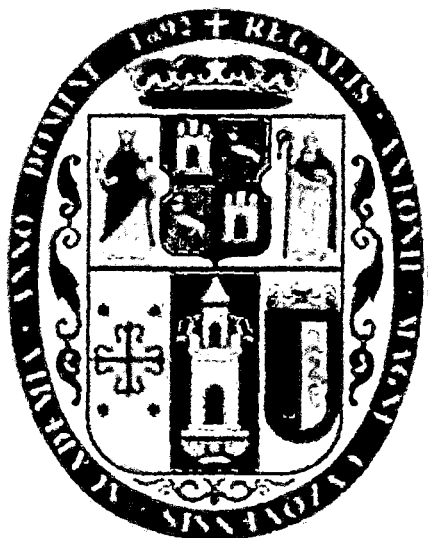


UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA, MECÁNICA Y MINAS

“CARRERA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA”



**“MODELAMIENTO Y ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN LA MINI
CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA”**

Presentado por:

Br. JULIO TITO LAUPA

Br. JULIO CESAR HUAMÁN LAURA

Para optar al Título Profesional de Ingeniero Electricista.

Asesor:

ING. WILBERT JULIO LOAIZA CUBA

TESIS FINANCIADA POR LA UNSAAC

CUSCO – PERÚ

2015

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres Julio y Estefanía por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, formación académica, moral y espiritual, por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo.

A mis dos tesoros Mery y Gadiel. Quienes tuvieron que sobrellevar muchas noches de ausencia y me brindaron su gran amor durante mi tiempo de estudios. A ustedes, que el señor de Qoyllur- Ritti les proteja por siempre ¡Les Amo!

A mis hermanos Julia, Alejandro, Honorata, Gladys y sabino por su apoyo incondicional siempre estaremos juntos.

A mi hermano Jesús, por su apoyo incondicional a ti, que Dios te guarde y la Virgen te proteja por siempre ¡Te Amo!

Finalmente a mis amigos Héctor, Henry, Reynaldo con quienes compartimos muchas alegrías, tristezas y juntos, tenemos que conseguir nuestras metas.

Todo este trabajo ha sido posible gracias a ellos

Julio.

DEDICATORIA

*La presente tesis de grado lo dedico con amor a mi incondicional familia.
Con amor, respeto y gran admiración dedico este caro anhelo a mis queridos Padres Julio Frank y Juana por creer en mí, por ser la fuente de mi inspiración, motivación y que son la razón de ser de mi existencia.*

A mi buena Hermana Vilma Elizabeth que no ha dejado que mi ilusión por ser un gran profesional desmaye.

A mis queridos tíos y primos que con su fortaleza y consejos han fortalecido mis ganas de seguir adelante.

A todas aquellas personas que confiaron en Mí.

Julio Cesar.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por habernos permitido llegar hasta este punto y habernos dado salud y fuerza en los momentos más difíciles para lograr los objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A nuestras familias por ser el apoyo incondicional que nos sirvió de aliento para no claudicar hasta conseguir nuestros objetivos.

Al Ingeniero Wilbert Julio Loaiza Cuba, asesor de tesis, por su atención, ayuda y colaboración para la culminación de esta Tesis.

A todos los profesionales, docentes y amigos que nos brindaron su ayuda en el desarrollo de este trabajo.

Los Autores.

PRESENTACIÓN

Señor decano de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Mecánica, y Minas de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Señores Docentes miembros del Jurado.

Con la finalidad de optar al Título Profesional de Ingeniero Electricista, presentamos ante ustedes la tesis intitulada “MODELAMIENTO Y ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA”, trabajo de investigación que permite conocer su comportamiento dinámico de la mini central frente a pequeñas y grandes perturbaciones alrededor de un punto de funcionamiento y la insertación del controlador PI, para mejorar la estabilidad del sistema.

Queremos expresar nuestros sinceros agradecimientos, a nuestros padres, hermanos quienes colaboraron para que todo este proceso de desarrollo de tesis se lleve a cabo, al Centro de investigaciones Eléctricas y Electrónicas del Perú (CIEEP) por su invaluable y constante apoyo, al Docente Asesor, a los Docentes de la Facultad y a todos los Amigos que se nos pueda haber pasado sin nombrarlos. Por su valioso apoyo en la realización del presente trabajo de investigación.

INTRODUCCIÓN

La tesis se estructura en cinco capítulos cuyo contenido se muestra brevemente a continuación a fin de tener una visión completa de todo el documento:

CAPITULO I: En este capítulo se detalla la justificación de la investigación el cual incluye el planteamiento del problema, métodos de investigación, los objetivos y alcances del trabajo realizado.

CAPITULO II: El mencionado Capítulo contiene los principales fundamentos teóricos de la investigación que formaran parte de los resultados posteriores, como son descripción del sistema en general, modelado de la mini central, análisis temporal de sistemas continuos y metodología propuesta para el estudio de estabilidad.

CAPITULO III: Se recopila información del estudio de factibilidad del proyecto, Aprovechamiento de los Recursos Hídricos de la Quebrada de Aobamba realizados por EGEMSA, para el modelado y análisis de la mini central.

CAPITULO IV: Se muestra el modelo de la mini central hidroeléctrica cuyo controlador mantiene constante el nivel de agua en la cámara de carga. Se analiza el comportamiento dinámico de sus principales componentes y su interconexión mediante un diagrama de bloques. Por último se linealiza completamente el modelo y se comprueba mediante una simulación que ambos modelos, completo y lineal; se comportan de forma, prácticamente idéntica bajo pequeñas perturbaciones en condiciones normales de operación.

CAPITULO V: Partiendo de los modelos lineales obtenidos en el capítulo anterior se realiza el estudio de estabilidad de la mini central hidroeléctrica de Aobamba. Una vez fijadas las regiones de estabilidad en función de los parámetros de diseño de la mini central, se plantea el criterio de sintonía del controlador que permite obtener una respuesta óptima, y estable frente a pequeñas perturbaciones, de las condiciones iniciales de equilibrio con el criterio de Routh – Hurwitz y el lugar de las raíces. Finalmente se identifica las oscilaciones que aparecen en las simulaciones, con la posición de los polos en el plano complejo y cómo influye en la respuesta de la mini

central, la variación de las ganancias del controlador PI y el comportamiento dinámico de la mini central.

En la parte final de la tesis, se muestra la elaboración de las conclusiones obtenidas del trabajo realizado y se describen las Recomendaciones del estudio realizado en la tesis presentada.

RESUMEN EJECUTIVO

El objetivo general del estudio de la presente tesis es: "Plantear un modelo matemático que represente a la mini central hidroeléctrica propuesta de Aobamba, para mejorar el comportamiento de la estabilidad del sistema", para lo cual se elabora un modelo matemático que simule la operación de la mini central hidroeléctrica con el control de nivel del agua en la cámara de carga. Dicho modelo se simula con la ayuda del programa MATLAB.

Partiendo de las características técnicas de diseño, de la mini central hidroeléctrica de Aobamba proporcionada por la empresa generadora EGEMSA, se elabora un modelo matemático de cada componente (cámara de carga, tubería forzada, turbina), que represente el comportamiento dinámico frente a condiciones normales de operación.

Una vez desarrollados los modelos matemáticos de la mini central se procede al estudio de la estabilidad en condiciones normales de operación. Para ello, se linealizan las ecuaciones que reflejan la dinámica de cada componente de la mini central, para la determinación de la matriz dinámica del sistema.

Siguiendo la teoría de control clásico, aplicando el método de Routh - Hurwitz y la técnica de lugar de raíces, se obtiene la región de estabilidad y la pareja de ganancias óptimas (k , T_i) del controlador PI, reduciendo de esta forma las oscilaciones y su tiempo de establecimiento, para las tres condiciones de operación (carga nominal, baja carga y sobre carga)

Partiendo del criterio heurístico y del método del lugar de las raíces se determina las ecuaciones características de las ganancias del controlador PI, en función a sus parámetros de diseño de la mini central, para una sintonización adecuada y estable.

Una vez determinada las ganancias del controlador PI, se procede a las simulaciones de la mini central hidroeléctrica de Aobamba, frente a pequeña como a gran perturbación alrededor de un punto de funcionamiento.

Por último, todo el trabajo realizado se desarrolla dentro de su fase de diseño para facilitar un buen diseño que garantice una respuesta adecuada y estable en condiciones de operación de la mini central hidroeléctrica de Aobamba

ABSTRACT

The overall objective of the study of this thesis is: "To develop a mathematical model to represent the hydroelectric mini Aobamba proposal to improve the performance of system stability", for which a mathematical model that simulates the operation is made mini hydroelectric plant to control the water level in the loading chamber. This model is simulated using the MATLAB program.

Based on the technical characteristics of design, Aobamba mini hydropower plant provided by the generating company EGEMSA, a mathematical model of each component (forebay, penstock, turbine), which represents the dynamic behavior in normal conditions is made operation.

Once the mathematical models developed central mini we proceed to the study of stability under normal operating conditions. For this, the equations reflect the dynamics of every component of the central mini, for determining the dynamic matrix of the system is linearized.

Following the classic control theory, applying the method of Routh - Hurwitz and technique of root locus, the region of stability and the pair of optimal gains (k , T_i) PI controller, thereby reducing the oscillations is obtained and the settling time for the three operating conditions (rated load, low load and overload)

Starting from the heuristic approach and the root locus method the characteristic equations of the gains of the PI controller, according to its design parameters of the central mini, for adequate and stable tuning is determined.

After determining the gains of the PI controller, it proceeds to simulations of mini hydropower plant Aobamba, compared to small and large disturbance around an operating point.

Finally, all the work is developed in the design phase to facilitate good design to ensure adequate and stable response in terms of plant operation mini hydropower Aobamba

ÍNDICE GENERAL

PRESENTACIÓN	II
AGRADECIMIENTOS	III
DEDICATORIA	IV
INTRODUCCIÓN.....	VI
RESUMEN EJECUTIVO.....	VIII
ABSTRACT	IX
ÍNDICE GENERAL.....	X
ÍNDICE DE FIGURAS	XIV
ÍNDICE DE TABLAS	XVII
NOTACIÓN.....	XVIII
CAPITULO I.....	1
GENERALIDADES	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	3
1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	4
1.4 OBJETIVOS:	4
1.4.1 OBJETIVO GENERAL	4
1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	4
1.5 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO	4
1.6 ALCANCES Y LIMITACIONES	5
1.6.1 ALCANCES.....	5
1.6.2 LIMITACIONES	5
1.7 HIPÓTESIS Y VARIABLES	6
1.7.1 HIPÓTESIS GENERAL.....	6
1.7.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICAS.....	6
1.7.3 VARIABLES.....	6
1.8 METODOLOGÍA	7
1.8.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN	7
1.8.2 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS	8
1.8.3 PROCESAMIENTO DE DATOS	8
1.8.4 TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE DATOS.....	8

CAPITULO II	9
MARCO TEÓRICO	9
2.1 INTRODUCCIÓN.....	9
2.2 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA EN GENERAL.....	9
2.2.1 AZUD Y PRESA.....	11
2.2.2 CANAL DE DERIVACIÓN.....	11
2.2.3 CÁMARA DE CARGA.....	12
2.2.4 TUBERÍA FORZADA.....	12
2.2.4.1 ECUACIÓN DE MANNING.....	12
2.2.5 CASA DE MAQUINAS.....	13
2.2.6 TURBINA HIDRÁULICA.....	13
2.2.6.1 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS TURBINAS.....	15
2.2.6.2 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS TURBINAS POR UNIDAD.....	18
2.2.7 DISTRIBUIDOR.....	19
2.2.8 CANAL DE DESAGÜE.....	20
2.3 MODELO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA.....	20
2.4 DESCRIPCIÓN DE LOS PRINCIPIOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS DEL MODELO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA.....	20
2.4.1 CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL (PI).....	21
2.4.2 SISTEMAS DE CONTROL DINÁMICO.....	22
2.4.2.1 SISTEMAS EN LAZO ABIERTO.....	22
2.4.2.2 SISTEMAS EN LAZO CERRADO.....	23
2.4.3 MÉTODO DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR.....	24
2.4.3.1 MÉTODO DE ZIEGLER Y NICHOLS EN LAZO ABIERTO.....	24
2.4.3.2 MÉTODO DE ZIEGLER Y NICHOLS EN LAZO CERRADO.....	26
2.4.4 MODELO DE UN SISTEMA.....	26
2.4.4.1 CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS.....	27
2.4.4.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.....	27
2.5 ANÁLISIS TEMPORAL DE SISTEMAS CONTINUOS.....	29
2.5.1 RESPUESTA TEMPORAL.....	29
2.5.1.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN.....	30
2.5.1.2 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN.....	31
2.5.2 ESPECIFICACIONES DE RESPUESTA TRANSITORIA.....	33
2.5.3 ESTABILIDAD ABSOLUTA DE SISTEMAS LINEALES.....	35
2.5.3.1 ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO.....	35
2.5.3.2 CRITERIO DE ROUTH - HURWITZ.....	36
2.5.4 LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES.....	38

CAPÍTULO III	40
DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO	40
3.1 UBICACIÓN.....	40
3.2 ESTUDIO HIDROLÓGICO	40
3.2.1 INFORMACIÓN HIDROMÉTRICA.....	41
3.3 DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES DEL PROYECTO	44
3.3.1 ASPECTOS GENERALES DEL PROYECTO	44
3.4 MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA.....	44
3.5 PRESUPUESTO DEL PROYECTO.....	47
CAPÍTULO IV	48
MODELO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA	48
4.1 INTRODUCCIÓN.....	48
4.2 MODELO MATEMÁTICO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA.....	52
4.2.1 TURBINA	52
4.2.2 TUBERÍA FORZADA	58
4.2.3 CÁMARA DE CARGA.....	60
4.2.4 CONTROLADOR PI.....	62
4.2.5 MODELO TURBINA – TUBERÍA FORZADA.....	64
4.2.6 MODELO COMPLETO DE LA MINI CENTRAL.....	64
4.3 MODELO LINEAL	65
4.3.1 ECUACIÓN DEL SUBSISTEMA TURBINA – TUBERÍA FORZADA.....	68
4.3.2 ECUACIÓN DE LA CÁMARA DE CARGA.....	72
4.3.3 ECUACIÓN DEL CONTROLADOR DE NIVEL.....	74
4.4 EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL MODELO COMPLETO Y LINEAL DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA.....	77
4.4.1 DATOS DE LA MINI CENTRAL	77
CAPÍTULO V	85
ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA	85
5.1 INTRODUCCIÓN.....	85
5.2 METODOLOGÍA PROPUESTA	87
5.3 MATRIZ DINÁMICA DEL SISTEMA	88
5.4 CONDICIÓN DE ESTABILIDAD	90
5.4.1 POLINOMIO CARACTERÍSTICO	90
5.4.2 CRITERIO DE ROUTH – HURWITZ	91
5.4.3 APLICACIÓN AL PRE DIMENSIONAMIENTO DE LA MINI CENTRAL.....	94
5.5 REGIÓN DE ESTABILIDAD DE LA MINI CENTRAL.....	94

5.5.1	INFLUENCIA DEL PUNTO DE FUNCIONAMIENTO EN LA ESTABILIDAD	94
5.6	CRITERIOS PARA EL AJUSTE DEL CONTROLADOR PI.....	101
5.6.1	CARACTERIZACIÓN DEL LUGAR DE RAÍCES DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN Y SU RESPUESTA	102
5.6.2	LUGAR DE RAÍCES	107
5.6.3	LUGAR DE RAÍCES DE LA GANANCIA K.....	108
5.6.4	ESTUDIO DE LA RESPUESTA EN FUNCIÓN DE K.....	110
5.6.5	DETERMINACIÓN DE LA GANANCIA K ÓPTIMA.....	116
5.6.6	DETERMINACIÓN DE PARES ÓPTIMOS DE GANANCIAS K-T _i . ESTUDIO DE LA RESPUESTA DE LA MINI CENTRAL.....	119
5.6.7	SELECCIÓN DEL PAR DE GANANCIAS ÓPTIMOS K-T _i . PARA LA CALIBRACIÓN DEL CONTROLADOR PI.....	125
5.6.8	COMPORTAMIENTO DE LA MINI CENTRAL EN DIFERENTES PUNTOS DE FUNCIONAMIENTO.....	128
5.7	AJUSTE DEL CONTROLADOR PI.....	132
5.7.1	INTRODUCCIÓN.....	132
5.7.2	FORMULACIÓN MATEMÁTICA.....	133
5.7.3	APLICACIÓN A LA MINI CENTRAL MODELADA.....	136
5.8	COMPORTAMIENTO BAJO GRAN PERTURBACIÓN	140
CONCLUSIONES		143
RECOMENDACIONES.....		145
BIBLIOGRAFIA.....		146
ANEXOS.....		147

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1.1.1 UBICACIÓN GEOGRÁFICA.....	2
FIGURA 2.2.1 TRANSFORMACIÓN DE ENERGÍA HIDRÁULICA EN ENERGÍA ELÉCTRICA.....	10
FIGURA 2.2.2 DIAGRAMA DE UNA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA.....	11
FIGURA 2.2.6.1 TURBINA DE ACCIÓN.....	14
FIGURA 2.2.6.2 TURBINA DE REACCIÓN.....	15
FIGURA 2.2.6.3 CURVA PAR-VELOCIDAD.....	16
FIGURA 2.2.6.4 CURVA POTENCIA-VELOCIDAD.....	16
FIGURA 2.2.6.5 CURVA CAUDAL-VELOCIDAD.....	17
FIGURA 2.2.6.6 COLINA DE RENDIMIENTOS DE LA TURBINA.....	18
FIGURA 2.2.6.7 CURVA CARACTERÍSTICAS DE LA TURBINA UNIDAD.....	19
FIGURA 2.4.1.1 DIAGRAMA DE BLOQUES CONTROL INTEGRAL.....	22
FIGURA 2.4.2.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA EN LAZO ABIERTO.....	22
FIGURA 2.4.2.2 DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA DE CONTROL EN LAZO CERRADO.....	23
FIGURA 2.4.3.1 RESPUESTA A UN ESCALÓN.....	25
FIGURA 2.4.3.2 RESPUESTA DE LA PLANTA CON GANANCIA CRÍTICA.....	26
FIGURA 2.5.1.1 SISTEMA DE PRIMER ORDEN.....	30
FIGURA 2.5.1.2 DIAGRAMA DE UBICACIÓN DE POLOS.....	32
FIGURA 2.5.2.1 RESPUESTA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN FRENTE A UNA ENTRADA EN ESCALÓN.....	34
FIGURA 2.5.3.1 REGIONES ESTABLE E INESTABLES EN EL PLANO S	36
FIGURA 3.2.1.1 CAUDALES MEDIO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS MENSUALES.....	43
FIGURA 4.2.1.1 COLINA DE RENDIMIENTO.....	53
FIGURA 4.2.1.2 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO DE TURBINA.....	57
FIGURA 4.2.2.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO DE TUBERÍA FORZADA.....	60
FIGURA 4.2.3.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO DE LA CÁMARA DE CARGA.....	62
FIGURA 4.2.4.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL CONTROLADOR PI.....	63
FIGURA 4.2.5.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL CONJUNTO TURBINA - TUBERÍA FORZADA.....	64
FIGURA 4.2.6.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO COMPLETO DE LA MINI CENTRAL.....	65
FIGURA 4.2.6.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO LINEAL DE LA MINI CENTRAL.....	66
FIGURA 4.3.1.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO LINEAL DEL SUB SISTEMA TURBINA-TUBERÍA FORZADA.....	71
FIGURA 4.3.2.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO LINEAL DE LA CÁMARA DE CARGA.....	73
FIGURA 4.3.3.1 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO LINEAL DEL CONTROLADOR PI.....	75
FIGURA 4.4.1.1 SIMULACIÓN DEL MODELO COMPLETO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA.....	78
FIGURA 4.4.1.2 SIMULACIÓN DEL RIO DE AOBAMBA.....	79
FIGURA 4.4.1.3 SIMULACIÓN. POSICIÓN DE DISTRIBUIDOR.....	79
FIGURA 4.4.1.4 SIMULACIÓN. POSICIÓN DEL NIVEL DEL AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA.....	80

FIGURA 4.4.1.5 SIMULACIÓN. POTENCIA MECÁNICA.....	80
FIGURA 4.4.1.6 SIMULACIÓN DEL MODELO COMPLETO DE LA MINI CENTRAL DE AOBAMBA.....	81
FIGURA 4.4.1.7 SIMULACIÓN. CAUDAL DEL RIO.....	82
FIGURA 4.4.1.8 SIMULACIÓN. POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR.....	82
FIGURA 4.4.1.9 SIMULACIÓN. NIVEL DEL AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA.....	83
FIGURA 4.4.1.10 SIMULACIÓN. CAUDAL DEL RIO EN LA TURBINA.....	83
FIGURA 5.5.1.1 COLINA DE RENDIMIENTO. ZONAS DE OPERACIÓN PARA EL AJUSTE DE PARÁMETROS.....	96
FIGURA 5.5.1.2 REGIONES DE ESTABILIDAD EN FUNCIÓN DEL PUNTO DE FUNCIONAMIENTO...97	
FIGURA 5.5.1.3 SITUACIÓN 1, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, CON CAUDAL DE 3.5 M3/S ($k = 0.5$ Y $T_i = 0.06$).....	98
FIGURA 5.5.1.4 SITUACIÓN 2, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, CON CAUDAL DE 3.5 M3/S ($k = 30$ Y $T_i = 0.06$).....	100
FIGURA 5.6.1.1 REPRESENTACIÓN DE POLOS CONJUGADOS EN EL PLANO S.....	103
FIGURA 5.6.1.2 ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN.....	104
FIGURA 5.6.1.3 INFLUENCIA DE σ_d EN LA RESPUESTA.....	106
FIGURA 5.6.1.4 INFLUENCIA DE θ_d EN LA RESPUESTA.....	106
FIGURA 5.6.3.1 REGIÓN DE ESTABILIDAD PUNTO DE FUNCIONAMIENTO NOMINAL.....	109
FIGURA 5.6.3.2 LUGAR DE LAS RAÍCES DE $k =$ VARIABLE, CON $T_i = 0.06467$; DE LA MINI CENTRAL.....	109
FIGURA 5.6.4.1 VARIACIÓN DE CAUDAL EN EL RIO.....	110
FIGURA 5.6.4.2 LUGAR DE LAS RAÍCES DE $k = 100$ CON $T_i = 0.06467$	111
FIGURA 5.6.4.3 LUGAR DE LAS RAÍCES DE $k = 300$ CON $T_i = 0.06467$	112
FIGURA 5.6.4.4 LUGAR DE LAS RAÍCES DE $k = 700$ CON $T_i = 0.06467$	112
FIGURA 5.6.4.5 POSICIÓN DE LOS POLOS PARA LOS VALORES DE k SELECCIONADOS.....	113
FIGURA 5.6.4.6 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA CON VARIACIÓN DE k	114
FIGURA 5.6.4.7 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR CON VARIACIÓN DE k	115
FIGURA 5.6.5.1 SELECCIÓN DE $k = 215.6$ EN EL LUGAR DE RAÍCES CON $T_i = 0.06467$	117
FIGURA 5.6.5.2 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA COTA DEL AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA CON LA GANANCIA k SELECCIONADA.....	118
FIGURA 5.6.5.3 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR CON LA GANANCIA k SELECCIONADA.....	118

FIGURA 5.6.6.1 SELECCIÓN DE $k = 50.10$ EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES CON $T_i = 0.06468$ 120

FIGURA 5.6.6.2 SELECCIÓN DE $k = 252.37$ EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES CON $T_i = 0.01294$ 120

FIGURA 5.6.6.3 SELECCIÓN DE $k = 505.21$ EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES CON $T_i = 0.00647$ 121

FIGURA 5.6.6.4 SELECCIÓN DE $k = 758.05$ EN EL LUGAR DE RAÍCES DE k CON $T_i = 0.00431$ 122

FIGURA 5.6.6.5 SELECCIÓN DE $k = 1010$ EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES CON $T_i = 0.00323$ 122

FIGURA 5.6.6.6 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA PARA LAS PAREJAS DE (k) Y (T_i) , MINI CENTRAL CON CÁMARA DE CARGA 124

FIGURA 5.6.6.7 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR PARA LAS PAREJAS DE (k) Y (T_i) , MINI CENTRAL CON CÁMARA DE CARGA..... 124

FIGURA 5.6.7.1 LUGAR DE LAS RAÍCES Y SELECCIÓN DE $k = 804.30$ EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES CON $T_i = 0.00366$ 126

FIGURA 5.6.7.2 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA PARA LA PAREJA DE k Y T_i SELECCIONADA..... 127

FIGURA 5.6.7.3 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR PARA LA PAREJA DE k Y T_i SELECCIONADA..... 128

FIGURA 5.6.8.1 SITUACIÓN DE LAS GANANCIAS DEL CONTROLADOR EN LAS REGIONES DE ESTABILIDAD..... 129

FIGURA 5.6.8.2 CAUDAL DEL CANAL, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, CON CAUDAL 3.5M3/S (ZONA I)..... 131

FIGURA 5.6.8.3 CAUDAL DEL CANAL, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, CON CAUDAL 2.5 M3/S (ZONA II)..... 131

FIGURA 5.6.8.4 CAUDAL DEL CANAL, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, CON CAUDAL 4.8 M3/S (ZONA III)..... 132

FIGURA 5.7.3.1 SITUACIÓN DE LAS GANANCIAS DEL CONTROLADOR CORRESPONDIENTES A CADA ZONA DE OPERACIÓN EN LAS REGIONES DE ESTABILIDAD..... 137

FIGURA 5.7.3.2 CAUDAL DEL RIO, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, PARA LAS 3 ZONAS..... 138

FIGURA 5.7.3.3 CAUDAL DEL RIO, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, CON CAUDAL 3.5 M3/S..... 139

FIGURA 5.7.3.4 CAUDAL DEL RIO, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, CON CAUDAL 2.5 M3/S..... 139

FIGURA 5.7.3.5 CAUDAL DEL RIO, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA, CON CAUDAL 4.8 M3/S..... 140

FIGURA 5.7.3.1 CAUDAL DEL RIO, POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR Y COTA DE AGUA EN LA 141

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 2.2.4.1 VALORES DE NÚMERO DE MANNING.....	13
TABLA 2.4.3.1 VALORES DE CONTROLADORES.....	25
TABLA 3.2.1.1 CAUDALES MEDIOS MENSUALES DEL RIO DE AOBAMBA.....	42
TABLA 3.3.1.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PROYECTO	44
TABLA 4.4.1.1 VALORES NUMÉRICOS.....	77
TABLA 5.5.1.1 VALORES NOMINALES.....	95
TABLA 5.5.1.2. VALORES DE LOS PARÁMETROS QUE DEFINEN CADA ZONA DE OPERACIÓN.....	97
TABLA 5.6.2.1 VALORES NOMINALES DEL MODELO.....	108
TABLA 5.6.4.1 PARÁMETROS DE LOS POLOS EN FUNCIÓN DE k	113
TABLA 5.6.5.1 PARÁMETROS DE LOS POLOS CON $k = 45.89$	117
TABLA 5.6.6.1 VALORES DE LAS GANANCIAS T_i	119
TABLA 5.6.6.2 PARÁMETROS DE LOS POLOS EN FUNCIÓN DE LAS PAREJAS DE k Y T_i	123
TABLA 5.6.7.1 PARÁMETROS DE LOS POLOS EN FUNCIÓN DE LA PAREJA k Y T_i SELECCIONADA	127
TABLA 5.7.3.1 PUNTO DE FUNCIONAMIENTO DE LA TURBINA Y PARÁMETROS DEL CONTROLADOR	136

NOTACIÓN

Variable	Descripción	Unidades
α	Constante proporcional del controlador	-
β	Constante integral del controlador	s
x^0	Posición del distribuidor inicial en valores por unidad	-
Δx	Variación de la posición del distribuidor en valores por unidad	-
A_c	Superficie de la cámara de carga	m ²
A_t	Superficie de la tubería forzada	m ²
b_{11}, b_{12}, b_{13} b_{21}, b_{22}, b_{23}	Coefficientes de las expresiones matemáticas de la turbina linealizadas	-
D	Diámetro de la turbina	m
D_t	Diámetro de la tubería forzada	m
F_t	Constante de la tubería forzada	m ² /s ²
g	Aceleración de la gravedad	m/s ²
H	Salto neto	m
Δh	Variación del salto neto en valores por unidad	-
h^0	Salto neto inicial en valores por unidad	-
H_b	Salto base	m

Δh_c	Variación del salto bruto en la cámara de carga en valores por unidad	-
H_c	Salto bruto en la cámara de carga	m
h_c^0	Altura de referencia inicial en la cámara de carga con relación a la cota de descarga (Z_{desc}) en valores por unidad	-
Δh_{ref}	Variación de la altura de referencia inicial en la cámara de carga con relación a la cota de descarga (Z_{desc}) en valores por unidad	-
H_{ref}	Altura de referencia en la cámara de carga con relación a la cota de descarga (Z_{desc})	m
h_{ref}^0	Salto bruto inicial en la cámara de carga en valores por unidad	-
k	Ganancia proporcional del controlador PI	-
K_{pl}	Coefficiente de pérdidas en la tubería forzada	-
L_t	Longitud de la tubería forzada	m
N_b	Velocidad de giro base	r.p.m
N	Velocidad de giro del grupo	r.p.m
Δn	Variación de la velocidad de giro del grupo en valores por unidad	-
n^0	Velocidad de giro del grupo inicial en valores por unidad	-
N_1	Velocidad de giro unitaria del grupo	r.p.m
n_t	Número de manning de la tubería forzada	-
p	Coefficiente de pérdidas en la tubería forzada	-

Q	Caudal	m^3/s
Δq	Variación del caudal turbinado en valores por unidad	-
Q_1	Caudal turbinado unitario	m^3/s
Q_b	Caudal base	m^3/s
Δq_t	Variación del caudal que circula por la tubería forzada en valores por unidad	-
q_t^0	Caudal inicial que circula por la tubería forzada en valores por unidad	-
Q_t	Caudal que circula por la tubería forzada	m^3/s
Δq_r	Variación del caudal que aporta el río en valores por unidad	-
q_r^0	Caudal inicial que aporta el río en valores por unidad	-
Q_r	Caudal que aporta el río a la cámara de carga	m^3/s
T_c	Constante de tiempo de la cámara de carga	s
T_d	Período de la oscilación amortiguada	s
T_e	Tiempo de establecimiento	s
T_i	Ganancia del integrador del controlador PI	s
T_p	Tiempo de pico	s
T_r	Tiempo de subida	s
T_w	Constante de tiempo del agua en la tubería forzada	s

X	Posición del distribuidor	mm
X^0	Posición del distribuidor inicial	mm
X_b	Posición base del distribuidor	mm
Z	Cota del salto neto	m.s.n.m
Z_c	Cota de la lámina de agua en la cámara de carga	m.s.n.m
Z_{desc}	Cota del nivel de la descarga	m.s.n.m
Z_{ref}	Cota de referencia de la lámina de agua en la cámara de carga	m.s.n.m
ζ	Amortiguamiento relativo	-
σ_d	Amortiguamiento exponencial de la respuesta	s ⁻¹
ω_d	Frecuencia de la oscilación amortiguada.	s ⁻¹
ω_n	Frecuencia natural de la respuesta del sistema no amortiguado	s ⁻¹

CAPITULO I

GENERALIDADES

1.1 INTRODUCCIÓN

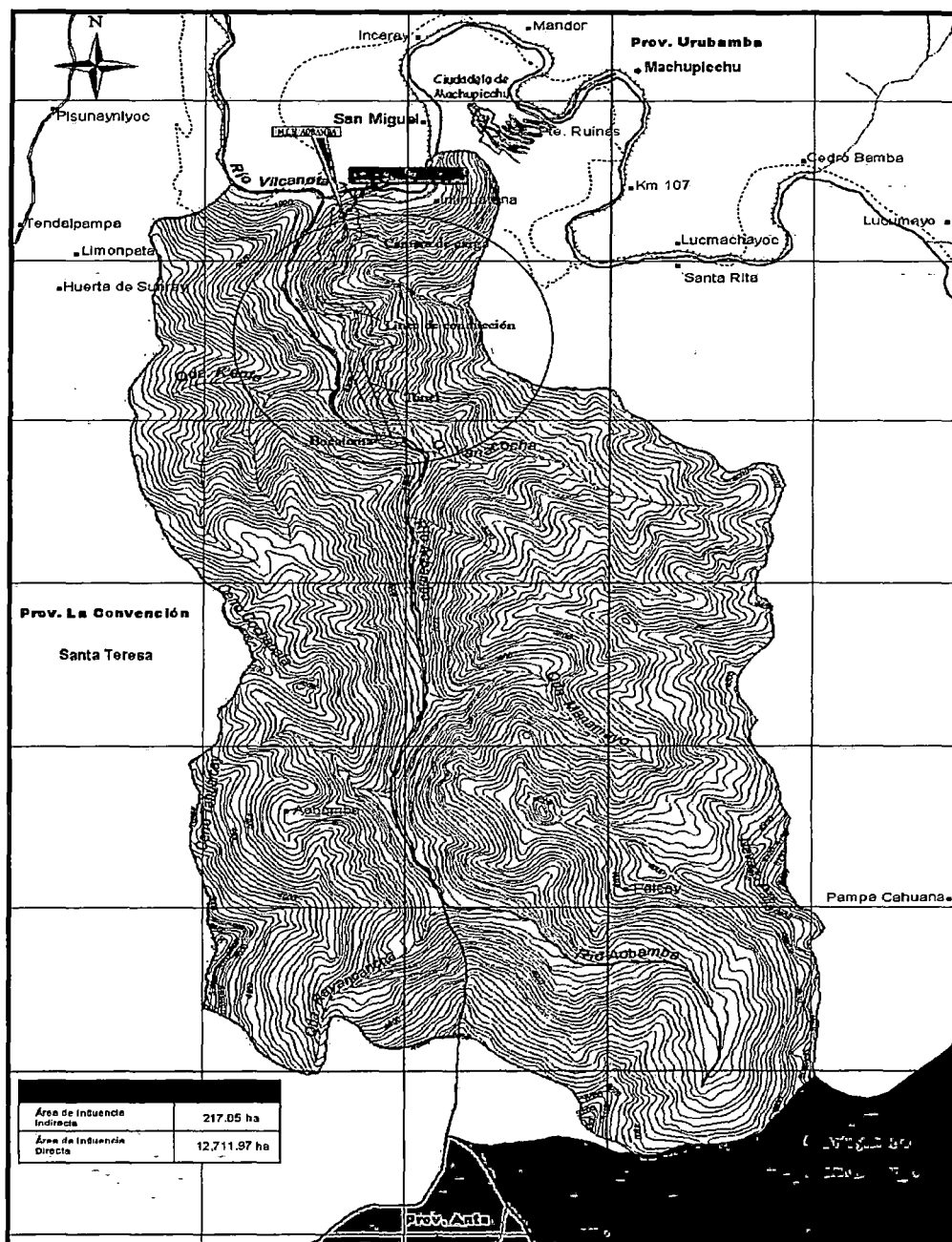
El cauce del río Aobamba se inicia en las alturas de Palkay, a 4,300 msnm, al pie de la cadena de Nevados del Salkantay y del Nevado Sullunku, se ubica al Noroeste de la ciudad del Cusco. Está situada en los Andes Surorientales, en el valle del río Vilcanota, a 13°09'23" de latitud Sur y 72°32'34 " de longitud Oeste del meridiano de Greenwich, en el Distrito de Machupicchu, Provincia de Urubamba, Departamento y Región del Cusco, a una altitud de 2,089 msnm.

El área en estudio actualmente cuenta con las siguientes rutas de acceso:

El acceso desde la ciudad del Cusco se realiza a través del ferrocarril Cusco – Machupicchu hasta la estación ubicada en el km 122, y de allí a la zona del proyecto se llega mediante un camino peatonal de 2.5 km por el valle de la quebrada Aobamba, el aprovechamiento hidráulico se constituye en un afluente por la margen izquierda del río Vilcanota aguas abajo de la central hidroeléctrica de Machupicchu.

UBICACIÓN DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA

Figura 1.1.1 Ubicación Geográfica



Fuente: Proyecto: Aprovechamiento de los recursos hídricos de la Quebrada de Aobamba para la central hidroeléctrica de Machupicchu.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La implantación de mini centrales hidroeléctricas está experimentando un considerable impulso en los últimos años. En los países en vías de desarrollo, la mini central permitirá la electrificación de zonas rurales alejadas de los grandes núcleos de población proporcionando un empuje decisivo para su crecimiento socioeconómico.

A medida que la sociedad está desarrollándose, se viene incrementando más la demanda de energía eléctrica en horas punta, fundamentalmente en época de estiaje.

La propuesta de la mini central hidroeléctrica de Aobamba; es una mini central de paso, porque carece de un elemento almacenador suficientemente grande; de una irregular disponibilidad de agua a lo largo del año, especialmente en la época de estiaje, donde disminuye el caudal del río hasta $2.5 \text{ m}^3/\text{seg}^1$; el deshielo de los nevados, debido al cambio climático y la mala planificación de las aguas de uso agrícola, por ello habrá menos disponibilidad de agua para la generación de energía eléctrica.

La variación del caudal turbinado procedente del río, el control de nivel del agua en la cámara de carga y variación de velocidad en la turbina de la mini central, conlleva a la inestabilidad del sistema.

Por lo tanto se presentaran problemas de estabilidad en la operación, propuesta de la mini central hidroeléctrica; y en consecuencia, se requiere realizar un estudio del comportamiento de la estabilidad del sistema, ante la ocurrencia de estos, se presentan la mala calidad de energía lo que es perjudicial para el sector energético del país, lo cual implica pérdidas económicas para la empresa concesionaria.

¹ Caudal obtenido del estudio de factibilidad del proyecto: Aprovechamiento de los recursos hídricos de la quebrada de Aobamba para la central hidroeléctrica de Machupicchu.

1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Es posible realizar un modelo matemático para estudiar el comportamiento de la estabilidad del sistema, caudal, potencia mecánica y regular la velocidad de la mini central propuesta de Aobamba?

1.4 OBJETIVOS:

1.4.1 OBJETIVO GENERAL

Plantear un modelo matemático que represente a la mini central hidroeléctrica propuesta de Aobamba, para mejorar el comportamiento de la estabilidad del sistema.

1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Dentro de los objetivos específicos se tiene:

- Desarrollar el modelo matemático en el entorno de programación Matlab que simule la operación en la propuesta de la mini central de Aobamba con el control de nivel en la cámara de carga.
- Analizar la estabilidad en la propuesta de la mini central de Aobamba, frente a pequeñas perturbaciones alrededor de un punto inicial de funcionamiento.
- Establecer un criterio de sintonía para las ganancias del controlador PI, para garantizar la estabilidad y optimizar su respuesta en el tiempo de la mini central.

1.5 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

- ✓ La razón por la cual se hace necesario la insertación de la mini central hidroeléctrica al sistema interconectado, es para regular las fluctuaciones de carga, cuyo adecuado modelamiento será el factor determinante para su incorporación como fuente reguladora, aprovechando el caudal disponible de 3.5 m³/s. del río Aobamba. En consecuencia se incrementará la confiabilidad del sistema al analizar la estabilidad del mismo.

- ✓ En el presente trabajo se analizará el sistema de la mini central hidroeléctrica, frente a las pequeñas perturbaciones y permitirá proponer solución a la presencia de inestabilidad en la propuesta de la mini central de Aobamba, lo cual se adaptará automáticamente a los cambios de fluctuaciones en la red y en la carga, cambios que no afectarán las condiciones de operación.
- ✓ Para que el sistema sea confiable, se analizará la operación de la mini central, con el control de nivel en la cámara de carga, para la reducción de la superficie y controlar la velocidad de la turbina, para ello se propone incrementar un controlador PI que mejore la estabilidad de la mini central hidroeléctrica.

1.6 ALCANCES Y LIMITACIONES

1.6.1 ALCANCES

- ✓ Registro de información sobre las características y parámetros técnicos más importantes de los equipos propuestos en el proyecto de factibilidad para el diseño de la mini central hidroeléctrica de Aobamba.
- ✓ Modelar la mini central hidroeléctrica de Aobamba en el programa computacional de Matlab.
- ✓ Validar el método propuesto mediante comparación con experiencias de otros autores.

1.6.2 LIMITACIONES

- ✓ El modelo matemático propuesto, es solo posible de utilizar para el estudio de estabilidad de una mini central hidroeléctrica.
- ✓ El estudio del modelo y análisis corresponden a cámara de carga, tubería forzada, turbina y el controlador PI.

1.7 HIPÓTESIS Y VARIABLES

1.7.1 HIPÓTESIS GENERAL

Con el desarrollo del modelo matemático (cámara de carga, tubería forzada, turbina y el controlador PI) y el análisis en el mismo, se plantea estudiar la estabilidad, de la mini central de Aobamba.

1.7.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

- ✓ El modelamiento de cada elemento permite realizar el análisis de la estabilidad del sistema.
- ✓ Al predecir el comportamiento de la mini central propuesta de Aobamba es posible conocer la estabilidad en la operación del sistema.

1.7.3 VARIABLES

Las variables que se analizará son las siguientes:

VARIABLES INDEPENDIENTES

Estas variables se consideran como causas del problema y se identificaron las siguientes:

- ✓ Recurso hídrico.

Cuyos indicadores son:

- Caudal disponible
- ✓ Variación de carga.

Cuyos indicadores son:

- Diagrama de carga

VARIABLES DEPENDIENTES

Estas variables se consideran como causas del problema y se identificaron las siguientes:

- ✓ Regulación de velocidad.

Cuyos indicadores son:

- Formas de onda.

- ✓ Estabilidad

Cuyos indicadores son:

- Diagramas de duración
- Límite de estabilidad.

1.8 METODOLOGÍA

1.8.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

El tipo de investigación que se emplea en el trabajo de tesis es del tipo descriptivo y analítico. Es descriptivo porque se describe e interpreta sistemáticamente el comportamiento en la propuesta de la mini central hidroeléctrica de Aobamba; frente a pequeñas perturbaciones en condiciones de operación, es analítica, porque se analizara la estabilidad del sistema producido por la inserción en la propuesta de la mini central hidroeléctrica de Aobamba, que nos permitirá conocer más sobre el objeto de estudio, con lo cual se puede explicar, hacer analogías y comprender mejor su comportamiento.

1.8.2 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

La recopilación de datos que se realiza del estudio de factibilidad del proyecto APROVECHAMIENTO DE LOS RECURSOS HÍDRICOS DE LA QUEBRADA AOBAMBA PARA LA C. H. MACHUPICCHU, nos permite obtener información para este estudio de estabilidad de la mini central hidroeléctrica de Aobamba; así también la técnica de recopilación documental; debido a que se desarrolló una recolección sistemática de la información contenida en textos, artículos relacionados con el estudio, sitios web relacionados con el modelamiento.

1.8.3 PROCESAMIENTO DE DATOS

El procesamiento de datos se realiza con la ayuda de programas informáticos, como son: Matlab 2012 versión 10.5, Microsoft office y AutoCAD 2014.

1.8.4 TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de la información se desarrolla utilizando la técnica de análisis cuantitativo, puesto que se examina los datos de manera científica, y en forma numérica, con ayuda de herramientas de campo como de la estadística.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 INTRODUCCIÓN

Una de las características de la presente tesis, y tal como se ha indicado en el planteamiento de su objetivo y alcance, es su carácter multidisciplinar. En primer lugar se pretende modelar y por último se plantea analizar la estabilidad del modelo de la mini central hidroeléctrica en función de sus parámetros de diseño, así como el establecimiento de un criterio de sintonía para las ganancias del controlador PI.

La búsqueda de referencias bibliográficas que muestren el estado del arte y que ilustren e iluminen el trabajo planteado que se ha llevado a cabo teniendo presentes dos aspectos. Por un lado, no se pierde la perspectiva de que los resultados obtenidos, modelos, criterios de estabilidad deben ser aplicables a una mini central en su fase de diseño. Esto implica que tanto el modelo como el tratamiento de su estabilidad se deben afrontar en función de parámetros y variables representativos de los principales componentes de la mini central.

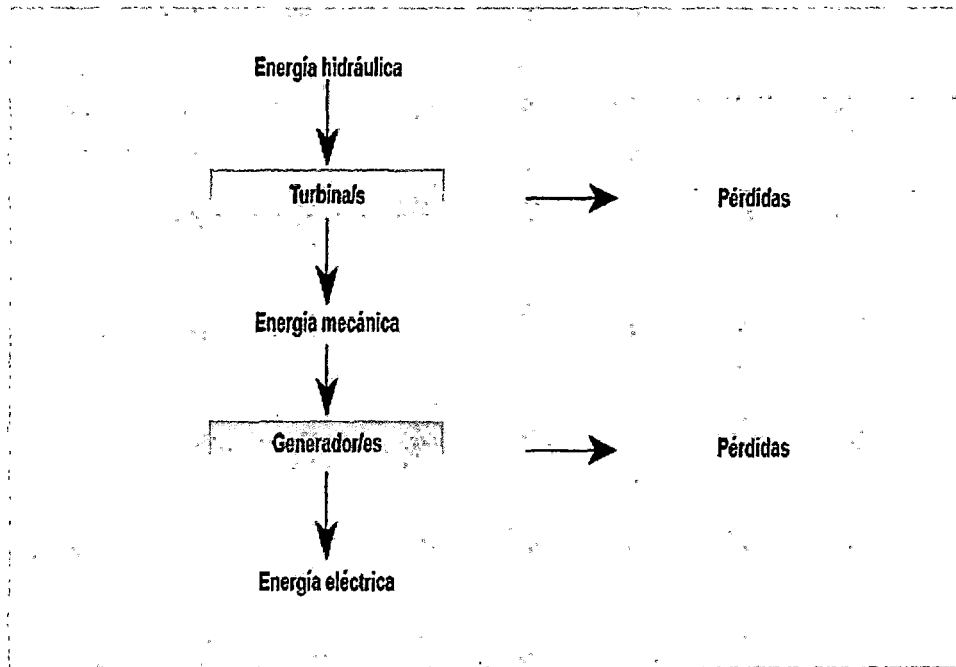
Por otro lado se persigue que los trabajos estudiados referentes a los dos temas tratados en la tesis (modelo, estabilidad) sean compatibles e insertables en un trabajo global.

2.2 DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA EN GENERAL

La función de una central hidroeléctrica es utilizar la energía hidráulica del agua almacenada y convertirla, primero en energía mecánica y luego en energía eléctrica. Esto se logra conduciendo el agua desde el nivel en el que se encuentra, hasta un nivel inferior en el que se sitúan una o varias turbinas hidráulicas que son accionadas por el agua y que a su vez hacen girar uno o varios generadores, produciendo energía eléctrica. La producción de energía eléctrica a través del aprovechamiento de la fuerza del agua forma parte de nuestra cultura como un

medio normal, seguro y consolidado de producir energía (tanto hidráulica, mecánica y eléctrica). La figura 2.2.1 ilustra este esquema.

