplazamientos. La aproximacion es buena.

En general se puede observar que se tiene una aproximación regular de los resultados mediante elementos finitos (promedio 74.8%) y los calculados mediante el análisis modal (Promedio 75.3%). El análisis realizado mediante elementos finitos y los calculados mediante el análisis modal, para determinar la respuesta es representativo del comportamiento de la estructura cuando está sometido a una excitación armónica en la base.

CONCLUSIONES

1. La estructura con excitación en la base, tiene tres frecuencias naturales que representan las frecuencias resonantes y la máxima respuesta se presenta en la primera frecuencia natural.
2. Mediante el análisis modal se han obtenido:

- Tres frecuencias naturales de 3.80, 10.67, 15.42 Hz y sus modos de vibración respectivos.
- Cuando la excitación armónica es 6500 mm/s^2 con una frecuencia de 3.8 Hz, el esfuerzo y deformación obtenidos (90.76 Mpa, 92.6 mm), son superiores a la resistencia del material de la estructura (40 Mpa) y se presenta una falla por resistencia.
- Cuando excitación armónica es 13000 mm/s^2, los esfuerzos y deformaciones en la estructura son el doble del que se obtiene cuando se aplica una excitación de 6500 mm/s^2, para cualquier frecuencia.

3. Mediante el análisis con elementos finitos se han obtenido:

- Tres frecuencias naturales de 3.81, 10.78, 15.72 Hz y sus modos de vibración respectivos.
- Cuando la excitación armónica es 6500 mm/s^2 con una frecuencia de 3.81 Hz, el máximo desplazamiento obtenido en la estructura es 92 mm.
- Si la excitación armónica es 13000 mm/s^2, los desplazamientos son el doble del que se obtiene cuando la excitación es 6500 mm/s^2, para cualquier frecuencia.

4. El porcentaje de aproximación promedio a los datos experimentales del análisis modal es 75.3% y para el análisis por elementos finitos es 74.8%.

5. La estructura con excitación en la base falla solo en la primera frecuencia resonante.

RECOMENDACIONES

- Optimizar el análisis por elementos finitos con un refinamiento de malla superior a 65000 elementos.
- Para evitar la falla por resonancia en la estructura tipo marco se debe evitar una excitación con una frecuencia igual a la primera frecuencia natural.
- La reducción de la deformación en resonancia de la estructura tipo marco se logra con el incremento de la rigidez o amortiguamiento.
- Diseñar y construir una estructura tipo marco de tres niveles con excitación armónica desbalanceada en los tres niveles.

BIBLIOGRAFÍA

- Chopra, A. K. (2014). DINAMICA DE ESTRUCTURAS. Mexico: PEARSON EDUCACION.
- James M. , G. (2014). MECANICA DE MATERIALES. Mexico: Cemgage learning.
- Reyes, L. E. (1998). DINAMICA ESTRUCTURAL APLICADA AL DISEÑO SISMICO. Colombia: Universidad de los andes.
- Pasino, G. O. (2012). APUNTES DEL CURSO DE ANALISIS ESTRUCTURAL. Lima.
- Gonzales, J. V. (2016). DINAMICA DE ESTRUCTURAS. México: Limusa, S. A.
- Hibbeler, R. C. (2012). ANALISIS ESTRUCTURAL. México: Pearson.
- Kassimali, A. (2014). ANALISIS ESTRUCTURAL. México: Cemgage learning.
- Rao, S. S. (2012). VIBRACIONES MECANICAS. México: Pearson.
- T. Thomson, W. (1981). TEORIA DE VIBRACIONES. México: Prentice-hall.
- Juan T. C. (2008). MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS ESTRUCTURAL. España: Unicopia C.B.
- Oller, R. C. (2015). ENSAYO A ESCALA DE EDIFICIO DE DOS ALTURAS SOMETIDO A DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES. Barcelona, España.