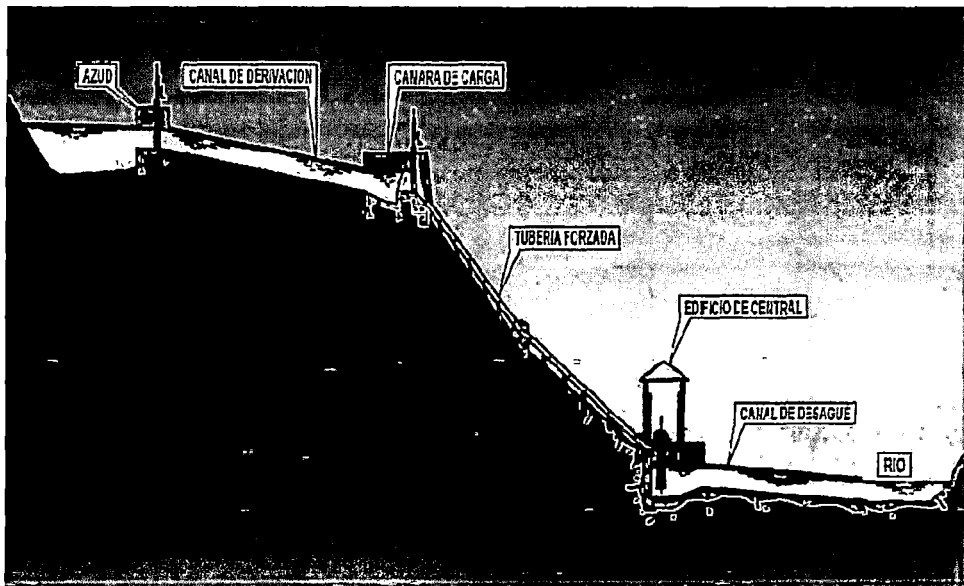
Figura 2.2.1 Transformación de Energía hidráulica en Energía eléctrica



Fuente: Elaboración Propia

Una central hidroeléctrica está constituida básicamente por azud, canal de derivación, cámara de carga, tubería forzada, la casa de máquinas, tuberías de desfogue, centro de control, controladores, etc. La Figura 2.2.2 muestra el diagrama de las principales partes de la planta, seguidamente se procederá a explicar con más detalle cada una de ellas.

Figura 2.2.2 Diagrama de una mini central hidroeléctrica



Fuente: *Mini hidráulica, estudios y proyectos NIP, S: A. (1° Edición 1995).*

2.2.1 AZUD Y PRESA

Son las obras que se construyen en el curso del agua, transversalmente al mismo, para la retención y desviación hacia la toma del caudal que se deriva hacia la mini central.

En el azud se produce una retención del agua sin que haya una variación importante del nivel de agua.

En la presa, el muro se construye para elevar la superficie libre del curso de agua creando un embalse.

2.2.2 CANAL DE DERIVACIÓN

Es la conducción que transporta el agua que se deriva hacia la mini central desde la toma hasta la cámara de carga. A lo largo del canal, dependiendo de su longitud, puede haber varias compuertas para limpieza y vaciado del canal en caso necesario.

Al final del canal, antes de la cámara de carga, suelen instalarse una reja de finos con su correspondiente máquina limpiarrejas, así como una compuerta de seguridad.

2.2.3 CÁMARA DE CARGA

Consiste en un depósito situado al final del canal de derivación del que parte la tubería forzada. Esta cámara es necesaria para evitar la entrada de aire en la tubería forzada, que provocaría sobrepresiones.

2.2.4 TUBERÍA FORZADA

Es la tubería que se encarga de llevar el agua desde la cámara de carga hasta la turbina. Debe estar preparada para soportar, la presión que produce la columna de agua, además de la sobrepresión que provoca el golpe de ariete en caso de parada brusca de la mini central. Dependiendo de la topografía del terreno y de los factores medioambientales, la colocación de la tubería forzada será enterrada o aérea.

2.2.4.1 ECUACIÓN DE MANNING

En la práctica, en una tubería forzada, las pérdidas fundamentales son las de fricción; las pérdidas por turbulencia en la tubería, al paso por la rejilla, en los codos, expansiones, concentraciones y válvulas, son pérdidas menores. Bastará pues en una primera aproximación calcular las pérdidas por fricción, es una ecuación muy utilizada para la circulación en canales abiertos, pero aplicable también a la circulación en tuberías, y se obtiene como:

$$K_{pt} = \frac{10.29(n_t)^2}{(D_t)^{5.333}} L_t \quad (2.1)$$

Dónde:

K_{pt} = Coeficiente de pérdidas en la tubería forzada (m).

n_t = Número de Manning de la tubería forzada (adimensional).

D_f = Diámetro de la tubería forzada (m).

L_f = Longitud de la tubería forzada (m).

Tabla 2.2.4.1 Valores del número de Manning

MATERIAL	n_f
ACERO GALVANIZADO	0.015 A 0.017
ACERO REMACHADO	0.015 A 0.017
ACERO SOLDADO	0.011 A 0.014
ASBESTO-CEMENTO	0.010 A 0.012
COBRE Y LATÓN	0.009 A 0.012
CONCRETO MUY LIZO	0.011 A 0.012
CONCRETO BIEN TERMINADO	0.013 A 0.014
CONCRETO ORDINARIO	0.014 A 0.016
BARRO VITRIFICADO	0.012 A 0.015
FIERRO FUNDIDO NUEVO	0.011 A 0.015
FIERRO FUNDIDO EN USO	0.015 A 0.025
FIERRO ONDULADO	0.020 A 0.022
MADERA EN DUELAS	0.011 A 0.013
PLÁSTICO	0.009 A 0.010
LADRILLOS	0.014 A 0.016

Fuete: www.fisicaingenieria.es.

2.2.5 CASA DE MAQUINAS

Es el lugar donde se encuentran los principales equipos de la planta, es en este lugar donde la energía cinética del agua es transformada en energía mecánica y luego en eléctrica; mediante las turbinas, los generadores y los dispositivos de control.

2.2.6 TURBINA HIDRÁULICA

Se podría considerar a la turbina como el órgano fundamental de una Central hidroeléctrica, pues es donde se lleva a cabo la transformación de energía, desde la energía cinética que trae el agua hacia la potencia mecánica que

recibirá el generador para convertirla en potencia eléctrica. Las turbinas, según la presión en el rodete pueden clasificarse en:

➤ **Turbinas de acción:**

En las turbinas de acción el agua sale del distribuidor a la presión atmosférica, y llega al rodete con la misma presión; en estas turbinas, toda la energía potencial del salto se transmite al rodete en forma de energía cinética. En las turbinas de acción, el empuje y la acción del agua coinciden. Ejemplo de este tipo de turbina es la pelton que se utiliza para saltos elevados y pequeño caudal.

Figura 2.2.6.1 Turbina de Acción

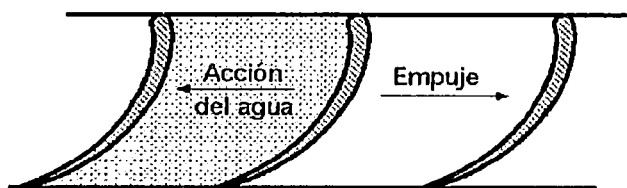


Fuente: Turbinas hidráulicas, universidad de Cantabria (España)

➤ **Turbinas de reacción:**

En las turbinas de reacción el agua sale del distribuidor con una cierta presión que va disminuyendo a medida que el agua atraviesa los alabes del rodete, de forma que, a la salida, la presión puede ser nula o incluso negativa; en estas turbinas el agua circula a presión en el distribuidor y en el rodete y, por lo tanto, la energía potencial del salto se transforma, una parte, en energía cinética, y la otra, en energía de presión. En las turbinas de reacción, el empuje y la acción del agua son opuestos. Este empuje es consecuencia de la diferencia de velocidades entre la entrada y la salida del agua en el rodete, según la proyección de la misma sobre la perpendicular al eje de giro. Ejemplo de este tipo de turbina es la Francis y la Kaplan; las Francis son aprovechadas en saltos medios y tienen gran eficiencia; la del tipo Kaplan tiene la particularidad de poder variar el ángulo de sus aspas durante su funcionamiento y están diseñadas para saltos pequeños de agua.

Figura 2.2.6.2 Turbina de Reacción



Fuente: Turbinas hidráulicas, universidad de Cantabria (España)

La regulación de la carga en las turbinas se consigue variando el caudal (energía cinética). En las turbinas Francis y Kaplan el dispositivo encargado de la regulación es el distribuidor.

2.2.6.1 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS TURBINAS

Los fabricantes de turbinas determinan en laboratorio, sobre modelos reducidos para conocer bien la totalidad de las condiciones posibles de funcionamiento de una turbina, que vienen determinadas por la variabilidad del salto, la carga (par resistente) y de la velocidad, se realizarán una serie de ensayos.

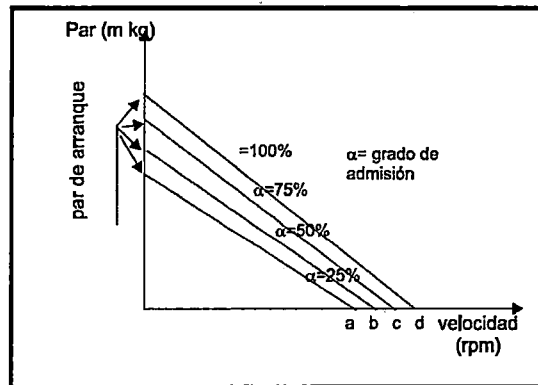
Los ensayos se realizan manteniendo constante la altura de caída, y la posición del distribuidor. La prueba se realiza, haciendo variar la velocidad de giro desde cero hasta la velocidad de embalamiento (velocidad para la que el par resistente es nulo) con la ayuda de un mecanismo de frenado que puede ser mecánico, hidráulico o eléctrico. Para cada valor del par aplicado (par resistente) al eje de la turbina, se mide la velocidad de giro, y el caudal. Con los datos obtenidos para cada altura de caída pueden construirse las siguientes curvas:

➤ CURVA PAR-VELOCIDAD.

Son curvas que reflejan como varía el par con la velocidad de giro, para diferentes grados de admisión. Los resultados indican que, para un valor dado de la admisión, el par decrece linealmente al aumentar la velocidad. El valor máximo corresponde a la velocidad $N=0$ lo que da a la turbina un

par de casi dos veces el nominal. El punto en que estas curvas cortan al eje de abscisas (par nulo) es lo que se conoce como velocidad de embalamiento N_e .

Figura 2.2.6.3 Curva Par-Velocidad

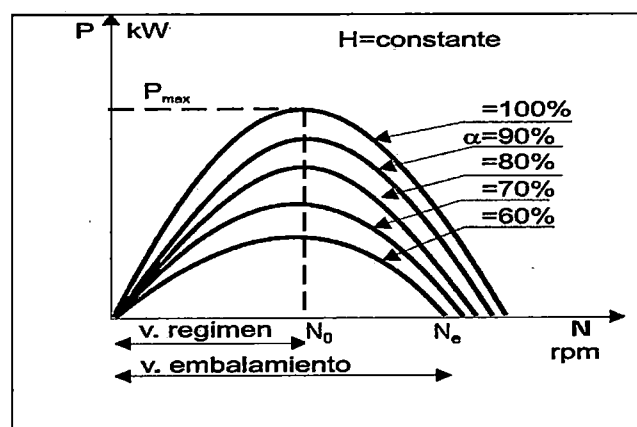


Fuente: Turbinas hidráulicas, universidad de Cantabria (España)

➤ CURVA POTENCIA-VELOCIDAD

Son curvas que se trazan en función del grado de admisión α para un salto neto constante. Las curvas, de forma parabólica, cortan al eje de las abscisas en dos puntos que corresponden a N_0 y N_e .

Figura 2.2.6.4 Curva Potencia-Velocidad

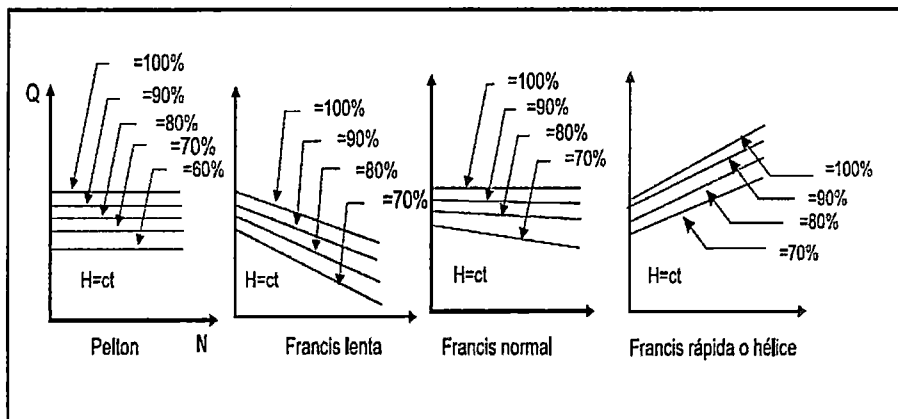


Fuente: Turbinas hidráulicas, universidad de Cantabria (España)

➤ **CURVA CAUDAL-VELOCIDAD**

Son curvas - prácticamente rectilíneas que reflejan el caudal admitido por la turbina en función de la velocidad, para una altura de salto fija y un grado de admisión variable. En las turbinas Pelton, las rectas son prácticamente horizontales; en las Francis lentas son descendentes (al aumentar la velocidad la turbina admite menos caudal); y en las Francis rápidas, ascendentes.

Figura 2.2.6.5 Curva Caudal-Velocidad

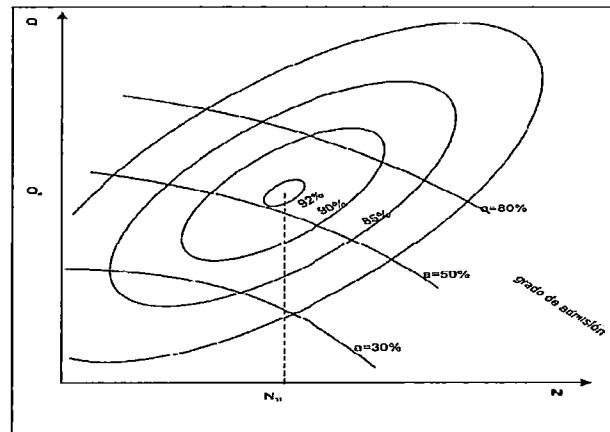


Fuente: Turbinas hidráulicas, universidad de Cantabria (España)

➤ **CURVAS DE NIVEL**

Cuando en el plano caudal-velocidad, se unen los puntos de igual rendimiento, se obtienen curvas semejantes a las curvas de nivel de un plano topográfico. Si se combinan con la potencia como tercer eje, estas curvas tridimensionales forman lo que se conoce como colina de rendimientos.

Figura 2.2.6.6 Colina de Rendimientos de la Turbina



Fuente: Turbinas hidráulicas, universidad de Cantabria (España)

2.2.6.2 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS TURBINAS POR UNIDAD

Una turbina unidad tiene un diámetro $D_1 = 1$ m, y trabaja con un salto $H_{n(1)} = 1$ m, por lo que la relación de semejanza respecto a otra turbina de diámetro D y altura manométrica H_n , para la que se cumplen las condiciones de semejanza, el valor de la escala es: $\lambda = D$. En los ensayos de Laboratorio se suele fijar el salto $H_{n(1)}$ por lo que los diagramas de curvas características más frecuentes son los que relacionan los caudales Q_1 y las potencias P_1 con el número de revoluciones N_1 . A cada par de valores (Q_1, N_1) ó (P_1, N_1) se puede superponer el rendimiento, Figura 2.2.9, de forma que cuando se cumpla que $\eta = \eta_1$ se pueden aplicar las ecuaciones de semejanza, por lo que el conjunto de los rendimientos viene dado por superficies de la forma:

$$\eta = f(Q_1, N_1) \quad \text{ó} \quad \eta = f(P_1, N_1) \quad (2.2)$$

Por lo que respecta al diagrama (Q_1, N_1) se procede de la siguiente forma:

Sobre el eje (X) se llevan los valores de N_1 , sobre el eje (Y) los de Q_1 y sobre el eje (Z) los correspondientes a η . Las diversas cotas de la superficie proporcionan la colina de rendimientos, siendo las curvas de nivel la intersección de estas superficies con planos $\eta = \text{Cte}$.

Las curvas de caudal Q_1 y velocidad de giro N_1 verifican la ecuación de semejanza:

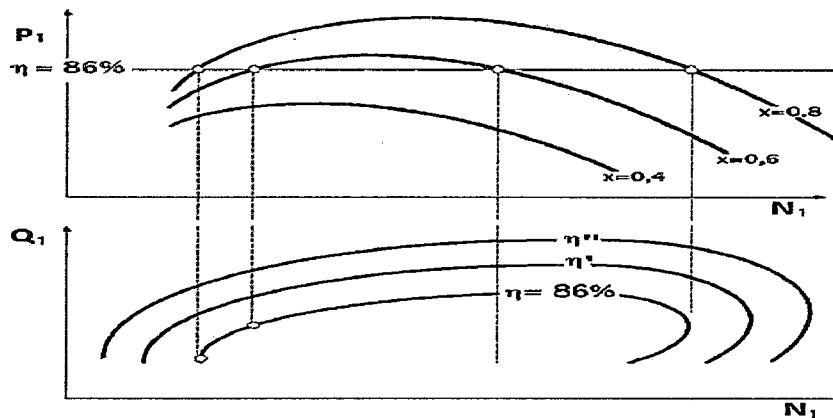
$$\frac{N}{N_1} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{H_n}{H_{n1}}} = \frac{1}{D} \sqrt{H_n} \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{ND}{\sqrt{H_n}} \quad (2.4)$$

$$\frac{Q}{Q_1} = D^2 \sqrt{\frac{H_n}{H_{n1}}} = D^2 \sqrt{H_n} \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H_n}} \quad (2.6)$$

Figura 2.2.6.7 Curva características de la Turbina unidad



Fuente: Turbinas hidráulicas, universidad de Cantabria (España)

2.2.7 DISTRIBUIDOR

Es un elemento en el que no se produce trabajo mecánico y permanece estático en todo momento. Sus principales funciones son acelerar el flujo mediante la transformación de la energía potencial en cinética, esta transformación se da en forma parcial en las turbinas de reacción o total en las turbinas de acción; también dirige el agua hacia el rodete y puede actuar como un regulador de caudal.

Puede tomar diversas formas, del tipo inyector en las turbinas de acción o de forma axial, semi-axial o radial en las turbinas de reacción.

2.2.8 CANAL DE DESAGÜE

Están constituidas por los conductos que llevan el agua desde las turbinas hacia el exterior; por lo general estos conductos terminan en una zona que forma un estanque de captación, y luego continúan su cauce normal aguas abajo.

2.3 MODELO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA

Un modelo de mini central hidroeléctrica representa una herramienta muy valiosa para diferentes aplicaciones. Tanto en la fase preliminar de diseño de la mini central como durante la operación de la misma, el modelo permite establecer parámetros de diseño apropiados o estrategias de control para el seguimiento de los criterios de funcionamiento.

En el modelo de mini central hidroeléctrica que incluya el lazo de control y contempla la estabilidad de la mini central como parte de sus expectativas principales.

Es suficientemente preciso para obtener resultados valiosos, y sencillo para aplicar la teoría de control. Parte de ecuaciones no lineales que rigen el comportamiento de los componentes de la central, considerando el comportamiento elástico del agua que dichas ecuaciones se linealizan alrededor de un punto de funcionamiento.

2.4 DESCRIPCIÓN DE LOS PRINCIPIOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS DEL MODELO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA

Si se quiere comprender el comportamiento de un regulador es necesario conocer los procesos que controla. Conocer los procesos es entonces un fundamento que no se puede ignorar, puesto que el propio regulador es una parte integrada en los mismos.

A continuación se desarrollan los modelos matemáticos que explican el comportamiento de los diferentes componentes del proceso. Las ecuaciones que resultan de este modelo se linealizan para obtener las correspondientes funciones de transferencia.

La representación del proceso completo se hace por bloques que simbolizan a un componente o conjunto de componentes matemáticamente, cada bloque se identifica por su función de transferencia que representa la ganancia del bloque, de forma que la salida es igual a la entrada multiplicada por la ganancia del bloque.

Con las funciones de transferencia es posible explicar todo el proceso en un bloque general y la función de transferencia que resulta es el punto de partida para estudiar la estabilidad y rapidez de respuesta.

2.4.1 CONTROL PROPORCIONAL INTEGRAL (PI)

El valor de la salida del controlador $u(t)$ se cambia a una razón proporcional a la señal de error $e(t)$, es decir:

$$u(t) = k e(t) + \frac{k}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (2.7)$$

Siendo su equivalente en función de la transferencia de Laplace:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (2.8)$$

Dónde:

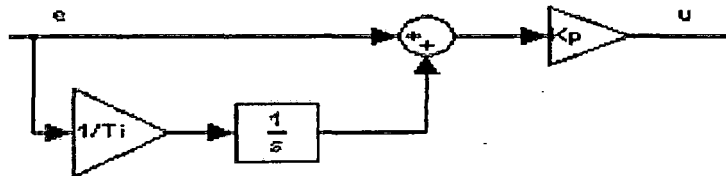
k = Ganancia proporcional

T_i = Tiempo Integral.

Ambos parámetros son ajustables, el tiempo integral ajusta la acción de control integral, mientras que un cambio en el valor de la ganancia proporcional, afecta las partes integral y proporcional de la acción de control. El inverso de T_i se denomina velocidad de reajuste, ésta indica la cantidad de

veces por minuto que se duplica la parte proporcional de la acción de control; su representación en diagrama de bloques es el mostrado en la figura.

Figura 2.4.1.1 Diagrama de bloques control Integral



Fuente: Ingeniería de control moderna, Katsuhiko Ogata (tercera edición)

El control PI mejora el amortiguamiento, reduce el sobrepaso máximo y disminuye el tiempo de establecimiento de la mini central.

2.4.2 SISTEMAS DE CONTROL DINÁMICO

Dependiendo del tratamiento que el sistema de control realiza con la señal de salida, pueden distinguirse dos topologías de control generales: sistemas en lazo abierto y sistemas en lazo cerrado.

2.4.2.1 SISTEMAS EN LAZO ABIERTO

En este tipo de sistemas, la salida no tiene efecto alguno sobre la acción de control.

Figura 2.4.2.1 Diagrama de bloques de un sistema en lazo abierto



Fuente: Teoría de control Diseño electrónico, José matas (España)

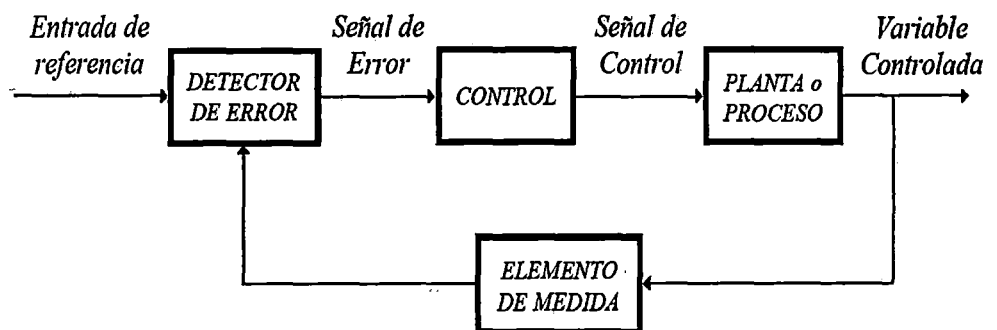
En un sistema en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia, por ello cada entrada corresponderá a una operación prefijada

sobre la señal de salida. Se puede asegurar entonces que la exactitud del sistema depende en gran manera de la calibración del mismo y, por tanto, la presencia de perturbaciones en la cadena (señales indeseadas) provocará que éste no cumpla la función asignada.

2.4.2.2 SISTEMAS EN LAZO CERRADO

En los sistemas de control en lazo cerrado, la señal de salida tiene efecto sobre la acción de control. A este efecto se le denomina realimentación.

Figura 2.4.2.2 Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado



Fuente: Teoría de control Diseño electrónico, José matas (España)

La señal controlada debe realimentarse y compararse con la entrada de referencia, tras lo cual se envía a través del sistema una señal de control, que será proporcional a la diferencia encontrada entre la señal de entrada y la señal medida a la salida, con el objetivo de corregir el error o desviación que pudiera existir.

La principal ventaja de los sistemas de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación hace al conjunto menos sensible a las perturbaciones externas y a las variaciones de los parámetros internos que los sistemas en lazo abierto.

2.4.3 MÉTODO DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR

Sintonizar un controlador PI significa establecer el valor que deben tener los parámetros de Ganancia y Tiempo Integral, para que el sistema responda en una forma adecuada. La primera etapa de todo procedimiento de sintonización consiste en obtener la información estática y dinámica del lazo. Existen diversos métodos para ajustar los parámetros de controladores PI, pero todos caen en el método de Ziegler y Nichols para sintonizar los controladores

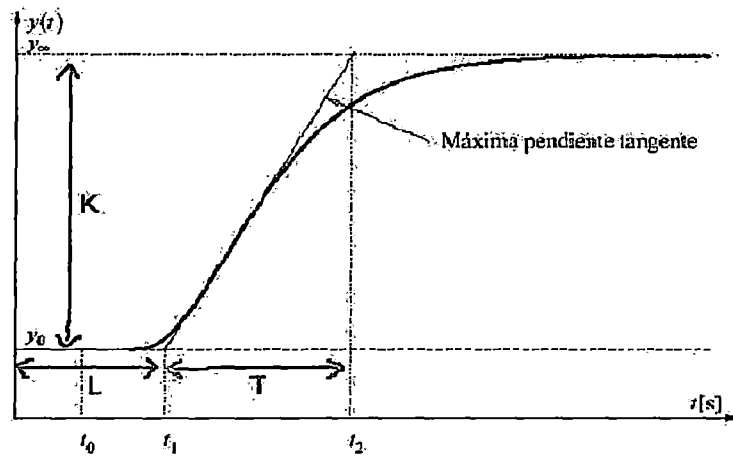
2.4.3.1 MÉTODO DE ZIEGLER Y NICHOLS EN LAZO ABIERTO

Esta técnica de estimación parte de la hipótesis de que los sistemas normales tienen respuesta monótona creciente estable a un escalón de entrada en bucle abierto; esta respuesta se conoce como curva de reacción. Para este método se supondrá que la planta es aproximable a un sistema de primer orden con retardo.

$$\frac{ke^{-Ls}}{1+\tau s} \quad (2.9)$$

El método de Ziegler - Nichols se realiza en lazo abierto y fue especificado en el año 1942. Los parámetros se sacan a partir de la respuesta a un escalón como se puede observar en la figura.

Figura 2.4.3.1 Respuesta a un escalón



Fuente: Ingeniería de control moderna, Katsuhiko Ogata (tercera edición)

La curva con forma de S se caracteriza por dos parámetros: el tiempo de retardo L y la constante de tiempo T. El tiempo de retardo y la constante de tiempo se determinan dibujando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de S y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y la línea $c(t) = K$, como se aprecia en la figura 2.4.3.1

El ajuste del controlador se hace según:

Tabla 2.4.3.1 Valores de controladores

CONTROLADOR	k	T_i	T_d
P	$\frac{1}{K} \left(\frac{T_P}{T_0} \right)$	∞	0
PI	$\frac{0.9}{K} \left(\frac{T_P}{T_0} \right)$	$\frac{T_0}{0.3}$	0
PID	$\frac{1.2}{K} \left(\frac{T_P}{T_0} \right)$	$\frac{T_0}{0.5}$	$\frac{T_0}{2}$

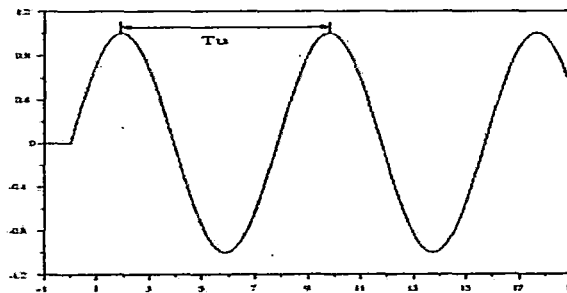
Fuente: Sistemas de control Automático, Benjamin C. Kuo (séptima edición)

2.4.3.2 MÉTODO DE ZIEGLER Y NICHOLS EN LAZO CERRADO

Este método es válido sólo para plantas que son estables en lazo abierto. Para llevar a cabo este método se usa la planta conocida en lazo cerrado. Se conecta el regulador en modo proporcional, es decir, con los parámetros T_i y T_p ajustados al valor que produzca menor contribución a la señal de control:

$T_i \rightarrow \infty, T_p \rightarrow 0$. Se va aumentando la ganancia K_p hasta obtener una respuesta oscilatoria de amplitud constante. Se anota el valor de la ganancia última $K_u = K_p$ y del periodo T_u de $y(t)$. Usando el criterio de la razón de amortiguamiento $\frac{1}{4}$ se pueden sacar los parámetros del regulador como vemos en la figura:

Figura 2.4.3.2 Respuesta de la planta con ganancia crítica



Fuente: Ingeniería de control moderna, Katsuhiko Ogata (tercera edición)

2.4.4 MODELO DE UN SISTEMA

Un sistema físico puede caracterizarse dinámicamente a través de las ecuaciones diferenciales que describen las leyes físicas que rigen el comportamiento de dicho sistema.

Se debe de tener en cuenta que una descripción completa y precisa del sistema físico puede resultar demasiado compleja y laboriosa; por ello debemos modelar el sistema llegando a un compromiso entre la exactitud y la sencillez requeridas al sistema. En cualquier caso se debe garantizar que el

modelo obtenido responda a las exigencias iniciales del estudio, pues ello determina el rango de validez de un modelo.

2.4.4.1 CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

Los sistemas pueden clasificarse en sistemas lineales y no lineales; otra posible clasificación los divide en sistemas variantes o invariantes en el tiempo.

- ✓ Sistemas lineales: son aquellos que pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales lineales. La propiedad más importante es que admiten el principio de superposición. Esta propiedad puede utilizarse para determinar de un modo experimental, si un sistema es o no lineal.
- ✓ Sistemas no lineales: son aquellos que no son lineales; es decir, se caracterizan por ecuaciones diferenciales no lineales. En realidad todo sistema es no lineal, aunque la mayoría es linealizable a tramos (circunstancia que se utiliza para poder caracterizar un sistema no lineal como uno lineal en un entorno determinado).

2.4.4.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

En general, cualquier sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT) puede modelarse mediante una ecuación diferencial de la forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + b_2 x^{(m-2)} + \dots + b_m x \quad (2.10)$$

Dónde:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}; n \geq m \quad (2.11)$$

Esta ecuación diferencial relaciona la señal de salida $y(t)$ de un sistema con la señal de entrada $x(t)$ al mismo, y permite conocer la respuesta de

dicho sistema a una señal de entrada determinada, mediante su resolución. A esta ecuación diferencial se le denomina ecuación característica del sistema.

Sin embargo, el tratamiento analítico del sistema a través de la ecuación característica diferencial es, en general, complejo. Es por ello que se introduce el concepto de función de transferencia.

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo se obtiene realizando la transformada de Laplace de la ecuación característica del sistema, con condiciones iniciales nulas.

Ecuación característica:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + b_2 x^{(m-2)} + \dots + b_m x \quad (2.12)$$

Aplicando transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas
 $^{TL}/_{CI} = 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}; n \geq m \quad (2.13)$$

Dónde:

n = Orden del sistema

Modelo del sistema:



Función de transferencia: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ con CI = 0

En concreto, la característica dinámica del sistema depende fundamentalmente de las raíces del denominador de la función de

transferencia; estas raíces se denominan polos de la función de transferencia. Al polinomio obtenido en el denominador de una función de transferencia se le denomina polinomio característico.

Para que un sistema sea físicamente realizable, el orden del denominador debe ser mayor o igual (de hecho en la práctica siempre es mayor) que el orden del numerador, de este modo se garantiza que el sistema es causal.

2.5 ANÁLISIS TEMPORAL DE SISTEMAS CONTINUOS

2.5.1 RESPUESTA TEMPORAL

La respuesta temporal de un sistema lineal invariante en el tiempo puede descomponerse en dos partes:

- ✓ la respuesta transitoria
- ✓ la respuesta estacionaria.

De este modo, si denominamos $c(t)$ a la expresión de la respuesta temporal:

$$c(t) = c_t(t) + c_{ss}(t) \quad (2.14)$$

Dónde:

$c_t(t)$ = Respuesta transitoria.

$c_{ss}(t)$ = Respuesta estacionaria.

La respuesta transitoria es originada por la propia característica dinámica del sistema y determina el comportamiento del sistema durante la transición de algún estado inicial hasta el estado final.

La respuesta estacionaria depende fundamentalmente de la señal de excitación al sistema y, si el sistema es estable, es la respuesta que perdura cuando el tiempo crece infinitamente.

De este modo hemos logrado determinar de un modo simple la estabilidad absoluta de un sistema; se dice que un sistema es estable si su respuesta transitoria decae a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Se define el error en estado estacionario como la diferencia entre la señal de referencia y la señal realimentada en estado estacionario en sistemas estables. Este error coincide con el valor estacionario de la señal originada por el detector de error.

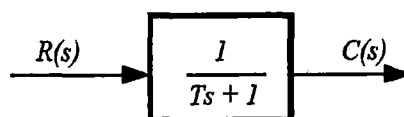
Por otra parte, en sistemas de control, interesa minimizar la desviación de la señal de salida respecto a la señal de entrada en estado transitorio. Por esta razón se caracteriza la respuesta transitoria respecto a entradas típicas o estándares, conociendo que, como el sistema es lineal, la respuesta del sistema a señales más complejas es perfectamente predecible a partir del conocimiento de la respuesta a estas entradas de prueba más simples.

Generalmente, las entradas típicas son: función impulsional, función escalón, función en rampa y función parabólica en el tiempo; aunque la más importante de todas ellas es, sin duda, la función escalón.

2.5.1.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Por lo general, la función de transferencia de un sistema es una expresión racional de polinomios en s . Las raíces del denominador se llaman polos y las raíces del numerador se llaman ceros. Un sistema de primer orden se define como aquel que posee un único polo y ningún cero.

Figura 2.5.1.1 Sistema de primer orden.



Respuesta al escalón:

$$r(t) = u(t) \xrightarrow{TL} R(S) = \frac{1}{s} \quad (2.15)$$

$$C(S) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \xrightarrow{TL^{-1}} c(t) = \left[1 - e^{\frac{-t}{T}}\right] \cdot u(t) \quad (2.16)$$

Obsérvese que la salida $c(t) = 1$ cuando t tiende a infinito si la constante de tiempo $T > 0$; esto implica que el polo de la función de transferencia del sistema debe encontrarse en el semiplano izquierdo del plano transformado S . Si la constante de tiempo $T \leq 0$, el sistema no alcanza el estado estacionario, resultando, de este modo, el sistema inestable.

2.5.1.2 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Un sistema de segundo orden se caracteriza por poseer dos polos en su función de transferencia.

Expresión normalizada:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.17)$$

Dónde se define:

ζ = Relación de amortiguamiento.

ω_n = Frecuencia natural no amortiguada.

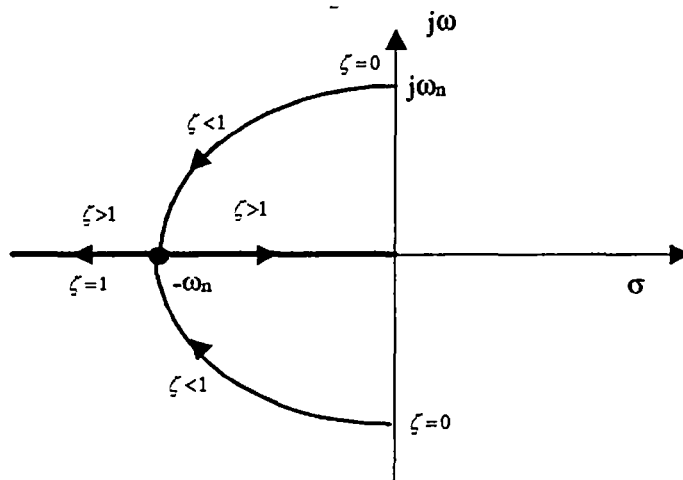
ω_d = Frecuencia natural amortiguada.

Los polos de un sistema de segundo orden vienen determinados por la expresión:

$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.18)$$

En la siguiente gráfica se visualiza la ubicación de polos de la función de transferencia en función del valor de ζ .

Figura 2.5.1.2 Diagrama de ubicación de polos



Fuente: Teoría de control Diseño electrónico, José matas (España)

Para $\zeta = 0 \Rightarrow$ Sistema oscilatorio. $S_{1,2} = \pm j\omega_n$

Para $0 < \zeta < 1 \Rightarrow$ Sistema subamortiguado.

$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d.$$

Para $\zeta = 1 \Rightarrow$ Sistema con amortiguamiento crítico. $S_{1,2} = -\omega_n$

Para $\zeta > 1 \Rightarrow$ Sistema sobreamortiguado. $S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

Comportamiento de un sistema según su posición:

- ✓ Si todas las raíces están en el semiplano negativo de S , el sistema es estable.
- ✓ Si todas las raíces se encuentran en el eje real negativo (las raíces son números reales), el sistema está sobreamortiguado o críticamente amortiguado.

- ✓ Cuanto más alejadas del origen de coordenadas estén las raíces situadas en el eje negativo, más rápida será la dinámica del sistema (menor será la constante de tiempo).
- ✓ Las raíces más cercanas al eje imaginario dominarán la dinámica de la respuesta mientras que aquellas que estén más alejadas dejarán de influir en la respuesta rápidamente.
- ✓ Cuanto más alejadas se encuentren las raíces conjugadas del eje real, más subamortiguado estará el sistema.

Con esta información es posible plantear una técnica para estudiar la dinámica de un sistema a partir de su ecuación característica. Esta técnica es el lugar de las raíces, se basa en representar las raíces de la ecuación característica variando la ganancia del controlador entre cero e infinito.

La abcisa es la parte real de las raíces y la ordenada es la parte compleja.

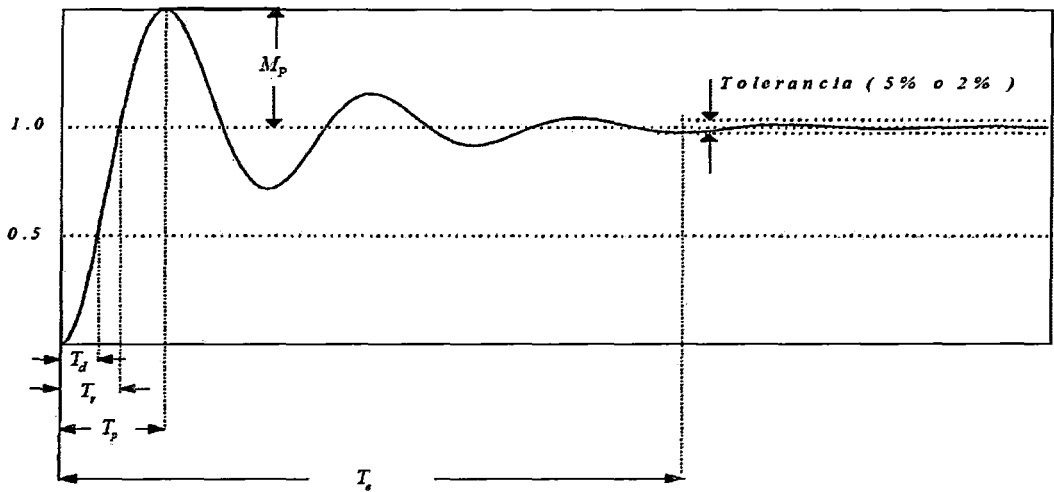
2.5.2 ESPECIFICACIONES DE RESPUESTA TRANSITORIA

Generalmente en la práctica, se especifican las características o especificaciones requeridas a un sistema de control en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Estas cantidades vienen determinadas en términos de la respuesta transitoria frente a una entrada tipo escalón ($u(t)$). A esta respuesta se le denomina respuesta inicial.

De este modo se caracteriza la dinámica de un sistema, aunque trabaje con otro tipo de entradas, a través de la dinámica requerida frente a una entrada escalón. El significado de los parámetros definidos en la caracterización de la respuesta inicial determina la forma de la respuesta transitoria de un sistema.

En la figura siguiente puede observarse la respuesta típica de un sistema frente a una entrada escalón.

Figura 2.5.2.1 Respuesta de un sistema de segundo orden frente a una entrada en escalón



Fuente: Ingeniería de control moderna, Katsuhiko Ogata (tercera edición)

Estas especificaciones se definen enseguida:

✓ T_d : Tiempo de retardo.

- Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el 50 % del valor final.

✓ T_r : Tiempo de subida o crecimiento.

- Para sistemas subamortiguados: Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el 100 % del valor final.

- Para sistemas sobreamortiguados: Tiempo que tarda la respuesta en pasar del 10 al 90 % del valor final.

✓ T_p : Tiempo de pico.

Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar el primer máximo. Solo existe en Sistemas subamortiguados.

✓ M_p : Máximo sobreimpulso (porcentual).

Es el valor de pico máximo de la curva de respuesta ponderado por el valor final obtenido.

$$M_p(\%) = \frac{c(tp) - c(\infty)}{c(\infty)} \cdot 100(\%) \quad (2.19)$$

El máximo sobreimpulso es un parámetro indicativo de la estabilidad relativa del sistema.

✓ T_e : Tiempo de establecimiento.

Tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango (habitualmente 5 % o 2 %) del valor final. Generalmente está relacionado con las constantes de tiempo más grandes del sistema.

Idealmente interesará lograr siempre sistemas de control que minimicen el máximo sobreimpulso y los tiempos de respuesta transitoria, manteniendo la máxima precisión posible.

2.5.3 ESTABILIDAD ABSOLUTA DE SISTEMAS LINEALES

2.5.3.1 ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO

La estabilidad absoluta de un sistema lineal se logra cuando la respuesta transitoria decae a cero al tender el tiempo a infinito. Se puede demostrar para que un sistema lineal sea estable es necesario que posea todos los polos de su función de transferencia en el semiplano S izquierdo.

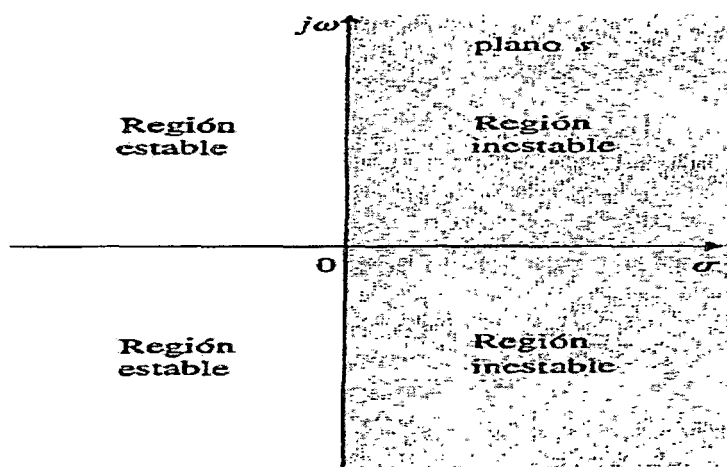
En sistemas de control, el problema fundamental es la determinación de las raíces del sistema en Lazo Cerrado a partir del conocimiento de las raíces en Lazo Abierto. Recordando la expresión de la función de transferencia en Lazo Cerrado.

La ecuación característica del sistema en Lazo Cerrado $1+G_c(s)G(s)H(s) = 0$ no es fácilmente resoluble en general; por ello aparecen métodos algorítmicos para poder determinar la estabilidad de un sistema en lazo cerrado, el más importante de estos métodos es el criterio de estabilidad de Routh

El criterio de estabilidad de Routh permite determinar el número de raíces de una ecuación de variable compleja que se encuentran en el semiplano derecho, utilizándose, de este modo, para determinar si existen polos de una función de transferencia en el semiplano S derecho.

Las regiones de estabilidad e inestabilidad en el plano S se ilustran en la Figura. 2.5.3.1

Figura 2.5.3.1 Regiones Estable e Inestables en el plano S



Fuente: *Sistemas de control Automático*, Benjamin C. Kuo (séptima edición)

2.5.3.2 CRITERIO DE ROUTH - HURWITZ

El criterio de estabilidad de Routh, es un criterio de estabilidad absoluta. Se basa en la determinación del número de raíces de un polinomio que se encuentran en el semiplano derecho del plano S . Para su aplicación deben verificarse dos condiciones:²

- Condición necesaria:

Dada la función de transferencia:

² Ingeniería de control moderna, Katsuhiko Ogata (tercera edición)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.20)$$

Debe escribirse el denominador de la forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2.21)$$

En donde los coeficientes son cantidades reales. Suponemos que $a_n \neq 0$; es decir, se eliminan las raíces en el eje imaginario.

Si existe algún coeficiente negativo o cero en presencia de algún coeficiente positivo, entonces existen una o más raíces imaginarias puras o con parte real positiva, lo cual implica que el sistema es inestable. En otros términos, para garantizar estabilidad, a partir del primer $a_i \neq 0$ todos los coeficientes deben estar presentes y ser positivos.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ s^2 & e_1 & e_2 & & & \\ s^1 & f_1 & & & & \\ s^0 & g_1 & & & & \end{array} \right)$$

- Condición suficiente:

Las primeras filas se obtienen directamente del polinomio característico, el resto de coeficientes se obtienen según las expresiones:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \quad (2.22)$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}; \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}; \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \quad (2.23)$$

Como observación debe indicarse que puede multiplicarse o dividirse toda una fila por una constante positiva.

El criterio de estabilidad de Routh determina que el número de raíces con parte real positiva del polinomio estudiado es igual al número de cambios de signo de la primera columna del algoritmo de formación.

De este modo la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable es:

- Todos los coeficientes del polinomio característico deben existir y ser positivos.
- Todos los coeficientes de la primera columna del algoritmo de formación deben de ser positivos.

2.5.4 LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

Debido a la necesidad de conocer los polos de un sistema en lazo cerrado, ya que determinarán las características básicas de la respuesta transitoria, se desarrolla el método del lugar geométrico de las Raíces (también denominado Lugar de Evans). Este método permite ubicar en un gráfico los polos de un sistema en lazo cerrado a partir del conocimiento de los polos en lazo abierto, en función de un parámetro variable. Para ello considérese la ecuación característica de un sistema en lazo cerrado:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + GLA(s) = 0 \Rightarrow GLA(s) = -1 \quad (2.24)$$

Dónde:

$$GLA(s) = \text{Función de transferencia en lazo abierto}$$

La resolución de esta ecuación implica la verificación de dos condiciones:

- Condición de ángulo: fase $\{GLA(s)\} = \pm 180^\circ (2\lambda + 1)$; $\lambda \in \mathbb{N}$ (2.25)

- Condición de módulo: $|GLA(s)| = 1$ (2.26)

Debe observarse que, de este modo, se pasa del estudio del sistema en lazo cerrado al estudio de características del sistema en lazo abierto, lo cual debe permitir mayor facilidad en el cálculo.

Se define el lugar geométrico de las raíces como el conjunto de puntos del plano S en los que se verifica la condición de ángulo.

En conclusión, un punto que pertenece al lugar geométrico de las raíces es un posible polo del sistema en lazo cerrado; para ello únicamente es necesario validar la condición de módulo, y ésta se cumplirá para un valor determinado de la ganancia del sistema en lazo abierto. Sin embargo, un punto del plano S que no pertenezca al lugar geométrico de las raíces no puede ser polo en lazo cerrado porque no verifica la condición de ángulo, aunque varíe la ganancia del sistema en lazo abierto. De este modo, se puede escribir como un producto de ganancias K por una fracción de polinomios $Z(S)$ y $P(S)$:

$$GLA(S) = K \frac{Z(S)}{P(S)} = K \frac{(S+Z_1)\dots(S+Z_m)}{(S+P_1)\dots(S+P_n)} ; 0 \leq K < \infty \quad (2.27)$$

Dónde:

Z_i Son los ceros y P_i son los polos de la función de lazo abierto.

Se logra trazar el lugar geométrico de las raíces que proporciona los valores de los polos en lazo cerrado en función de K .

CAPÍTULO III.

DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

3.1 UBICACIÓN

La mini central hidroeléctrica de Aobamba se ubica en el distrito de Machupicchu de la Provincia de Urubamba, del departamento y región de Cusco a una altitud de 2089 msnm.

3.2 ESTUDIO HIDROLÓGICO

La cuenca del río Aobamba se encuentra ubicada entre las coordenadas geográficas 13°10' y 13°21' de latitud Sur y 72°28' y 72°36' de longitud Oeste. Forma parte de uno de los tributarios de la margen izquierda del río Vilcanota y pertenece al sistema hidrográfico del Amazonas (vertiente del Atlántico).

El río Aobamba se origina en la cordillera de los Andes sobre los 6,000 msnm y la cuenca que drena alcanza una superficie de 135.9 km² hasta su confluencia con el río Vilcanota, 108.4 km² hasta el lugar donde se tiene previsto ubicar la captación.

El cauce del río Aobamba alcanza una longitud total aproximada de 18.8 km, con una pendiente longitudinal promedio de 13.8 %. Hasta los sitios de captación la longitud alcanza a 15.6 km, con una pendiente promedio de 14.2 %.

A pesar de su corta extensión, la cuenca tiene una variada configuración morfológica e hidrológica. El clima varía desde el frío glacial de los nevados, cuyas altitudes superan los 4,000 msnm, hasta el clima semicálido y húmedo de la montaña o ceja de selva de las zonas bajas de la cuenca, donde se alcanza los 1,650 msnm y donde la vegetación es abundante, con una amplia variedad de plantas.

Se distinguen tres zonas con características diferentes:

➤ **Zona alta:**

Corresponde al sector con altitudes superiores a los 4,000 msnm, con una superficie drenada de 58 km², aproximadamente. A partir de los 4,500 msnm se presenta una zona de fuertes pendientes con presencia de nevados que alcanzan unos 16 km², al pie de los cuales se observa lagunas de origen glaciar.

➤ **Zona intermedia:**

Se ubica entre los 4,000 y 3,000 msnm, con una superficie drenada de aproximadamente 50 km². La pendiente del cauce principal es del orden de los 13.6 %. Se caracteriza por la presencia de depósitos morrénicos y material coluvial que cubren el basamento rocoso. La vegetación es permanente, con áreas cultivadas.

➤ **Zona inferior:**

Corresponde a la zona con altitudes por debajo de los 3,000 msnm hasta la confluencia con el río Vilcanota, a 1,650 msnm. La pendiente del cauce principal en esta zona es de aproximadamente 12.8 %. Se observa material coluvial y afloramientos de roca. La vegetación es abundante, con una gran variedad de plantas y frutales. Las obras del aprovechamiento del Aobamba se ubicarían en esta zona.

3.2.1 INFORMACIÓN HIDROMÉTRICA

Para el análisis de la información hidrométrica, se ha utilizado la información proporcionada por EGEMSA, relacionada a los caudales registrados en la cuenca del río Aobamba, para un periodo de 56 años (1958-2013).

En la tabla 3.2.1 se presentan la distribución de los caudales medios mensuales del río Aobamba, esto se obtienen a partir del estudio de Aprovechamiento de los Recursos Hídricos de la Quebrada Aobamba.

"MODELAMIENTO Y ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA"

Tabla 3.2.1.1 Caudales medios mensuales del rio de Aobamba

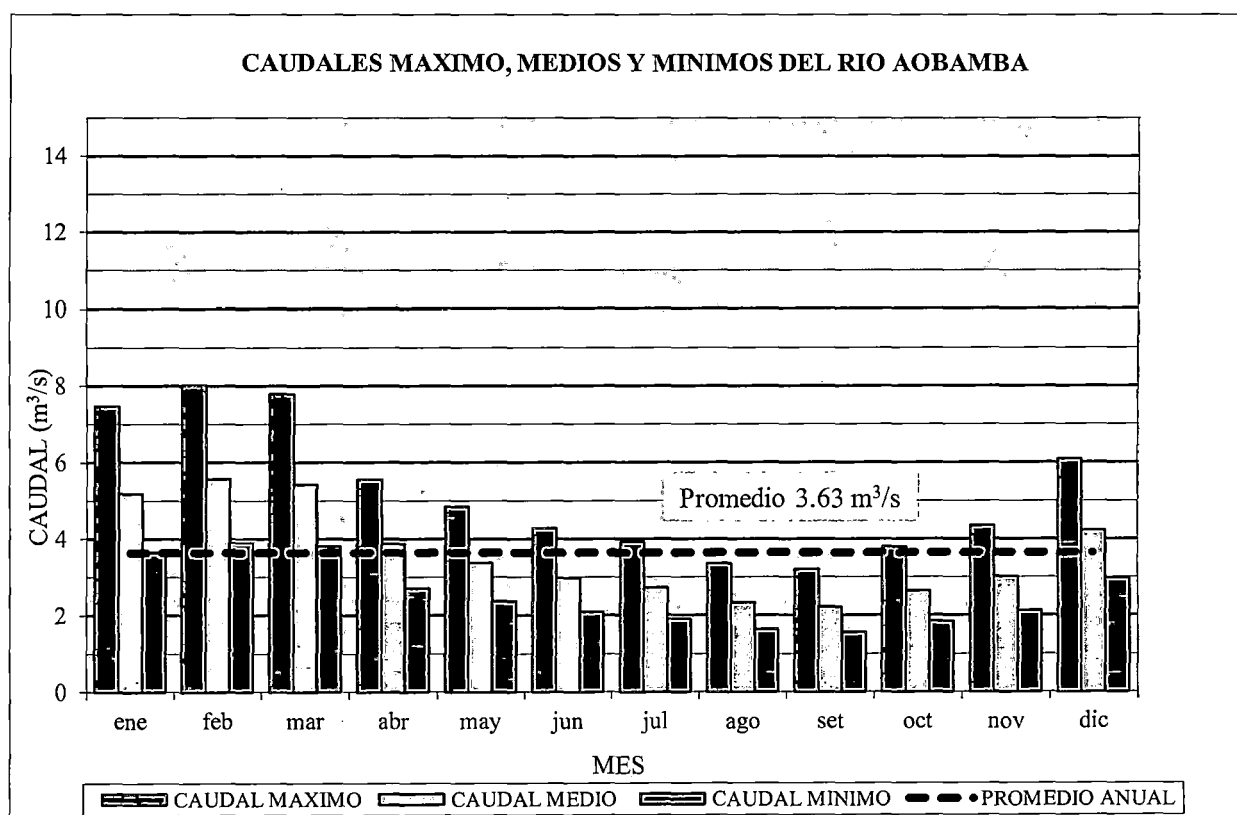
Nº	Año	ene	feb	mar	abr	may	jun	jul	ago	set	oct	nov	dic	promedio
1	1958	4.60	4.93	4.80	3.42	2.98	2.64	2.41	2.07	1.97	2.34	2.67	3.74	3.21
2	1959	4.45	4.77	4.64	3.31	2.88	2.55	2.33	2.00	1.90	2.26	2.59	3.62	3.11
3	1960	5.81	6.23	6.06	4.32	3.76	3.33	3.05	2.61	2.49	2.95	3.38	4.73	4.06
4	1961	5.94	6.37	6.20	4.43	3.85	3.41	3.12	2.67	2.55	3.02	3.46	4.84	4.15
5	1962	6.78	7.27	7.08	5.05	4.40	3.89	3.56	3.05	2.91	3.44	3.94	5.52	4.74
6	1963	7.47	8.01	7.80	5.56	4.84	4.28	3.92	3.36	3.20	3.79	4.34	6.08	5.22
7	1964	4.07	4.36	4.25	3.03	2.64	2.33	2.14	1.83	1.74	2.07	2.37	3.31	2.84
8	1965	4.58	4.91	4.78	3.41	2.97	2.62	2.40	2.06	1.96	2.33	2.66	3.73	3.20
9	1966	4.46	4.79	4.66	3.32	2.89	2.56	2.34	2.01	1.91	2.27	2.60	3.63	3.12
10	1967	4.33	4.64	4.52	3.22	2.80	2.48	2.27	1.95	1.85	2.20	2.52	3.52	3.02
11	1968	5.24	5.62	5.47	3.90	3.40	3.00	2.75	2.36	2.25	2.66	3.05	4.27	3.67
12	1969	4.38	4.70	4.58	3.26	2.84	2.51	2.30	1.97	1.88	2.23	2.55	3.57	3.06
13	1970	5.09	5.46	5.31	3.79	3.30	2.92	2.67	2.29	2.18	2.58	2.96	4.14	3.56
14	1971	5.75	6.16	6.00	4.28	3.73	3.29	3.02	2.58	2.46	2.92	3.34	4.68	4.02
15	1972	4.73	5.07	4.94	3.52	3.06	2.71	2.48	2.13	2.03	2.40	2.75	3.85	3.30
16	1973	6.48	6.95	6.77	4.83	4.20	3.72	3.40	2.92	2.78	3.29	3.77	5.28	4.53
17	1974	6.19	6.64	6.47	4.61	4.01	3.55	3.25	2.78	2.65	3.14	3.60	5.04	4.33
18	1975	4.69	5.03	4.89	3.49	3.04	2.69	2.46	2.11	2.01	2.38	2.73	3.82	3.28
19	1976	4.93	5.29	5.15	3.67	3.20	2.83	2.59	2.22	2.11	2.51	2.87	4.02	3.45
20	1977	3.88	4.16	4.05	2.89	2.51	2.22	2.04	1.74	1.66	1.97	2.26	3.16	2.71
21	1978	5.49	5.88	5.73	4.09	3.56	3.14	2.88	2.47	2.35	2.79	3.19	4.47	3.84
22	1979	5.48	5.88	5.73	4.08	3.56	3.14	2.88	2.47	2.35	2.79	3.19	4.47	3.83
23	1980	4.86	5.21	5.07	3.62	3.15	2.78	2.55	2.18	2.08	2.47	2.83	3.96	3.40
24	1981	6.98	7.49	7.29	5.20	4.53	4.00	3.66	3.14	2.99	3.55	4.06	5.68	4.88
25	1982	7.38	7.92	7.71	5.50	4.79	4.23	3.87	3.32	3.16	3.75	4.29	6.01	5.16
26	1983	3.69	3.96	3.85	2.75	2.39	2.11	1.94	1.66	1.58	1.87	2.15	3.00	2.58
27	1984	6.83	7.32	7.13	5.09	4.43	3.91	3.58	3.07	2.93	3.47	3.97	5.56	4.77
28	1985	5.97	6.41	6.24	4.45	3.87	3.42	3.14	2.69	2.56	3.03	3.47	4.86	4.18
29	1986	5.92	6.35	6.18	4.41	3.84	3.39	3.11	2.66	2.53	3.00	3.44	4.82	4.14
30	1987	4.48	4.80	4.67	3.33	2.90	2.57	2.35	2.01	1.92	2.27	2.60	3.65	3.13
31	1988	5.41	5.80	5.64	4.03	3.50	3.10	2.84	2.43	2.32	2.75	3.14	4.40	3.78
32	1989	4.85	5.20	5.06	3.61	3.14	2.78	2.55	2.18	2.08	2.46	2.82	3.95	3.39
33	1990	4.18	4.49	4.37	3.12	2.71	2.40	2.20	1.88	1.79	2.12	2.43	3.41	2.92
34	1991	3.96	4.25	4.14	2.95	2.57	2.27	2.08	1.78	1.70	2.01	2.30	3.23	2.77
35	1992	3.64	3.90	3.80	2.71	2.36	2.08	1.91	1.64	1.56	1.85	2.12	2.96	2.54
36	1993	4.96	5.32	5.18	3.69	3.22	2.84	2.60	2.23	2.12	2.52	2.88	4.04	3.47
37	1994	6.26	6.71	6.53	4.66	4.06	3.59	3.28	2.81	2.68	3.18	3.64	5.09	4.37
38	1995	4.22	4.53	4.41	3.14	2.74	2.42	2.22	1.90	1.81	2.14	2.45	3.44	2.95
39	1996	4.38	4.70	4.58	3.26	2.84	2.51	2.30	1.97	1.88	2.23	2.55	3.57	3.06
40	1997	5.95	6.38	6.21	4.43	3.86	3.41	3.12	2.68	2.55	3.02	3.46	4.85	4.16
41	1998	3.92	4.20	4.09	2.92	2.54	2.25	2.06	1.76	1.68	1.99	2.28	3.19	2.74
42	1999	4.92	5.27	5.13	3.66	3.19	2.82	2.58	2.21	2.11	2.50	2.86	4.00	3.44
43	2000	4.99	5.36	5.21	3.72	3.24	2.86	2.62	2.25	2.14	2.54	2.90	4.07	3.49
44	2001	6.15	6.60	6.42	4.58	3.99	3.53	3.23	2.77	2.64	3.13	3.58	5.01	4.30
45	2002	6.70	7.18	6.99	4.99	4.34	3.84	3.52	3.01	2.87	3.40	3.90	5.45	4.68
46	2003	6.86	7.36	7.16	5.11	4.45	3.93	3.60	3.09	2.94	3.48	3.99	5.59	4.80
47	2004	5.70	6.11	5.95	4.24	3.69	3.26	2.99	2.56	2.44	2.89	3.31	4.64	3.98
48	2005	4.52	4.84	4.72	3.36	2.93	2.59	2.37	2.03	1.94	2.29	2.63	3.68	3.16
49	2006	5.47	5.87	5.71	4.08	3.55	3.14	2.87	2.46	2.34	2.78	3.18	4.46	3.83

"MODELAMIENTO Y ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA"

50	2007	5.55	5.95	5.79	4.13	3.60	3.18	2.91	2.50	2.38	2.82	3.23	4.52	3.88
51	2008	4.12	4.42	4.30	3.07	2.67	2.36	2.16	1.85	1.76	2.09	2.40	3.35	2.88
52	2009	4.11	4.40	4.29	3.06	2.66	2.35	2.15	1.85	1.76	2.08	2.39	3.34	2.87
53	2010	3.91	4.19	4.08	2.91	2.53	2.24	2.05	1.76	1.67	1.98	2.27	3.18	2.73
54	2011	3.72	3.99	3.88	2.77	2.41	2.13	1.95	1.67	1.59	1.89	2.16	3.03	2.60
55	2012	5.56	5.97	5.81	4.14	3.61	3.19	2.92	2.50	2.38	2.83	3.24	4.53	3.89
56	2013	5.56	5.97	5.81	4.14	3.61	3.19	2.92	2.50	2.38	2.83	3.24	4.53	3.81
C. Media		5.19	5.56	5.42	3.86	3.36	2.97	2.72	2.33	2.22	2.63	3.02	4.22	3.63
C. Máximo		7.47	8.01	7.80	5.56	4.84	4.28	3.92	3.36	3.20	3.79	4.34	6.08	5.22
C. Mínimo		3.64	3.90	3.80	2.71	2.36	2.08	1.91	1.64	1.56	1.85	2.12	2.96	2.54

Fuente: Información proporcionada por EGEMSA 2013

Figura 3.2.1.1 Caudales medio, máximos y mínimos mensuales.



Fuente: Elaboración Propia

De los registros obtenidos, se aprecia que los mayores caudales medios se presentan entre diciembre y abril, época de avenidas, donde se registra la temporada más lluviosa. El caudal medio multianual registrado es de 3.63 m³/s, con un máximo medio anual de 5.22 m³/s y un mínimo de 2.54 m³/s.

3.3 DESCRIPCIÓN DE LOS COMPONENTES DEL PROYECTO

3.3.1 ASPECTOS GENERALES DEL PROYECTO

El Proyecto, considera el aprovechamiento de las aguas del río Aobamba vía la construcción de una nueva mini central hidroeléctrica, para el afianzamiento de la C.H. Machupicchu, el cual se inicia con la captación del recurso hídrico por gravedad en la quebrada Aobamba, en la cota 2,315.00 msnm, la cual es conducida, a través de una tubería de 4,902 m, hasta la mini central hidroeléctrica ubicada a 2,297.96 msnm.

La descarga de la mini central hidroeléctrica (2,059.70 msnm) empalma con una cámara de carga complementaria para la C.H. Machupicchu, siendo sus características generales las que se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 3.3.1.1 Características generales del proyecto

Descripción	Valor
Cota de captación (msnm)	2,315.00
Cota de descarga (msnm)	2,059.70
Caída neta (m)	230.00
Caudal de diseño (m ³ /s)	3.50
Potencia (MW)	7.00

Fuente: proyecto “Aprovechamiento de los recursos hídricos de la Quebrada de Aobamba para la central hidroeléctrica de Machupicchu”

3.4 MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA

Con una capacidad instalada de 400 m³ permitirá alcanzar un caudal de 3.50 m³/s, en época de estiaje, lo que implica una potencia instalada total de 7.00 MW. Las principales obras de esta mini central hidroeléctrica son:

A. BOCATOMA

Se ubica en la quebrada Aobamba, en la cota 2,313.00 msnm, y presenta una captación de concreto armado y un barraje fusible en caso de ocurrencias de eventos excepcionales.

B. BARRAJE FUSIBLE (DIQUE FUSIBLE)

Se ubica como vía de alivio de emergencia. Ha sido diseñado para fundirse o lavarse de una manera prevista y controlada, cuando se requiera de una capacidad adicional de alivio.

La corona del dique tiene el nivel 2,317.50 msnm. El dique está diseñado para operar en avenidas con periodos de retorno de 5 a más años.

C. CAPTACIÓN

La estructura de captación estará totalmente encapsulada en concreto armado para protegerla contra aluviones. Empalma con la entrada del túnel que inicia la conducción hacia la central.

D. CONDUCCIÓN

La tubería de conducción se inicia con un primer tramo, túnel 1, de 1,362.00 m de longitud con cota de rasante 2,315.00 msnm, con sección de 2.40 m de ancho por 2.40 m de altura, mayormente de tipo baúl sin revestir.

Inmediatamente después se emplaza un primer acueducto para cruzar una primera quebrada profunda, para proseguir la conducción en tubería enterrada, en un corto tramo hasta el desarenador ubicado entre los progresivos km 1+605 y km 1+670.

A la salida del desarenador, continúa la conducción a través de una tubería de acero de 3,100.00 m de longitud, con un diámetro interno de 1.40 m. El túnel final, denominado 2, es de similares características del inicial, pero de menor longitud, 420.00 m y está emplazado en un macizo granito que implica menores requerimientos de sostenimiento y revestimiento del túnel.

E. DESARENADOR

Permitirá sedimentar partículas de hasta 0.1 mm de diámetro. Tiene 6.00 m de ancho y 65.00 m de longitud, es de tipo poza múltiple con tres compuertas de purga. Cuenta con un aliviadero lateral para demasías y un vertedero a la salida, que empalma con una estructura de toma, donde se reinicia la

conducción en tubería que también constituye la aducción de la mini central hidroeléctrica.

F. CÁMARA DE CARGA

Se plantea su ubicación, para controlar los requerimientos de la puesta en marcha o cierre de la turbina de dicha central, con un volumen de 400 m³. Esta estructura tiene una forma pentagonal, íntegramente de concreto armado, de 8.00 m de ancho en promedio por 17.00 m de largo. La altura de las paredes es de 4.00 m y su espesor promedio es de 0.30 m.

G. CONDUCTO FORZADO

El conducto forzado presenta dos tramos claramente diferenciados, el inicial, de tubería de acero expuesta de 1.00 m de diámetro y el final, en subterráneo, constituido en un pique vertical de 1.60 m de diámetro. En dicho tramo se considera una tubería de acero de 1.00 m de diámetro embebida en concreto reforzado de 0.30 cm de espesor. El tramo al exterior está apoyado sobre soportes y anclajes de concreto y tiene una longitud de 139.60 m. El tramo en subterráneo tiene una longitud de 197.30 m hasta la llegada a la casa de máquinas. Finalmente, el diámetro seleccionado es de 1.05 m.

H. CASA DE MÁQUINAS

La casa de máquinas de la mini central hidroeléctrica será en caverna y permitirá alojar una turbina Francis de 7.00 MW de capacidad nominal, con su respectivo alternador y el equipo electromecánico complementario de 8.00 m de ancho por 8.40 m de altura y 15.00 m de largo. La turbina Francis está ubicada a 2,059.70 msnm.

I. EQUIPO ELECTROMECAÁNICO

El equipo principal de generación estará conformado por un solo grupo, ello en vista de que es de menor tamaño, comparada con las turbinas de las cavernas 1 y 2 de la C.H. Machupicchu. La turbina será tipo Francis, de eje vertical, determinada así a partir de su altura de caída, caudal nominal de operación, potencia nominal y velocidad específica, utilizando gráficos de fabricantes de turbinas.

J. LÍNEA DE CONEXIÓN ELÉCTRICA

La mini central hidroeléctrica será equipada con un generador síncrono de 8.75 MVA, a ser diseñado con un factor de potencia de 0.80 y una tensión de generación de 13.80 kV. El grupo hidroeléctrico contará con su sistema de medición y protección correspondiente.

Desde este punto, la línea de media tensión continuará en 13.80 kV hasta llegar, tras un recorrido de 500.00 m, hacia el futuro patio de llaves de la C.H.M., en donde se acoplará al sistema de 138.00 kV a través de la celda de llegada en 13.80 kV, que a su vez se conecta al transformador de potencia de 8.00 MVA 13.80 / 138.00 kV, la cual se integra finalmente al SEIN.

3.5 PRESUPUESTO DEL PROYECTO

Se estima un costo total del Proyecto, sin IGV, de US\$ 18'169,223 (Dieciocho millones ciento sesenta y nueve mil doscientos veintitrés con 00/100 dólares americanos).

CAPÍTULO IV.

MODELO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA

4.1 INTRODUCCIÓN

El objeto del presente capítulo es el de estudiar analíticamente el comportamiento de los diferentes elementos que componen la mini central como cámara de carga, tubería forzada y turbina. Dado que el estudio de la mini central se realiza desde el punto de vista analítico y bajo ciertas condiciones es preciso realizar diferentes simplificaciones que permitan modelar cada elemento.

Una vez obtenidas las expresiones que gobiernan las dinámicas de cada componente se elabora un modelo que permite reproducir con la mayor exactitud posible el funcionamiento de la mini central. Por otro lado el modelo debe ser lo suficientemente simplificado como para permitir el estudio de su estabilidad.

El control que se propone en el presente estudio se resume en modificar la posición del distribuidor (variable controladora) para mantener constante, no la velocidad del grupo, sino el nivel de agua en la cámara de carga (variable controlada). De este modo, manteniendo constante el nivel se consigue turbinar todo o parte del caudal procedente del río. Como la potencia de la mini central es reducida, se supone conectarlo a una red de gran potencia, dicho control si es posible.

También se propone el control del nivel en la cámara de carga a través del distribuidor, de modo que consiga turbinarse todo el caudal procedente del canal. Sería necesario introducir un sistema de control del nivel de agua en la cámara de carga para conseguir adecuar el caudal turbinado al caudal que circula por el río. Este control podría accionar la posición de la compuerta (variable controladora) que comunica el canal y el azud para mantener constante el nivel, en la cámara de carga (variable controlada).

El control principal que determina el funcionamiento y la estabilidad de la mini central es el efectuado por el movimiento del distribuidor. El control requerido en la compuerta del azud implica únicamente la dinámica del propio azud. Por tanto, en el presente estudio se plantea únicamente el modelo de la mini central con el

control del nivel en la cámara de carga manteniendo en todo momento la apertura de la compuerta aguas arriba del canal constante.

Por consiguiente los principales componentes que forman parte de la mini central son los siguientes:

- **Bocatoma:** Estructura que genera un pequeño vaso, en él se remansa y embalsa el agua procedente del río. En este caso, dado que la descarga se produce muy próxima a la ubicación del cuerpo de presa, no es necesario verter un caudal constante por el aliviadero, por lo tanto se considera que se turbine el caudal procedente del río.

Se mantiene un caudal ecológico entre el azud donde se sitúa la toma y el lugar donde se produce la descarga. Para lograr dicho objetivo se dispone de un aliviadero o vertedero en la parte superior del cuerpo de azud, de esta forma se asegura un caudal ecológico. Por lo tanto, los modelos se estudian considerando la acción del aliviadero.

- **Canal de derivación:** Cauce abierto por el que el agua circula en lámina libre y régimen lento.
- **Cámara de carga:** Depósito o elemento almacenador cuya misión es la de remansar el agua para que acceda a la tubería forzada sin ningún tipo de turbulencia. Normalmente, además asegura que ante una diferencia entre el caudal aportado por el canal y el turbinado no se introduce aire en la tubería forzada. Para ello debe tener un volumen suficiente para que, ante una disminución brusca del caudal procedente del canal, se pueda accionar el distribuidor en condiciones de seguridad y evitar el vaciado completo de la cámara mientras se turbinan el volumen acumulado en la propia cámara. En el caso contrario que la cámara aumente su nivel, se dispone en la cámara de un aliviadero que evacue el exceso de agua para evitar que se desborde. En la mini central se evita tanto el vaciado como el desbordamiento de la cámara dado que se controla el nivel del agua mediante el movimiento del distribuidor de la turbina.

- **Tubería forzada:** Conducto en presión que comunica la cámara de carga con la turbina.
- **Turbina:** Componente de la mini central que transforma la energía del agua en energía mecánica.
- **Regulador de turbina:** Elemento que modifica la posición del distribuidor de la turbina para mantener el nivel de agua en la cámara de carga constante:

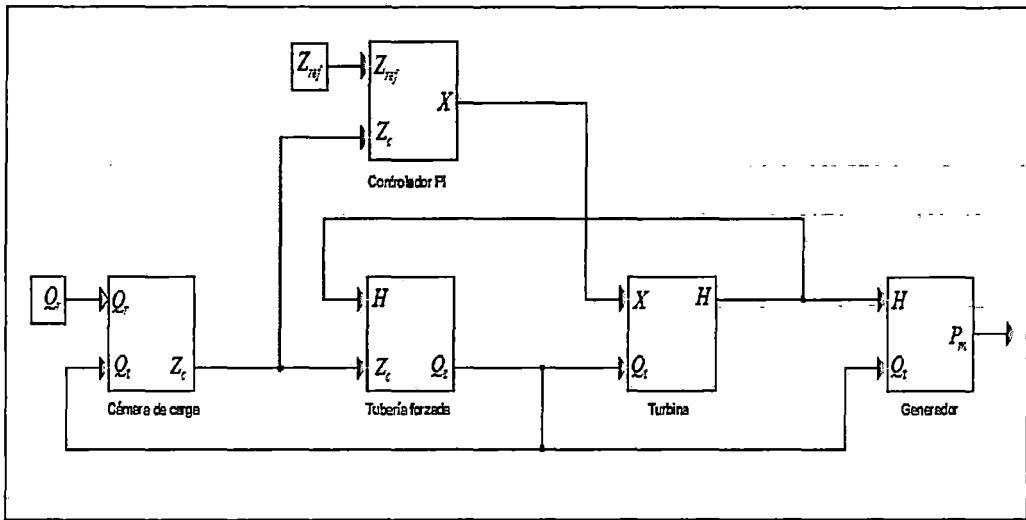
Dispone de dos componentes principales: un elemento de control para fijar la consigna en función de las condiciones de funcionamiento y el dispositivo servo hidráulico que acciona el distribuidor. A los efectos de este estudio, la dinámica de los componentes puede reducirse a la de un controlador tipo PI ya que la respuesta del dispositivo servo hidráulico es rápido.

En el presente modelo se considera la acción inmediata del dispositivo servo-hidráulico por lo que el regulador de la turbina se identifica únicamente con el controlador que modifica la posición del distribuidor en función de la diferencia de cotas del agua en la cámara de carga y la de referencia.

El modelo lineal contiene los elementos (cámara de carga, tubería forzada y turbina) de la mini central pero las ecuaciones que se modelan en cada bloque proceden de la linealización alrededor de un punto de funcionamiento de las ecuaciones originales del modelo completo. El modelo lineal que se determina es de tercer orden que permite una simplificación, en el estudio de la estabilidad de la mini central.

Para reflejar el comportamiento global de la mini central se elabora el denominado modelo completo con cámara de carga, tubería forzada y turbina, dicho modelo elaborado a partir de diagramas de bloques se rige de las ecuaciones que gobiernan todos y cada uno de los componentes de la mini central hidroeléctrica de Aobamba.

Figura 3.3.1 Diagrama de bloques del modelo completo de la mini central (cámara de carga, tubería forzada, turbina y la potencia hidráulica)



Fuente: Elaboración Propia

Dónde:

Z_c = Cota de la lámina de agua en la cámara de carga (m.s.n.m)

Z_{ref} = Cota de referencia de la lámina de agua en la cámara de carga
(m.s.n.m)

X = Posición del distribuidor (mm)

Q_t = Caudal que circula por la tubería forzada (m^3/s)

Q_r = Caudal que aporta el río a la cámara de carga (m^3/s)

P_m = Potencia mecánica (MW)

En el modelo se considera la aproximación de "columna de agua rígida" dado que el parámetro de Allievi, en la tubería forzada es mayor que la unidad.³

Otra simplificación, es considerar que apenas existe un lapso de tiempo desde que la turbina genera energía mecánica hasta que ésta se transforma en energía eléctrica. Se desprecia la inercia del rotor del alternador ya que como se ha

³ Se demuestra la aproximación en Jimenes O.F. and Chaudry, 1987

comprobado la dinámica del alternador se desarrolla en una escala temporal mucho menor que la del resto de la mini central.

En resumen, el presente capítulo elabora un modelo que simule el comportamiento de la mini central con control de nivel en la cámara de carga. Para ello se estudia el comportamiento de un fluido que circula en lámina libre así como el de los diferentes componentes de la mini central. Las ecuaciones obtenidas sirven para elaborar los diagramas de bloques en el entorno de programación MATLAB que conectados entre sí, configuran el modelo completo de la mini central con vistas a posterior estudio de la estabilidad de la mini central.

En el apartado final del capítulo se presenta una comparación de ambos modelos mediante una simulación. De esta forma se comprueba la modificación en el comportamiento dinámico de la mini central que implica su linealización. Dado que en este caso ambos modelos tienen los mismos componentes y sólo se diferencian en dicha simplificación, si se trabaja en pequeña perturbación es de esperar que los resultados no difieran en exceso.

4.2 MODELO MATEMÁTICO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA

4.2.1 TURBINA

El funcionamiento de la turbina y las relaciones entre las variables que determinan su comportamiento se reflejan en la colina de rendimiento. Dichas colinas permiten situar el punto de funcionamiento de la turbina a partir de coordenadas unitarias (Q_1 y N_1). Por tanto la misma figura sirve para representar cualquiera de las turbinas semejantes hidráulicamente.

$$N_1 = \frac{N * D}{\sqrt{H}} \qquad Q_1 = \frac{Q}{D^2 * \sqrt{H}} \qquad (4.1)$$

Dónde:

N_1 = Velocidad de giro unitaria del grupo (r.p.m)

N = Velocidad de giro del grupo (r.p.m)

D = Diámetro de la turbina (m)

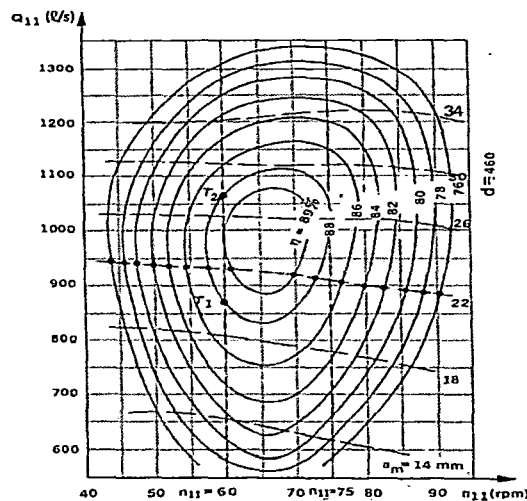
H = Salto neto (m)

Q_1 = Caudal turbinado unitario (m^3/s)

Q = Caudal (m^3/s)

De este modo conociendo el diámetro de la turbina (D), se puede conocer su comportamiento.

Figura 4.2.1.1 Colina de Rendimiento



Fuente: J I. Sarasua. Control de mini centrales hidroeléctricas fluyentes. Modelado y estabilidad. Madrid 2009.

Como el diagrama de bloques de la turbina precisa de una expresión matemática que describa su comportamiento, que parten de las ecuaciones de la conservación de la cantidad de movimiento o de Euler y de la conservación de energía. Dichas expresiones permiten obtener el caudal turbinado (Q) y el par generado por la turbina (T_m) a partir del Salto neto (H), la velocidad de giro (N) y la posición del distribuidor (X).

$$Q = f_Q(H, N, X) \quad T_m = f_{T_m}(H, N, X) \quad (4.2)$$

El modelo de la mini central que se plantea en el presente estudio tiene por objetivo el estudio del control y la estabilidad cuando opera en un punto de funcionamiento bajo pequeñas perturbaciones en las condiciones de

operación dado que las expresiones matemáticas (4.2) que se traducen en la colina de rendimiento de la turbina presenta cierta dificultad, se opta por su linealización tanto en las simulaciones como en el estudio de la estabilidad.

Linealizando las ecuaciones (4.2) en el contorno del punto de equilibrio inicial resultan las siguientes expresiones en valores por unidad.⁴

$$\Delta q = b_{11}\Delta h + b_{12}\Delta n + b_{13}\Delta x \qquad \Delta t_m = b_{21}\Delta h + b_{22}\Delta n + b_{23}\Delta x \qquad (4.3)$$

Dónde:

Δq = Variación del caudal turbinado en valores por unidad

b_{11}, b_{12}, b_{13} = Coeficientes de las expresiones matemáticas de la turbina linealizada.

Δh = Variación del salto neto en valores por unidad

Δn = Variación de la velocidad de giro del grupo en valores por unidad

Δx = Variación de la posición del distribuidor en valores por unidad

Dado que la turbina se encuentra conectada a la tubería forzada, se puede considerar que el caudal turbinado y el caudal que circula por la tubería se pueden identificar.

$$\Delta q = \Delta q_t \qquad (4.4)$$

Dónde:

Δq = Variación del caudal turbinado en valores por unidad

Δq_t = Variación del caudal que circula por la tubería forzada en valores por unidad

⁴ IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 98, nº 6, pp. 2294-2298, 1979.

La mini central, se considera conectada a una red de gran potencia lo que permite suponer que la velocidad de giro de la turbina es impuesta y no varía ($n = 0$). Por tanto la ecuación que gobierna el diagrama de bloques que representa el comportamiento dinámico de la turbina resulta, teniendo en cuenta estas dos apreciaciones se puede concluir que la ecuación que representa el comportamiento de la turbina en un modelo de pequeña perturbación es la siguiente:

$$\Delta h = \frac{1}{b_{11}} \Delta q_i - \frac{b_{13}}{b_{11}} \Delta x \quad (4.5)$$

Partiendo de las curvas características o colinas de rendimiento como las que se muestran en la figura 4.2.1.1 se plantea la determinación de los coeficientes b_{11} y b_{13}

✓ **DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES b_{11} y b_{13}**

Obtención de b_{11}

El coeficiente (b_{11}) en valores por unidad representa la variación de caudal frente a la del salto cuando la velocidad y la posición del distribuidor son constantes:

$$b_{11} = \left(\frac{\partial Q}{\partial H} \right) \frac{H_b}{Q_b} \quad (4.6)$$

Sabiendo que:

$$Q_1 = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H}} \quad N_1 = \frac{N * D}{\sqrt{H}} \quad (4.7)$$

Remplazando la ecuación 4.7 en la ecuación 4.6. Se obtiene.

$$b_{11} = \frac{\partial(Q_1 D^2 \sqrt{H})}{\partial H} \frac{H_b}{Q_b} = (D^2 \sqrt{H} \frac{\partial Q_1}{\partial H} + Q_1 D^2 \frac{\partial \sqrt{H}}{\partial H}) \frac{H_b}{Q_b} = (D^2 \sqrt{H} \frac{\partial Q_1}{\partial H} + \frac{Q_1 D^2}{2\sqrt{H}}) \frac{H_b}{Q_b} \quad (4.8)$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial N_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial N_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial H} \frac{\partial \left(\frac{N^2 D^2}{N_1^2} \right)}{\partial N_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial H} N^2 D^2 \left(-\frac{2}{N_1^3} \right) \quad (4.9)$$

Por lo que:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial H} = -\frac{\partial Q_1}{\partial N_1} \frac{N_1^3}{2N^2 D^2} \quad (4.10)$$

Finalmente se puede escribir:

$$b_{11} = \left(\frac{Q_1 D^2}{2\sqrt{H}} - \frac{N_1^3 \sqrt{H}}{2N^2} \frac{\partial Q_1}{\partial N_1} \right) \frac{H_b}{Q_b} \quad (4.11)$$

La variación de caudal unitario respecto de la velocidad unitaria es la pendiente de la curva de apertura de distribuidor constante, que en el entorno del punto de funcionamiento se considera tramo recto.

Obtención de b_{13}

El coeficiente (b_{13}) representa la variación de caudal frente a la posición del distribuidor, suponiendo el salto y la velocidad del grupo constantes.

$$b_{13} = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right) \frac{X_b}{Q_b} = \frac{\partial (Q_1 D^2 \sqrt{H})}{\partial X} \frac{X_b}{Q_b} = \frac{\partial (Q_1 D^2 \sqrt{H})}{\partial Q_1} \frac{\partial Q}{\partial X} \frac{X_b}{Q_b} \quad (4.12)$$

Lo que resulta:

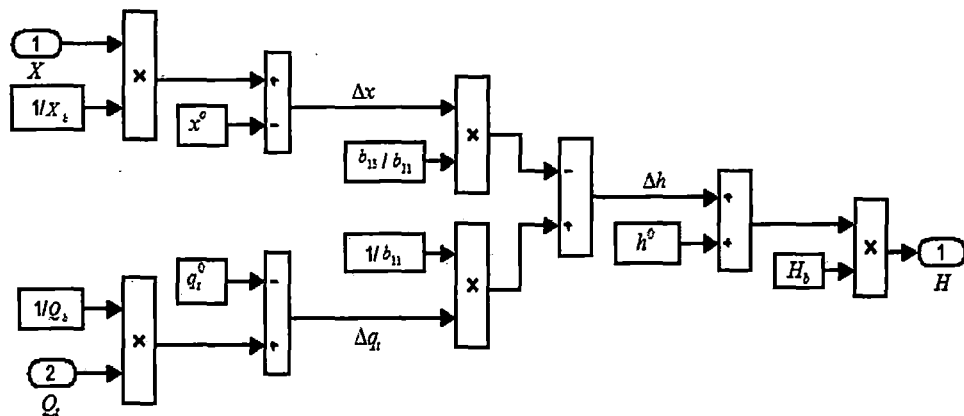
$$b_{13} = D^2 \sqrt{H} \frac{\partial Q_1}{\partial X} \frac{X_b}{Q_b} \quad (4.13)$$

Para calcular la variación de caudal unitario respecto de la apertura del distribuidor se considera que dicha variación mantiene el valor del salto neto

constante. Esto permite obtener dicho valor mediante la pendiente de la curva procedente de las colinas de rendimientos cortadas con el plano de velocidad unitaria (N_1) constante.

El modelo se ha elaborado de modo que las unidades de trabajo estén en valores absolutos, de modo que las variables que sirven de entrada en el bloque de la turbina se deben pasar a valores por unidad. El proceso inverso se realiza con el salto neto turbinado obtenido inicialmente en valores por unidad. En la Figura 4.2.1.2 se recoge el diagrama de bloques resultante que modela la turbina.

Figura 4.2.1.2 Diagrama de bloques del modelo de Turbina



Fuente: Elaboración Propia

Dónde:

X = Posición del distribuidor (mm)

X_b = Posición base del distribuidor (mm)

Q_b = Caudal base (m^3/s)

Δq_t = Variación del caudal que circula por la tubería forzada en valores por unidad

q_t^0 = Caudal inicial que circula por la tubería forzada en valores por unidad

b_{11}, b_{13} = Coeficientes de las expresiones matemáticas de la turbina

Δh = Variación del salto neto en valores por unidad

h^0 = Salto neto inicial en valores por unidad

H = Salto neto (m)

H_b = Salto base (m)

x^0 = Posición del distribuidor inicial en valores por unidad

Δx = Variación de la posición del distribuidor en valores por unidad

4.2.2 TUBERÍA FORZADA

La ecuación que rige el comportamiento de la tubería forzada permite evaluar las pérdidas de carga que se producen a lo largo del conducto. ⁵

$$\frac{L_t}{g \cdot A_t} \frac{dQ_t}{dt} + K_{pt} \cdot |Q_t| \cdot Q_t = Z_c - Z \quad (4.14)$$

Dónde:

L_t = Longitud de la tubería forzada (m)

Q_t = Caudal en la tubería forzada (m³/s)

A_t = Superficie de la tubería forzada (m²)

g = Aceleración de la gravedad (m/s²)

Z_c = Cota de la lámina de agua en la cámara de carga (m.s.n.m)

Z = Cota del salto neto (m.s.n.m)

K_{pt} = Coeficiente de pérdidas en la tubería forzada

El coeficiente que cuantifica las pérdidas (K_{pt}) se obtiene utilizando la fórmula de Manning que aplicada a secciones circulares resulta:

$$K_{pt} = \frac{10.29(n_t)^2}{(D_t)^{5.333}} L_t \quad (4.15)$$

⁵ Guillermo Martínez de Lucas. *Ajuste de Reguladores de Velocidad de Grupos Hidroeléctricos en redes aisladas*

Dónde:

K_{pt} = Coeficiente de pérdidas en la tubería forzada

n_t = Número de Manning de la tubería forzada

D_t = Diámetro de la tubería forzada (m)

L_t = Longitud de la tubería forzada (m)

Para simplificar la expresión se determina el parámetro (F_t):

$$F_t = \frac{L_t}{g \cdot A_t} \quad (4.16)$$

Dónde:

F_t = Constante de la tubería forzada (m^2/s^2)

A_t = Superficie de la tubería forzada (m^2)

L_t = Longitud de la tubería forzada (m)

g = Aceleración de la gravedad (m/s^2)

La diferencia de cotas o de presión entre los dos extremos de la tubería forzada son las entradas en el bloque. Es necesario añadir la cota de la descarga (Z_{desc}) al salto neto (H) para trabajar en cotas absolutas y poder compararla con la cota de la cámara de carga (Z_c).

La cota de descarga es un dato de referencia que se mantiene constante independientemente del punto de operación de la mini central. En el caso de que la cota varíe en distintas situaciones de funcionamiento se incluyen dichas variaciones en las pérdidas de la turbina.

$$Z_c = H_c + Z_{desc} \quad Z = H + Z_{desc} \quad (4.17)$$

Remplazando la ecuación 4.17 en la ecuación 4.14 se obtiene:

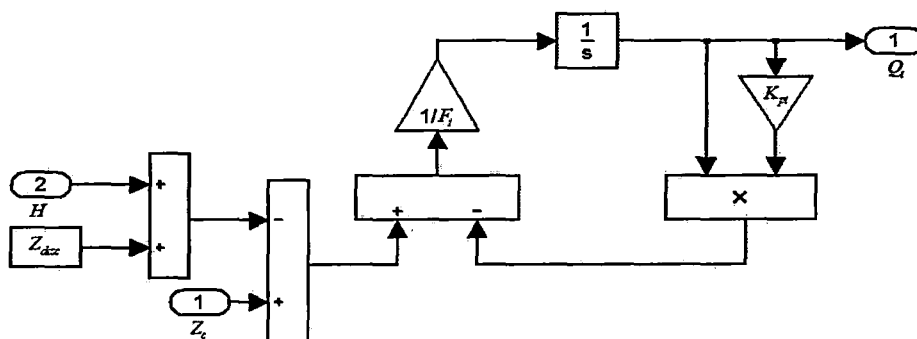
$$\frac{dQ_t}{dt} = [Z_c - (H + Z_{desc})] \frac{1}{F_t} - \frac{K_{pt}}{F_t} \cdot |Q_t| \cdot Q_t \quad (4.18)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación se obtiene:

$$Q_t = \frac{1}{S \cdot F_t} [Z_c - (H + Z_{desc})] - \frac{K_{pt}}{S \cdot F_t} \cdot |Q_t| \cdot Q_t \quad (4.19)$$

De esta forma la ecuación resultante (4.19) se modela en el diagrama de bloques de la Figura 4.2.2.1

Figura 4.2.2.1 Diagrama de bloques del modelo de Tubería forzada



Fuente: Elaboración Propia

Dónde:

Z_c = Cota de la lámina de agua en la cámara de carga (m.s.n.m)

Z_{desc} = Cota del nivel de la descarga (m.s.n.m)

Q_t = Caudal que circula por la tubería forzada (m³/s)

F_t = Constante de la tubería forzada (m²/s²)

K_{pt} = Coeficiente de pérdidas en la tubería forzada

H = Salto neto (m)

4.2.3 CÁMARA DE CARGA

La cámara de carga que remansa y almacena parcialmente el agua procedente del canal. Una vez que pierde velocidad puede pasar a la tubería

forzada cuya captación se encuentra en la cámara de carga. Lo cual dispondrá de un aliviadero para vaciar el caudal en caso de emergencia o de parada de la mini central, pero en circunstancias normales de funcionamiento se considera que el caudal vaciado por el aliviadero es nulo ($Q_w = 0$). Por lo tanto, la variación de la cota del agua en la cámara de carga (Z_c) responde a la siguiente ecuación:

$$A_c \frac{dZ_c}{dt} = Q_r - Q_t \quad (4.20)$$

Dónde:

A_c = Superficie de la cámara de carga (m^2)

Dado que el presente modelo está concebido para funcionar en pequeña perturbación, se considera que alrededor de la cota inicial de equilibrio del agua en la cámara de carga y la superficie sean constantes.