- Bozzo, L. M., & Barbat, A. H. (1999). DISEÑO SISMORESISTENTE DE EDIFICIOS: TECNICAS CONVENCIONALES Y AVANZADAS . Reverte.
- Barbat & Canet, 1994. "ESTRUCTURAS SOMETIDAS A ACCIONES SISMICAS, Cálculo por Ordenador" Segunda Edición, Alex H. Barbat – Juan Miquel Canet, Ediciones CIMNE. Barcelona 1994.

Artículos.

- G. Urriolagoitia-C. (2007). APLICACIÓN Y ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS CRITERIOS DE DISEÑO MECÁNICO POR RESISTENCIA A ESFUERZOS, RIGIDEZ Y MODOS DE VIBRACIÓN. ESIME-IPN, México.
- Zoran Petković. (2008). MATHEMATICAL MODELLING OF THE IN-PLANE VIBRATIONS OF PORTAL CRANES WITH FEM VERIFICATION. Aleksandar Obradović, Vlada Gašić, Zoran Petković. Faculty of Mechanical Engineering, Serbia.
- M. Ramesha (2015). MODAL ANALYSIS AND HARMONIC RESPONSE ANALYSIS OF A CRANKSHAFT. Dr. C. M. Ramesha, Abhijith K G, Abhinav Singh, Abhishek Raj, Chetan S Naik. IJETAE Exploring Research and Innovation, India.
- Aneesha S. Das (2016). STRUCTURAL HEALTH MONITORING OF A FRAME USING RANDOM VIBRATION ANALYSIS. Aneesha S. Das, Dr. Sajal Roy, Ritzy .R. International Journal of Science and Research (IJSR).

Enlaces web

http://estructurando.net/2014/06/30/5-cagadas-en-la-ingenieria-de-puentes-por-culpa-de-la-resonancia/

https://www.quora.com/How-should-I-decide-which-mesh-to-use-in-ansys http://www.mwmaterialsworld.com/es/materiales/metacrilato-y-policarbonato.html

http://www.plasticos-mecanizables.com/plasticos_poliamida_pa.html

http://www.slideshare.net/mandargadkari94/detail-ppt-on-scotch-yoke-mechanism

http://www.foroambiental.com.mx/terremoto-de-1985-la-resonancia-y-la-ecologia/

ANEXO 1

CALCULO DE RAÍCES DE UN POLINOMIO

Ecuación de valores propios:

$$\omega^6 - 14117.64\omega^4 + 47833910.03\omega^2 - 2.25x10^{10} = 0$$

Se forma el polinomio completo de grado seis:

$$\omega^6 + 0\omega^5 - 14117.64\omega^4 + 0\omega^3 + 47833910.03\omega^2 + 0\omega - 2.25x10^{10} = 0$$

Este polinomio se resuelve utilizando el comando roots de matlab:

>> Polinomio = [1 0 -14117.6 0 47833910.03 0 -22500000000]

>> roots (polinomio)

ans =

- 96.88

  96.88

- 67.04

  67.04

- 23.87

  23.87

Utilizando únicamente los valores positivos y tras formando de rad/s a Hz se obtienen:

$\omega_1 = 23.87\, rad/s$	:	$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{23.87}{2\pi}$	:	$f_1 = 3.80$ Hz
$\omega_2 = 67.04\, rad/s$	:	$f_1 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{67.04}{2\pi}$	:	$f_2 = 10.67$ Hz
$\omega_3 = 96.88\, rad/s$	:	$f_1 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{96.88}{2\pi}$	:	$f_3 = 15.42$ Hz