El diagrama de bloques tiene como entradas la diferencia existente entre el caudal entrante a la cámara de carga procedente del río (Q_r) y el caudal captado por la tubería forzada (Q_t).

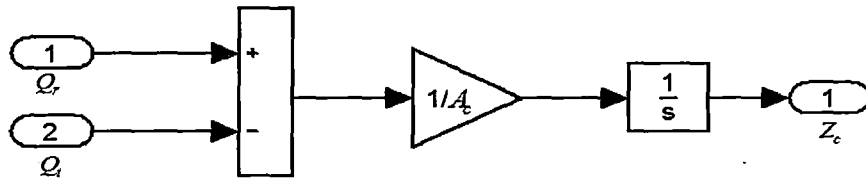
$$\frac{dZ_c}{dt} = (Q_r - Q_t) \frac{1}{A_c} \quad (4.21)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la expresión se obtiene:

$$Z_c = (Q_r - Q_t) \frac{1}{A_c} \frac{1}{s} \quad (4.22)$$

La siguiente figura muestra el diagrama de bloques que modela la expresión final que representa el comportamiento dinámico de la cámara de carga.

Figura 4.2.3.1 Diagrama de bloques del modelo de la Cámara de carga



Fuente: Elaboración Propia

Dónde:

Z_c = Cota de la lámina de agua en la cámara de carga (m.s.n.m)

A_c = Superficie de la cámara de carga (m^2)

Q_i = Caudal que circula por la tubería forzada (m^3/s)

Q_r = Caudal que aporta el río a la cámara de carga (m^3/s)

4.2.4 CONTROLADOR PI

El funcionamiento del controlador PI se basa en modificar la consigna de apertura del distribuidor (X) partiendo de la diferencia entre la cota del agua en la cámara (Z_c) y la cota deseada denominada de referencia (Z_{ref}).

Además es el que mejor se adapta a las necesidades del modelo. La componente o ganancia proporcional (k) determina la rapidez de la acción controladora. La ganancia integradora (T_i) elimina el error entre el valor medido y el de referencia.

La ecuación matemática que gobierna este tipo de controladores se muestra a continuación.

$$X = X^o + (k + \frac{1}{T_i} \int dt)(Z_c - Z_{ref}) \quad (4.23)$$

O bien

$$\frac{dX}{dt} = \frac{Z_c - Z_{ref}}{T_i} + k \frac{d(Z_c - Z_{ref})}{dt} \quad (4.24)$$

De la ecuación resultante (4.24) con saltos relativos se obtiene utilizando.

$$Z_{ref} = H_{ref} + Z_{desc} \quad (4.25)$$

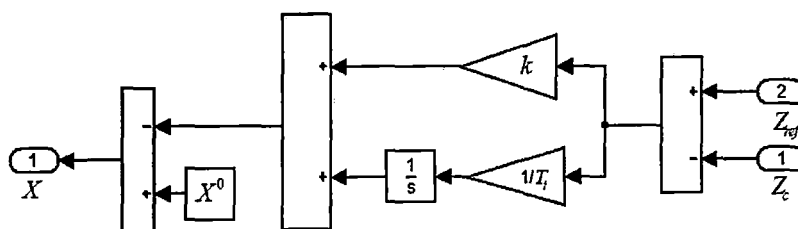
$$\frac{dX}{dt} = \frac{H_c - H_{ref}}{T_i} + k \frac{d(H_c - H_{ref})}{dt} \quad (4.26)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 4.23 se obtiene:

$$X = X^0 - \left[\frac{1}{s} \frac{(Z_c - Z_{ref})}{T_i} + k(Z_c - Z_{ref}) \right] \quad (4.27)$$

El diagrama de bloques que modela el controlador PI se muestra en la siguiente figura:

Figura 4.2.4.1 Diagrama de bloques del Controlador PI



Fuente: Elaboración Propia

Dónde:

Z_c = Cota de la lámina de agua en cámara de carga (m.s.n.m)

Z_{ref} = Cota de referencia de la lámina de agua en la cámara de carga (m.s.n.m)

X = Posición del distribuidor (mm)

X^0 = Posición del distribuidor inicial (mm)

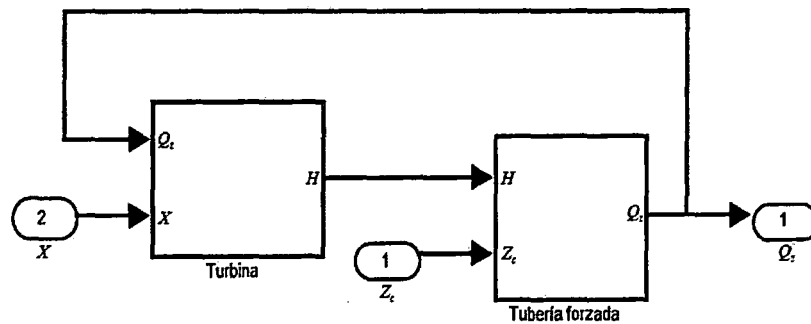
k = Ganancia proporcional del controlador PI

T_i = Ganancia del integrador del controlador PI

4.2.5 MODELO TURBINA – TUBERÍA FORZADA

La turbina y la tubería se engloban en un mismo bloque que se muestra en la Figura 4.2.5.1 Las variables de entrada en el diagrama son la posición del distribuidor (X) y la cota de la lámina de agua en la cámara de carga (Z_c), se crea una variable interna (H), el salto neto turbinado, procedente de la turbina. La variable de salida del bloque es el caudal (Q_t), caudal que circula por la tubería forzada y que se identifica con el caudal turbinado.

Figura 4.2.5.1 Diagrama de bloques del conjunto Turbina - Tubería forzada



Fuente: Elaboración Propia

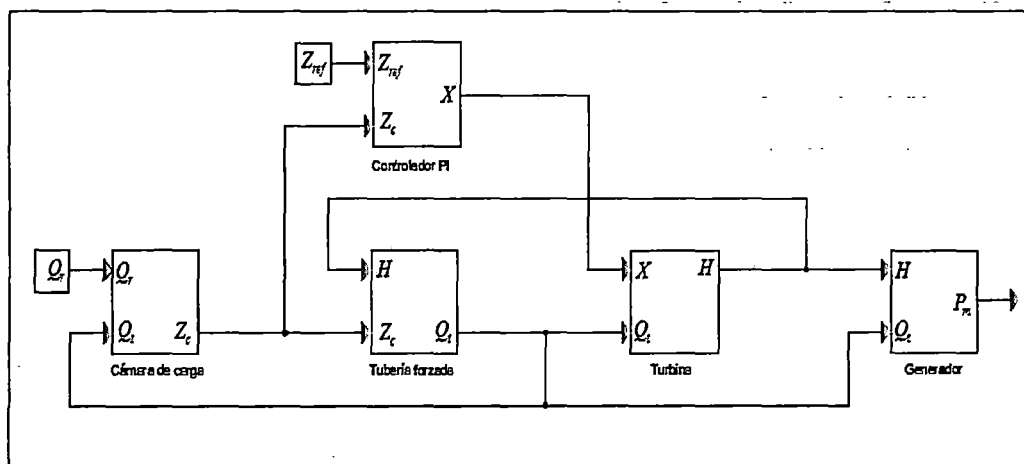
4.2.6 MODELO COMPLETO DE LA MINI CENTRAL

La representación de la mini central se efectúa mediante diagramas de bloques interconectados. Las variables de entrada al sistema compuesto por los bloques son por un lado el caudal aportado por el río y por otro el nivel de referencia que se determina como constante en la cámara de carga.

Para simplificar su estudio y elaboración se divide el modelo inicial en tres bloques independientes. La turbina y la tubería forzada que mantienen dinámicas similares se agrupan en el bloque Turbina-tubería forzada, cámara de carga y el controlador PI.

La labor del controlador es la determinación de la posición del distribuidor de la turbina para mantener el nivel constante en la cámara de carga, esto lo realiza un controlador PI.

Figura 4.2.6.1 Diagrama de bloques del modelo completo de la mini central



Fuente: Elaboración Propia

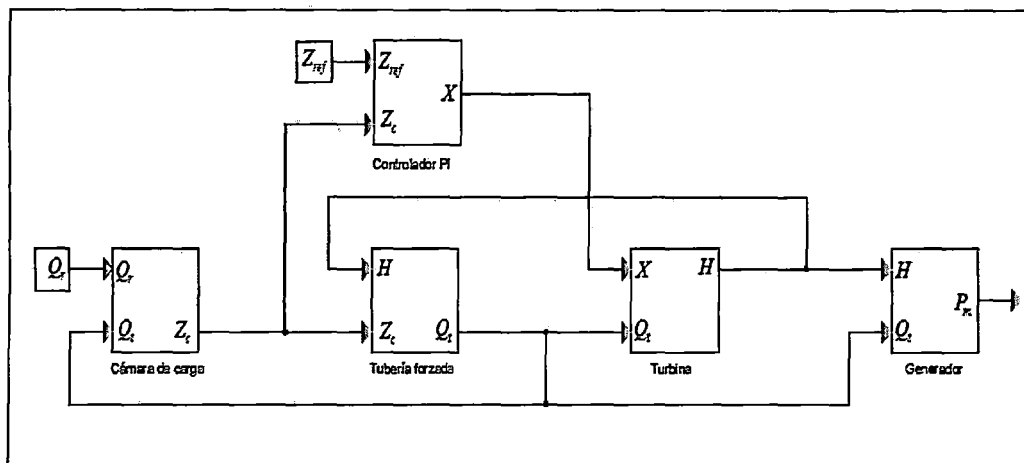
4.3 MODELO LINEAL

En este caso para facilitar el desarrollo del análisis de la estabilidad de la mini central, se plantea las condiciones de funcionamiento de la mini central que enmarcan el alcance de las simulaciones y los resultados a obtener, son pequeñas variaciones de las condiciones iniciales de equilibrio a partir de la modificación de las variables de entrada del modelo. Por ello se confecciona, a partir del denominado modelo completo un modelo lineal que simplifica la formulación de las ecuaciones que rigen cada componente de la mini central a partir de su linealización.

La estabilidad de la mini central viene determinada de una forma importante por la acción controladora. Es decir, el estudio de la estabilidad se centra en comprobar, aparte de cómo influyen los distintos componentes de la mini central en su estabilidad, qué tendencias produce sobre la dinámica de toda la mini central las ganancias con las que se sintoniza el controlador.

El modelo lineal, comprende los elementos de la mini central cuya dinámica intervienen en la estabilidad de la mini central. El diagrama de bloques del modelo lineal se muestra en la siguiente figura.

Figura 4.2.6.1 Diagrama de bloques del modelo lineal de la mini central



Fuente: Elaboración Propia

Aunque el modelo completo tenga como una de la hipótesis de partida que la mini central esté conectada a una red de gran potencia ($N = cte$) en la linealización y el posterior estudio de la estabilidad, se incluye la variación de la velocidad del grupo como uno de los posibles cambios que pueden sufrir las variables de entrada.

A continuación se recogen las ecuaciones que permiten simular los componentes de la mini central. Inicialmente son cuatro ecuaciones pero la tubería forzada y la turbina se asocian en una misma expresión, de forma que el sistema resultante es de tercer orden.

Turbina

$$\Delta q = b_{11}\Delta h + b_{12}\Delta n + b_{13}\Delta x \quad (4.28)$$

Tubería forzada

$$\frac{L_t}{g \cdot A_t} \frac{dQ_t}{dt} + K_{pt} |Q_t| \cdot Q_t = H_c - H \quad (4.29)$$

Cámara de carga

$$A_c \frac{dZ_c}{dt} = Q_r - Q_t \quad (4.30)$$

Controlador PI

$$\frac{dX}{dt} = \frac{H_c - H_{ref}}{T_i} + k \frac{d(H_c - H_{ref})}{dt} \quad (4.31)$$

La linealización de sistema de ecuaciones se realiza utilizando valores por unidad. Cada variable se descompone en su suma, variable de estado inicial y variación de la variable de entrada.

Las variables de estado son aquellas cuya evolución temporal se obtiene de cada bloque. Para el modelo de tercer orden, son tres las variables de estado: caudal que circula por la tubería, cota del agua en la cámara de carga y posición del distribuidor.

Las variables de entrada representan las modificaciones de las condiciones iniciales de equilibrio. En el presente modelo se considera que puede variar el caudal procedente del río, el nivel de referencia al que debe permanecer la cota del agua en la cámara de carga y la velocidad de giro de la mini central

VARIABLES DE ESTADO

$$Q_t = Q_b(q_t^o + \Delta q_t) \quad (4.32)$$

$$H_c = H_b(h_c^o + \Delta h_c) \quad (4.33)$$

$$X = X_b(x^o + \Delta x) \quad (4.34)$$

VARIABLES DE ENTRADA

$$Q_r = Q_b(q_r^o + \Delta q_r) \quad (4.35)$$

$$H_{ref} = H_b(h_{ref}^o + \Delta h_{ref}) \quad (4.36)$$

$$N = N_b(n^o + \Delta n) \quad (4.37)$$

4.3.1 ECUACIÓN DEL SUBSISTEMA TURBINA – TUBERÍA FORZADA

El comportamiento del fluido en la tubería forzada entre el elemento almacenador y la turbina se refleja en la ecuación (4.29). Aplicando los valores por unidad dicha ecuación se transforma en:

$$\frac{L_t}{g \cdot A_t} \frac{d[Q_b(q_t^o + \Delta q_t)]}{dt} + K_{pt} \cdot |Q_b(q_t^o + \Delta q_t)| \cdot Q_b(q_t^o + \Delta q_t) = H_b(h_c^o + \Delta h_c) - H_b(h^o + \Delta h) \quad (4.38)$$

En condiciones iniciales de equilibrio:

$$\frac{d[q_t^o]}{dt} = 0 \quad (4.39)$$

Si analizamos en pequeña perturbación se puede despreciar los términos de segundo orden como q_t^2 , por lo que la expresión resulta:

$$\frac{L_t Q_b}{g \cdot A_t} \frac{d\Delta q_t}{dt} + K_{pt} \cdot Q_b^2 (q_t^{o2} + 2\Delta q_t q_t^o + \Delta q_t^2) = H_b h_c^o + H_b \Delta h_c - H_b h^o - H_b \Delta h \quad (4.40)$$

$$\frac{L_t Q_b}{g \cdot A_t} \frac{d\Delta q_t}{dt} + K_{pt} \cdot Q_b^2 q_t^{o2} + 2K_{pt} \cdot Q_b^2 q_t^o \Delta q_t = H_b (h_c^o - h^o) + H_b (\Delta h_c - \Delta h) \quad (4.41)$$

Las condiciones iniciales implican:

$$K_{pt} \cdot Q_t^2 q_t^{\circ 2} = H_b (h_c^{\circ} - h^{\circ}) \quad (4.42)$$

Lo que lleva a expresar la ecuación de la tubería forzada de la siguiente forma:

$$\frac{L_t Q_b}{g \cdot A_t} \frac{d\Delta q_t}{dt} + 2K_{pt} \cdot Q_b^2 q_t^{\circ} \Delta q_t = H_b (\Delta h_c - \Delta h) \quad (4.43)$$

Denominando:

$$T_w = \frac{L_t Q_b}{g \cdot A_t H_b} \quad p = \frac{K_{pt} \cdot Q_b^2}{H_b} \quad (4.44)$$

La expresión linealizada de la tubería forzada obtenida es:

$$\frac{d\Delta q_t}{dt} = -\frac{2p q_t^{\circ}}{T_w} \Delta q_t + \frac{1}{T_w} \Delta h_c - \frac{1}{T_w} \Delta h \quad (4.45)$$

Si se despeja el valor de (Δh) de la expresión (4.28), procedente de la linealización de las expresiones genéricas que corresponden a la colina de rendimientos de la turbina:

$$\Delta h = \frac{1}{b_{11}} \Delta q - \frac{b_{12}}{b_{11}} \Delta n - \frac{b_{13}}{b_{11}} \Delta x \quad (4.46)$$

Y considerando que se pueden identificar el caudal turbinado y el caudal que circula por la tubería forzada, se tiene:

$$\Delta q = \Delta q_t \quad (4.47)$$

Se obtiene la expresión linealizada de la turbina - tubería forzada:

$$\frac{d\Delta q_t}{dt} = -\frac{2p q_t^{\circ}}{T_w} \Delta q_t + \frac{1}{T_w} \Delta h_c - \frac{1}{T_w} \left(\frac{1}{b_{11}} \Delta q_t - \frac{b_{12}}{b_{11}} \Delta n - \frac{b_{13}}{b_{11}} \Delta x \right) \quad (4.48)$$

$$\frac{d\Delta q_t}{dt} = -\left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2p q_t^o}{T_w}\right)\Delta q_t + \frac{1}{T_w}\Delta h_c + \frac{b_{13}}{T_w b_{11}}\Delta x + \frac{b_{12}}{T_w b_{11}}\Delta n \quad (4.49)$$

Cuando la mini central está conectada a una red de gran potencia $N=\text{cte}$, por consiguiente la variación de velocidad de giro es cero $\Delta n=0$

$$\frac{d\Delta q_t}{dt} = -\left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2p q_t^o}{T_w}\right)\Delta q_t + \frac{1}{T_w}\Delta h_c + \frac{b_{13}}{T_w b_{11}}\Delta x \quad (4.50)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la expresión se obtiene:

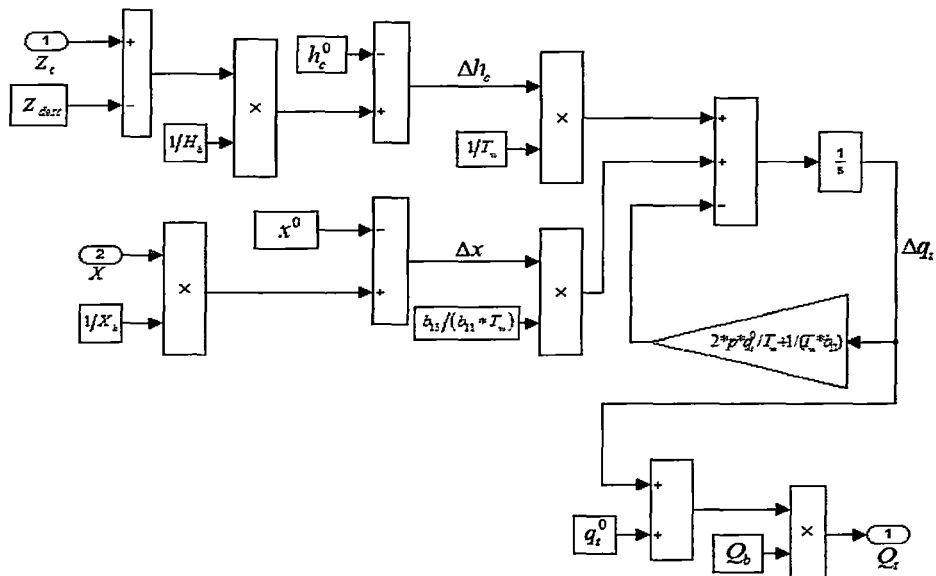
$$\Delta q_t = -\frac{1}{S}\left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2p q_t^o}{T_w}\right)\Delta q_t + \frac{1}{T_w}\Delta h_c + \frac{b_{13}}{T_w b_{11}}\Delta x \quad (4.51)$$

El parámetro (T_w) o tiempo de arranque del agua se trata de un elemento almacenador de energía cinética pero en este caso en la tubería forzada. Representa el tiempo necesario para acelerar sin rozamiento la masa del fluido contenido en la tubería forzada desde el reposo hasta el caudal (Q_b) sometida a la altura (H_b).

El parámetro (p) representa las pérdidas unitarias por rozamiento que se producen en la tubería forzada.

En la siguiente figura se muestra el diagrama de bloques que modela la expresión (4.51). Dado que el diagrama representa la misma mini central que la modelada en el modelo completo, no se incluye la variación de la velocidad del grupo (n) en el diagrama.

Figura 4.3.1.1 Diagrama de bloques del modelo lineal del sub sistema Turbina-Tubería forzada



Fuente: Elaboración Propia

Dónde:

X = Posición del distribuidor (mm)

X_b = Posición base del distribuidor (mm)

Q_b = Caudal base (m³/s)

Q_t = Caudal que circula por la tubería forzada (m³/s)

Δq_t = Variación del caudal que circula por la tubería forzada en valores por unidad

q_t^0 = Caudal inicial que circula por la tubería forzada en valores por unidad (m³/s)

b_{11}, b_{13} = Coeficientes de las expresiones matemáticas de la turbina

Δh_c = Variación del salto bruto en la cámara de carga en valores por unidad

h_c^0 = Altura de referencia inicial en la cámara de carga con relación a la cota de descarga (Z_{desc}) en valores por unidad

H_b = Salto neto base (m)

x^0 = Posición del distribuidor inicial en valores por unidad

Δx = Variación de la posición del distribuidor en valores por unidad

T_w = Constante de tiempo del agua en la tubería forzada (s)

p = Coeficiente de pérdidas en la tubería forzada

Z_c = Cota de la lámina de agua en la cámara de carga (m.s.n.m)

Z_{desc} = Cota del nivel de la descarga (m.s.n.m)

4.3.2 ECUACIÓN DE LA CÁMARA DE CARGA

Introduciendo las variables de estado y las variables de entrada en la ecuación (4.30) resulta:

$$A_c \frac{d[H_b(h_c^o + \Delta h_c)]}{dt} = Q_b(q_r^o + \Delta q_r) - Q_b(q_i^o + \Delta q_i) \quad (4.52)$$

$$A_c H_b \frac{dh_c^o}{dt} + A_c H_b \frac{d\Delta h_c}{dt} = Q_b q_r^o - Q_b q_i^o + Q_b \Delta q_r - Q_b \Delta q_i \quad (4.53)$$

Sabiendo que en la situación inicial se cumple:

$$A_c H_b \frac{dh_c^o}{dt} = Q_b q_r^o - Q_b q_i^o \quad (4.54)$$

La ecuación puede escribirse:

$$A_c H_b \frac{d\Delta h_c}{dt} = Q_b \Delta q_r - Q_b \Delta q_i \quad (4.55)$$

Si se denomina:

$$T_c = \frac{A_c H_b}{Q_b} \quad (4.56)$$

El parámetro (T_c), constante de tiempo en la cámara de carga, se conoce como el tiempo de llenado del componente almacenador. Representa el tiempo necesario para elevar la cota del agua en la cámara de carga a una altura (H_b) con un caudal (Q_b).

Se obtiene la expresión linealizada que gobierna el elemento almacenador de la mini central:

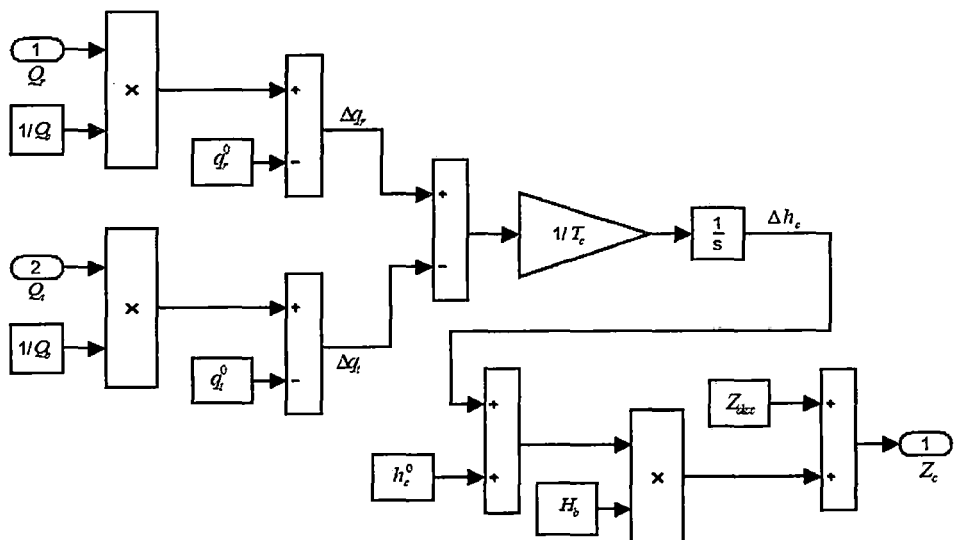
$$\frac{d\Delta h_c}{dt} = -\frac{1}{T_c} \Delta q_t + \frac{1}{T_c} \Delta q_r \quad (4.57)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la expresión resulta:

$$\Delta h_c = \frac{1}{S} \frac{1}{T_c} (\Delta q_r - \Delta q_t) \quad (4.58)$$

La dinámica de la cámara de carga linealizada se muestra en el siguiente diagrama de bloques.

Figura 4.3.2.1 Diagrama de bloques del modelo lineal de la Cámara de carga



Fuente: Elaboración Propia

4.3.3 ECUACIÓN DEL CONTROLADOR DE NIVEL

Introduciendo las variables de estado y las variables de entrada en la ecuación (4.31) resulta:

$$\frac{d[X_b(x^o + \Delta x)]}{dt} = \frac{H_b(h_c^o + \Delta h_c) - H_b(h_{ref}^o + \Delta h_{ref})}{T_i} + k \frac{d[H_b(h_c^o + \Delta h_c) - H_b(h_{ref}^o + \Delta h_{ref})]}{dt} \quad (4.59)$$

$$X_b \frac{dx^o}{dt} + X_b \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{H_b}{T_i} (h_c^o + \Delta h_c) - \frac{H_b}{T_i} (h_{ref}^o + \Delta h_{ref}) + kH_b \frac{d(h_c^o + \Delta h_c)}{dt} - kH_b \frac{d(h_{ref}^o + \Delta h_{ref})}{dt} \quad (4.60)$$

$$X_b \frac{dx^o}{dt} + X_b \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{H_b}{T_i} (h_c^o - h_{ref}^o) + \frac{H_b}{T_i} (\Delta h_c - \Delta h_{ref}) + kH_b \frac{d(h_c^o - h_{ref}^o)}{dt} + kH_b \frac{d(\Delta h_c - \Delta h_{ref})}{dt} \quad (4.61)$$

De las condiciones iniciales se desprende:

$$h_c^o - h_{ref}^o = 0 \quad \frac{dx^o}{dt} = 0 \quad (4.62)$$

Por otro lado, se supone que el valor de referencia del controlador varía únicamente por escalones y no de una forma continua, por lo que puede escribirse:

$$\frac{d\Delta h_{ref}}{dt} = 0 \quad (4.63)$$

Reemplazando en la ecuación (4.61) las condiciones iniciales, por lo tanto la expresión linealizada del controlador resulta:

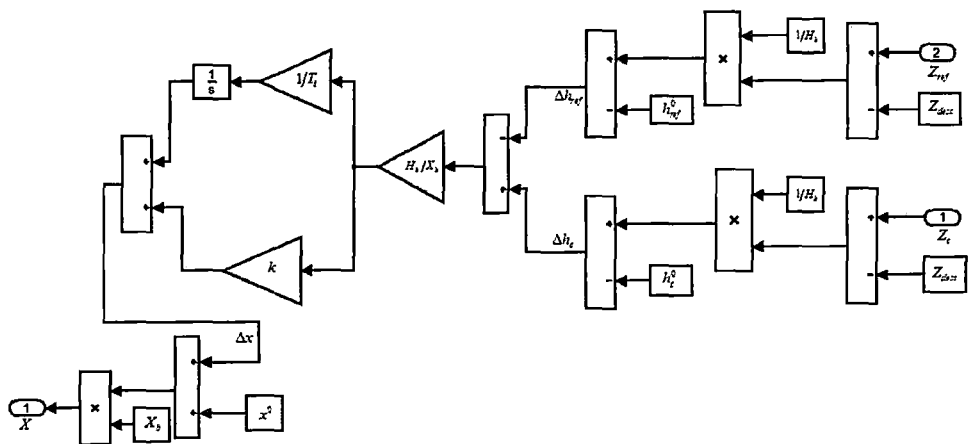
$$X_b \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{H_b}{T_i} (\Delta h_c - \Delta h_{ref}) + kH_b \frac{d(\Delta h_c - \Delta h_{ref})}{dt} \quad (4.64)$$

Aplicando la transformada de Laplace se tiene:

$$\Delta x = \frac{H_b}{X_b} \left[\frac{1}{S} \frac{(\Delta h_c - \Delta h_{ref})}{T_i} + k(\Delta h_c - \Delta h_{ref}) \right] \quad (4.65)$$

En la siguiente figura que refleja el diagrama de bloques, se aprecia cómo influye el vaciado en el controlador. La diferencia de caudales determina la acción proporcional mientras que el error entre las cotas de referencia y del agua en la cámara de carga, la acción integradora.

Figura 4.3.3.1 Diagrama de bloques del modelo lineal del Controlador PI



Fuente: Elaboración Propia

Dónde:

Z_c = Cota de la lámina de agua en cámara de carga (m.s.n.m)

Z_{ref} = Cota de referencia de la lámina de agua en la cámara de carga (m.s.n.m)

Z_{desc} = Cota del nivel de la descarga (m.s.n.m)

Δh_c = Variación del salto bruto en la cámara de carga en valores por unidad

h_c^0 = Altura de referencia inicial en la cámara de carga con relación a la cota de descarga (Z_{desc}) en valores por unidad

H_b = Salto base (m)

Δh_{ref} = Variación de la altura de referencia inicial en la cámara de carga con relación a cota de descarga (Z_{desc}) en valores por unidad

h_{ref}^0 = Salto bruto inicial en la cámara de carga en valores por unidad

Δx = Variación de la posición del distribuidor en valores por unidad

x^0 = Posición del distribuidor inicial en valores por unidad

X = Posición del distribuidor (mm)

X_b = Posición base del distribuidor (mm)

k = Ganancia proporcional del controlador PI

T_i = Ganancia del integrador del controlador PI

También podemos expresar en función de las variables de entrada, para lo cual remplazamos la ecuación linealizada de la cámara de carga en la ecuación (4.64)

$$X_b \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{H_b}{T_i} (\Delta h_c - \Delta h_{ref}) + kH_b \left(-\frac{1}{T_c} \Delta q_t + \frac{1}{T_c} \Delta q_r \right) \quad (4.66)$$

Denominando:

$$\alpha = \frac{kH_b}{X_b} \quad \beta = \frac{X_b T_i}{H_b} \quad (4.67)$$

Se obtiene la expresión linealizada definitiva del controlador de nivel:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = -\frac{\alpha}{T_c} \Delta q_t + \frac{1}{\beta} \Delta h_c - \frac{1}{\beta} \Delta h_{ref} + \frac{\alpha}{T_c} \Delta q_r \quad (4.68)$$

4.4 EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL MODELO COMPLETO Y LINEAL DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA

4.4.1 DATOS DE LA MINI CENTRAL

En la siguiente tabla se recogen los valores numéricos de la mini central hidroeléctrica de Aobamba. Se incluye las constantes temporales de pérdidas que han sido definidas durante la linealización de las ecuaciones procedentes del modelo completo.

CARACTERÍSTICA DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA

DATOS:

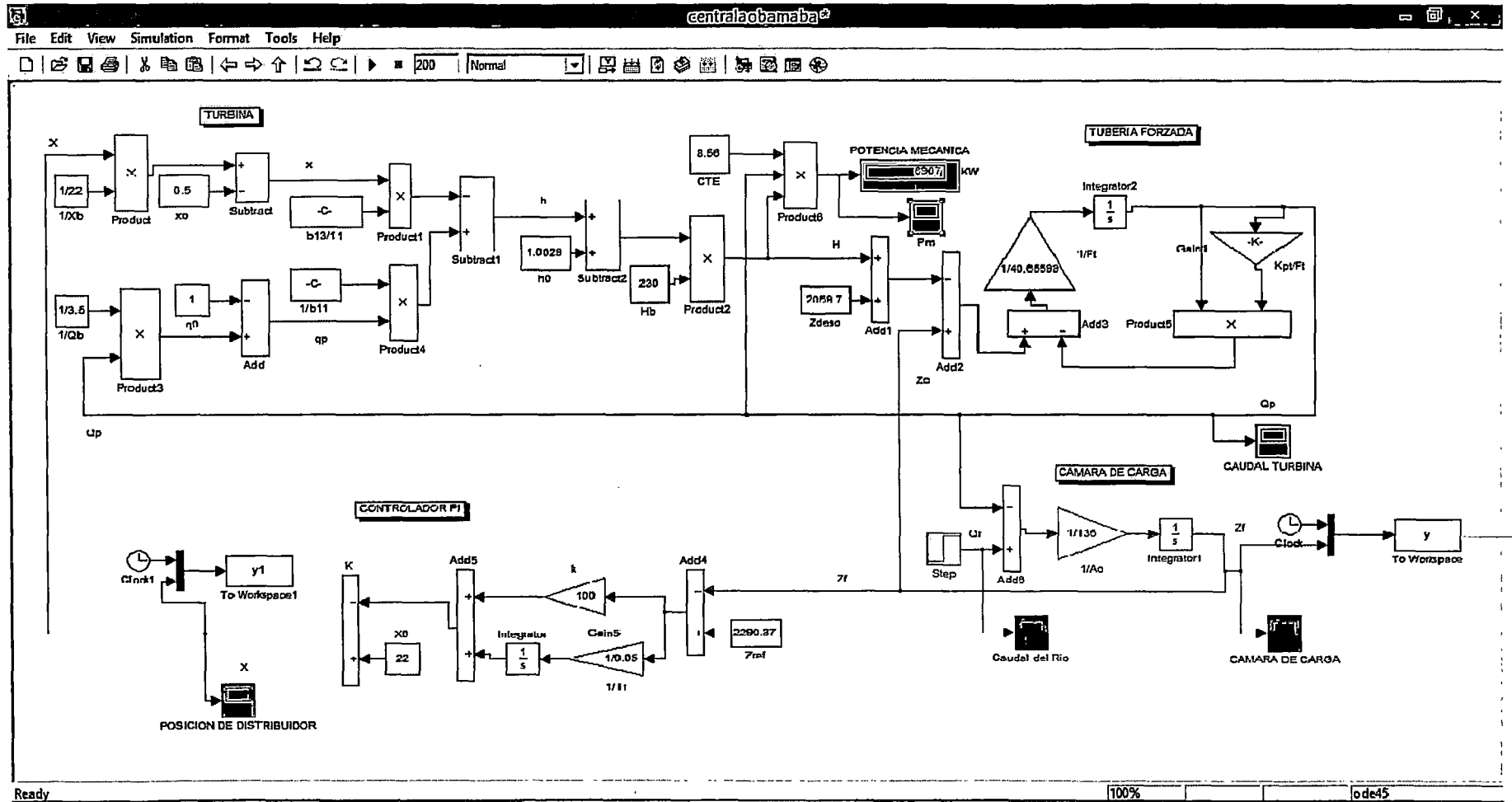
Tabla 4.4.1.1 Valores numéricos

Nivel normal cámara de carga (m.s.n.m)	2,297.50
Nivel descarga casa de máquinas (m.s.n.m)	2,059.70
H _B : Altura bruta (m)	237.8
H _N : Altura neta (m)	230.67
Q: Caudal diseño (m ³ /s)	3.5
Pérdida de Carga (m) (3% H _B)	7.13
Longitud tubería (m)	345
Pendiente (S)	0.0207
η: Maninnig (asumiendo que incluye pérdidas menores)	0.013
Tipo de Turbina	Francis eje vertical
Nº de Unidades	1.00
Velocidad de Rotación (n)	900 rpm
η _r : Eficiencia Turbina	0.9
η _g : Eficiencia generador	0.98
Diámetro turbina (m)	1.00
Potencia Instalada (Mw) P = 8.56 QH	6.92 ≈ 7.0

Fuente: Estudio de factibilidad del proyecto: Aprovechamiento de los recursos hídricos de la quebrada de Aobamba para la central hidroeléctrica de Machupicchu

SIMULACIÓN: MODELO COMPLETO DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA

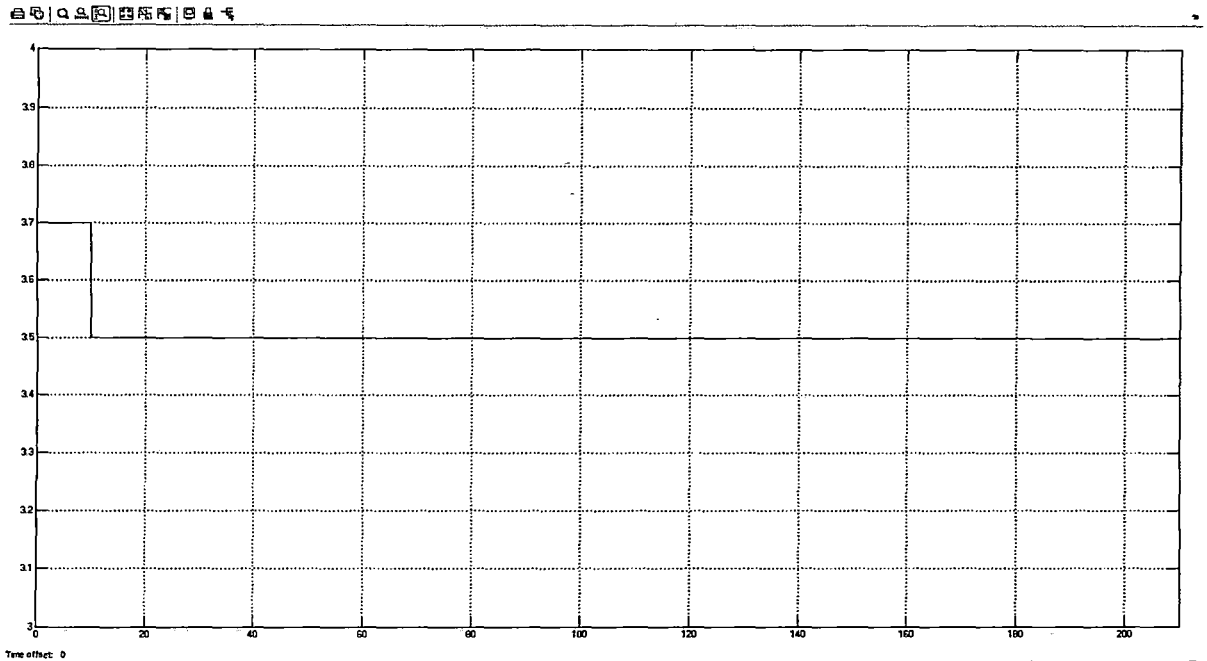
Figura 4.4.1.1 Simulación del modelo completo de la mini central hidroeléctrica de Aobamba



Fuente: Elaboración Propia en el programa Matlab.

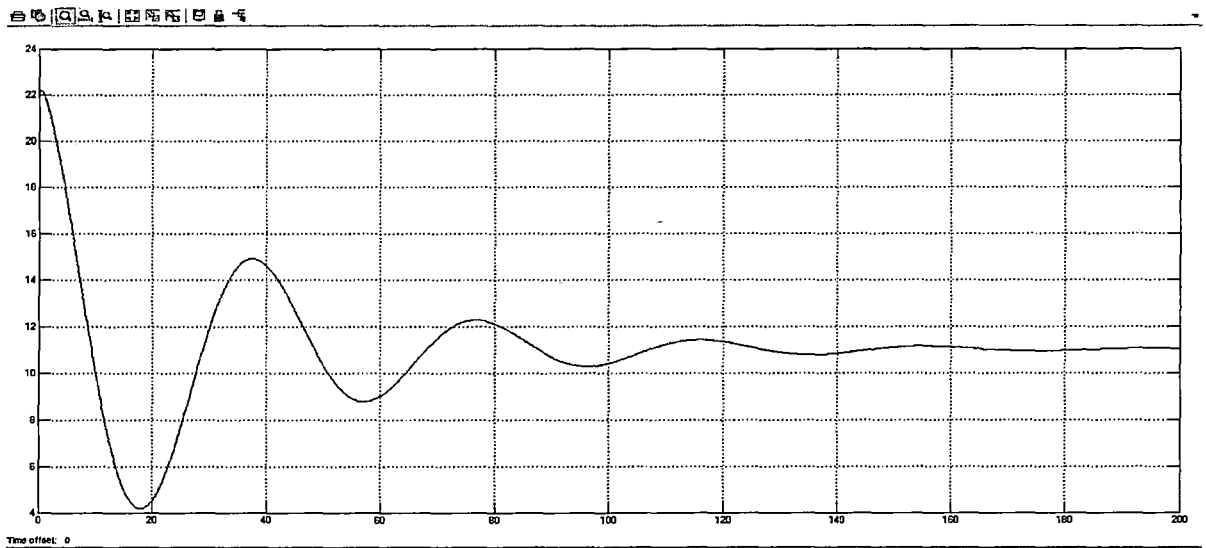
✓ CAUDAL DEL RIO DE AOBAMBA

Figura 4.4.1.2 Simulación del rio de Aobamba



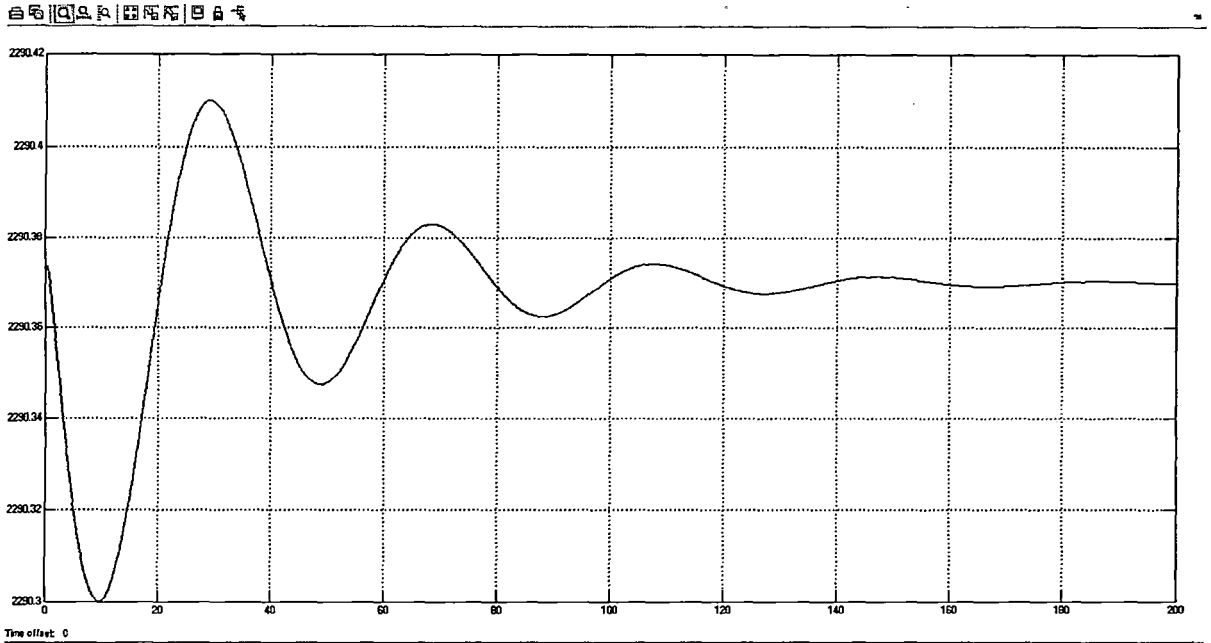
✓ NIVEL DEL DISTRIBUIDOR DE LA MINI CENTRAL DE AOBAMBA

Figura 4.4.1.3 Simulación. Posición del distribuidor



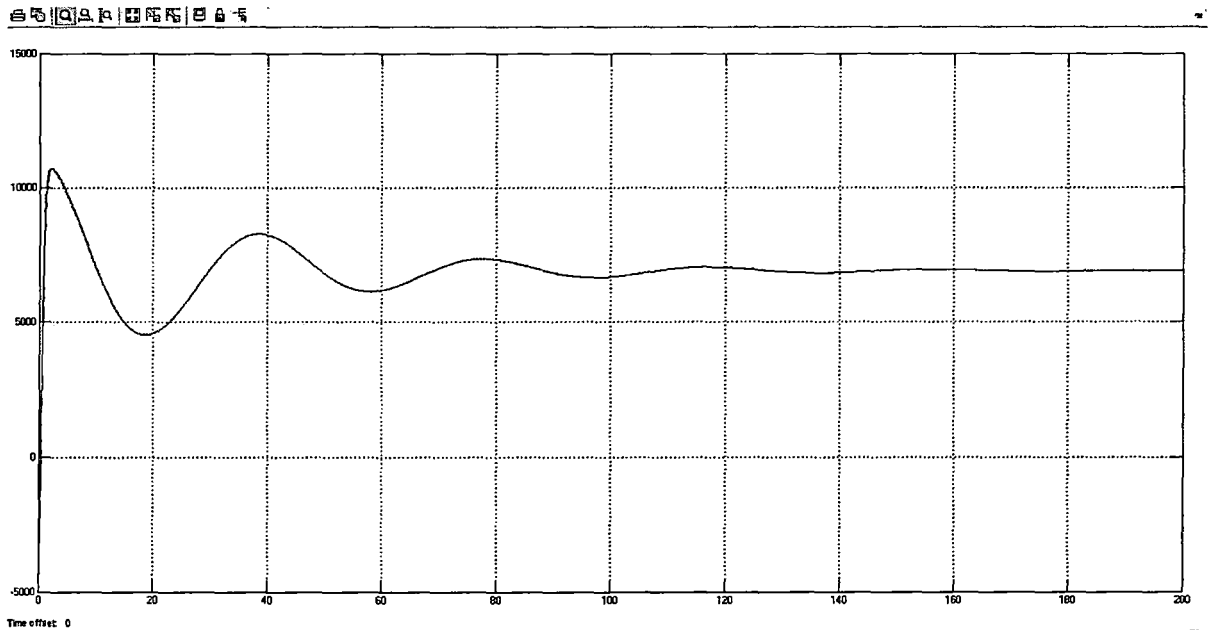
✓ POSICIÓN DEL NIVEL DEL AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA

Figura 4.4.1.4 Simulación. Posición del nivel de agua en la Cámara de carga



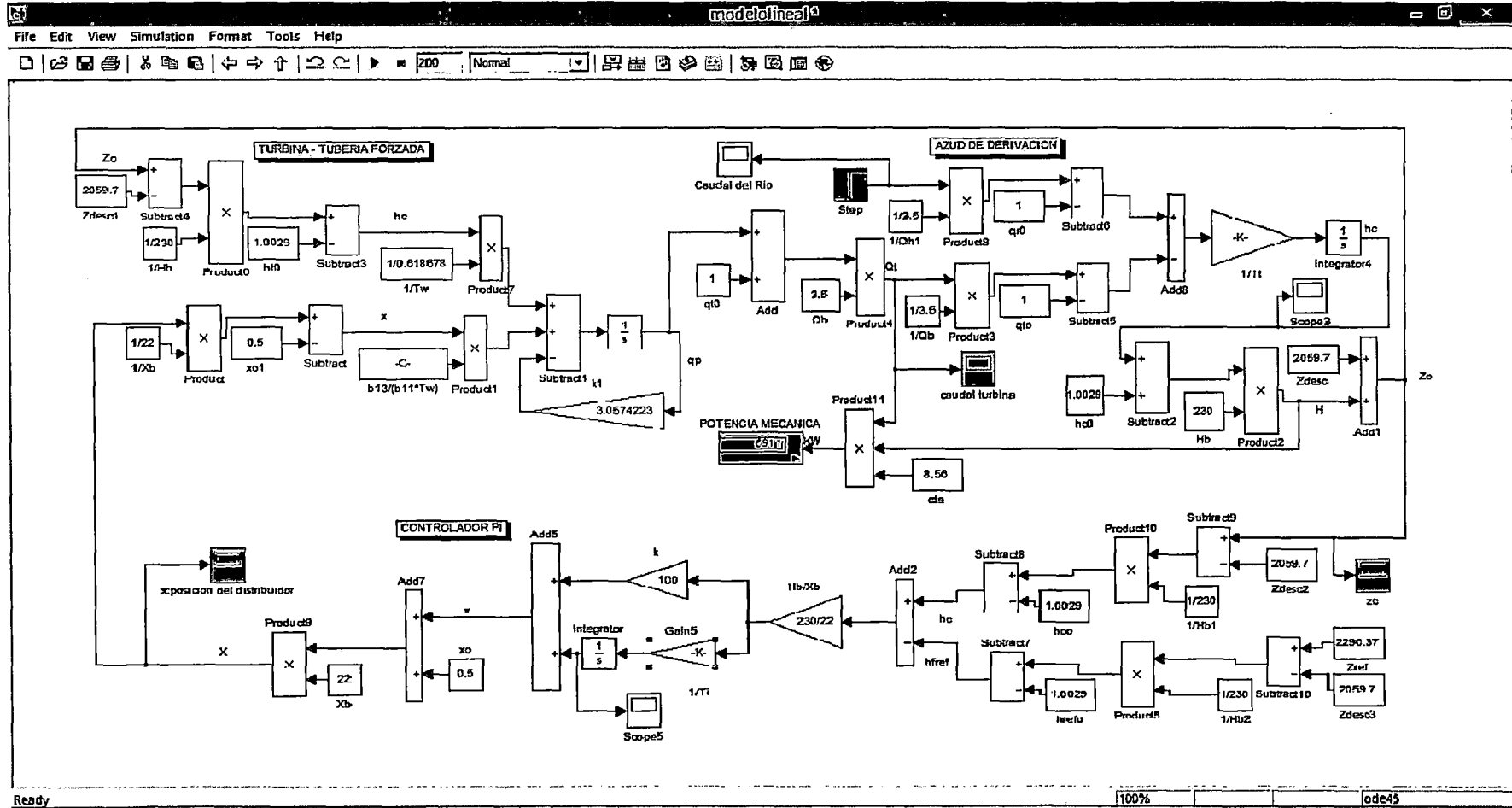
✓ POTENCIA MECÁNICA

Figura 4.4.1.5 Simulación. Potencia mecánica



MODELO LINEAL DE LA MINI CENTRAL DE AOBAMBA

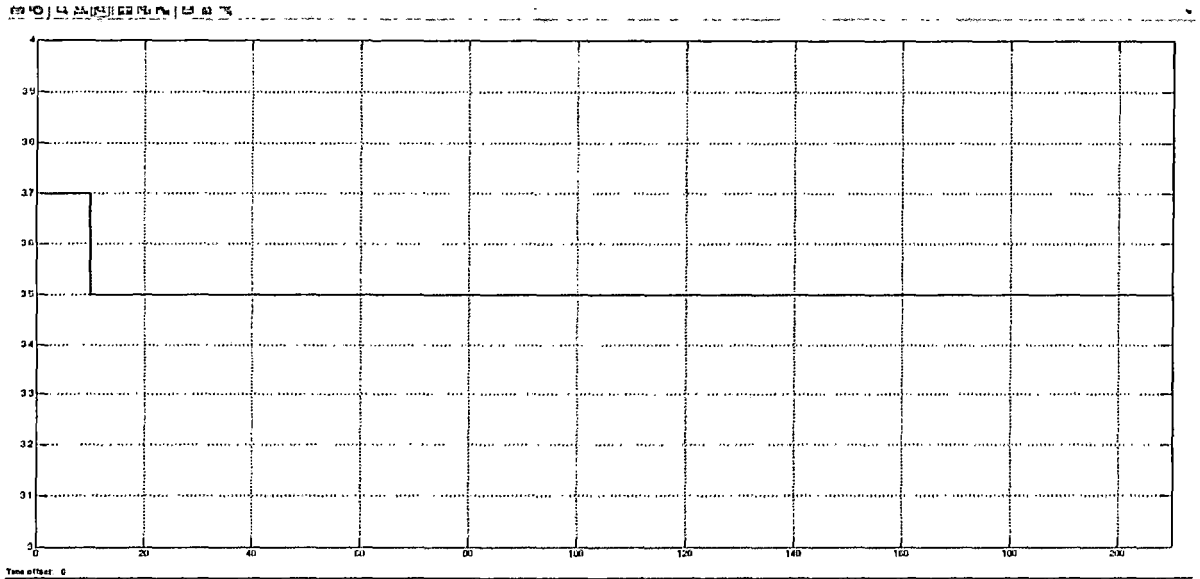
Figura 4.4.1.6 Simulación del modelo completo de la mini central de Aobamba



Fuete: Elaboración Propia en el programa Matlab.

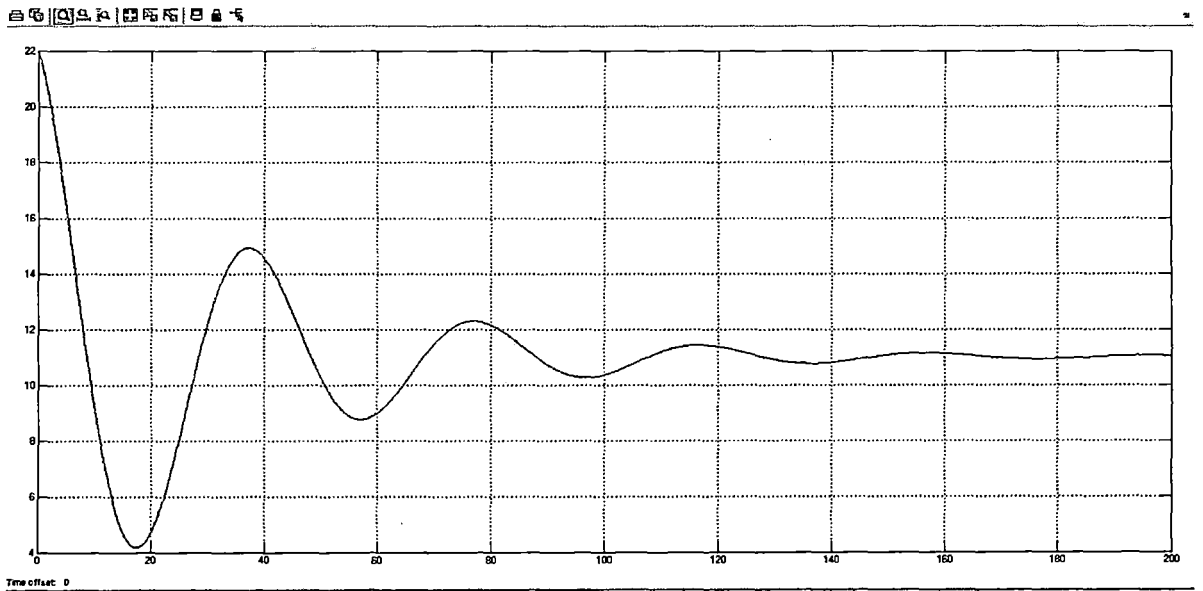
✓ CAUDAL DEL RIO EN LA CÁMARA DE CARGA

Figura 4.4.1.7 Simulación. Caudal del río



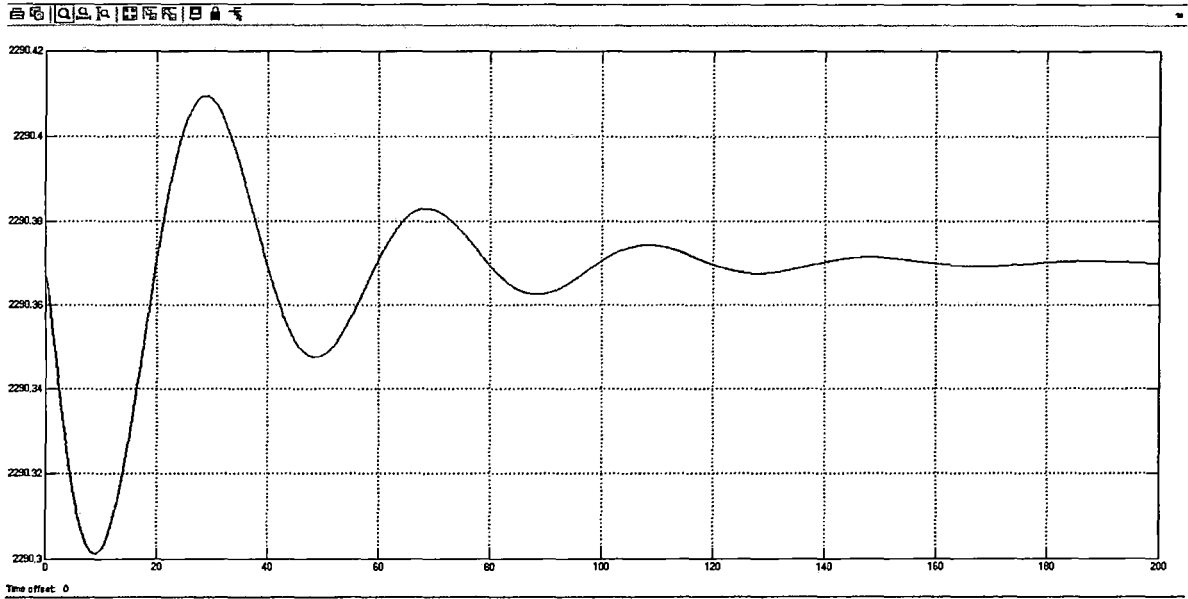
✓ POSICIÓN DEL DISTRIBUIDOR

Figura 4.4.1.8 Simulación. Posición del distribuidor



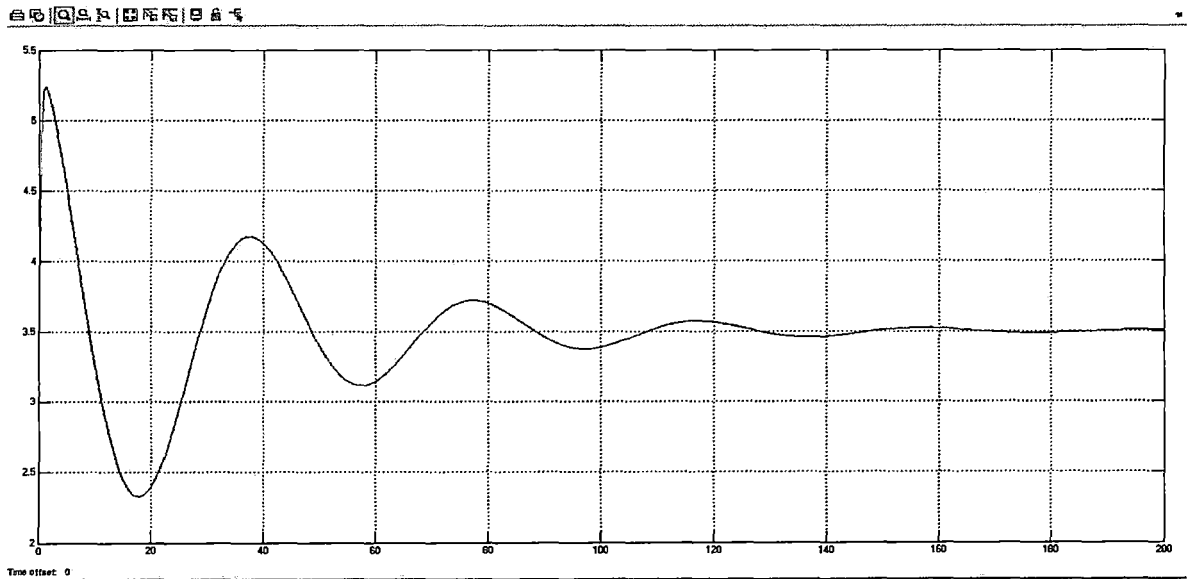
✓ NIVEL DEL AGUA EN LA CÁMARA DE CARGA

Figura 4.4.1.9 Simulación. Nivel del agua en la Cámara de carga



✓ CAUDAL DEL RIO EN LA TURBINA

Figura 4.4.1.10 Simulación. Caudal del río en la Turbina



Ambas figuras muestran que los modelos, completo y lineal, se comportan prácticamente de forma idéntica. Por tanto se puede realizarse el estudio de estabilidad de la mini central de Aobamba tomando como punto de partida el modelo lineal. A pesar de ello, dado que en la formulación y la interconexión de bloques existen diferencias entre el modelo completo y lineal se considera oportuno ilustrar y comprobar el estudio de estabilidad, a partir de la formulación del modelo lineal mediante simulaciones.

CAPÍTULO V.

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA

5.1 INTRODUCCIÓN

Una vez elaborado el modelo que representa el comportamiento dinámico de la mini central (cámara de carga, tubería forzada, turbina y el controlador PI), se plantea el estudio de su estabilidad. Como método para realizar dicho estudio se utilizan el criterio de Routh - Hurwitz y la técnica del lugar de raíces. Ambos procedimientos se aplican al modelo lineal de la mini central, dado que las ecuaciones lineales simplifican notablemente el sistema, facilitando el estudio de su estabilidad. Según lo demostrado en el capítulo anterior, el comportamiento del modelo lineal apenas difiere del modelo completo, por ello todos los resultados obtenidos a partir del modelo lineal se ilustran y comprueban mediante simulaciones realizadas con el modelo completo. De esta forma se extrapolan las conclusiones obtenidas a partir de un modelo simplificado a un modelo completo de la mini central.

El criterio de Routh - Hurwitz, a partir del polinomio característico del sistema, permite delimitar regiones de estabilidad en función del punto de funcionamiento en el que se encuentre el sistema. De esta forma se comprueba cómo afecta la modificación del punto de operación de la mini central, frente a pequeñas perturbaciones en condiciones iniciales de equilibrio.

La técnica del lugar de raíces se basa en calcular los autovalores o polos de la matriz dinámica del sistema y representar en los planos. La posición de los polos permite obtener información de la respuesta del sistema frente a pequeñas perturbaciones en condiciones iniciales de equilibrio. Mediante la técnica del lugar de raíces, dada una geometría de la mini central y un punto de funcionamiento, se estudia la influencia que ejercen las ganancias del controlador PI en la respuesta de la mini central. Esto permite analizar la relación que existe entre los parámetros de la ganancia proporcional (k) y ganancia del integrador (T_i) del controlador PI y la respuesta de la mini central frente a una modificación de las condiciones iniciales de equilibrio. El estudio de dicha relación permite establecer un criterio

heurístico para ajustar las ganancias del controlador PI, que no sólo asegure la estabilidad del sistema sino, que la mejore reduciendo la oscilación y el tiempo de establecimiento.

En el capítulo anterior, en el que se modela la mini central, se observa que las modificaciones tanto del nivel de agua como del caudal en la cámara de carga no varían significativamente aguas arriba. De esta forma cualquier cambio en la posición del distribuidor de la turbina conlleva una variación del caudal que circula por la tubería forzada, y del nivel de agua en la cámara de carga; sin embargo en este caso dicha variación no se ve reflejada sustancialmente en el caudal que circula por el canal, y por consiguiente, en el azud de derivación donde se recoge el agua procedente del río; Podría decirse de forma simplificada que las variaciones de las condiciones iniciales de equilibrio no “viajan” aguas arriba de la cámara de carga a lo largo del canal.

La observación de este fenómeno obliga a descartar el control del nivel de agua en el azud de derivación mediante el movimiento de la posición del distribuidor. De esta forma se sitúa el control de nivel en la cámara de carga. Dado que la variación de la cota del agua en la cámara de carga no se propaga aguas arriba del canal, para mantener el nivel del agua en el azud de derivación sería necesaria la inclusión de un mecanismo de control en la compuerta de toma en el azud y la mini central. Esto permitiría que el nivel de agua en el azud se mantuviera constante. Como el comportamiento de los elementos situados aguas arriba de la cámara (canal, compuerta y azud) no influye en la estabilidad del sistema y el control del nivel de agua en el azud no es imprescindible.

La cámara de carga generalmente cuenta con un aliviadero, que permite desalojar todo el caudal procedente del río que no se turbinan por razones de aprovechamiento, el aliviadero también vierte agua cuando una modificación en el régimen de funcionamiento de la mini central genera oscilaciones de nivel en la cámara de carga. Dado que el control planteado permite mantener el nivel de agua constante en la cámara de carga, por lo tanto no es necesario incluir la dinámica del aliviadero, ya que no verterá agua en condiciones normales de utilización de la mini central.

El estudio de la estabilidad de la mini central con control de nivel en la cámara de carga mediante la modificación de la posición del distribuidor, es el objetivo del presente capítulo. Para ello se utilizará la metodología propuesta en el apartado siguiente basada en el criterio de Routh – Hourwitz y la técnica del lugar de raíces, pilares de la teoría del control clásico.

5.2 METODOLOGÍA PROPUESTA

En los siguientes puntos se describen los pasos a seguir en el estudio de la estabilidad, para la calibración del controlador PI de la mini central.

Dichos pasos se muestran a continuación:

- a) La matriz dinámica del sistema, resulta del agrupamiento matricial de las ecuaciones linealizadas de cada elemento que compone la mini central, por tanto la matriz representa al modelo lineal de la mini central. En este caso la matriz es de tercer orden ya que la dinámica de la tubería forzada y la turbina se refleja en una misma ecuación. De esta forma las ecuaciones que la componen son: turbina – tubería forzada, cámara de carga y controlador PI.
- b) A partir del polinomio característico de la matriz dinámica se aplica el criterio de Routh – Hourwitz. Dicho criterio permite establecer la condición de estabilidad de la mini central con control de nivel en la cámara de carga.
- c) La condición de estabilidad se materializa en las regiones de estabilidad. En este caso, dichas regiones no dependen de las dimensiones de la cámara de carga como se verá posteriormente. Las variables que modifican las regiones de estabilidad son las referentes a la tubería forzada, al punto de operación de la mini central y las ganancias del controlador PI.
- d) La selección de las ganancias del controlador se realiza a partir de la construcción del lugar de raíces de las propias ganancias. Para ello se elabora el lugar de raíces de la ganancia proporcional (k) manteniendo constante el valor de la ganancia integradora (T_i).
- e) Los resultados procedentes del lugar de raíces se completan con simulaciones en el modelo completo de la mini central. De esta forma se

termina de establecer la relación entre la posición de los polos en el lugar de raíces y el comportamiento del modelo completo.

- f) Contrastando el lugar de raíces con los resultados procedentes de las simulaciones,
- g) se establece un criterio heurístico para la determinación de la ganancia proporcional (k).
- h) Siguiendo el procedimiento, a partir del lugar de las raíces del modelo lineal, completada con simulaciones en el modelo completo, se selecciona la pareja de ganancias (k) y (T_i) que proporcionen la respuesta más adecuada para la mini central.
- i) Partiendo de la aplicación analítica del criterio heurístico enunciado se desarrolla una formulación matemática que permite obtener las ganancias del controlador PI a partir de la geometría de la mini central y del punto de operación en el que se encuentre.
- j) Por último, dado que los resultados obtenidos proceden de un modelo lineal concebido, para la simulación de pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales de equilibrio se comprueba en el modelo completo.

5.3 MATRIZ DINÁMICA DEL SISTEMA

El modelo refleja el comportamiento de la mini central, cuyas ecuaciones se han descrito y linealizado anteriormente, operando alrededor de un punto de funcionamiento en pequeñas perturbaciones.

Se propone, para el estudio de la estabilidad, el uso de variables que engloben al modelo. De este modo el caudal que se introduce en el modelo como variable de entrada se denomina (Q_r), que representa al caudal procedente del río. La variación en valores por unidad de la cota del agua en la cámara de carga pasa a ser (Δh_c) mientras que la constante de tiempo de dicho elemento (T_c).

Turbina – tubería forzada

$$\frac{d\Delta q_t}{dt} = -\left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2p q_t^o}{T_w}\right)\Delta q_t + \frac{1}{T_w}\Delta h_c + \frac{b_{13}}{T_w b_{11}}\Delta x + \frac{b_{12}}{T_w b_{11}}\Delta n \quad (5.1)$$

Cámara de carga

$$\frac{d\Delta h_c}{dt} = -\frac{1}{T_c}\Delta q_t + \frac{1}{T_c}\Delta q_r \quad (5.2)$$

Controlador PI

$$\frac{d\Delta x}{dt} = -\frac{\alpha}{T_c}\Delta q_t + \frac{1}{\beta}\Delta h_c - \frac{1}{\beta}\Delta h_{ref} + \frac{\alpha}{T_c}\Delta q_r \quad (5.3)$$

El presente modelo se representa mediante tres componentes fundamentales: turbina-tubería forzada, cámara de carga, y controlador PI, de modo que la matriz dinámica del sistema será de tercer orden. Las expresiones que describen el comportamiento del sistema se agrupan matricialmente para realizar el estudio de la estabilidad. Constituyen las ecuaciones de estado del sistema y su formulación en forma canónica se expresa:

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU \quad (5.4)$$

Dónde:

$$X = \begin{pmatrix} \Delta q_t \\ \Delta h_c \\ \Delta x \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$U = \begin{pmatrix} \Delta n \\ \Delta q_r \\ \Delta h_{ref} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{b_{12}}{T_w b_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_c} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{T_c} & -\frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^o}{T_w}\right) & \frac{1}{T_w} & \frac{b_{13}}{T_w b_{11}} \\ -\frac{1}{T_c} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{T_c} & \frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

La mini central se modela gracias a las ecuaciones de estado que relacionan las diferentes variables. Dentro de estas variables se encuentran las entradas al sistema y las denominadas variables de estado.

5.4 CONDICIÓN DE ESTABILIDAD

Un sistema se puede calificar como estable cuando las raíces del polinomio característico de su matriz dinámica se encuentran en el semiplano negativo. Siendo la matriz (A), la matriz dinámica del sistema compuesto por la cámara de carga, turbina - tubería forzada y las ganancias del controlador PI, por lo tanto es necesario la obtención de su polinomio característico.

5.4.1 POLINOMIO CARACTERÍSTICO

El resultado del siguiente determinante permite la obtención del polinomio característico:

$$P(A) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^o}{T_w}\right) & -\frac{1}{T_w} & -\frac{b_{13}}{T_w b_{11}} \\ \frac{1}{T_c} & \lambda & 0 \\ \frac{\alpha}{T_c} & -\frac{1}{\beta} & \lambda \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

Desarrollando el determinante por la tercera columna:

$$P(A) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda + \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^o}{T_w} \right) & -\frac{1}{T_w} \\ \frac{1}{T_c} & \lambda \end{vmatrix} - \frac{b_{13}}{T_w b_{11}} \begin{vmatrix} \frac{1}{T_c} & \lambda \\ \frac{\alpha}{T_c} & -\frac{1}{\beta} \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

$$P(A) = \lambda \left[\lambda^2 + \lambda \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^o}{T_w} \right) + \frac{1}{T_c T_w} \right] + \frac{b_{13}}{T_w b_{11}} \left(\frac{1}{T_c \beta} + \frac{\alpha}{T_c} \lambda \right) \quad (5.11)$$

$$P(A) = \lambda^3 + \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^o}{T_w} \right) \lambda^2 + \left(\frac{b_{11} + b_{13} \alpha}{T_w T_c b_{11}} \right) \lambda + \frac{b_{13}}{T_w T_c b_{11} \beta} \quad (5.12)$$

Si se adopta la nomenclatura generalmente utilizada para la definición del polinomio característico, éste se expresa de la forma:

$$P(A) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \quad (5.13)$$

Dónde:

$$a_1 = \frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^o}{T_w} \quad (5.14)$$

$$a_2 = \frac{b_{11} + b_{13} \alpha}{T_w T_c b_{11}} \quad (5.15)$$

$$a_3 = \frac{b_{13}}{T_w T_c b_{11} \beta} \quad (5.16)$$

5.4.2 CRITERIO DE ROUTH – HURWITZ

La estabilidad del sistema se puede garantizar si todas las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa. Para ello Routh propuso la construcción de una tabla mediante el algoritmo llamado de Routh y que

coincide con el criterio de estabilidad desarrollado por Hurwitz, por ello el criterio lleva conjuntamente el nombre de los dos autores.

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz dice que el polinomio tiene sus raíces en el semiplano negativo, si todos los elementos de la primera columna son positivos y no nulos.

El polinomio característico de la matriz dinámica del sistema, en este caso, es de tercer grado. La tabla que resulta aplicando el algoritmo de Routh resulta:

$$\begin{array}{c|cc}
 3 & 1 & a_2 \\
 2 & a_1 & a_3 \\
 1 & \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} & 0 \\
 0 & a_3 &
 \end{array} \tag{5.17}$$

Si se impone que cada uno de los elementos de la primera columna es no nulo y mayor que cero:

$$a_1, a_3 > 0 \tag{5.18}$$

$$a_1 a_2 - a_3 > 0 \tag{5.19}$$

De lo que se puede deducir que:

$$a_2 > \frac{a_3}{a_1} > 0 \tag{5.20}$$

Por lo que el criterio de Routh – Hurwitz aplicado al sistema de tercer orden implica las siguientes condiciones de estabilidad:

$$a_1, a_2, a_3 > 0 \tag{5.21}$$

$$a_1 a_2 - a_3 > 0 \tag{5.22}$$

En general (q_i^0), los parámetros del controlador PI, (k) y (T_i), las constantes de tiempo y los coeficientes de pérdidas siempre son mayores que cero.

$$q_i^o, \alpha, \beta, T_w, T_c, p > 0 \quad (5.23)$$

Por otro lado, en lo que se refiere a los coeficientes pertenecientes a la ecuación linealizada de la turbina:

$$\Delta q = b_{11}\Delta h + b_{12}\Delta n + b_{13}\Delta x \quad (5.24)$$

Se puede deducir que:

✓ Cuando se abre el distribuidor y se mantienen constantes el salto y la velocidad de giro, el caudal aumenta lo que implica que (b_{13}) es positivo.

✓ Cuando se incrementa el salto neto en la turbina y se mantienen constantes la posición del distribuidor y la velocidad de giro, el caudal crece, lo que obliga a (b_{11}) a ser positivo.

La condición (5.21) se cumple cuando la condición más restrictiva que determina la región de estabilidad de la mini central, es la ecuación (5.22). Por lo tanto sustituyendo en dicha expresión los diferentes valores de los coeficientes (a), podemos asegurar la estabilidad si se cumple:

$$\left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^o}{T_w} \right) \left(\frac{b_{11} + b_{13}\alpha}{T_w T_c b_{11}} \right) - \frac{b_{13}}{T_w T_c b_{11} \beta} > 0 \quad (5.25)$$

Que desarrollada resulta:

$$\left(\frac{1 + 2pq_i^o b_{11}}{T_w b_{11}} \right) \left(\frac{b_{11} + b_{13}\alpha}{T_w T_c b_{11}} \right) - \frac{b_{13}}{T_w T_c b_{11} \beta} > 0 \quad (5.26)$$

$$\left(\frac{1 + 2pq_i^o b_{11}}{T_w b_{11}} \right) (b_{11} + b_{13}\alpha) - \frac{b_{13}}{\beta} > 0 \quad (5.27)$$

$$\frac{T_w}{\beta} < \frac{(1 + 2pq_i^o b_{11})(b_{11} + b_{13}\alpha)}{b_{11} b_{13}} \quad (5.28)$$

5.4.3 APLICACIÓN AL PRE DIMENSIONAMIENTO DE LA MINI CENTRAL

La estabilidad de la mini central depende únicamente del punto de funcionamiento de la turbina (b_{11} , b_{13} y q_i^0), de las dimensiones y materiales de la tubería forzada (p y T_w) y del ajuste del controlador (α y β).

Por tanto, a partir de la aplicación del criterio de estabilidad de Routh – Hurwitz, puede deducirse que las dimensiones de la cámara de carga de la mini central no influyen en la estabilidad cuando se controla el nivel en la cámara de carga.

5.5 REGIÓN DE ESTABILIDAD DE LA MINI CENTRAL

En la expresión (5.28), que determina la condición de estabilidad, la relación que existe entre los parámetros (α y β) es lineal por lo que la región de estabilidad en este caso queda establecida por una línea recta.

Dado que la superficie de la cámara de carga no tiene repercusión en la estabilidad de la mini central, únicamente se estudia la influencia que ejerce el punto de funcionamiento en la estabilidad.

5.5.1 INFLUENCIA DEL PUNTO DE FUNCIONAMIENTO EN LA ESTABILIDAD

Se varía la carga con la que opera la mini central para comprobar cómo interviene esta variable en la estabilidad. Para ello se modifica el caudal inicial (q_i^0) y se determinan los coeficientes de la ecuación linealizada de la turbina (b_{11} y b_{13}).

El ámbito del estudio de estabilidad del control de la mini central en la pequeña perturbación alrededor de un punto de funcionamiento. Para ello se seleccionan tres zonas de operación en la colina de rendimiento. El objetivo es comprobar cómo se modifican las condiciones de estabilidad cuando la mini central se encuentra en diferentes situaciones. Las tres zonas de operación corresponden a la turbinación del caudal nominal zona I, a la

operación en baja carga zona II (caudal menor) y al funcionamiento con sobrecarga zona III (caudal mayor que el nominal).

En la siguiente tabla se muestran los valores asociados al funcionamiento de la mini central en cada punto de operación, manteniendo constante en todo momento el salto bruto de la mini central, es decir, se conserva el nivel de la lámina de agua en la cámara de carga.

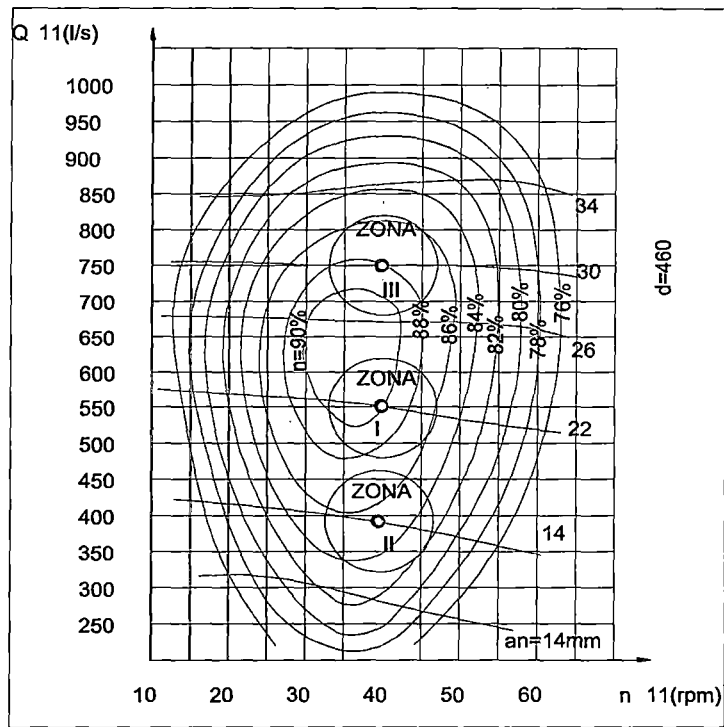
Tabla 5.5.1.1 Valores nominales

PUNTO	ZONA I	ZONA II	ZONA III
Q (m ³ /s)	3.50	2.50	4.80
H (m)	230.67	230.67	230.67
N_1 (r.p.m)	38.52	38.52	38.52
Q_1 (m ³ /s)	0.5454	0.3896	0.7480
h_c^0	1.0029	1.0029	1.0029
q_i^0	1	0.7143	1.3714

Fuente: Elaboración Propia

En la figura 5.5.1.1 se sitúan los tres puntos de funcionamiento en las colinas de rendimientos de la turbina. Como puede observarse la velocidad unitaria en los tres casos es similar.

Figura 5.5.1.1 Colina de Rendimiento. Zonas de operación para el ajuste de parámetros



Fuente: Elaboración Propia

Las zonas de operación seleccionadas se muestran en la figura y se encuentran definidas alrededor de los puntos zona I, zona II y zona III. Las aperturas de distribuidor elegidas 14, 22 y 30 mm reflejan las tres situaciones de operación. El caudal nominal lógicamente se turбина con una apertura del distribuidor de 22 mm, mientras que las otras dos posiciones son para caudales menores y mayores respecto del nominal.

Dentro de la ecuación (5.26) que limita la región de estabilidad, los parámetros que caracterizan la zona de operación en la que se encuentra la mini central, son los coeficientes de la ecuación linealizada de la turbina (b_{11} y b_{13}) y el caudal inicial en valores por unidad (q^0).

En la siguiente tabla se recogen los valores obtenidos aplicados a las zonas y puntos de operación seleccionados en la colina de rendimientos:

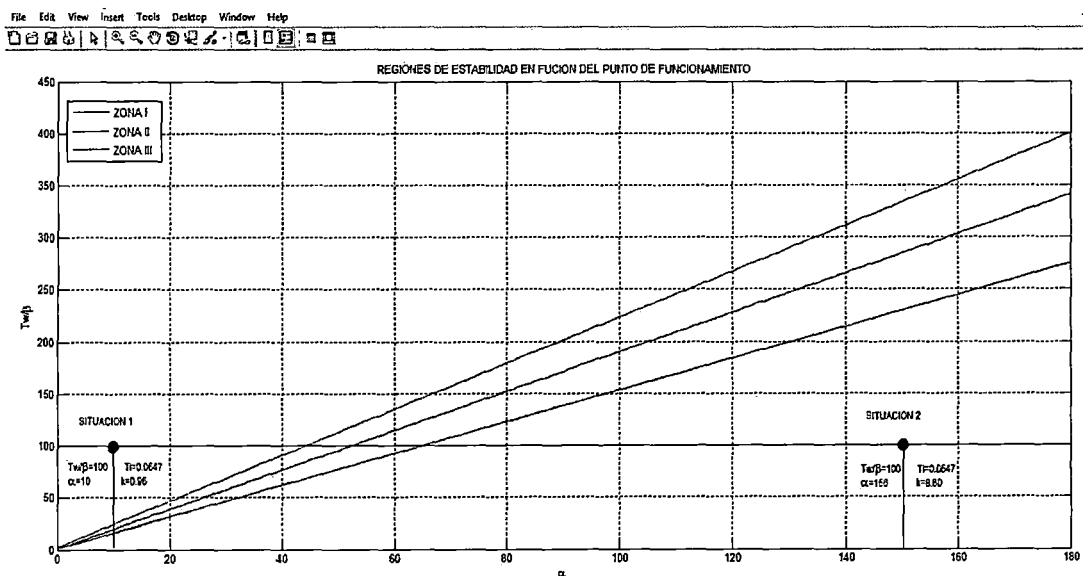
Tabla 5.5.1.2. Valores de los parámetros que definen cada zona de operación

PUNTO	ZONA I	ZONA II	ZONA III
N_1 (r.p.m)	38.518	38.518	38.518
Q_1 (m ³ /s)	0.545	0.390	0.748
H (rendimiento-turbina)	90%	85%	88%
X (mm)	22	14	30
$\frac{\partial Q_1}{\partial N_1}$	-0.00126	-0.00296	0.00007
$\frac{\partial Q_1}{\partial X}$	0.02757	0.00974	0.02532
b_{11}	0.5428	0.4602	0.6862
b_{13}	1.1121	0.3928	1.0214

Fuente: Elaboración Propia

La región de estabilidad en este caso, es un semi espacio abierto que queda delimitado por una recta. Las combinaciones de $(\alpha$ y $\beta)$, es decir, de $(k$ y $T_i)$, que resulten a la derecha y por debajo de la recta generan un control estable de la mini central.

Figura 5.5.1.2 Regiones de Estabilidad en función del punto de funcionamiento



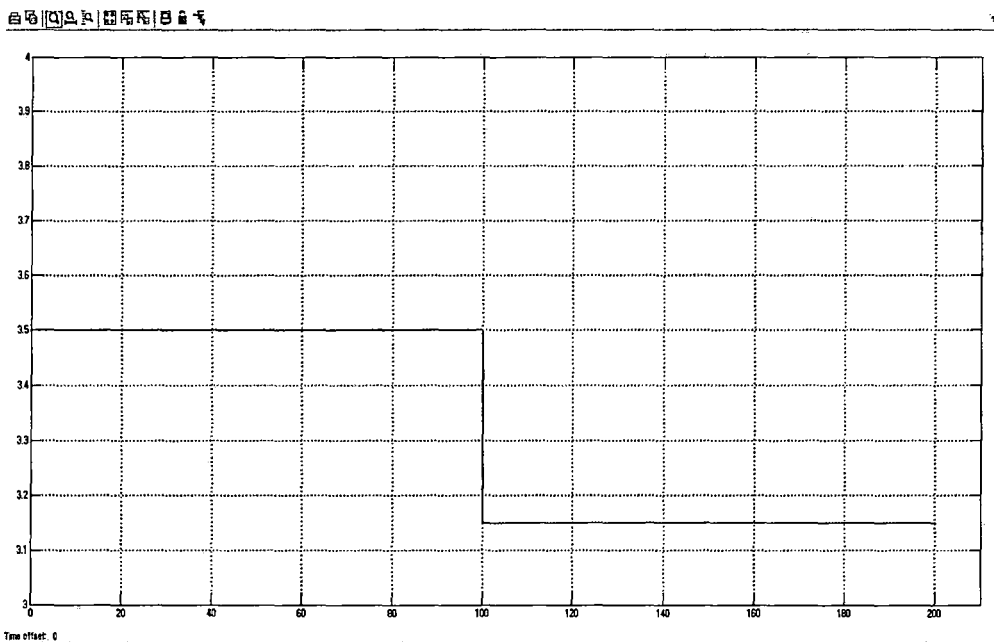
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

La estabilidad del sistema mejora conforme se cierra el distribuidor, siendo la región menos restrictiva la zona II. En la mini central cuanto menor caudal se turbine mejor son las condiciones de estabilidad. También se comprueba que el aumento de la longitud de la tubería forzada e incremento de constante de tiempo del agua en la tubería forzada (T_w), repercute negativamente en la estabilidad de la mini central.

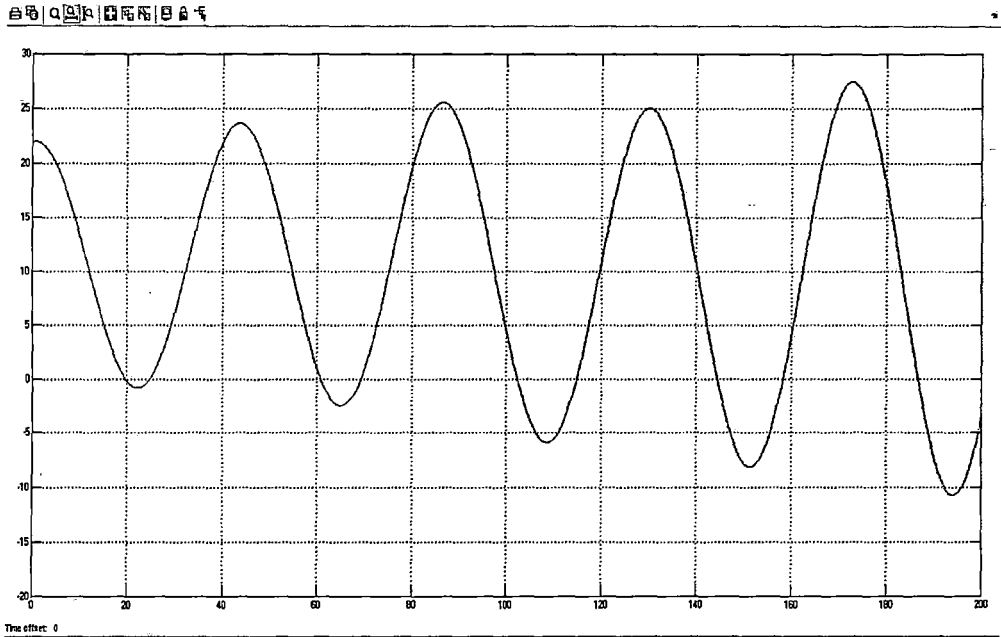
Para comprobar los datos aportados por las regiones de estabilidad se simulan dos situaciones en la mini central modelada. En ambas situaciones se simula un descenso del caudal procedente del río mientras que se varía el ajuste del controlador. En la situación 1 las ganancias del controlador se sitúan fuera de la región de estabilidad, mientras que en la situación 2 el punto de ajuste del controlador se ubica en la región estable.

Figura 5.5.1.3 Situación 1, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal de 3.5 m³/s ($k = 0.5$ y $T_i = 0.06$)

✓ Caudal del río



✓ Posición del distribuidor



✓ Posición del nivel del agua en la Cámara de carga

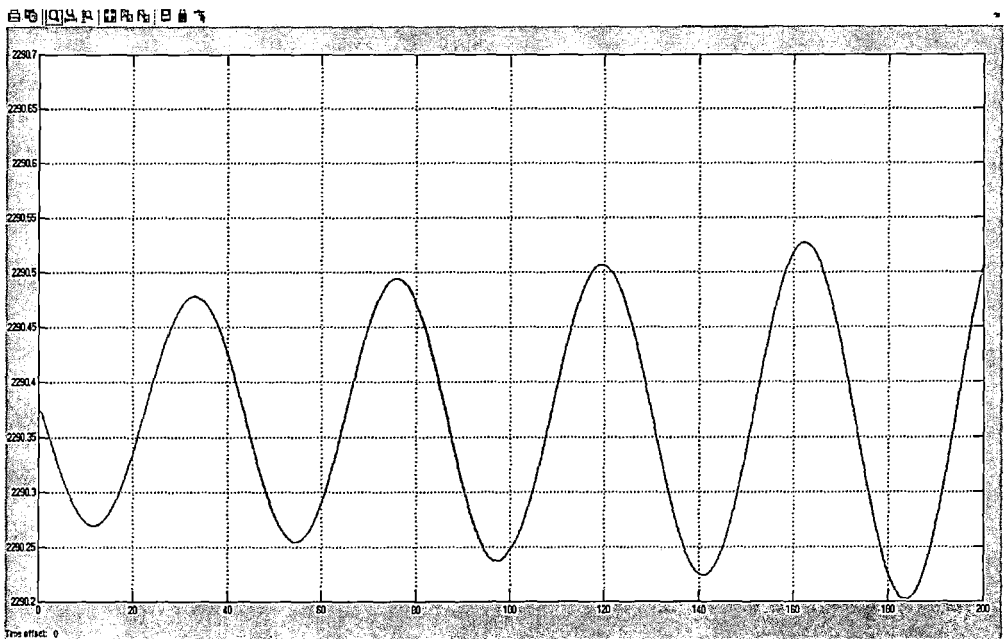
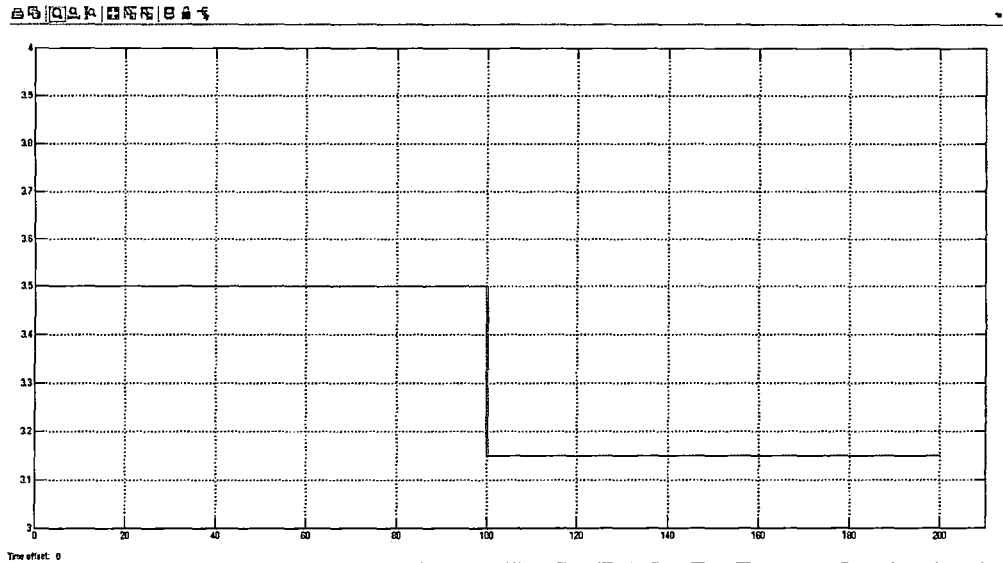
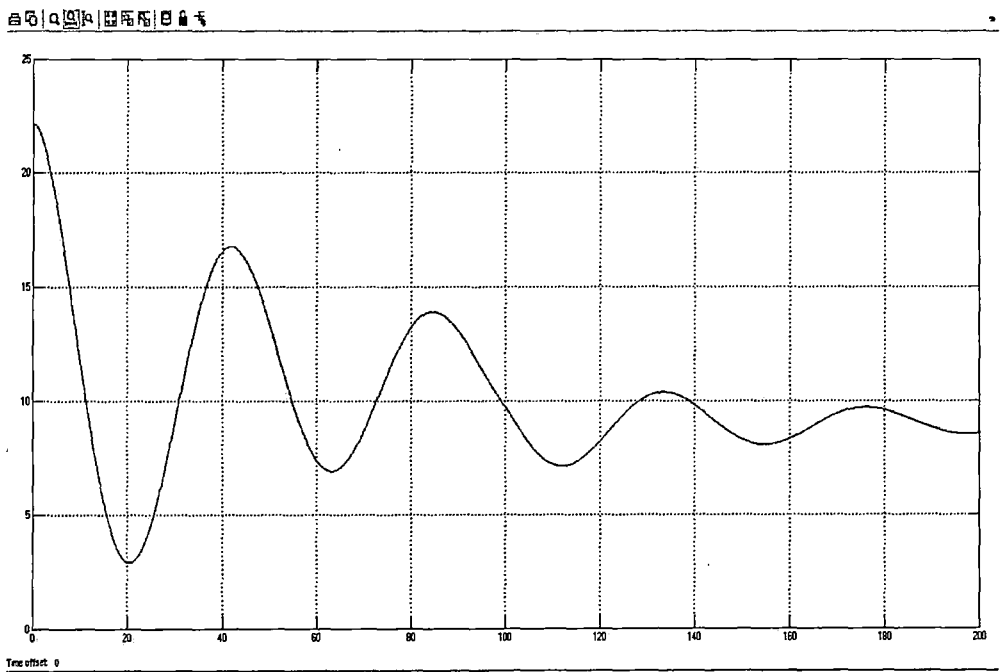


Figura 5.5.1.4 Situación 2, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal de 3.5 m³/s ($k = 30$ y $T_i = 0.06$)

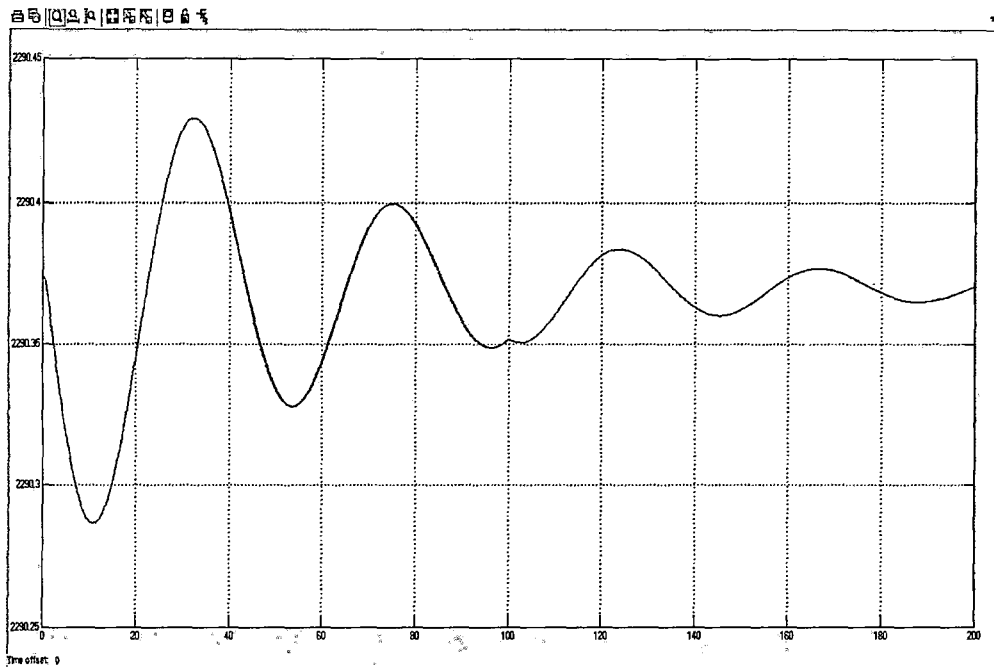
✓ Caudal del río



✓ Posición del distribuidor



✓ Posición del nivel del agua en la Cámara de carga



5.6 CRITERIOS PARA EL AJUSTE DEL CONTROLADOR PI

Uno de los objetivos del estudio de estabilidad de la mini central, aparte de la obtención de valores de referencia para las dimensiones de los elementos almacenadores, es el ajuste de los parámetros del controlador PI (k y T_i).