ANEXO 2

AMPLITUDES PARA LA PRIMERA MASA

	F [Hz]	A [mm]
1	0.10	6.93
2	0.20	6.94
3	0.30	6.96
4	0.40	6.99
5	0.50	7.03
6	0.60	7.08
7	0.70	7.14
8	0.80	7.21
9	0.90	7.29
10	1.00	7.39
11	1.10	7.50
12	1.20	7.62
13	1.30	7.75
14	1.40	7.91
15	1.50	8.08
16	1.60	8.27
17	1.70	8.48
18	1.80	8.72
19	1.90	8.99
20	2.00	9.30
21	2.10	9.64
22	2.20	10.03
23	2.30	10.48
24	2.40	10.99
25	2.50	11.58
26	2.60	12.26
27	2.70	13.06
28	2.80	14.00
29	2.90	15.14
30	3.00	16.52
31	3.10	18.21
32	3.20	20.33
33	3.30	23.03
34	3.40	26.47
35	3.50	30.83
36	3.60	35.97
37	3.70	40.79
38	3.80	42.65
39	3.90	39.75
40	4.00	33.98
41	4.10	28.11
42	4.20	23.26
43	4.30	19.48
44	4.40	16.56
45	4.50	14.27
46	4.60	12.46
47	4.70	10.99
48	4.80	9.78
49	4.90	8.78
50	5.00	7.92
51	5.10	7.20
52	5.20	6.57
53	5.30	6.02
54	5.40	5.53
55	5.50	5.10
56	5.60	4.72
57	5.70	4.38
58	5.80	4.07
59	5.90	3.79
60	6.00	3.53
61	6.10	3.30
62	6.20	3.08
63	6.30	2.88
64	6.40	2.70
65	6.50	2.53
66	6.60	2.37
67	6.70	2.22
68	6.80	2.07
69	6.90	1.94
70	7.00	1.82
71	7.10	1.70
72	7.20	1.59
73	7.30	1.48
74	7.40	1.38
75	7.50	1.28
76	7.60	1.19
77	7.70	1.10
78	7.80	1.02
79	7.90	0.94
80	8.00	0.87
81	8.10	0.80
82	8.20	0.74
83	8.30	0.69
84	8.40	0.64
85	8.50	0.61
86	8.60	0.59
87	8.70	0.59
88	8.80	0.61
89	8.90	0.64
90	9.00	0.69
91	9.10	0.76
92	9.20	0.84
93	9.30	0.93
94	9.40	1.04
95	9.50	1.16
96	9.60	1.30
97	9.70	1.45
98	9.80	1.61
99	9.90	1.79
100	10.00	1.99

101	10.10	2.19
102	10.20	2.41
103	10.30	2.63
104	10.40	2.85
105	10.50	3.05
106	10.60	3.22
107	10.70	3.34
108	10.80	3.42
109	10.90	3.43
110	11.00	3.40
111	11.10	3.32
112	11.20	3.21
113	11.30	3.09
114	11.40	2.95
115	11.50	2.81
116	11.60	2.67
117	11.70	2.54
118	11.80	2.42
119	11.90	2.30
120	12.00	2.19
121	12.10	2.08
122	12.20	1.99
123	12.30	1.90
124	12.40	1.82
125	12.50	1.74
126	12.60	1.67
127	12.70	1.60
128	12.80	1.53
129	12.90	1.47
130	13.00	1.42
131	13.10	1.37
132	13.20	1.32
133	13.30	1.27
134	13.40	1.22

135	13.50	1.18
136	13.60	1.14
137	13.70	1.10
138	13.80	1.07
139	13.90	1.03
140	14.00	1.00
141	14.10	0.97
142	14.20	0.95
143	14.30	0.92
144	14.40	0.90
145	14.50	0.89
146	14.60	0.87
147	14.70	0.86
148	14.80	0.86
149	14.90	0.85
150	15.00	0.86
151	15.10	0.87
152	15.20	0.88
153	15.30	0.89
154	15.40	0.91
155	15.50	0.93
156	15.60	0.95
157	15.70	0.97
158	15.80	0.98
159	15.90	0.99
160	16.00	1.00
161	16.10	1.00
162	16.20	1.00
163	16.30	0.99
164	16.40	0.98
165	16.50	0.97
166	16.60	0.96
167	16.70	0.94
168	16.80	0.93

169	16.90	0.91
170	17.00	0.90
171	17.10	0.88
172	17.20	0.86
173	17.30	0.85
174	17.40	0.83
175	17.50	0.81
176	17.60	0.80
177	17.70	0.78
178	17.80	0.77
179	17.90	0.75
180	18.00	0.74
181	18.10	0.73
182	18.20	0.71
183	18.30	0.70
184	18.40	0.69
185	18.50	0.68
186	18.60	0.67
187	18.70	0.65
188	18.80	0.64
189	18.90	0.63
190	19.00	0.62
191	19.10	0.61
192	19.20	0.60
193	19.30	0.59
194	19.40	0.59
195	19.50	0.58
196	19.60	0.57
197	19.70	0.56
198	19.80	0.55
199	19.90	0.54
200	20.00	0.54

AMPLITUDES PARA LA SEGUNDA MASA

	F [Hz]	A [mm]
1	0.10	11.28
2	0.20	11.30
3	0.30	11.34
4	0.40	11.39
5	0.50	11.46
6	0.60	11.55
7	0.70	11.65
8	0.80	11.78
9	0.90	11.92
10	1.00	12.08
11	1.10	12.27
12	1.20	12.48
13	1.30	12.71
14	1.40	12.98
15	1.50	13.28
16	1.60	13.61
17	1.70	13.99
18	1.80	14.41
19	1.90	14.88
20	2.00	15.41
21	2.10	16.01
22	2.20	16.69
23	2.30	17.47
24	2.40	18.36
25	2.50	19.38
26	2.60	20.57
27	2.70	21.97
28	2.80	23.63
29	2.90	25.62
30	3.00	28.03
31	3.10	31.01
32	3.20	34.74
33	3.30	39.47
34	3.40	45.54
35	3.50	53.23
36	3.60	62.35
37	3.70	71.00
38	3.80	74.56
39	3.90	69.80
40	4.00	59.95
41	4.10	49.84
42	4.20	41.44
43	4.30	34.89
44	4.40	29.82
45	4.50	25.86
46	4.60	22.71
47	4.70	20.16
48	4.80	18.07
49	4.90	16.32
50	5.00	14.85
51	5.10	13.59
52	5.20	12.50
53	5.30	11.55
54	5.40	10.72
55	5.50	9.98
56	5.60	9.33
57	5.70	8.74
58	5.80	8.21
59	5.90	7.73
60	6.00	7.30
61	6.10	6.90
62	6.20	6.54
63	6.30	6.20
64	6.40	5.90
65	6.50	5.61
66	6.60	5.35
67	6.70	5.10
68	6.80	4.87
69	6.90	4.66
70	7.00	4.46
71	7.10	4.27
72	7.20	4.09
73	7.30	3.93
74	7.40	3.77
75	7.50	3.62
76	7.60	3.48
77	7.70	3.34
78	7.80	3.22
79	7.90	3.09
80	8.00	2.98
81	8.10	2.86
82	8.20	2.76
83	8.30	2.65
84	8.40	2.56
85	8.50	2.46
86	8.60	2.37
87	8.70	2.28
88	8.80	2.19
89	8.90	2.11
90	9.00	2.03
91	9.10	1.95
92	9.20	1.88
93	9.30	1.81
94	9.40	1.75
95	9.50	1.69
96	9.60	1.63
97	9.70	1.59
98	9.80	1.56
99	9.90	1.55
100	10.00	1.55
101	10.10	1.58
102	10.20	1.63
103	10.30	1.70
104	10.40	1.80
105	10.50	1.92
106	10.60	2.04

107	10.70	2.16
108	10.80	2.26
109	10.90	2.33
110	11.00	2.38
111	11.10	2.40
112	11.20	2.39
113	11.30	2.37
114	11.40	2.33
115	11.50	2.29
116	11.60	2.24
117	11.70	2.19
118	11.80	2.14
119	11.90	2.09
120	12.00	2.04
121	12.10	1.99
122	12.20	1.95
123	12.30	1.91
124	12.40	1.86
125	12.50	1.83
126	12.60	1.79
127	12.70	1.75
128	12.80	1.72
129	12.90	1.69
130	13.00	1.66
131	13.10	1.64
132	13.20	1.61
133	13.30	1.59
134	13.40	1.56
135	13.50	1.54
136	13.60	1.52
137	13.70	1.50
138	13.80	1.48
139	13.90	1.47