La primera condición que deben cumplir dichos parámetros es garantizar la estabilidad de la mini central. Una vez asegurada la estabilidad se seleccionan los componentes del controlador para que la respuesta del sistema sea satisfactoria además de estable. La rapidez con la que el controlador lleva a la variable controlada al valor de referencia y la forma en que lo hace, concretamente la oscilación de la respuesta, son las características fundamentales que configuran la eficacia de un controlador.

La respuesta en el dominio del tiempo de un sistema con realimentación o lazo cerrado, como el de la mini central modelada, puede describirse de acuerdo con la localización de los polos de la matriz dinámica, en el plano S . El estudio de la posición de dichos polos permite prever el tipo de respuesta del sistema frente a variaciones de las variables de entrada. Si se establece un criterio que precise el

tipo de respuesta considerada óptima pueden determinarse los valores de (k) y (T_i) que garantizan dicha respuesta.

Por tanto, partiendo de la matriz dinámica del sistema y de su polinomio característico, se construye el lugar de raíces correspondiente a cada uno de los parámetros de (k) y (T_i) para estudiar su influencia en la respuesta del modelo y seleccionar los valores que optimicen dicha respuesta.

El sistema que compone la mini central es de tercer orden por lo que los lugares de raíces que se elaboren a partir de dicho sistema constarán de tres series de polos. Según se refleja en (Ogata, 1994) la respuesta de sistemas de orden superior es la suma de las respuesta de sistemas de primer y segundo orden. Para comprender y analizar los resultados obtenidos es interesante conocer previamente el lugar de raíces de un sistema genérico más sencillo de segundo orden. Mediante la comprensión y caracterización de su lugar de raíces y de la relación que existe entre dicho gráfico y la respuesta del sistema frente a perturbaciones externas, es posible percibir el funcionamiento de un sistema de rango superior.

5.6.1 CARACTERIZACIÓN DEL LUGAR DE RAÍCES DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN Y SU RESPUESTA

El polinomio característico de un sistema de segundo orden se expresa de forma genérica:⁶

$$P(B) = \lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 \quad (5.29)$$

Dónde:

ω_n = Frecuencia natural de la respuesta del sistema no amortiguado

$\zeta = \cos \theta$ = Amortiguamiento relativo (sistema sub amortiguado)

⁶Ingeniería de control moderna, Katsuhiko Ogata (tercera edición)

En la figura 5.6.1.1 se representan en el plano (s), los parámetros que caracterizan la posición de los polos de un sistema de segundo orden. Como se puede comprobar los polos son conjugados cuando el amortiguamiento relativo (ζ) es menor que uno (sistema sub amortiguado).

La ecuación de la respuesta natural de un sistema de segundo orden frente a una perturbación de tipo escalón se puede expresar de la siguiente forma:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\sigma_d t} \text{sen}(\omega_d t + \theta) \quad \dots (5.30)$$

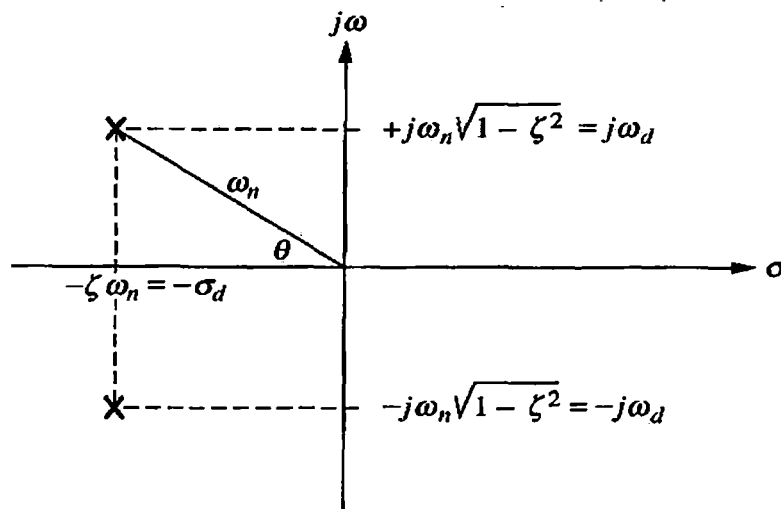
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad (5.31)$$

Dónde:

σ_d = Amortiguamiento exponencial de la respuesta

ω_d = Frecuencia de la oscilación amortiguada.

Figura 5.6.1.1 Representación de polos conjugados en el plano S



Cuando el sistema es estable la respuesta alcanza un valor asintótico (se dice que es estable). Para comprobarlo se calcula la pendiente de la respuesta, que resulta:

$$\frac{dc(t)}{dt} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\sigma_d t} \cos(\omega_d t) \quad (5.32)$$

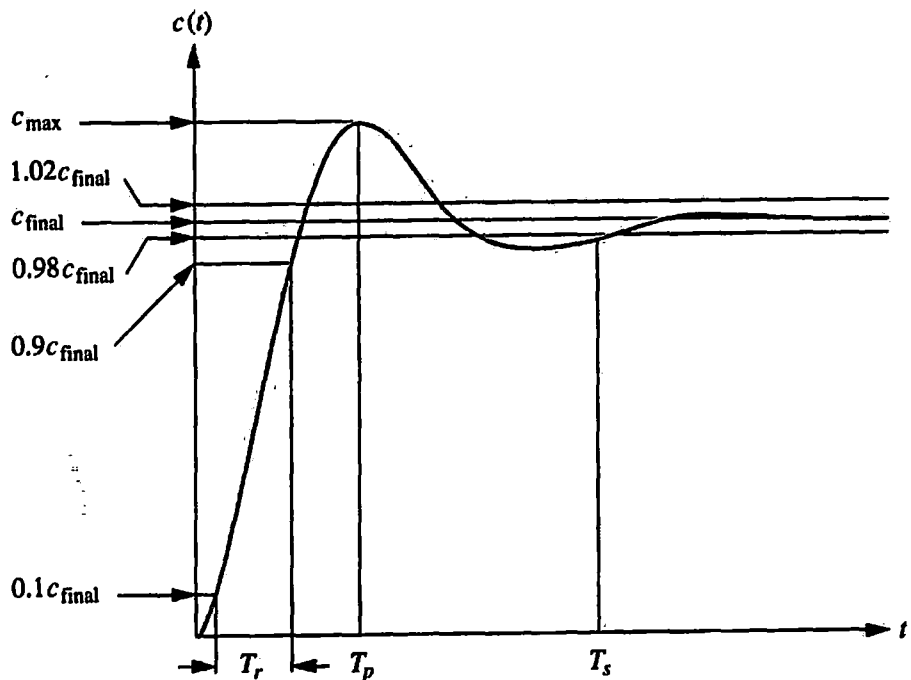
Si el sistema es asintóticamente estable se debe cumplir por tanto:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{dc(t)}{dt} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\sigma_d t} \cos(\omega_d t) \right) \quad (5.33)$$

Lo cual sucede cuando $\sigma_d < 0$. Se puede concluir que la condición para que un sistema sea asintóticamente estable es que sus polos tengan la parte real menor que cero.

Una vez asegurada la estabilidad, se estudia la calidad de la respuesta frente a variaciones de las condiciones iniciales. Para ello se establece la relación que existe entre la respuesta temporal del sistema de segundo orden frente a un escalón, figura 5.6.1.2, y los parámetros descritos anteriormente.

Figura 5.6.1.2 Especificaciones de la respuesta de un sistema de segundo orden



Fuente: Fuente: J I. Sarasua. Control de mini centrales hidroeléctricas fluyentes. Modelado y estabilidad. Madrid 2009.

A continuación se describen las constantes temporales que caracterizan la respuesta y su relación con los parámetros de la oscilación.

T_d = Periodo de la oscilación amortiguada.

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad (5.34)$$

T_p = tiempo de pico. Tiempo requerido para alcanzar el primer máximo de la oscilación siendo la expresión que permite su obtención:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (5.35)$$

T_e = tiempo de establecimiento. Tiempo necesario para que la oscilación amortiguada permanezca con un error del $\pm 2\%$ respecto del valor permanente.

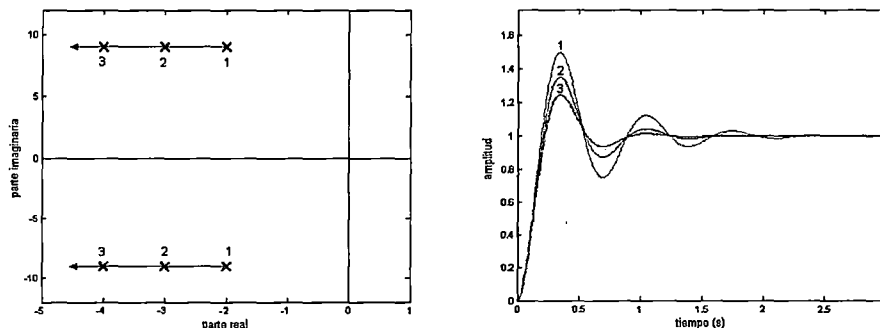
Se calcula mediante la ecuación:

$$T_e = \frac{4}{\sigma_d} \quad (5.36)$$

T_r = tiempo de subida. Tiempo empleado por la onda para llegar desde el 0,10 hasta 0,9 del valor final. No existe una formulación explícita que permita su cálculo.

Una primera estrategia para optimizar la respuesta es minimizar el tiempo de establecimiento. De acuerdo con las expresiones anteriores, para ello, en un sistema de segundo orden, se debe intentar maximizar el amortiguamiento exponencial (σ_d). De esta forma, como se comprueba en la figura 5.6.1.3 se logra que la variable controlada llegue antes al valor de la consigna.

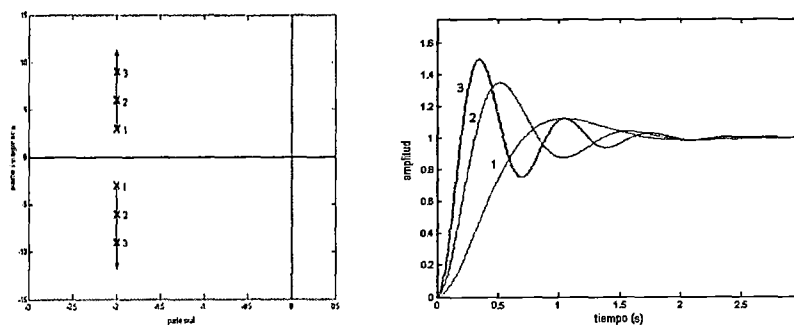
Figura 5.6.1.3 Influencia de σ_d en la respuesta



Fuente: Fuente: J I. Sarasua. Control de mini centrales hidroeléctricas fluyentes. Modelado y estabilidad. Madrid 2009.

Una segunda opción para mejorar la respuesta es reducir la oscilación. Esto supone disminuir la frecuencia de la oscilación amortiguada (ω_d). Esto se pone de manifiesto en la figura 5.6.1.4

Figura 5.6.1.4 Influencia de ω_d en la respuesta



Fuente: Fuente: J I. Sarasua. Control de mini centrales hidroeléctricas fluyentes. Modelado y estabilidad. Madrid 2009.

Como conclusión puede decirse que en un sistema de segundo orden la respuesta es estable cuando sus polos tienen la parte real negativa y mejoran la respuesta del sistema cuando están más distantes del eje imaginario, y más próximos al eje real.

5.6.2 LUGAR DE RAÍCES

El objetivo de utilizar el lugar de raíces en el estudio de estabilidad es analizar la influencia que ejercen cada una de las dos ganancias (proporcional e integradora) del controlador PI en la dinámica del sistema. De esta forma, estableciendo unas pautas de comportamiento y fijando ciertos criterios basados en el óptimo funcionamiento de la mini central es posible ajustar el controlador.

El punto de funcionamiento de la mini central, es decir, la carga o caudal con el que opera, influye considerablemente en la estabilidad de la mini central y por consiguiente en el control de la misma. Inicialmente se considera el punto de funcionamiento nominal. Posteriormente se plantea la extrapolación de las conclusiones obtenidas a cualquier punto de funcionamiento.

El lugar de raíces procede del cálculo de los auto valores de la matriz dinámica del sistema. A continuación se muestra dicha matriz, que en este caso resulta de tercer orden, sustituyendo los valores de (α) y (β) para que figuren explícitamente (k) y (T_i) .

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^o}{T_w}\right) & \frac{1}{T_w} & \frac{b_{13}}{T_w b_{11}} \\ -\frac{1}{T_c} & 0 & 0 \\ -k \frac{H_b}{X_b T_c} & \frac{1}{T_i} \frac{H_b}{X_b} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

En la tabla se muestran los valores nominales de la mini central.

Tabla 5.6.2.1 Valores nominales del modelo

T_w (s)	0.6187
T_c (s)	3942.85
b_{11}	0.5428
b_{13}	1.8071
p	0.0225
Q_b (m ³ /s)	3.5
H_b (m)	230
X_b (mm)	22

Fuente: Elaboración Propia

5.6.3 LUGAR DE RAÍCES DE LA GANANCIA K

Dado que las dos ganancias del controlador aparecen de forma similar en la matriz dinámica del sistema, es necesario fijar una de ellas para construir el lugar de raíces que procede de la variación de la otra ganancia. Inicialmente se determina, un valor constante de (T_i) para observar la influencia de la componente proporcional (k), del controlador.

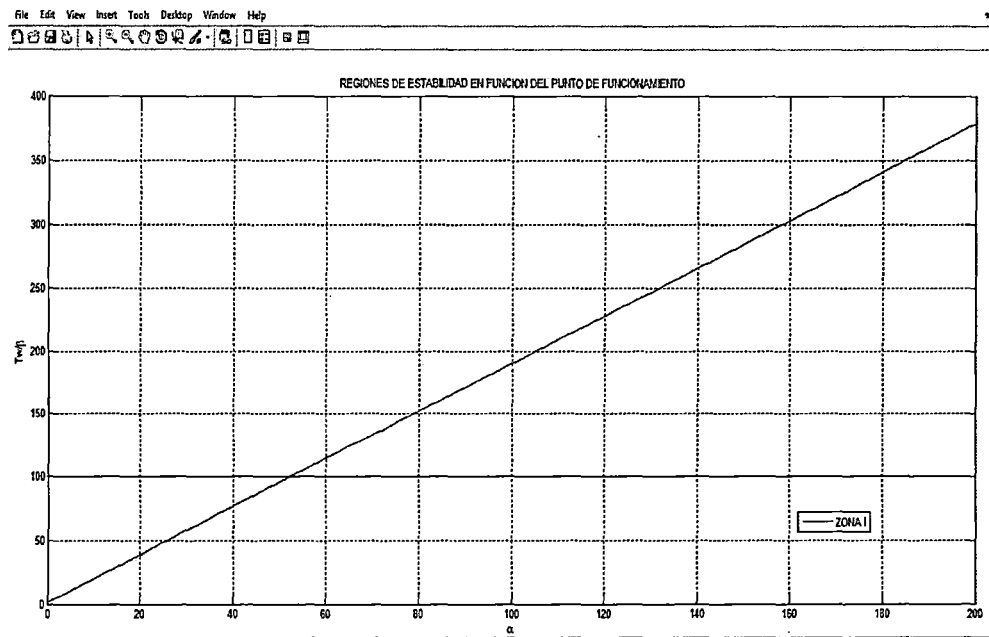
$$\frac{T_w}{\beta} < \frac{(1 + 2pq_i^\circ b_{11})(b_{11} + b_{13}\alpha)}{b_{11}b_{13}} \quad (5.38)$$

Dónde:

$$\alpha = \frac{kH_b}{X_b} \quad \beta = \frac{X_b T_i}{H_b} \quad (5.39)$$

Esto corresponde con fijar una ordenada constante en la región de estabilidad cercana a la base para garantizar la estabilidad. De esta forma, como se indica en la figura 5.6.3.1, se determina $T_w / \beta = 100$, es decir, $T_i = 0,06467$ s.

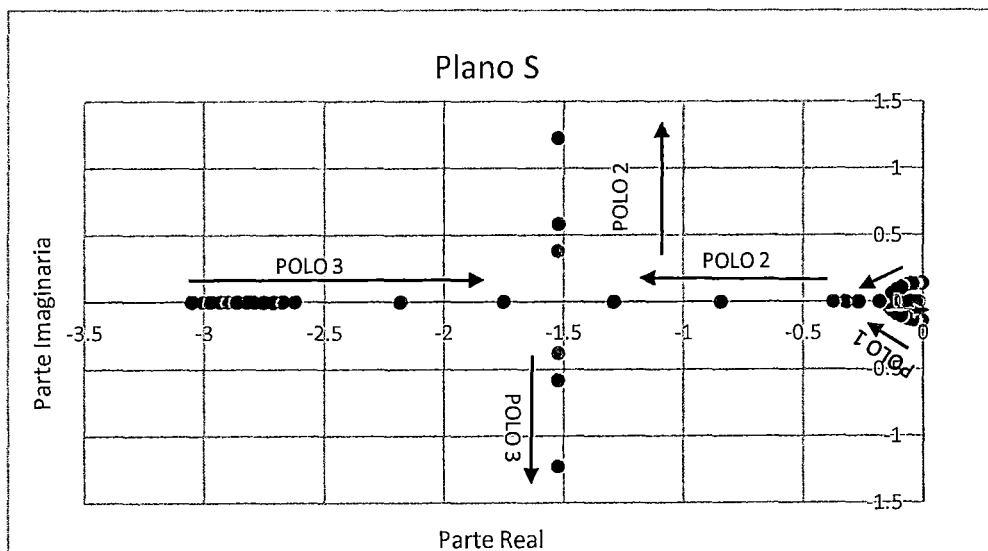
Figura 5.6.3.1 Región de Estabilidad punto de funcionamiento nominal



Fuente: Elaboración Propio

A continuación se hace variar el valor de la ganancia proporcional (k) y se calculan los auto valores para cada valor de (k). Para ello se sustituyen las constantes temporales asociadas al modelo. La figura 5.6.3.2, muestra el lugar de raíces de la ganancia (k) para el modelo de la mini central.

Figura 5.6.3.2 Lugar de las Raíces de $k = \text{variable}$, con $T_i = 0.06467$; de la mini central



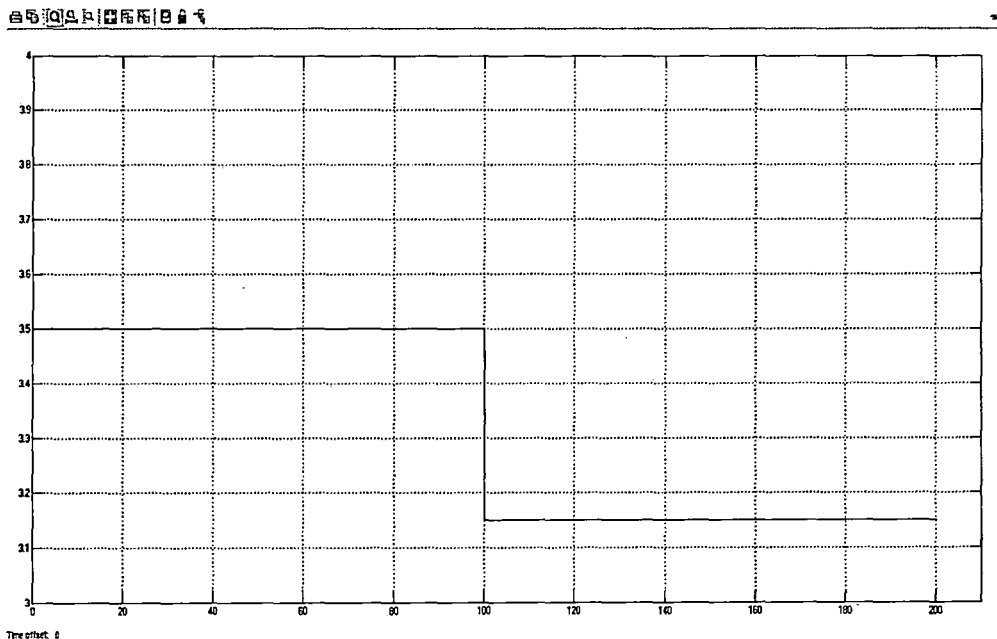
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Por lo tanto la matriz dinámica, son de tercer orden, por lo que para cada valor de la ganancia proporcional se obtienen tres auto valores o polos. Para valores reducidos de (k) los denominados polos 1 y 2 son polos conjugados mientras que el polo 3 se mantiene en el eje real. Cuando aumenta el valor de la ganancia (k) los tres polos se encuentran sobre el eje real. Por último, para valores de (k) superiores a cierto valor los polos 2 y 3 pasan a ser conjugados mientras que el polo 1 se acerca al eje imaginario pero manteniendo siempre negativa su parte real.

5.6.4 ESTUDIO DE LA RESPUESTA EN FUNCIÓN DE K

Una vez fijados los valores de (k) que garantizan la estabilidad de la mini central se plantea el estudio del comportamiento del modelo completo en función de la variación de la ganancia proporcional (k). Para ello se simula una disminución del 10% del caudal de diseño (3.5 m³/s) del río con diferentes sintonías del controlador PI (k variable) y (T_i constante). Dicha simulación permite establecer la relación entre la posición de los polos en el lugar de raíces y la dinámica de la mini central para cada valor de la ganancia (k).

Figura 5.6.4.1 Variación de caudal en el río.

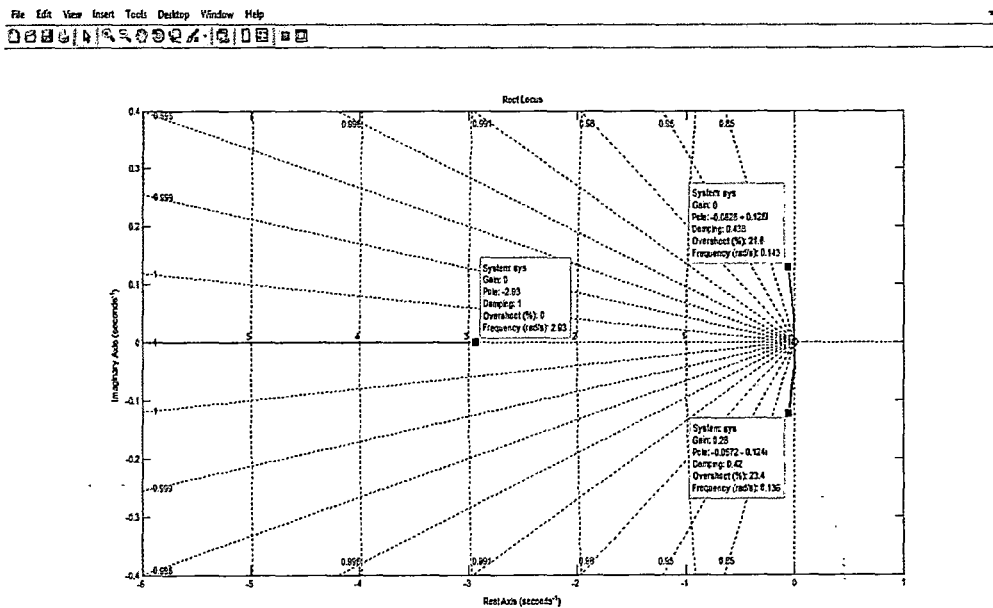


Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Como se ha comentado en apartados anteriores la posición de los polos en el lugar de raíces, su cercanía a los ejes real e imaginario así como la relación entre la posición de los diferentes polos determina la forma en que el controlador opera y por lo tanto la tipología de la respuesta es la variable controlada (nivel de agua en la cámara de carga) y la variable controladora (posición del distribuidor).

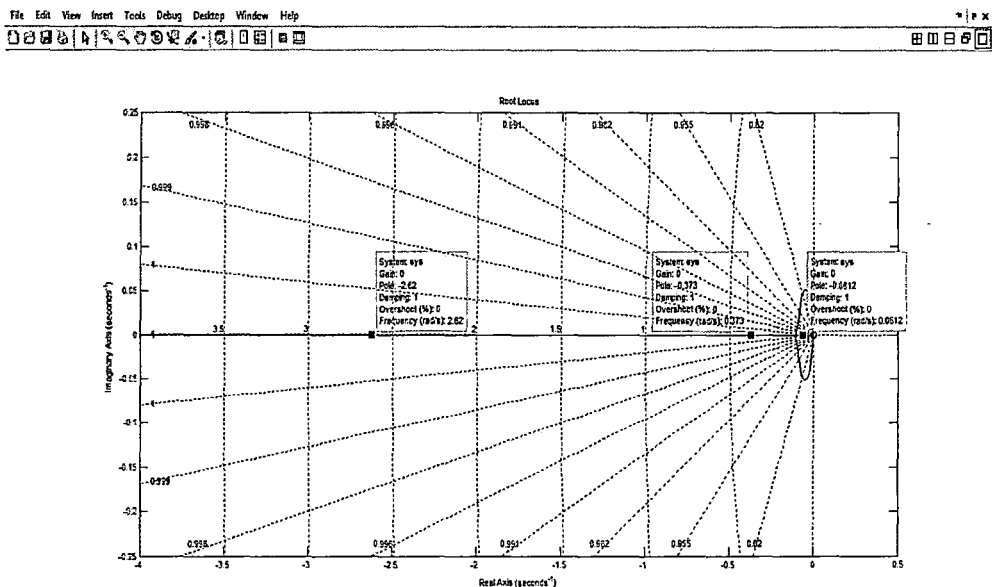
La simulación se realiza en tres casos para diferentes valores de la ganancia k (100, 300, 700). Como se puede apreciar en la figura 5.6.4.2; 5.6.4.3; 5.6.4.4 y 5.6.4.5, la selección de dichos valores permite conocer la influencia que tiene la posición de los polos del lugar de raíces en el comportamiento de la mini central. Para ($k = 100$) los polos 1 y 2 son conjugados mientras que el polo 3 se localiza en el eje real. Cuando (k) es 300 los tres polos se encuentran sobre el eje real y cuando (k) adquiere el valor de 700, son los polos 2 y 3 que pasan a ser conjugados y el polo denominado 1 se encuentra sobre el eje real y muy próximo al eje imaginario.

Figura 5.6.4.2 Lugar de las Raíces de $k = 100$ con $T_i = 0.06467$



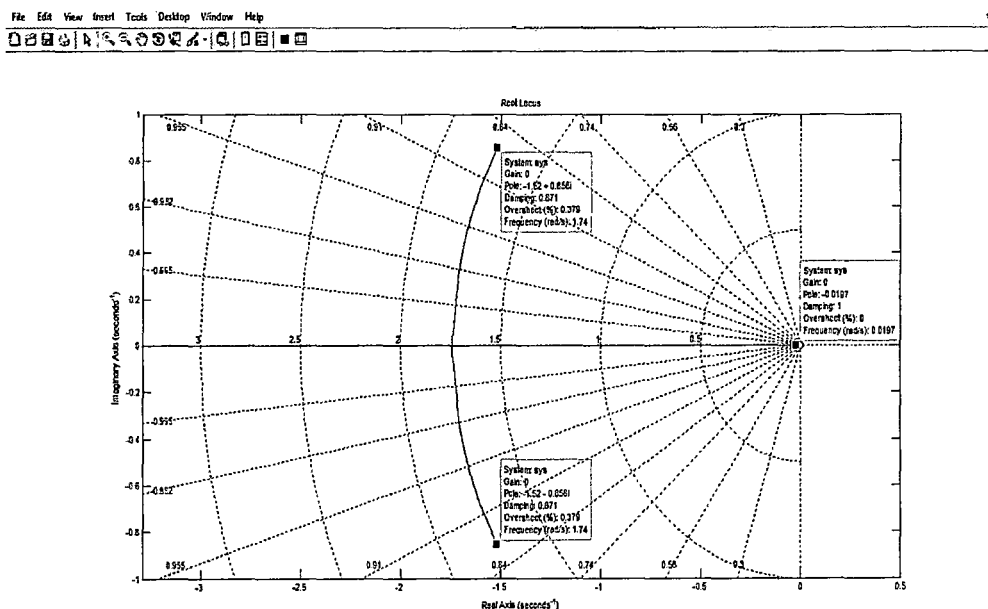
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.4.3 Lugar de las Raíces de $k = 300$ con $T_i = 0.06467$



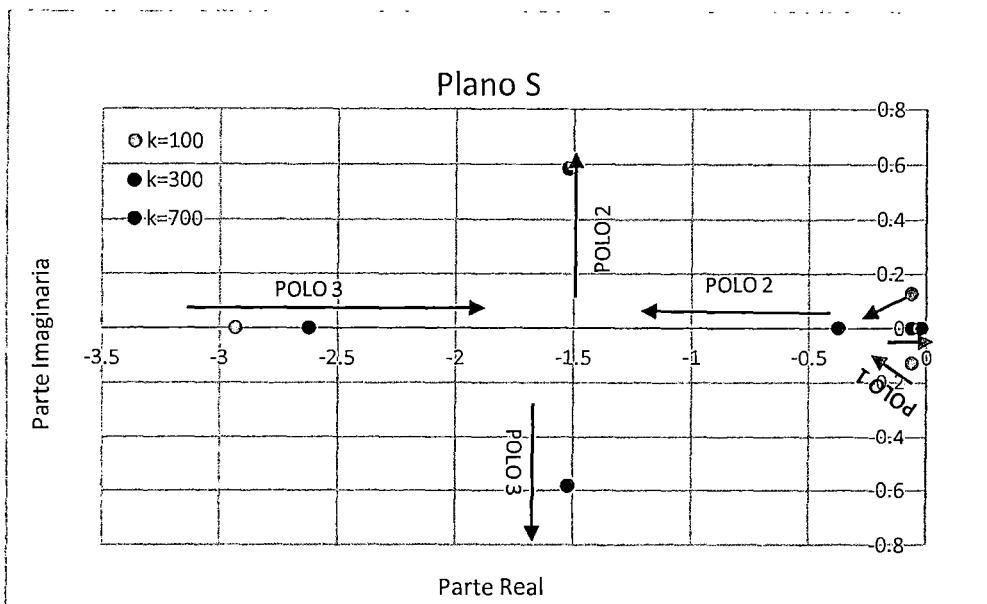
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.4.4 Lugar de las Raíces de $k = 700$ con $T_i = 0.06467$



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.4.5 Posición de los polos para los valores de k seleccionados



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

La posición de los polos permite obtener ciertos parámetros correspondientes al comportamiento de un sistema de segundo orden. Aunque el sistema de la mini central resulte de tercer orden y no se mantengan dos modos de oscilación asociados a dos parejas de polos conjugados, se mantiene la técnica de calcular los valores recogidos en la siguiente tabla 5.6.4.1. Dichos parámetros, obtenidos a partir de cada polo y que caracterizan a sistemas de segundo orden, permiten comprender y predecir el comportamiento del modelo completo, a pesar de ser éste de tercer orden.

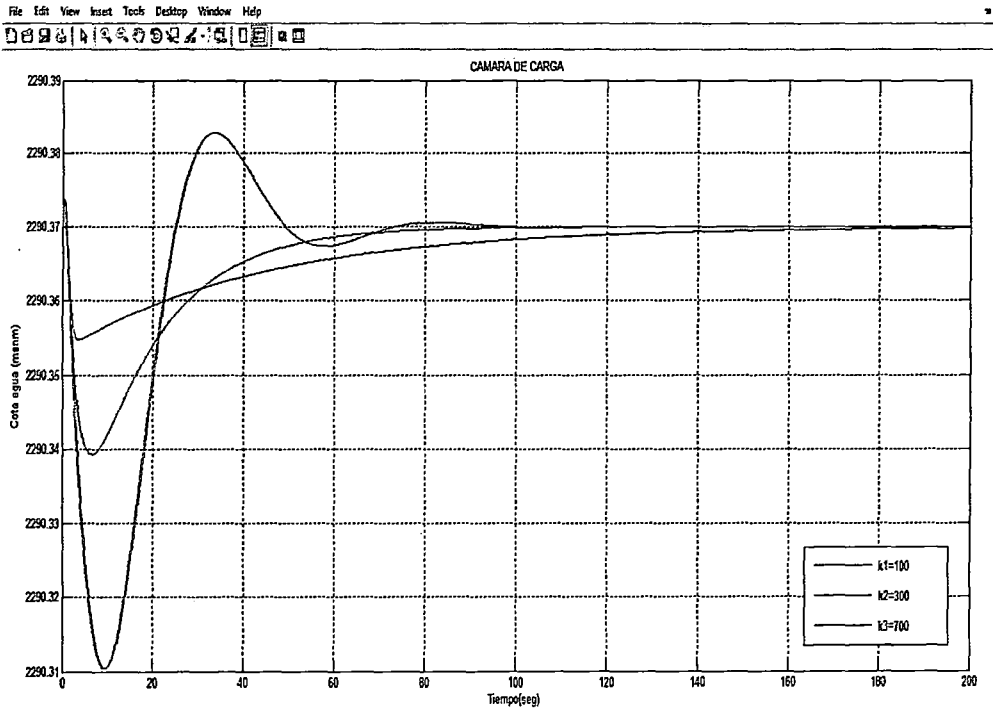
Tabla 5.6.4.1 Parámetros de los polos en función de k

k	polo	σ_d (s-1)	ω_d	ω_n (s-1)	ζ	T_d	T_p	T_e
100	1	-0.062	-0.128	0.142	0.436	49.063	24.531	64.516
	2	-0.062	0.128	0.142	0.436	49.063	24.531	64.516
	3	-2.930	-	2.930	1.000	-	-	1.365
300	1	-0.061	-	0.061	1.000	-	-	65.574
	2	-0.373	-	0.373	1.000	-	-	10.724
	3	-2.620	-	2.620	1.000	-	-	1.527
700	1	-0.020	-	0.020	1.000	-	-	200.000
	2	-1.520	0.856	1.744	0.871	7.336	3.668	2.632
	3	-1.520	-0.856	1.744	0.871	7.336	3.668	2.632

Fuente: Elaboración Propia

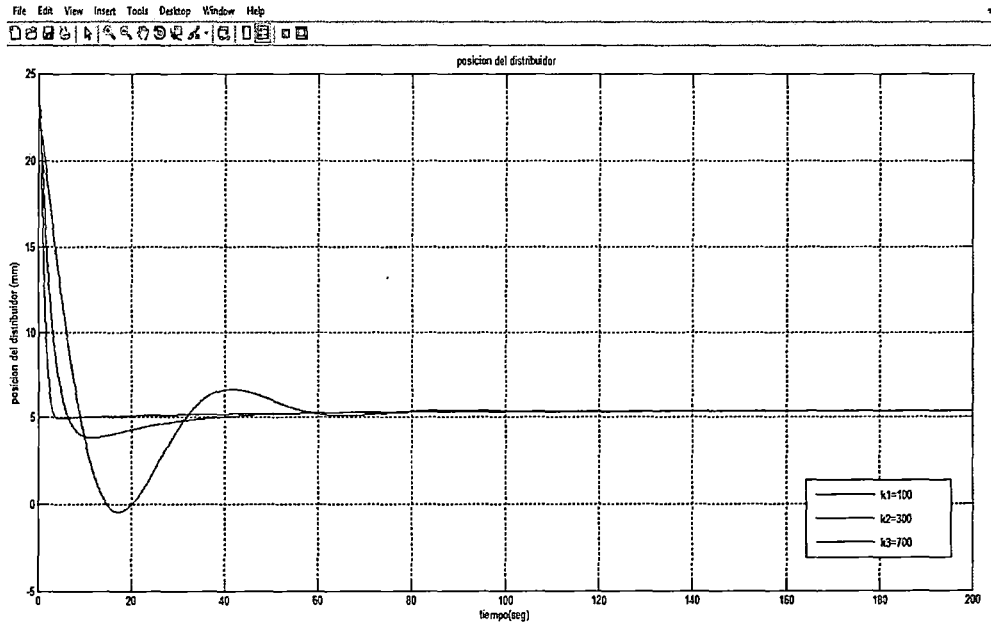
En las siguientes figuras se muestra la evolución temporal de la cota en la cámara de carga y de la posición del distribuidor, para los tres valores de (k) mencionados anteriormente. En todos ellos el valor de la ganancia integradora (T_i) se mantiene constante procedente del $T_w / \beta = 100$ ($T_i = 0,06467$ s).

Figura 5.6.4.6 Evolución temporal de la cota de agua en la Cámara de carga con variación de k .



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.4.7 Evolución temporal de la Posición del distribuidor con Variación de k .



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

En figuras anteriores, se observa que los polos que presentan menor amortiguamiento (ζ) y mayor tiempo de establecimiento (T_e) son aquéllos que mayor influencia ejercen tanto en la dinámica del distribuidor como el nivel de agua en la cámara de carga. Este fenómeno se puede resumir indicando que los polos más cercanos al eje imaginario son dominantes en el tiempo de establecimiento de la señal del sistema completo y aquéllos con menor amortiguamiento determinan la oscilación.

Cuando (k) vale 100 los polos 1 y 2 conjugados se encuentran más próximos al eje imaginario y presentan menor amortiguamiento que el polo 3. El polo 3, cuyo amortiguamiento es crítico ($\zeta = 1$), se encuentra lo suficientemente alejado del eje imaginario, donde su tiempo de establecimiento ($T_e = 1.37$ s), sea tan reducido que no influya en la respuesta de la mini central.

La ganancia (k) toma el valor de 300, como se aprecia en la figura 5.6.4.3 donde los tres polos se encuentran sobre el eje real. Dado que el amortiguamiento de los tres es uno ($\zeta = 1$), se puede predecir que la

respuesta de la mini central estará sobre amortiguada careciendo de oscilación. En este caso el polo 1 se acerca al eje imaginario mientras que el polo 2 se aleja. Por tanto la dinámica tanto del distribuidor como del nivel de agua en la cámara de carga se ve dominada por la posición del polo 1 cuyo tiempo de establecimiento es el mayor de los tres ($T_e = 65.57$ s).

El valor máximo seleccionado de (k), 700, muestra los polos 2 y 3 como polos conjugados mientras que el polo 1, sobre el eje real, se acerca al eje imaginario. Los polos conjugados presentan oscilación pero como su posición es muy alejada del eje imaginario frente al polo 1, dicha oscilación no se manifiesta en la respuesta de la mini central. El polo dominante sigue siendo el polo 1 cuyo tiempo de establecimiento, ($T_e = 200$ s)

5.6.5 DETERMINACIÓN DE LA GANANCIA K ÓPTIMA

Una vez comprobada la relación entre la posición de los polos en el lugar de raíces y la respuesta de la mini central, se estudia la selección de la ganancia (k) que no sólo asegure la estabilidad del modelo sino que proporcione una respuesta adecuada para el buen funcionamiento de la mini central.

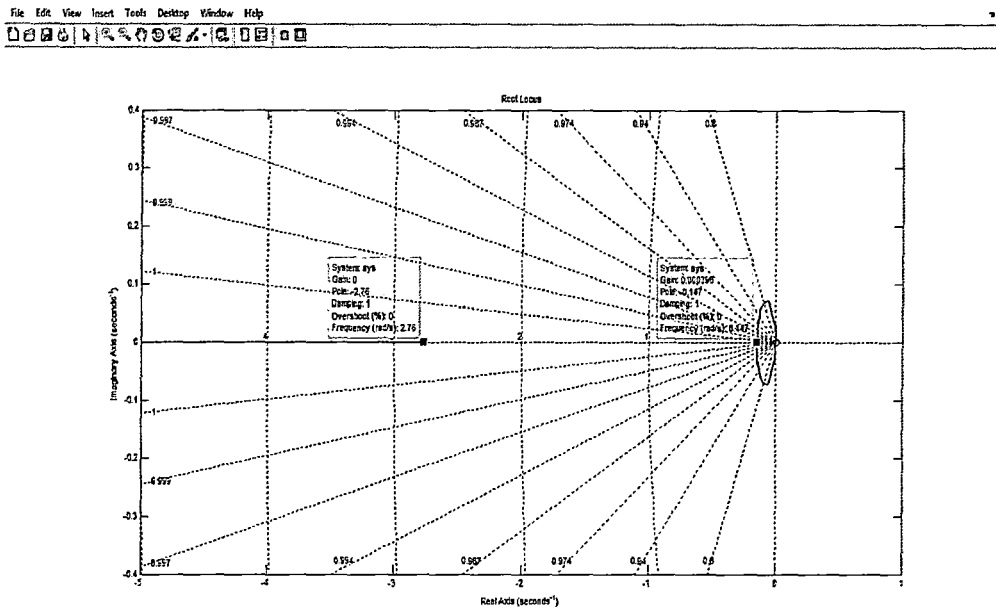
Según lo observado en las simulaciones anteriores la oscilación de la respuesta en el modelo completo, tanto de la variable controlada como de la variable que realiza el control, responde a una selección de (k) con dos polos conjugados con amortiguamiento y próximos al eje imaginario. Por otro lado la rapidez con que se amortigua la respuesta se ve determinada por la cercanía de los polos al eje real, ya que el amortiguamiento exponencial (σ_d) es inversamente proporcional al tiempo de establecimiento (T_e).

Por tanto se puede concluir que para evitar una oscilación que perjudicaría el buen funcionamiento de mecanismo que acciona el distribuidor se debe seleccionar un valor de (k) que asegure que los tres polos se encuentran sobre el eje real. Una vez eliminada la oscilación se plantea la posibilidad de reducir el tiempo de respuesta. Para ello se observa que cuanto más alejados

estén los tres polos del eje imaginario mayor será el tiempo de establecimiento de la señal.

Para ello se selecciona el valor de (k) que anula la oscilación y que minimiza el tiempo de respuesta ($k = 215.6$). Para valores menores los polos 1 y 2 tendrían amortiguamiento lo que añadiría oscilación a la respuesta. Si (k) toman valores mayores el polo 1 se desplaza hacia el eje imaginario lo que aumenta el tiempo de restablecimiento de su sistema asociado de segundo orden y por tanto el modelo completo de la mini central es de tercer orden.

Figura 5.6.5.1 Selección de $k = 215.6$ en el lugar de raíces con $T_i = 06467$



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

En la siguiente tabla se muestra los parámetros del segundo orden asociados al valor de (k) seleccionado.