140	14.00	1.45
141	14.10	1.44
142	14.20	1.42
143	14.30	1.41
144	14.40	1.39
145	14.50	1.38
146	14.60	1.36
147	14.70	1.35
148	14.80	1.33
149	14.90	1.31
150	15.00	1.29
151	15.10	1.26
152	15.20	1.23
153	15.30	1.20
154	15.40	1.16
155	15.50	1.12
156	15.60	1.07
157	15.70	1.02
158	15.80	0.96
159	15.90	0.91
160	16.00	0.85
161	16.10	0.80
162	16.20	0.75
163	16.30	0.70
164	16.40	0.66
165	16.50	0.63
166	16.60	0.59
167	16.70	0.57
168	16.80	0.54
169	16.90	0.52
170	17.00	0.51
171	17.10	0.49
172	17.20	0.48

173	17.30	0.47
174	17.40	0.46
175	17.50	0.46
176	17.60	0.45
177	17.70	0.45
178	17.80	0.44
179	17.90	0.44
180	18.00	0.43
181	18.10	0.43
182	18.20	0.43
183	18.30	0.42
184	18.40	0.42
185	18.50	0.42
186	18.60	0.41
187	18.70	0.41
188	18.80	0.41
189	18.90	0.41
190	19.00	0.40
191	19.10	0.40
192	19.20	0.40
193	19.30	0.40
194	19.40	0.39
195	19.50	0.39
196	19.60	0.39
197	19.70	0.39
198	19.80	0.38
199	19.90	0.38
200	20.00	0.38

AMPLITUDES PARA LA TERCERA MASA

	F [Hz]	A [mm]
1	0.10	13.43
2	0.20	13.46
3	0.30	13.51
4	0.40	13.58
5	0.50	13.66
6	0.60	13.77
7	0.70	13.90
8	0.80	14.05
9	0.90	14.22
10	1.00	14.42
11	1.10	14.65
12	1.20	14.91
13	1.30	15.20
14	1.40	15.53
15	1.50	15.90
16	1.60	16.31
17	1.70	16.77
18	1.80	17.29
19	1.90	17.87
20	2.00	18.52
21	2.10	19.26
22	2.20	20.10
23	2.30	21.06
24	2.40	22.15
25	2.50	23.42
26	2.60	24.89
27	2.70	26.62
28	2.80	28.67
29	2.90	31.12
30	3.00	34.11
31	3.10	37.79
32	3.20	42.39
33	3.30	48.25
34	3.40	55.77
35	3.50	65.31
36	3.60	76.65
37	3.70	87.46
38	3.80	92.04
39	3.90	86.35
40	4.00	74.34
41	4.10	61.95
42	4.20	51.64
43	4.30	43.59
44	4.40	37.36
45	4.50	32.49
46	4.60	28.61
47	4.70	25.48
48	4.80	22.91
49	4.90	20.76
50	5.00	18.95
51	5.10	17.41
52	5.20	16.07
53	5.30	14.91
54	5.40	13.89
55	5.50	12.99
56	5.60	12.20
57	5.70	11.48
58	5.80	10.84
59	5.90	10.26
60	6.00	9.74
61	6.10	9.26
62	6.20	8.82
63	6.30	8.42
64	6.40	8.06
65	6.50	7.72
66	6.60	7.41
67	6.70	7.12
68	6.80	6.86
69	6.90	6.61
70	7.00	6.38
71	7.10	6.17
72	7.20	5.97
73	7.30	5.78
74	7.40	5.61
75	7.50	5.45
76	7.60	5.30
77	7.70	5.16
78	7.80	5.03
79	7.90	4.91
80	8.00	4.80
81	8.10	4.69
82	8.20	4.59
83	8.30	4.50
84	8.40	4.42
85	8.50	4.34
86	8.60	4.27
87	8.70	4.21
88	8.80	4.15
89	8.90	4.10
90	9.00	4.05
91	9.10	4.02
92	9.20	3.98
93	9.30	3.96
94	9.40	3.93
95	9.50	3.92
96	9.60	3.91
97	9.70	3.90
98	9.80	3.89
99	9.90	3.89
100	10.00	3.88