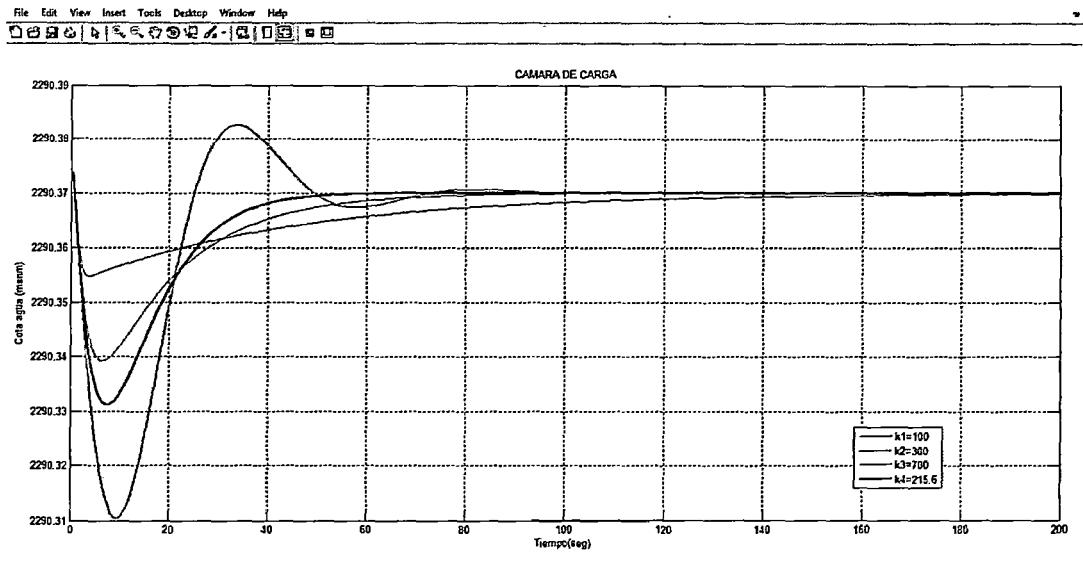
Tabla 5.6.5.1 Parámetros de los polos con $k = 215.6$

k	polo	σ_d (s-1)	ω_d	ω_n (s-1)	ζ	T_d	T_p	T_e
215.6	1	-0.147	0.000	0.147	1.000	-	-	27.211
	2	-0.147	0.000	0.147	1.000	-	-	27.211
	3	-2.760	0.000	2.760	1.000	-	-	1.449

Fuente: Elaboración Propia

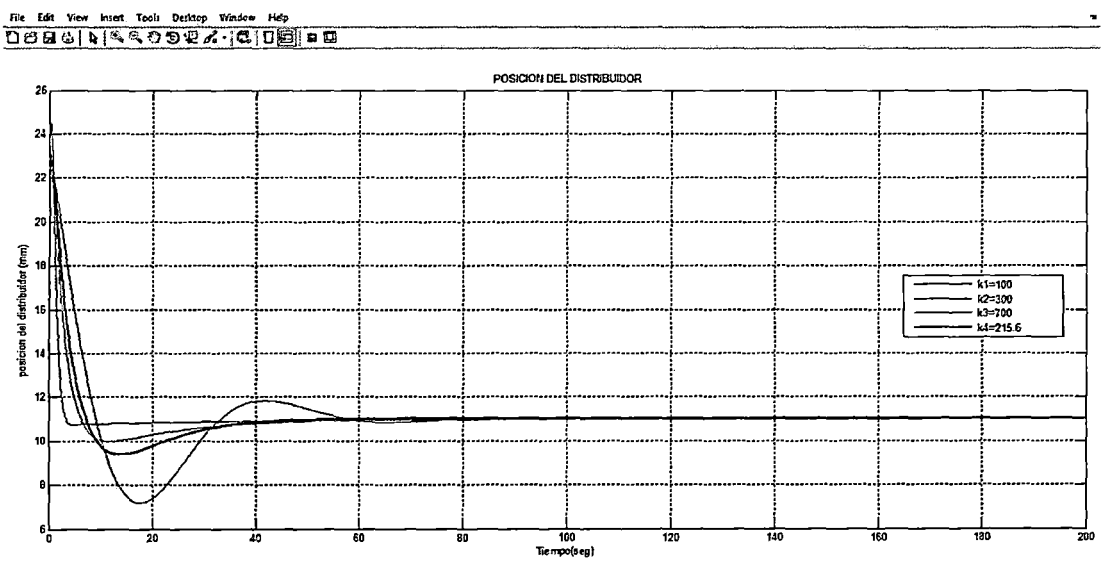
En la figura 5.6.5.2 muestra la evolución temporal del nivel del agua y de la posición del distribuidor en el modelo completo, se observa como el valor de la ganancia proporcional del controlador PI seleccionado a partir del modelo lineal mejora el comportamiento de la mini central.

Figura 5.6.5.2 Evolución temporal de la cota del agua en la Cámara de carga con la ganancia k seleccionada



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.5.3 Evolución temporal de la Posición del distribuidor con la ganancia k seleccionada



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

5.6.6 DETERMINACIÓN DE PARES ÓPTIMOS DE GANANCIAS K - T_i . ESTUDIO DE LA RESPUESTA DE LA MINI CENTRAL

En el apartado anterior se plantea la determinación de la ganancia (k) del controlador, para ello se fija previamente el valor de la ganancia integrada (T_i). A continuación se plantea la selección de la ganancia (k) para diferentes valores de (T_i) según el criterio heurístico propuesto. Cuando se varía el valor inicial de (T_i) se genera un nuevo lugar de las raíces de (k) y se selecciona (k) buscando que los tres polos se encuentren en el eje real y lo más alejado del eje imaginario, dicho valor sea diferente del obtenido anteriormente.

Por tanto, la aplicación del criterio basado en el lugar de raíces en un sistema de tercer orden lo cual implica la obtención de parejas de ganancias (k) y (T_i). En la siguiente tabla 5.6.6.1 se muestran los diferentes valores de (T_i) seleccionados para la construcción de los lugares de raíces correspondientes.

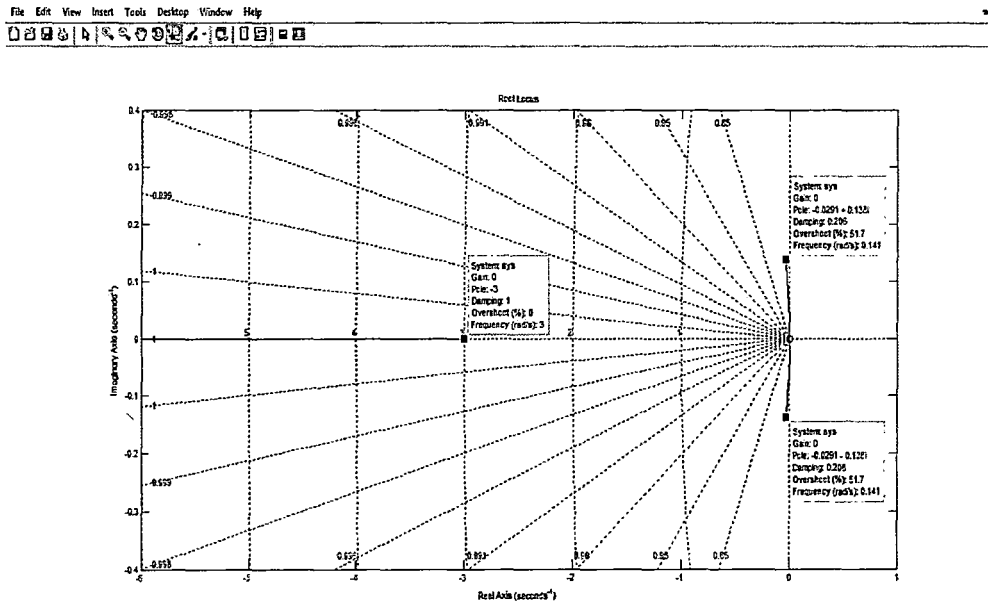
Tabla 5.6.6.1 Valores de las ganancias T_i

T_w / β	100	500	1000	1500	2000
T_i	0.06468	0.01294	0.00647	0.00431	0.00323
k	50.10	252.37	505.21	758.05	1010.89

Fuente: Elaboración Propia

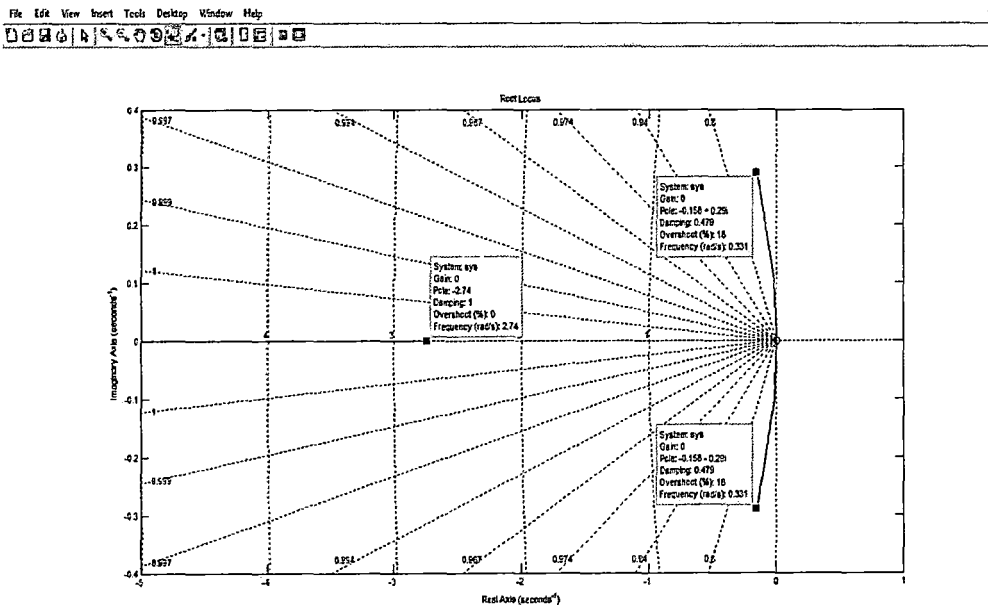
A continuación se presenta los lugares de raíces obtenidos.

Figura 5.6.6.1 Selección de $k = 50.10$ en el lugar de las raíces con $T_i = 0.06468$



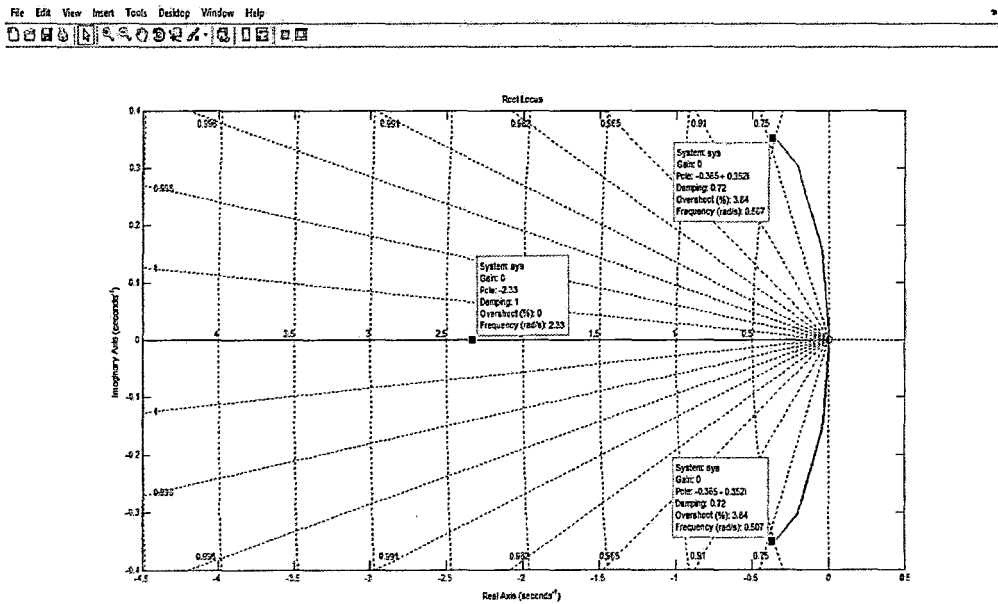
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.6.2 Selección de $k = 252.37$ en el lugar de las raíces con $T_i = 0.01294$



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.6.3 Selección de $k = 505.21$ en el lugar de las raíces con $T_i = 0.00647$

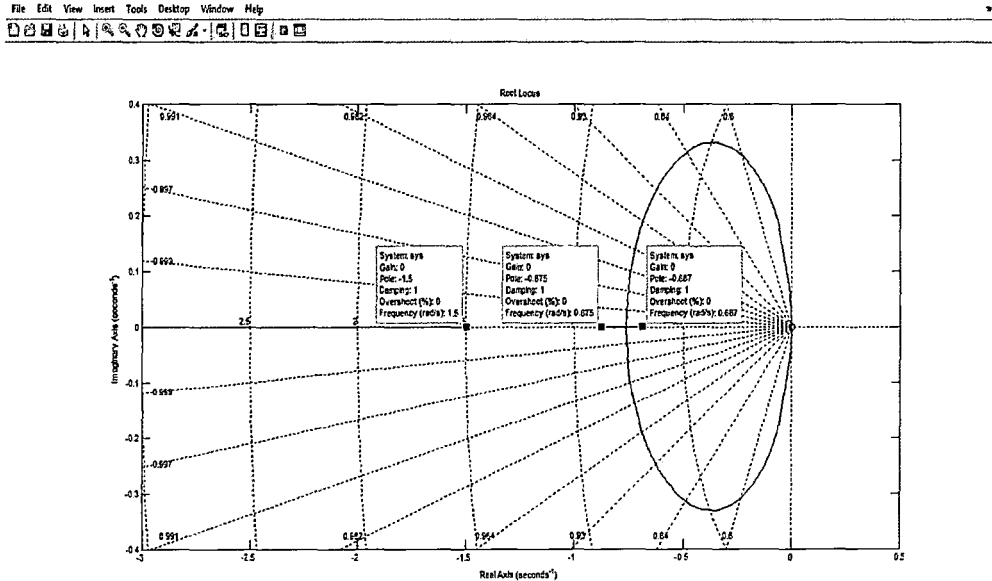


Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Se comprueba en la figura 5.6.6.1 que por debajo de cierto valor de (T_i) la disposición de los polos en el lugar de raíces varía ligeramente. En este caso el polo 3 se mantiene en todo momento sobre el eje real mientras que los polos 1 y 2 se muestran conjugados para cada valor de (k). Dado que los polos 1 y 2 nunca se encuentran sobre el eje real es imposible hacer desaparecer completamente la oscilación de la respuesta.

El tiempo de establecimiento es función de la lejanía de los polos respecto del eje imaginario, por lo que el valor de (k) seleccionado es el correspondiente a aquel que iguala las partes reales de los tres polos. De este modo se reduce el tiempo de establecimiento de la respuesta. En los siguientes casos se aplicará dicho criterio, igualar la parte real de los tres polos, para la determinación de la ganancia (k) a partir de (T_i).

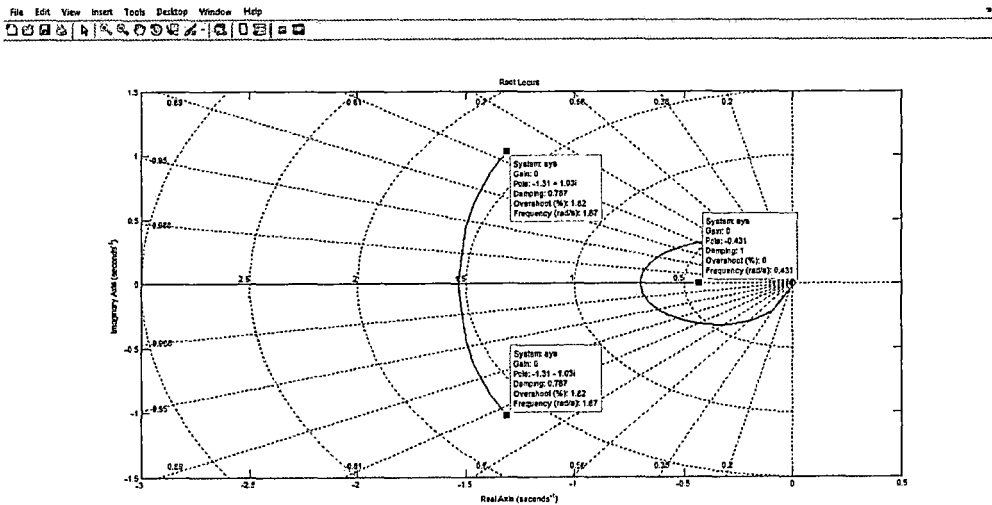
Figura 5.6.6.4 selección de $k = 758.05$ en el lugar de raíces de k con $T_i = 0.00431$



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

De esta forma, aunque los polos 1 y 2 presenten cierto amortiguamiento, tabla 5.6.6.2, que se traduce en una pequeña oscilación en la respuesta del modelo completo, figura 5.6.6.4, el comportamiento de la mini central es satisfactorio.

Figura 5.6.6.5 Selección de $k = 1010$ en el Lugar de las raíces con $T_i = 0.00323$



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

En la siguiente tabla se muestran los parámetros asociados a la posición de los polos seleccionados anteriormente. Dichos parámetros obtenidos a partir del modelo lineal permiten comprender con mayor profundidad los resultados de las simulaciones realizadas con el modelo completo.

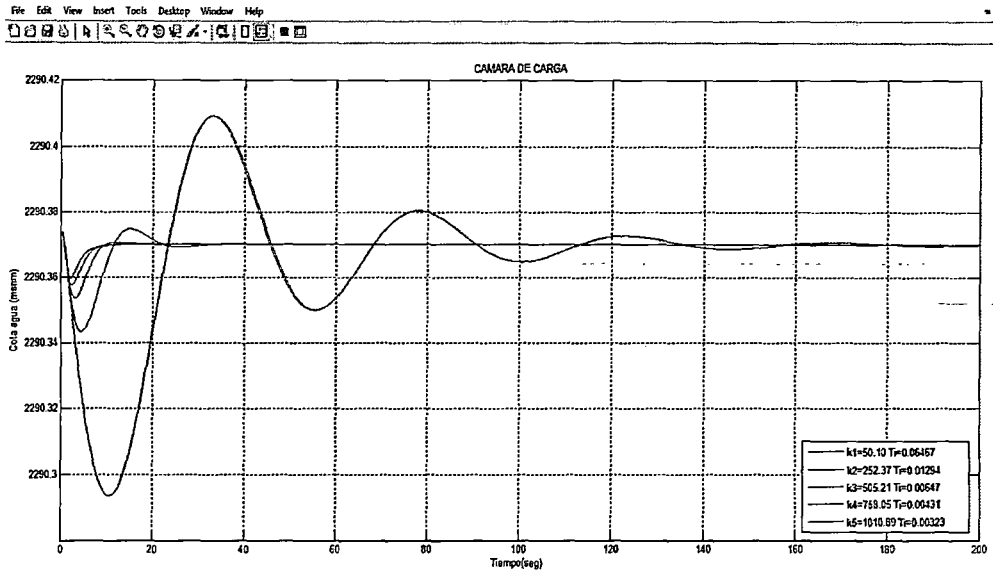
Tabla 5.6.6.2 Parámetros de los polos en función de las parejas de k y T_i .

T_w/β	T_i (s)	k	polo	σ_d (s-1)	ω_d	ω_n (s-1)	ζ	T_d	T_p	T_e
100	0.06468	50.10	1	-0.029	0.138	0.141	0.206	45.50	22.75	137.45
			2	-0.029	-0.138	0.141	0.206	45.50	22.75	137.45
			3	-2.760	0.00	2.760	1.000	-	-	1.44
500	0.01294	252.37	1	-0.158	0.290	0.330	0.478	21.65	10.82	25.31
			2	-0.158	-0.290	0.330	0.478	21.65	10.82	25.31
			3	-2.740	0.000	2.740	1.000	-	-	1.46
1000	0.00647	505.21	1	-0.365	0.352	0.507	0.720	17.84	8.92	10.95
			2	-0.365	-0.352	0.507	0.720	17.84	8.92	10.95
			3	-2.330	0.000	2.330	1.000	-	-	1.71
1500	0.00431	758.05	1	-0.687	0.000	0.687	1.000	-	-	5.82
			2	-0.875	0.000	0.875	1.000	-	-	4.57
			3	-1.500	0.000	1.500	1.000	-	-	2.66
2000	0.00323	1010.89	1	-0.431	0.000	0.431	1.000	-	-	9.28
			2	-1.310	1.030	1.666	0.786	6.09	3.04	3.05
			3	-1.310	-1.030	1.666	0.786	6.09	3.04	3.05

Fuente: Elaboración Propia

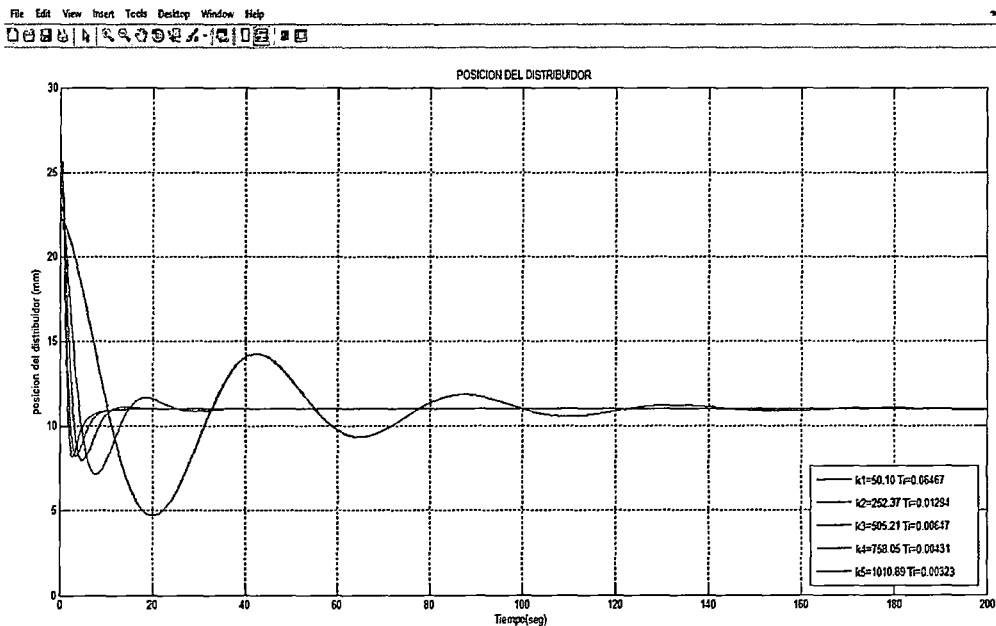
La figura siguiente muestra los resultados de simular la mini central, sintonizando el controlador PI con las parejas de ganancias obtenidas.

Figura 5.6.6.6 Evolución temporal de la cota de agua en la Cámara de carga para las parejas de (k) y (T_i) , mini central con Cámara de carga



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.6.7 Evolución temporal de la Posición del distribuidor para las parejas de (k) y (T_i) , mini central con Cámara de carga



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Como conclusión se puede establecer, que al reducir el valor de (T_i) (aumentar T_w/β) implica que el valor de (k) seleccionado crezca. Esto

implica que el tiempo de establecimiento disminuya como se aprecia en la figura.

Por ejemplo; cuando la constante del controlador PI es $k = 50.10$, $T_i = 0.06467$ el tiempo de establecimiento es de ($T_e = 137.45$ s), y cuando aumentamos el valor de ($k = 758.65$) disminuye el valor de ($T_i = 0.00431$), el tiempo de establecimiento se reduce hasta ($T_e = 5.82$ s), y cuando toma los valores de ($k = 1010.89$), ($T_i = 0.00323$) las cuales varían fuera de su límite de sintonización del controlador PI, el tiempo de establecimiento empieza a crecer en ($T_e = 9.28$ s).

5.6.7 SELECCIÓN DEL PAR DE GANANCIAS ÓPTIMOS K-T_i. PARA LA CALIBRACIÓN DEL CONTROLADOR PI

Después de analizar los lugares de raíces del modelo lineal y completar el análisis con la simulación en el modelo completo de la mini central, se plantea la selección de la pareja de ganancias del controlador PI que mejor se adapte al funcionamiento óptimo de la mini central.

Para ello se observan los dos criterios que se han utilizado para la obtención de las diferentes parejas de ganancias:

- Cuando se selecciona el valor de (k) que sitúa los tres polos en el eje real del lugar de raíces y lo más alejados del eje imaginario. De esta forma se evita la oscilación y se minimiza el tiempo de establecimiento.
- Cuando el valor de la ganancia integradora (T_i) resulta menor que cierto valor, no es posible evitar la oscilación pero se puede conseguir que los tres polos tengan la misma parte real, lo que minimiza más el tiempo de establecimiento.

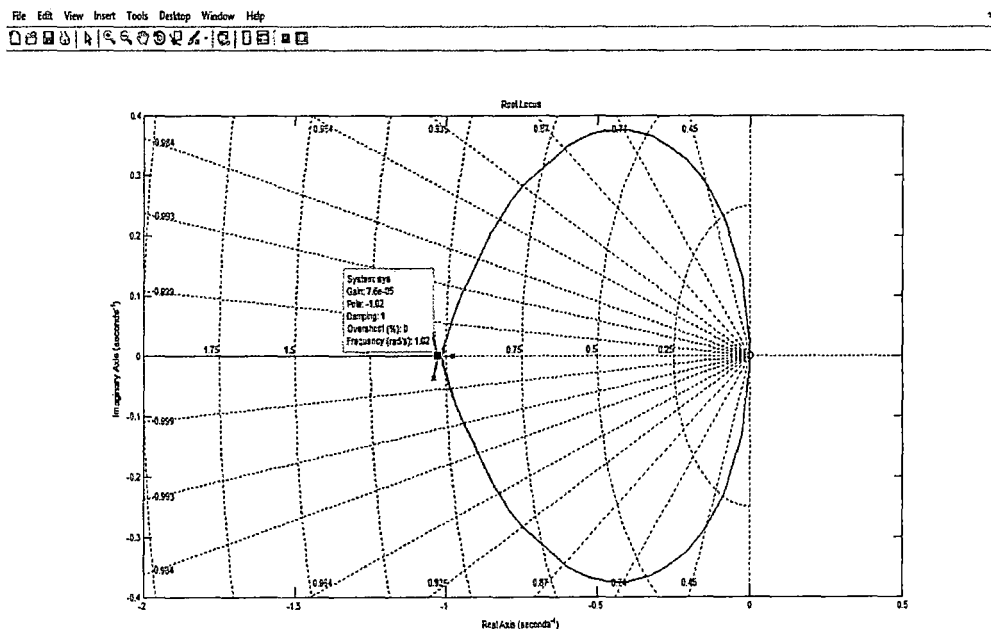
Como criterio conjunto se opta por seleccionar el valor de (T_i) límite a partir del cual aparece la oscilación. Esto permite construir un lugar de raíces para que cierto valor de la ganancia (k) sitúa los tres polos sobre el eje real y con la misma parte imaginaria, es decir, un polo triple.

Los parámetros asociados a cada pareja de ganancias seleccionadas se muestran en la tabla 5.6.7.1.

Se observa que el controlador sintonizado mediante el criterio heurístico, aunque produce mayor sobrepaso en la variable controlada, que otras soluciones, evita la pequeña oscilación que dichas soluciones producen en la posición del distribuidor. Dado que la oscilación es muy pequeña se debe reconocer que el criterio heurístico propuesto no supone una mejora considerable de la respuesta de las mini centrales. Esto se debe a que todas y cada una de las parejas determinadas, proporcionan una sintonización aceptable para el controlador.

Dado que el objetivo de la sintonización, es mejorar el funcionamiento del distribuidor; se concluye que el criterio, es aceptable dado que reduce la oscilación del distribuidor, lo cual es aconsejable para el buen mantenimiento del mecanismo servo-hidráulico que lo acciona.

Figura 5.6.7.1 Lugar de las Raíces y selección de $k = 804.30$ en el lugar de las raíces con $T_i = 0.00366$



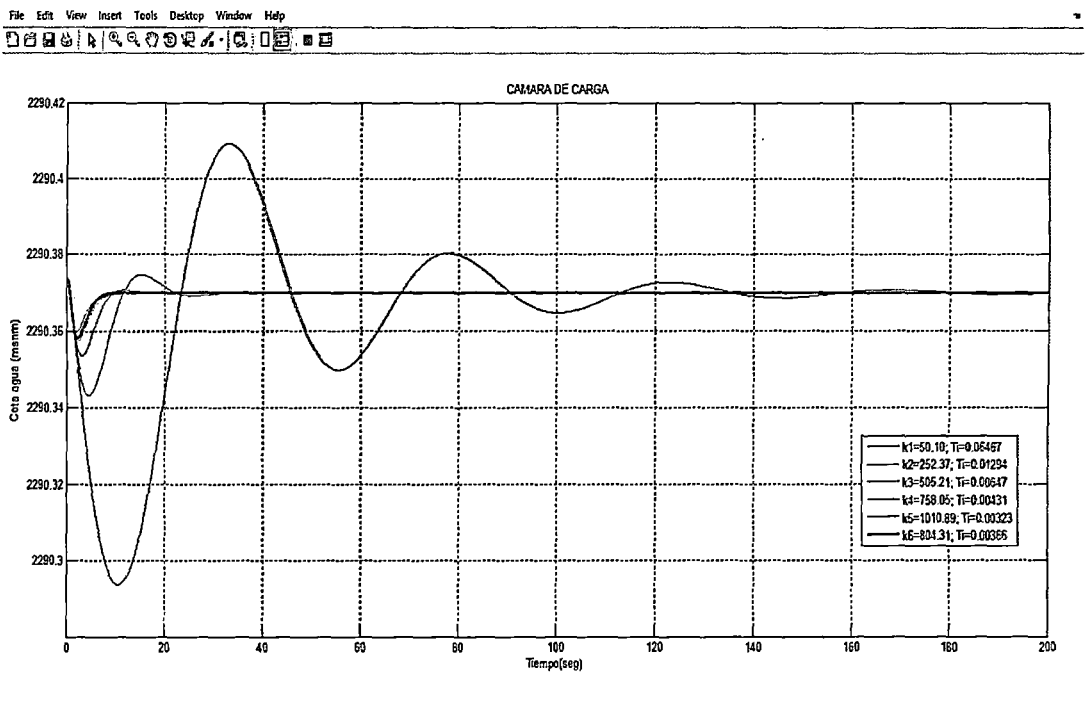
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Tabla 5.6.7.1 Parámetros de los polos en función de la pareja k y T_i seleccionada

T_w/β	T_i (s)	k	polo	σ_d (s-1)	ω_d	ω_n (s-1)	ζ	T_d	T_p	T_e
1765	0.00366	804.31	1	-1.020	0.00	1.020	1.0	-	-	3.922
			2	-1.020	0.00	1.020	1.0	-	-	3.922
			3	-1.020	0.00	1.020	1.0	-	-	3.922

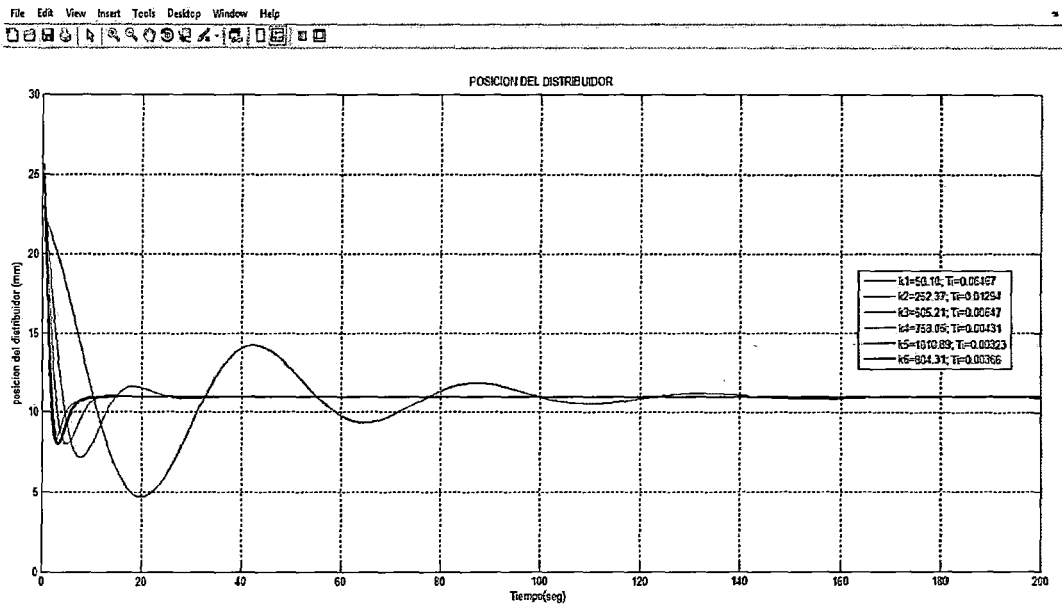
Fuente: Elaboración Propia

Figura 5.6.7.2 Evolución temporal de cota de agua en la Cámara de carga para la pareja de k y T_i seleccionada.



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.7.3 Evolución temporal de la Posición del distribuidor para la pareja de k y T_i seleccionada



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

5.6.8 COMPORTAMIENTO DE LA MINI CENTRAL EN DIFERENTES PUNTOS DE FUNCIONAMIENTO

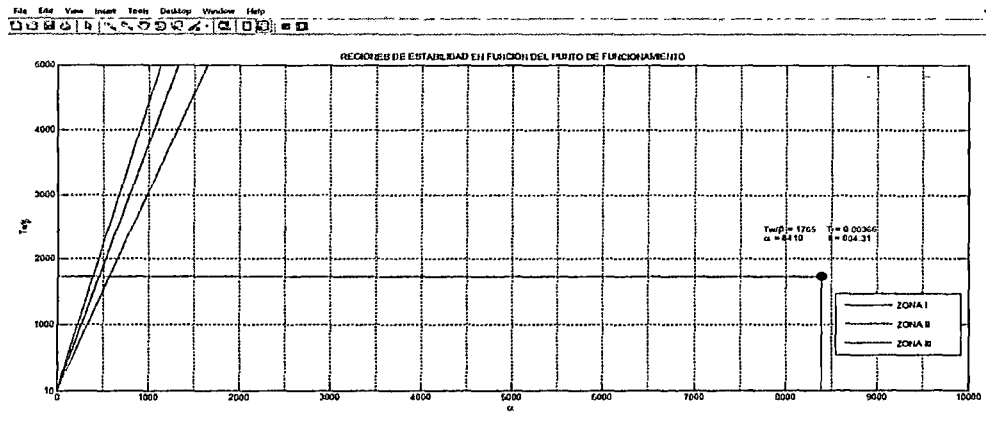
En los apartados anteriores se ha planteado una metodología en la que partiendo del lugar de raíces del modelo lineal y completando la información obtenida mediante simulaciones en el modelo completo se permite la selección de las ganancias (k) y (T_i) del controlador PI. El criterio para la determinación de las ganancias seleccionadas persigue, aparte de garantizar la estabilidad de la mini central, el buen funcionamiento mecánico del dispositivo servo-hidráulico que acciona el distribuidor.

Como se observó en las regiones de estabilidad, el punto de operación en que opera la mini central influye en la estabilidad. De este modo la mini central cuando opera con baja carga, es decir con pequeños caudales, se observa que la región de estabilidad es ligeramente mayor que cuando lo hace en condiciones nominales o con sobrecarga.

Dado que los lugares de raíces que han permitido la sintonización del controlador PI, suponiendo que la mini central opera en condiciones

nominales, es predecible que un cambio del escenario de operación modifique el comportamiento de la mini central si se mantienen las ganancias obtenidas en condiciones nominales.

Figura 5.6.8.1 Situación de las ganancias del controlador en las regiones de Estabilidad



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Si se sitúa el punto que representa las ganancias (k) y (T_i) en las regiones de estabilidad, figura 5.6.8.1, se observa que el punto se encuentra dentro de la región de estabilidad de las tres zonas de operación. Por tanto podemos asegurar que con dichas ganancias la mini central se muestra estable bajo cualquier condición de funcionamiento.

En la figura 5.6.8.1, se comprueba que el punto que representa las ganancias se encuentra suficientemente alejado de la línea que delimita la región de estabilidad de las tres zonas como para presuponer que la respuesta de la mini central en cualquiera de los tres puntos de operación (baja carga, carga nominal y sobre carga) será suficientemente satisfactoria.

Dicha afirmación coincide con los resultados de las simulaciones que se efectúan en el modelo completo. Se simula una disminución brusca del 10 % del caudal nominal turbinado (3.5 m³/s) cuando la mini central opera en los tres puntos de operación correspondientes a las tres zonas I, II y III. En todas ellas se mantiene el controlador PI sintonizado con las ganancias obtenidas en el apartado anterior.

Cuando la mini central opera en condiciones nominales, el caudal del río es de 3.5 m³/s, zona I. Si el caudal que llega a la cámara de carga es de 2.5

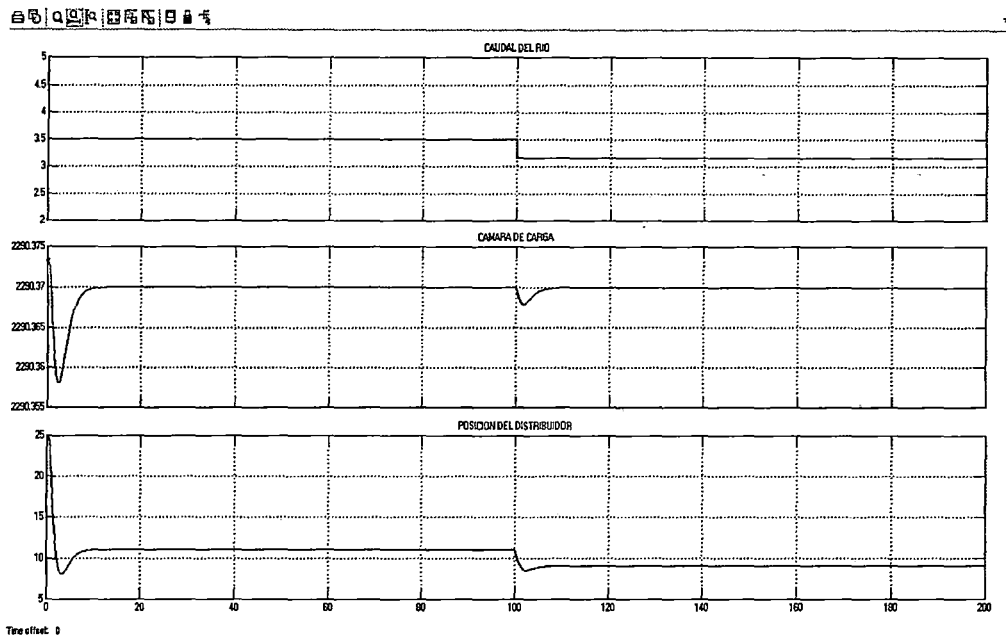
m³/s, se opera en baja carga, zona II. En el caso de que el caudal supere el valor nominal llegando a los 4.8 m³/s el punto de operación de la mini central corresponde a sobre carga, zona III.

Si la mini central opera en diferentes puntos de funcionamiento manteniendo la sintonización del controlador PI, no cambia sustancialmente el comportamiento de la mini central. Si se observa detenidamente las figuras siguientes, se comprueba que cuando se turbinan un caudal menor que el nominal, se comprueba que el sobrepaso es ligeramente menor que en condiciones nominales. Esto confirma que la estabilidad y el control, mejora cuanto menor es el caudal que se turbinan.

Cuando la mini central opera con sobre carga, tanto el sobrepaso como el tiempo en que se atenúa la oscilación son mayores que cuando se turbinan caudales inferiores. Esta variación es muy sutil por lo que se puede concluir que la modificación del punto de operación no supone un cambio notable en el comportamiento del sistema si se mantienen las ganancias del controlador sintonizadas para la situación nominal de funcionamiento.

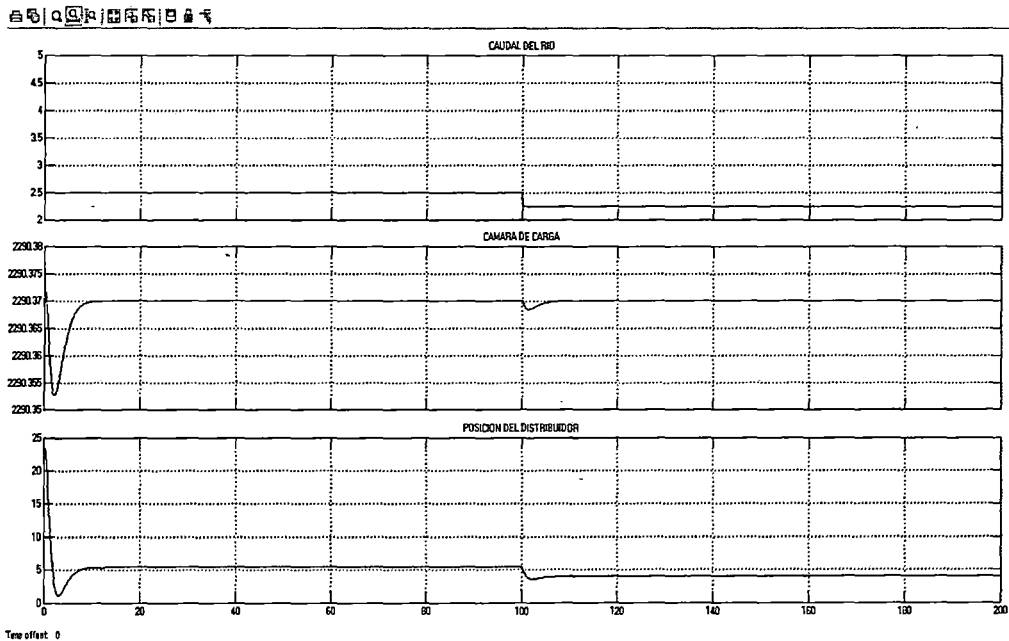
En las figuras siguientes se muestran los resultados de las simulaciones de carga nominal, baja carga y sobre carga respectivamente de la mini central.

Figura 5.6.8.2 Caudal del canal, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal 3.5m³/s (ZONA I)



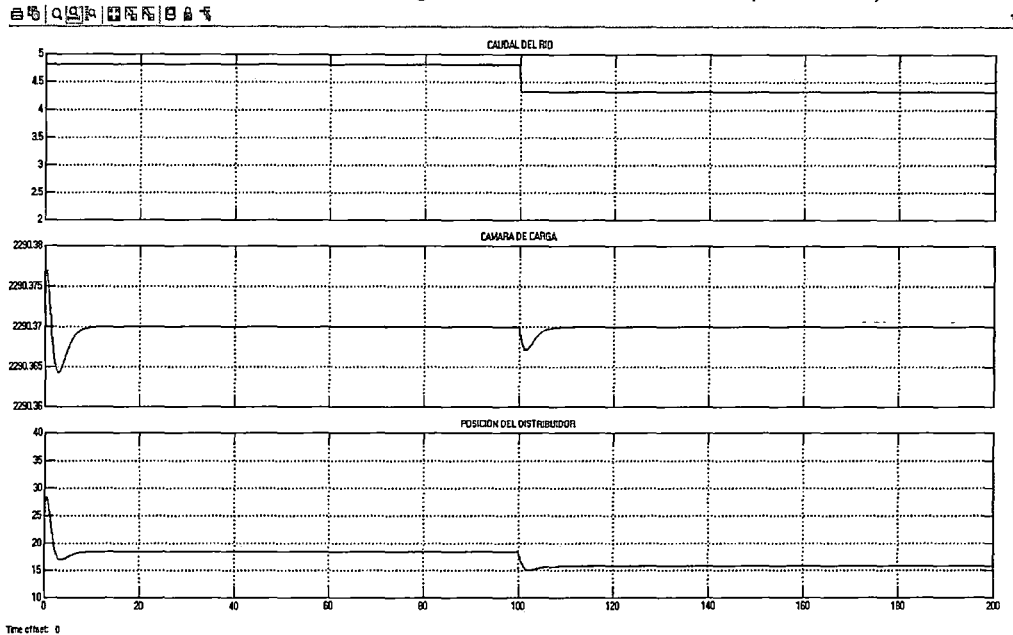
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.8.3 Caudal del canal, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal 2.5 m³/s (ZONA II)



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.6.8.4 Caudal del canal, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal 4.8 m³/s (ZONA III)



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

5.7 AJUSTE DEL CONTROLADOR PI

5.7.1 INTRODUCCIÓN

En el apartado anterior se han realizado simulaciones en el modelo completo en las que se contemplaba la modificación del punto de operación de la mini central manteniendo las ganancias del controlador PI obtenidas en condiciones nominales. Los resultados obtenidos permiten concluir, que la variación del punto de funcionamiento de la mini central no modifica notablemente la acción del controlador sintonizado en condiciones nominales a partir del criterio heurístico.

A continuación se plantea la formulación matemática del criterio heurístico establecido a partir de la técnica del lugar de raíces. El objetivo de dicha formulación es el de establecer expresiones que permitan sintonizar el controlador PI de una mini central con control en la cámara de carga.

Dado que las ecuaciones resultantes incluyen datos referentes al punto de operación de la mini central, se estudia posteriormente mediante simulaciones

en el modelo completo, qué ajuste las ganancias obtenidas para cada punto de operación.

5.7.2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

Tomando como referencia el criterio heurístico enunciado anteriormente se plantea la posibilidad de establecer una relación numérica entre el punto de funcionamiento de la turbina y los parámetros óptimos del controlador.

El sistema es de tercer orden, es decir, los polos de la matriz dinámica se pueden expresar genéricamente como una pareja de polos conjugados y un polo sobre el eje real.

$$P_{1,2} = a \pm jb \quad P_3 = c \quad (5.40)$$

Partiendo de dichos polos que son raíces del polinomio característico, dicho polinomio se puede expresar:

$$P(\lambda) = [\lambda - (a + jb)][\lambda - (a - jb)][\lambda - c] \quad (5.41)$$

El criterio heurístico planteado anteriormente sugiere que:

➤ Los tres polos coinciden en un mismo punto que pertenece al eje real, o que implica:

$$a = c = -\sigma_d \quad b = 0 \quad (5.42)$$

Introduciendo estos conceptos en el polinomio característico se obtiene la siguiente expresión:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (2\sigma_d + \sigma_d)\lambda^2 + (\sigma_d^2 + 2\sigma_d\sigma_d)\lambda - (-\sigma_d^2)\sigma_d \quad (5.43)$$

Que desarrollada resulta:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\sigma_d \lambda^2 + 3\sigma_d^2 \lambda + \sigma_d^3 \quad (5.44)$$

Partiendo del polinomio característico puede expresarse en función de los parámetros que configuran la mini central:

$$P(A) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \quad (5.45)$$

$$a_1 = \frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^0}{T_w} \quad (5.46)$$

$$a_2 = \frac{b_{11} + b_{13} \alpha}{T_w T_c b_{11}} \quad (5.47)$$

$$a_3 = \frac{b_{13}}{T_w T_c b_{11} \beta} \quad (5.48)$$

Dónde:

$$\alpha = \frac{KH_b}{X_b} \quad \beta = \frac{T_i X_b}{H_b} \quad (5.49)$$

Igualando los polinomios característicos y sustituyendo los valores de α y β se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de tercer orden:

$$3\sigma_d = \frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_i^0}{T_w} \quad (5.50)$$

$$3\sigma_d^2 = \frac{b_{11} + b_{13} \alpha}{T_w T_c b_{11}} \quad (5.51)$$

$$\sigma_d^3 = \frac{b_{13}}{T_w T_c b_{11} \beta} \quad (5.52)$$

Si se introduce σ_d en la segunda ecuación del sistema se obtiene el valor de (k):

$$3 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_t^0}{T_w} \right) \right]^2 = \frac{b_{11} + b_{13} \alpha}{T_w T_c b_{11}} \quad (5.53)$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_t^0}{T_w} \right)^2 T_w T_c b_{11} = b_{11} + b_{13} \alpha \quad (5.54)$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{KH_b}{X_b} \quad (5.55)$$

Entonces

$$k = \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_t^0}{T_w} \right)^2 T_w T_c b_{11} - b_{11} \right\} \frac{X_b}{b_{13} H_b} \quad (5.56)$$

Utilizando la tercera ecuación del sistema es posible despejar el valor de (T_i):

$$\left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_t^0}{T_w} \right) \right]^3 = \frac{b_{13}}{T_w T_c b_{11} \beta} \quad (5.57)$$

$$\left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_t^0}{T_w} \right)^3 \frac{T_w T_c b_{11}}{27} = \frac{b_{13}}{\beta} \quad (5.58)$$

$$\text{Si } \beta = \frac{T_i X_b}{H_b} \quad (5.59)$$

Entonces

$$\frac{1}{T_i} = \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2pq_t^0}{T_w} \right)^3 \frac{T_w T_c b_{11}}{27} \frac{X_b}{b_{13} H_b} \quad (5.60)$$

Utilizando las expresiones (5.56) y (5.60) es posible determinar las ganancias apropiadas para la mini central, determinando el punto de operación. En el siguiente apartado se plantea qué punto de operación permite el ajuste que mejor se adapte a la mini central.