101	10.10	3.87
102	10.20	3.85
103	10.30	3.81
104	10.40	3.74
105	10.50	3.63
106	10.60	3.49
107	10.70	3.30
108	10.80	3.07
109	10.90	2.81
110	11.00	2.54
111	11.10	2.26
112	11.20	2.00
113	11.30	1.76
114	11.40	1.54
115	11.50	1.35
116	11.60	1.19
117	11.70	1.05
118	11.80	0.93
119	11.90	0.83
120	12.00	0.75
121	12.10	0.69
122	12.20	0.64
123	12.30	0.60
124	12.40	0.57
125	12.50	0.54
126	12.60	0.53
127	12.70	0.51
128	12.80	0.50
129	12.90	0.49
130	13.00	0.49
131	13.10	0.48
132	13.20	0.48
133	13.30	0.47
134	13.40	0.47

135	13.50	0.46
136	13.60	0.46
137	13.70	0.46
138	13.80	0.45
139	13.90	0.45
140	14.00	0.44
141	14.10	0.44
142	14.20	0.44
143	14.30	0.43
144	14.40	0.43
145	14.50	0.43
146	14.60	0.43
147	14.70	0.44
148	14.80	0.44
149	14.90	0.45
150	15.00	0.45
151	15.10	0.47
152	15.20	0.48
153	15.30	0.50
154	15.40	0.51
155	15.50	0.53
156	15.60	0.55
157	15.70	0.57
158	15.80	0.58
159	15.90	0.60
160	16.00	0.61
161	16.10	0.62
162	16.20	0.62
163	16.30	0.63
164	16.40	0.63
165	16.50	0.63
166	16.60	0.62
167	16.70	0.62
168	16.80	0.61

169	16.90	0.61
170	17.00	0.60
171	17.10	0.59
172	17.20	0.59
173	17.30	0.58
174	17.40	0.57
175	17.50	0.57
176	17.60	0.56
177	17.70	0.55
178	17.80	0.54
179	17.90	0.54
180	18.00	0.53
181	18.10	0.52
182	18.20	0.52
183	18.30	0.51
184	18.40	0.50
185	18.50	0.50
186	18.60	0.49
187	18.70	0.49
188	18.80	0.48
189	18.90	0.47
190	19.00	0.47
191	19.10	0.46
192	19.20	0.46
193	19.30	0.45
194	19.40	0.45
195	19.50	0.44
196	19.60	0.44
197	19.70	0.43
198	19.80	0.43
199	19.90	0.42
200	20.00	0.42

ANEXO 3

PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Poliamida PA			
Densidad (PA)	ISO 1183	1,13	g/cm3
límite superior	–	70	°C
límite inferior	–	–40	°C
Tensión de fluencia	ISO 527	90 / 45	MPa
Alargamiento de fluencia	ISO 527	4,5 / 20	%
Resistencia a la tracción	ISO 527	-	MPa
Alargamiento de rotura	ISO 527	>50	%
Resistencia a golpes	ISO 179	o.B.	kJ/m2
Resiliencia	ISO 179	9 / o.B.	kJ/m2
Resistencia a la flexión	ISO 178	-	MPa
Módulo de elasticidad	ISO 527	3000 / 1000	MPa

Fuente:http://www.plasticos-mecanizables.com/plasticos_poliamida_pa.html

Metacrilato PMMA			
Densidad PMMA	ISO 1183	1,18	g/cm3
Absorción de agua	DIN 53495	0,3	%
Resistencia química	DIN 53476	-	–
Tensión de fluencia	ISO 527	70	MPa
Alargamiento de fluencia	ISO 527	-	%
Resistencia a la tracción	ISO 527	72	MPa
Alargamiento de rotura	ISO 527	5	%
Resistencia a golpes	ISO 179	15	kJ/m2
Resiliencia	ISO 179	1,5	kJ/m2
Dureza a la indentación de bola (Hk) /Rockwell	ISO 2039-1	185	MPa
Resistencia a la flexión (sB 3,5%)	ISO 178	125	MPa
Módulo de elasticidad	ISO 527	3300	MPa

Fuente: http://www.plasticos-mecanizables.com/plasticos_metacrilato.html