5.7.3 APLICACIÓN A LA MINI CENTRAL MODELADA

La formulación obtenida permite obtener las ganancias del controlador PI que garantizan una respuesta estable en la mini central. Los parámetros que influyen en las expresiones obtenidas son básicamente las dimensiones y materiales de los componentes que configuran la mini central y el punto de operación de la misma.

Tomando como valores de referencia de la mini central hidroeléctrica de Aobamba, se pueden obtener los valores de las ganancias que mejor se ajustan a la mini central en los tres puntos de operación utilizados en el presente estudio, funcionamiento nominal, baja carga y sobre carga.

Tabla 5.7.3.1 Punto de funcionamiento de la Turbina y parámetros del Controlador

PUNTO	ZONA I	ZONA II	ZONA III
q_i^0	1.0000	0.7143	1.3714
b_{11}	0.5428	0.4602	0.6813
b_{13}	1.1121	0.3929	1.0214
k	804.31	2630.62	724.13
$1/T_i$	273.25	1043.27	199.69
T_i	0.00366	0.00096	0.00501

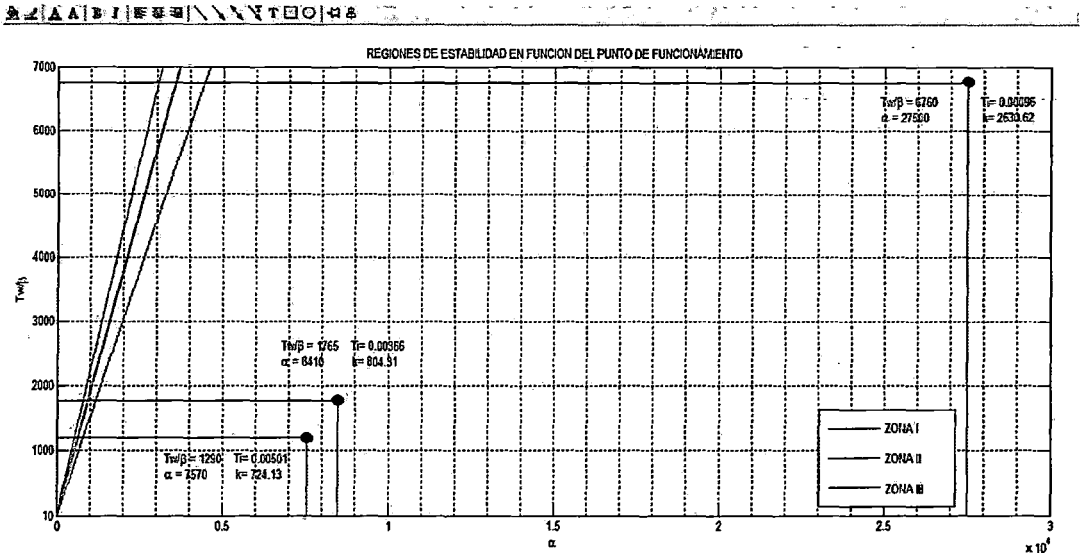
Fuente: Elaboración Propia

Como se puede comprobar a partir de los valores obtenidos en ambas tablas la modificación del punto de operación de la mini central no supone un cambio notable en las ganancias del controlador (k) y (T_i).

Si se introducen los puntos correspondientes a la sintonización del controlador PI en cada punto de operación, en las regiones de estabilidad, figura 5.7.3.1,

se comprueba que los tres puntos se encuentran próximos entre sí y asegurando la estabilidad del sistema en cualquier condición de operación de la mini central.

Figura 5.7.3.1 Situación de las ganancias del controlador correspondientes a cada zona de operación en las regiones de Estabilidad



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

En las figuras 5.7.3.2, 5.7.3.3, 5.7.3.4, se muestra el resultado de las simulaciones realizadas en la mini central. Cada figura corresponde a carga nominal, baja carga y sobre carga respectivamente. En cada una de ellas se observa la influencia de las tres parejas de ganancias.

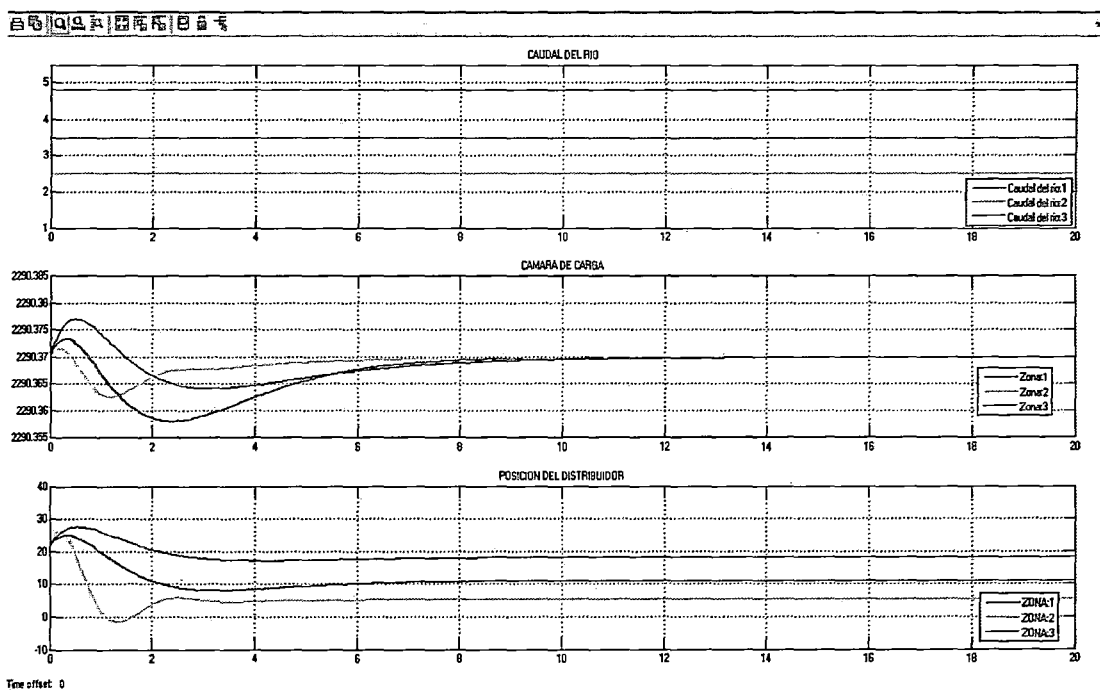
En cualquiera de las situaciones de carga que se plantean, la respuesta es satisfactoria para todas y cada una de las parejas de ganancias. El sobrepaso de la oscilación de la cota de la cámara de carga es similar al igual que el tiempo de establecimiento de la respuesta para las tres situaciones.

Si se sintoniza el controlador PI con las ganancias obtenidas a partir de baja carga, zona II, la respuesta de la mini central es más rápida en las tres simulaciones y el sobrepaso es menor. La dificultad que se presenta en esta sintonización del controlador es que aparece una ligera oscilación cuando el caudal turbinado es mayor, es decir en situación nominal o de sobre carga.

Dado que la filosofía del criterio heurístico establecido en el presente capítulo se basa en preservar el buen funcionamiento del controlador PI, evitar su oscilación, aunque esto suponga un mayor sobrepaso de la variable controlada, se opta por adoptar las ganancias del controlador PI obtenidas a partir de la situación de operación nominal, zona I.

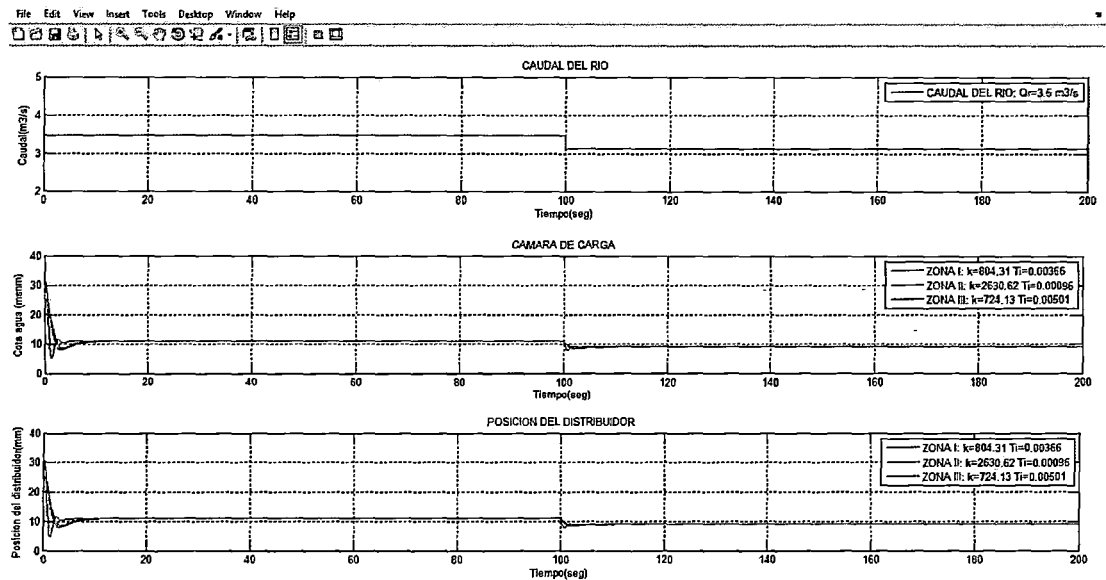
Dicha selección se ha basado en la prioridad de un criterio que favorece el buen funcionamiento del mecanismo servo-hidráulico que acciona el controlador. Pero a la vista de los resultados de las simulaciones en los que se muestra un comportamiento muy similar para todas las sintonizaciones del controlador, cualquiera ellas sería correcta y adecuada para componer un controlador PI que pueda ejercer su función bajo cualquier situación de carga.

Figura 5.7.3.2 Caudal del río, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, para las 3 Zonas.



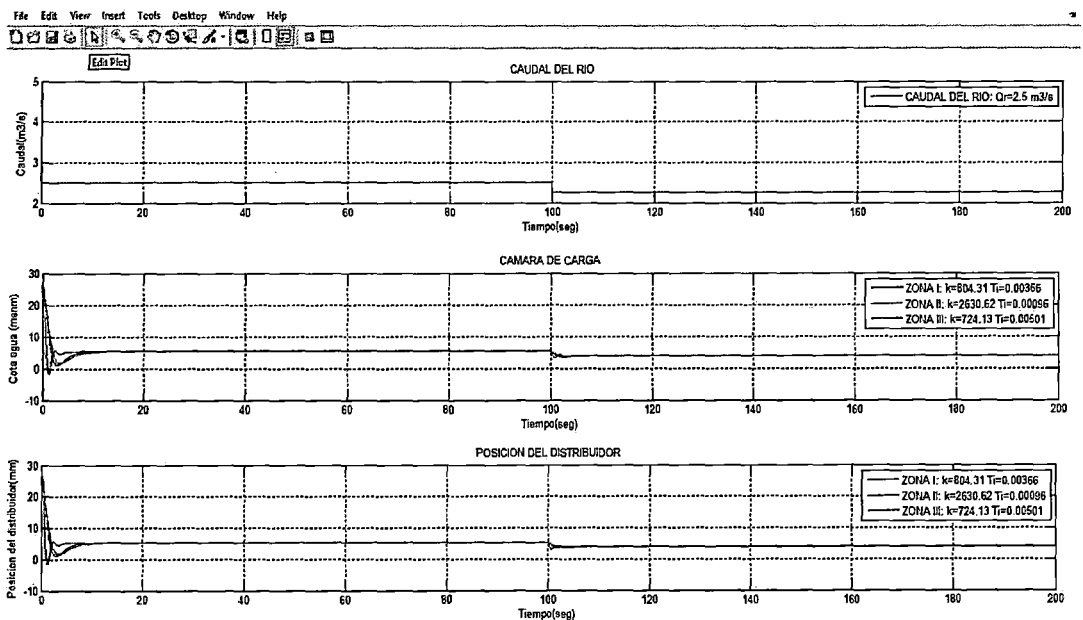
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.7.3.3 Caudal del río, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal 3.5 m³/s



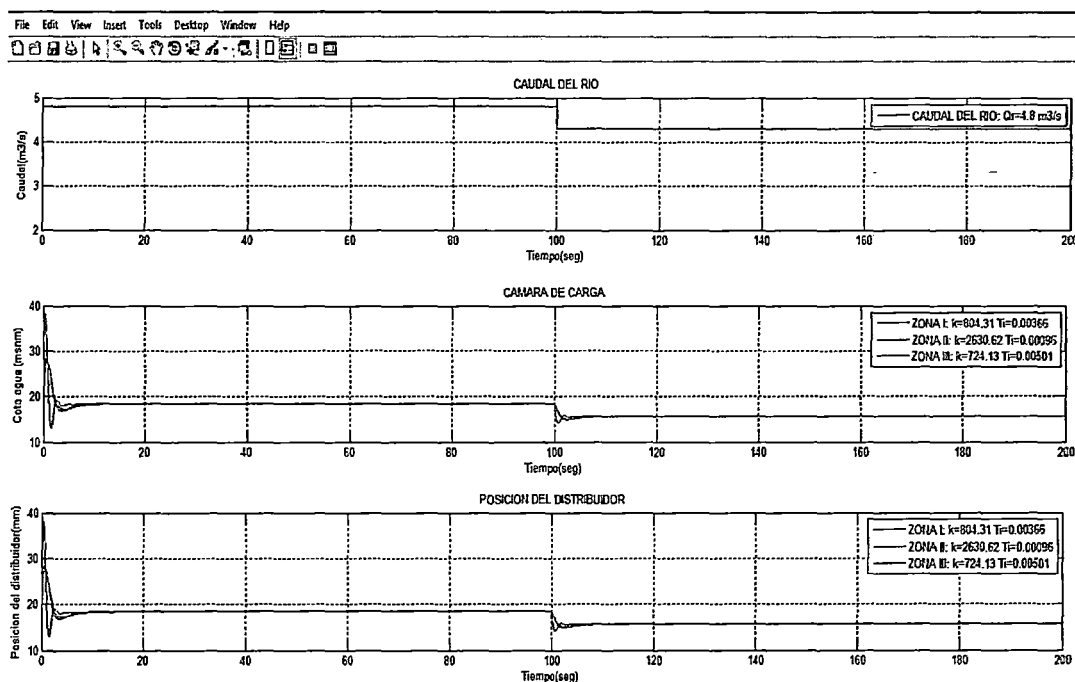
Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.7.3.4 Caudal del río, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal 2.5 m³/s



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

Figura 5.7.3.5 Caudal del río, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal 4.8 m³/s



Fuente: Análisis Propio mediante el programa Matlab

5.8 COMPORTAMIENTO BAJO GRAN PERTURBACIÓN

El criterio de sintonía y las conclusiones del estudio de estabilidad de la mini central tienen como punto de partida la linealización de las expresiones que representan la dinámica de los elementos que componen la mini central (turbina, tubería forzada, cámara de carga y controlador PI). La elaboración de un modelo lineal y su estudio tienen sentido ya que generalmente la mini central únicamente sufre pequeñas variaciones de las variables externas (caudal del río, velocidad de giro del grupo o nivel de referencia) alrededor de un punto de funcionamiento nominal. Las expresiones linealizadas y las originales en estos casos tienen un funcionamiento muy similar. Esto se comprueba en el capítulo 4 en los que se superponen los resultados de someter al modelo completo y el modelo lineal al mismo descenso de caudal del río.

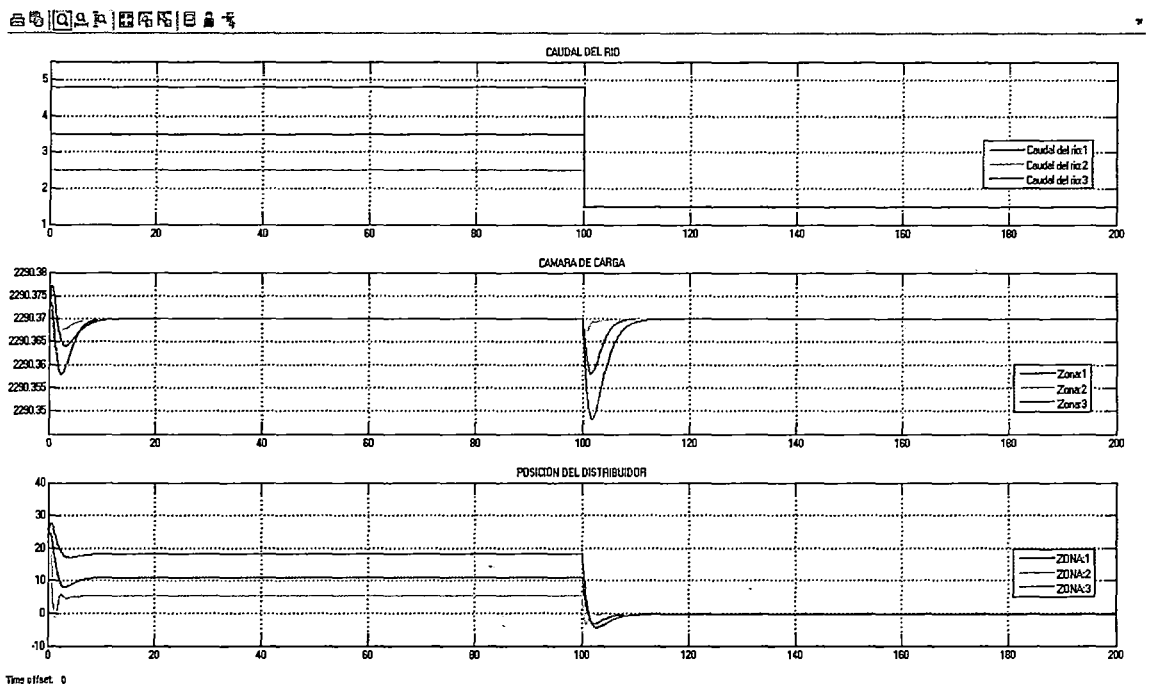
Existen situaciones en las que las variables de entrada sufren cambios notables en un breve espacio de tiempo y que no tienen por qué corresponderse con una situación de emergencia. La mini central debe ser capaz de absorber los

incrementos y descensos de caudal producidos por una puesta en marcha o parada de la mini central de punta. Las variaciones de caudal que se producen en una mini central de puntas suelen ser muy bruscos por lo que la operación de la mini central en un régimen de gran perturbación es algo normal.

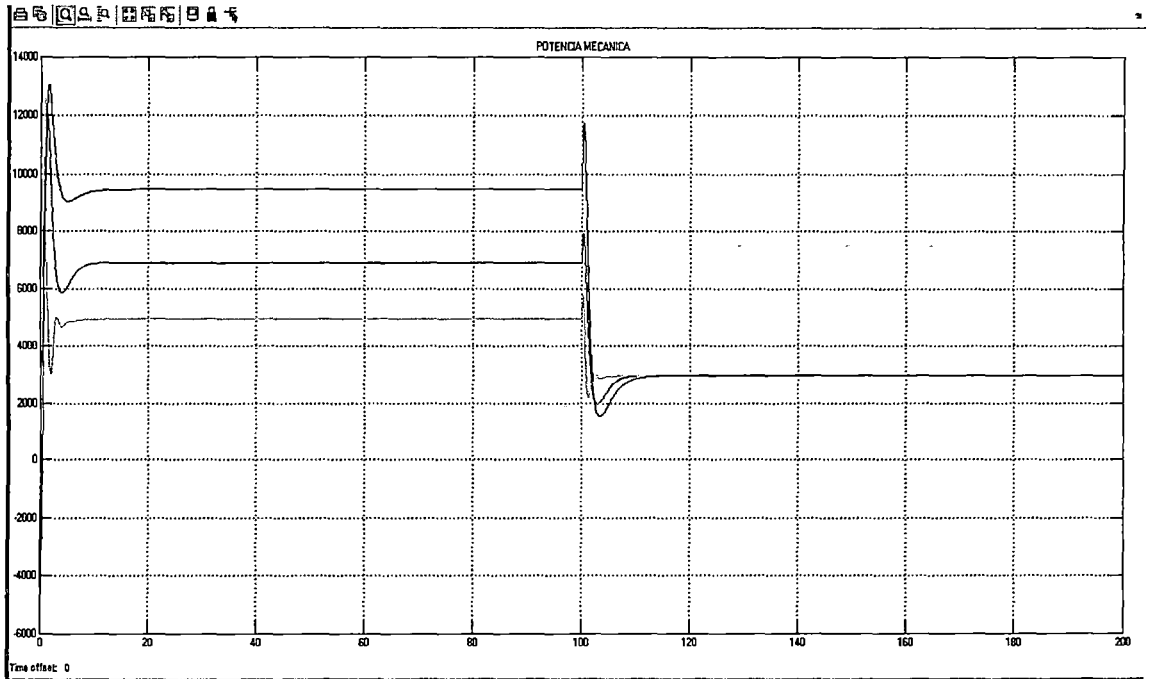
En el caso de la mini central, el accionamiento de la compuerta situada en la toma del canal puede suponer una reducción o aumento significativo y brusco del caudal que alimenta la cámara de carga.

Dado que, como se ha comentado anteriormente, la sintonización del controlador PI se realiza a partir del lugar de raíces de las ganancias (k) y (T_i) del modelo lineal y que dicho modelo tiene su funcionamiento en el ámbito de la pequeña perturbación se simula una reducción del 50% del caudal turbinado en un breve intervalo de tiempo

Figura 5.7.3.1 Caudal del río, Posición del distribuidor y cota de agua en la Cámara de carga, con caudal inicial de 3.5, 2.5, 4.8 m³/s, disminución brusca de caudal hasta 1.5 m³/s.



- ✓ Potencia mecánica frente a una disminución brusca del caudal de río



CONCLUSIONES

A continuación se muestran las conclusiones que se desprenden en la presente tesis.

1. Del modelo matemático que representa a la mini central, se obtiene la región de estabilidad y la pareja de ganancia proporcional (K) y la ganancia integradora (T_i) del controlador PI; los mismos que en condiciones de operación presentan:

- a. cuando la mini central opera a carga nominal (Zona I), la pareja de ganancias optimas son $k= 804.31$; $T_i= 0.00366$ s, aminorando de esta forma su tiempo de establecimiento hasta 7.85 s
- b. cuando opera a baja carga (Zona II), la pareja de ganancias optimas son $k= 2630.62$; $T_i= 0.00096$ s, donde su tiempo de establecimiento es 6.10s
- c. cuando la mini central opera en sobre carga (Zona III), la pareja de ganancias optimas son $k= 724.13$; $T_i= 0.00501$ s, por lo tanto su tiempo de establecimiento es 10.00 s

Donde la ganancia proporcional (k) determina la rapidez de la acción controladora y la ganancia integradora (T_i) elimina el error entre el valor medido de la cota de agua en la cámara de carga y la cota de referencia. Minimizando de esta forma las oscilaciones y su tiempo de establecimiento, para las tres condiciones, mejorando de esta forma la estabilidad del sistema, estamos mejorando la vida útil de los componentes de la mini central.

2. El desarrollo matemático nos permite analizar y simular el comportamiento dinámico de los componentes de la mini central (cámara de carga, tubería forzada y turbina) en la cual presentan oscilaciones cuando se varia la carga. Por lo tanto se incrementa un controlador PI, para que la posición del distribuidor controle el nivel del agua en la cámara de carga, minimizando de esta forma su oscilación y reduciendo su tiempo de establecimiento hasta 7.5 s.
3. La estabilidad del sistema depende de las rectas que delimitan las regiones de estabilidad, donde el sistema es estable para valores que estén por debajo de la recta ($k=60$; $T_i=0.0647$) y es inestable para valores que estén fuera de la región

de estabilidad ($K=0.96$; $T_i=0.0647$), dichos valores representan las ganancias del controlador PI, frente a pequeñas perturbaciones.

4. A partir del criterio de sintonía, los valores óptimos ($k= 804.31$; $T_i= 0.00366$ s) del controlador PI que mejora la estabilidad de la mini central, reduciendo de esta forma la oscilación y el tiempo de establecimiento.
5. El controlador sintonizado con las ganancias obtenidas, se simula la mini central cuando se produce una disminución brusca de carga, donde el caudal baja de $3.5\text{m}^3/\text{s}$ hasta $1.5\text{m}^3/\text{s}$. por tanto el distribuidor cierra para mantener la posición de agua constante en la cámara de carga, proporcionando de esta forma una respuesta estable y adecuada tanto en pequeña como en gran perturbación.

RECOMENDACIONES

- En este ámbito puede considerarse que los modelos desarrollados son adecuados. Pero es interesante ampliar las posibilidades del modelo para poder simular cualquier situación que se plantee durante la vida de funcionamiento de la mini central.
- Se recomienda ampliar el estudio para un comportamiento elástico del agua y del servomotor que acciona el distribuidor de la turbina a partir de la señal elaborada por el controlador PI y de la inercia del rotor de la turbina

BIBLIOGRAFIA

- [1] Wilfredo Jara, T. (1998). Maquinas hidráulicas. UNI (Peru): UNIFIM
- [2] José Matas- Miguel Reyez. (1998). Teoria de control Diseño Electrónico. UPC (España): Grup Artiplan-Artympres S.A
- [3] División de Investigación y Recursos. (1995). Mini hidráulica. Bilbao (Vasco): Ingeniería, Estudios y proyectos NIP, S.A.
- [4] Kundur, P. (1994). Power system stability and control. New York (USA): Mc Graw Hill.
- [5] Ogata, K. (2004). Modern control engineering. Madrid: Pearson Educación S.A.
- [6] Benjamin, C, K. (1996). Automatic Control Systems. México: Prentice - Hall Hispanoamericana, S.A.
- [7] Dorf, R, C. (2005). Modern Control Systems. Madrid: Pearson – Educación, S.A.
- [8] Sergey, E, Lysbeuski. (2003). Engineering and Scientific Computations Using MATLAB. Canada: by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.
- [9] Delores, M, Etter C. (1997). Solución de Problemas con MATLAB. México: Prentice - Hall Hispanoamericana, S.A.
- [10] Glauco Nery, T. (2003). Estabilidad Electromecánica de Sistemas de Potencia. Brasil: Universidad federal de rio de janeiro.
- [11] REIVAX AUTOMAÇÃO E CONTROLE. Relatório Técnico e ensaios de identificação e modelagem dos reguladores de velocidade das turbinas. Brasil (1981)
- [12] J I. Sarasua. Control de mini centrales hidroeléctricas fluyentes. Modelado y estabilidad. Madrid 2009.

ANEXOS

ANEXO A: CALCULO JUSTIFICATIVO

ANEXO B: SIMULACIÓN DEL DIAGRAMA DE BLOQUES

ANEXO C: SIMULACIONES DE LAS RECTAS DE ESTABILIDAD, LUGAR DE RAÍCES

ANEXO D: PLANOS

ANEXO A : CALCULOS JUSTIFICATIVOS DE LA MINI CENTRAL HIDROELECTRICA DE AOBAMBA

DATOS

Dt:	1.05 m	Dt:	diámetro de tubería forzada
Lt:	345 m	Lt:	longitud de la tubería
nt:	0.013	nt:	numero de manig de la tubería f
g:	9.8 m/s ²	g:	gravedad
H:	230.67 m	H:	salto neto
Hb:	230		
Q:	3.5 m ³ /s	Q:	caudal
Zref:	2290.37 m.s.m	Zref:	cota de referencia de la lamina de agua en el azud de derivacion
Zdesc:	2059.7 m.s.m	Zdesc:	cota de nivel de descarga

CAMARA DE CARGA

$$\frac{dZ_c}{dt} = (Q_r - Q_t) \frac{1}{A_c}$$

calculo de la cota de la lamina de azud de derivacion

$$Z_c = H + Z_{desc} = 2290.37$$

Zc: cota de la lamina de azud de derivacion
 Qr: caudal que aporte el rio al azud de derivacion
 Qt: caudal que circula por tubería forzada
 Ac: superficie de la camara de carga

Zc: cota de la lamina de azud de derivacion
 H: salto neto
 Zdesc: cota de nivel de descarga

TUBERIA FORZADA

calculo de coeficiente de perdidas de la tubería forzada

$$K_{pt} = \frac{10.29(n_t)^2}{(D_t)^{5.333}} L_t = 0.462507354$$

Dt: diámetro de tubería forzada
 Lt: longitud de la tubería
 nt: numero de manig de la tubería f
 Kpt: coeficiente de perdida de la tubería forzada

calculo de la constante de la tebería forzada

$$F_t = \frac{L_t}{g \cdot A_t} \quad \text{area de tf} \quad At: 0.865901474$$

$$= 40.65598995$$

At: seccion de la tubería forzada
 Lt: longitud de la tubería
 Ft: constante de la tebería forzada

calculo de la constante del tiempo del agua en la tubería forzada

$$T_w = \frac{L_t Q_b}{g A_t H_b} = 0.618678108$$

Tw: constante del tiempo del agua en la tubería forzada
 At: seccion de la tubería forzada
 Lt: longitud de la tubería
 Ft: constante de la tebería forzada

calculo de coeficiente de perdidas en la tubería forzada

$$P = \frac{K_{pt} \cdot Q_b^2}{H_b} = 0.024633544$$

P: coeficiente de perdidas en la tubería
 Kpt: coeficiente de perdida de la tubería forzada

calculo de constante de tiempo en la camara de carga

$$T_c = \frac{A_c H_b}{Q_b} = 8937.142857$$

Tc: constante de tiempo de azud de derivacion
 Ac: superficie del azud de derivacion

TURBINA

caracteristicas de la turbina

D1:	0.65 m	0.65
N:	900 RPM	
η:	90%	
Xb:	22 mm	
Qb:	3.5 m ³ /s	
H:	230.67 m	
Hb:	230 m	

D1: diámetro de turbina
 N: velocidad de giro del grupo
 n1: velocidad de giro unitaria del grupo
 Q1: caudal turbinado unitario
 η: rendimiento de la turbina
 X: posición del distribuidor
 Q: caudal
 H: salto neto
 H: salto neto
 h*^f: altura de referencia inicial en el azud de derivacion
 h*ⁱ: salto neto inicial en valores por unidad
 q*ⁱ: caudal turbinado unicial en valores por unidad
 t*ⁱ: posición del distribuidor en valores por unidad

calculo de velocidad de giro unitaria del grupo

$$N_1 = \frac{N \cdot D_1}{\sqrt{H}} = 38.51769663$$

dQ1/dN: variacion de caudal unitario respecto de la velocidad unita
 dQ1/dX: variacion de caudal unitario respecto de la apertura del dis
 b11: coeficientes de las expresiones matematicas de la turbina
 b13: coeficientes de las expresiones matematicas de la turbina

calculo del caudal turbinado unitario

$$Q_1 = \frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}} = 0.54543848$$

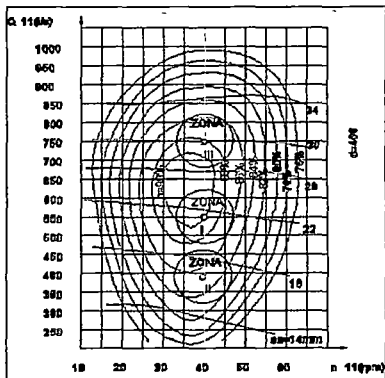
calculo de salto neto inicial en valores por unidad

$$h^* = H/H_b = 1.002913043$$

calculo de caudal turbinado en valores por unidad

$$q^* = Q/Q_b =$$

PUNTO	ZONA I	ZONA II	ZONA III
Q(m ³ /s)	3.50	2.50	4.80
H(m)	230.67	230.67	230.67
N1(r.p.m)	38.5177	38.5177	38.5177
Q1(m ³ /s)	0.5454	0.3896	0.7480
h _c [*]	1.0029	1.0029	1.0029
q _c [*]	1.0000	0.7143	1.3714



CALCULOS JUSTIFICATIVOS DE LA MINI CENTRAL HIDROELECTRICA DE AOBAMBA

calculo de variacion de caudal unitario respecto de la velocidad unitaria
 dQ_1/dN : sale de la grafica de las colinas de rendimiento
 calculo de variacion de caudal unitario respecto de la apertura del distribuidor
 dQ_1/dX : sale de la grafica de las colinas de rendimiento

Calculo de coeficientes b11 y b13

$$b_{11} = \left(\frac{Q_1 D_1^2}{2\sqrt{H}} - \frac{N_1^3 \sqrt{H}}{2N^2} \frac{\partial Q_1}{\partial N_1} \right) \frac{H_b}{Q_b} =$$

$$b_{13} = D_1^2 \sqrt{H} \frac{\partial Q_1}{\partial X} \frac{X_b}{Q_b} =$$

PUNTO	ZONA I	ZONA II	ZONA III
N1(r.p.m)	38.5177	38.5177	38.5177
Q1(m3/s)	0.5454	0.3896	0.7480
η	90%	85%	88%
X(mm)	22	14	30
dQ_1/dN :	-0.00126	-0.00296	0.00007
dQ_1/dX :	0.02757	0.00974	0.02532
b11	0.5428	0.4602	0.6813
b13	1.1121	0.3929	1.0214

POTENCIA HIDRAULICA P = 6910.8732 KW

CALCULO DE LAS GANANCIAS (K;Ti) DEL CONTROLADOR PI

calculo de α cuando τ_{1290} entonces

$$\frac{T_w}{\beta} < \frac{(1 + 2P'g_e b_{11})(b_{11} + b_{13}\alpha)}{b_{11}b_{13}} \quad B=$$

	TI
B=	0.000479595
$\alpha=$	27500.00
	2630.43

Tw/B	100	500	1000	1500	2000
TI	0.06468	0.01294	0.00647	0.00431	0.00323
k	50.10	252.37	505.21	758.05	1010.89

determinacion de k

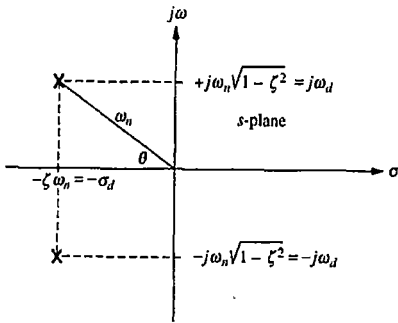
$$k = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2P'g_e}{T_w} \right) T_w T_e b_{11} - h_{11} \right] \frac{X_b}{b_{13} H_b} =$$

determinacion de Ti

$$\frac{1}{Ti} = \left(\frac{1}{T_w b_{11}} + \frac{2P'g_e}{T_w} \right) \frac{T_w T_e b_{11} X_b}{27 b_{13} H_b} =$$

PUNTO	ZONA I	ZONA II	ZONA III
g_e	1.0000	0.7143	1.3714
b11	0.5428	0.4602	0.6813
b13	1.1121	0.3929	1.0214
k=	804.31	2630.62	724.13
1/Ti	273.25	1043.27	199.69
TI	0.00366	0.00096	0.00501

ANALISIS DE ESTABILIDAD DE LA MINI CENTRAL HIDROELECTRICA DE AOBAMBA



DONDE :

- ω_d amortiguamiento exponencial de la respuesta
- ω_n frecuencia de la oscilación amortiguada.
- σ_d frecuencia natural de la respuesta del sistema
- ζ amortiguamiento relativo (sistema sub amortig)

DETERMINACION DE LA GANANCIA K, CUANDO $T_i = 0.06468$ DEL CONTROLADOR PI

K	polo	$\sigma_d(s-1)$	w_d	$w\eta(s-1)$	ζ	T_d	T_p	T_e
100	1	-0.062	-0.128	0.142	0.436	-49.063	-24.531	64.516
	2	-0.062	0.128	0.142	0.436	49.063	24.531	64.516
	3	-2.930	-	2.930	1.000	-	-	1.365
300	1	-0.061	-	0.061	1.000	-	-	65.574
	2	-0.373	-	0.373	1.000	-	-	10.724
	3	-2.620	-	2.620	1.000	-	-	1.527
700	1	-0.020	-	0.020	1.000	-	-	200.000
	2	-1.520	0.856	1.744	0.871	7.336	3.668	2.632
	3	-1.520	-0.856	1.744	0.871	-7.336	-3.668	2.632

DETERMINACION DE LA GANANCIA K OPTIMA, CUANDO $T_i = 0.06468$ DEL CONTROLADOR PI

K	polo	$\sigma_d(s-1)$	w_d	$w\eta(s-1)$	ζ	T_d	T_p	T_e
215.6	1	-0.147	0.000	0.147	1.000	-	-	27.211
	2	-0.147	0.000	0.147	1.000	-	-	27.211
	3	-2.760	0.000	2.760	1.000	-	-	1.449

DETERMINACION DE LA PAREJA DE GANANCIAS (K; T_i), DEL CONTROLADOR PI

T_w/β	T_i (s)	K	polo	$\sigma_d(s-1)$	w_d	$w\eta(s-1)$	ζ	T_d	T_p	T_e
100	0.06468	50.10	1	-0.029	0.138	0.141	0.206	-45.507	-22.754	137.457
			2	-0.029	-0.138	0.141	0.206	45.507	22.754	137.457
			3	-2.760	0.00	2.760	1.000	-	-	1.449
500	0.01294	252.37	1	-0.158	0.290	0.330	0.478	-21.655	-10.828	25.316
			2	-0.158	-0.290	0.330	0.478	21.655	10.828	25.316
			3	-2.740	0.000	2.740	1.000	-	-	1.460
1000	0.00647	505.21	1	-0.365	0.352	0.507	0.720	-17.841	-8.920	10.959
			2	-0.365	-0.352	0.507	0.720	17.841	8.920	10.959
			3	-2.330	0.000	2.330	1.000	-	-	1.717
1500	0.00431	758.05	1	-0.687	0.000	0.687	1.000	-	-	5.822
			2	-0.875	0.000	0.875	1.000	-	-	4.571
			3	-1.500	0.000	1.500	1.000	-	-	2.667
2000	0.00323	1010.89	1	-0.431	0.000	0.431	1.000	-	-	9.281
			2	-1.310	1.030	1.666	0.786	-6.097	-3.049	3.053
			3	-1.310	-1.030	1.666	0.786	6.097	3.049	3.053

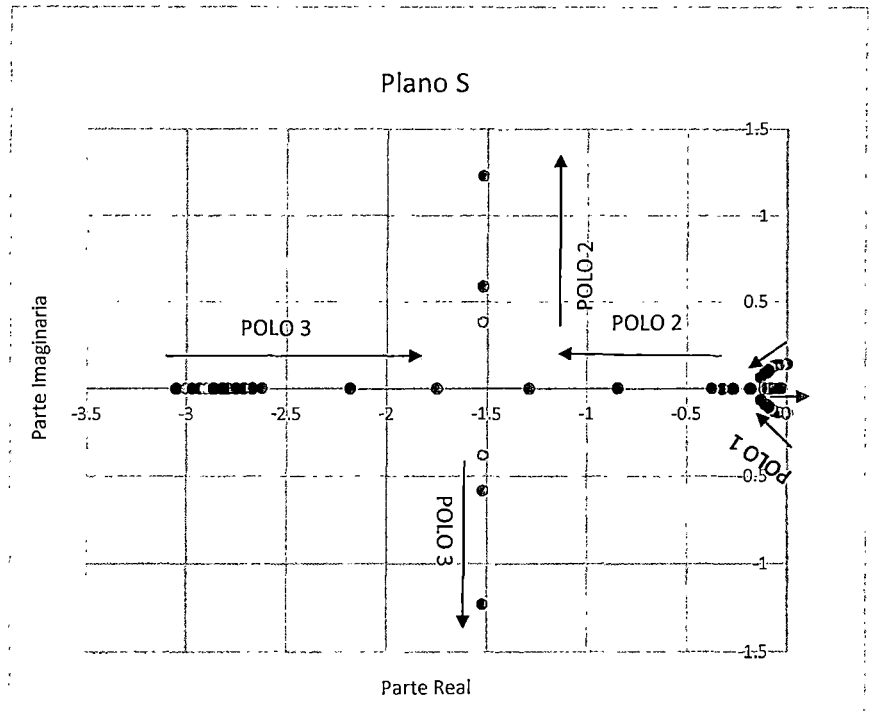
DETERMINACION DE LA PAREJA DE GANANCIAS (K; T_i) OPTIMOS, DEL CONTROLADOR PI

T_w/β	T_i (s)	K	polo	$\sigma_d(s-1)$	w_d	$w\eta(s-1)$	ζ	T_d	T_p	T_e
1765	0.00366	804.31	1	-1.020	0.000	1.020	1.000	-	-	3.922
			2	-1.020	0.000	1.020	1.000	-	-	3.922
			3	-1.020	0.000	1.020	1.000	-	-	3.922

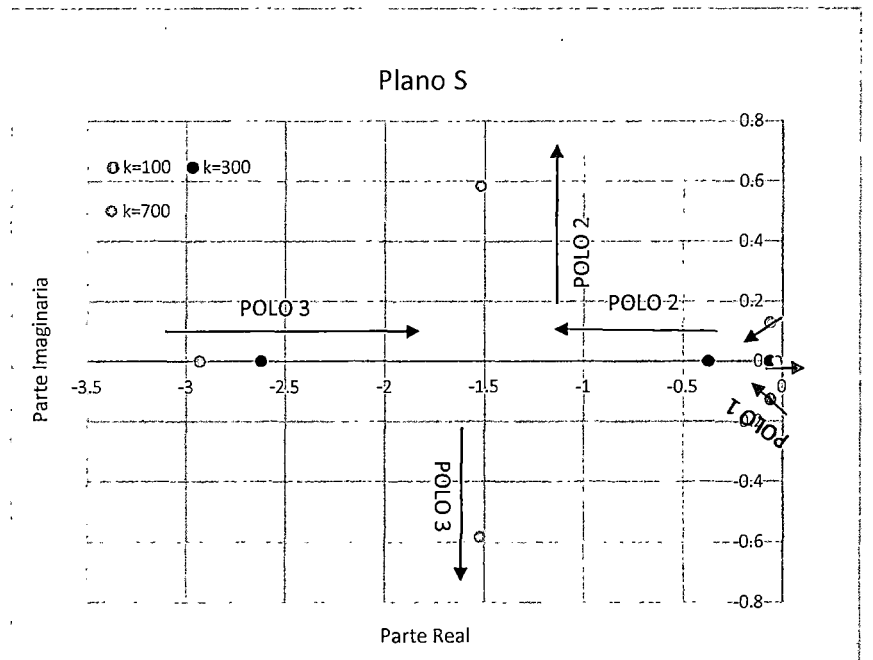
ANALISIS DE LOS POLOS EN PLANO S, CUANDO K= VARIABLE; $T_i = 0.06467$ CTE, PARA EL ESTUDIO DE ESTABILIDAD

k=10	-0.00316	0.14
	-0.00316	-0.14
	-3.05	0
k=50	-0.029	0.138
	-0.029	-0.138
	-3	0
k=75	-0.0456	0.135
	-0.0456	-0.135
	-2.97	0
k=100	-0.0626	0.128
	-0.0626	-0.128
	-2.93	0
k=125	-0.08	0.119
	-0.08	-0.119
	-2.9	0
k=150	-0.0894	0.105
	-0.0894	-0.105
	-2.86	0
k=175	-0.106	0.0896
	-0.106	-0.0896
	-2.82	0
k=200	-0.127	0.0638
	-0.127	-0.0638
	-2.79	0
k=225	-0.109	0
	-0.181	0
	-2.75	0
k=250	-0.083	0
	-0.267	0
	-2.71	0
k=275	-0.0742	0
	-0.321	0
	-2.67	0
k=300	-0.0622	0
	-0.373	0
	-2.62	0
k=500	-0.0326	0
	-0.842	0
	-2.18	0
k=600	-0.0267	0
	-1.29	0
	-1.75	0
k=650	-0.0245	0
	-1.52	0.38
	-1.52	-0.38
k=700	-0.0227	0
	-1.52	0.584
	-1.52	-0.584
k=1000	-0.0157	0
	-1.52	1.23
	-1.52	-1.23

UBICACIÓN DE LOS POLOS EN EL PLANO S

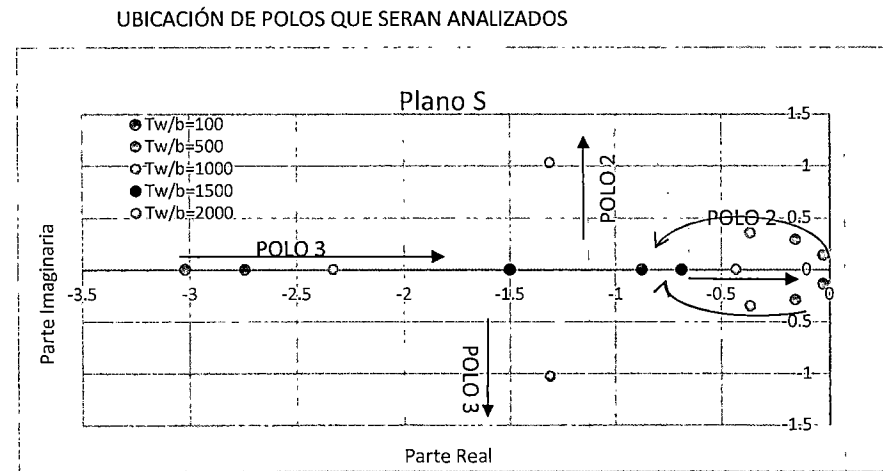
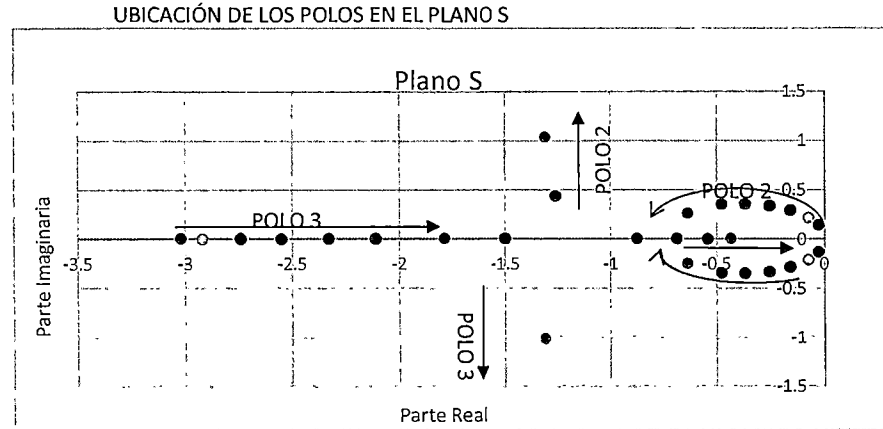


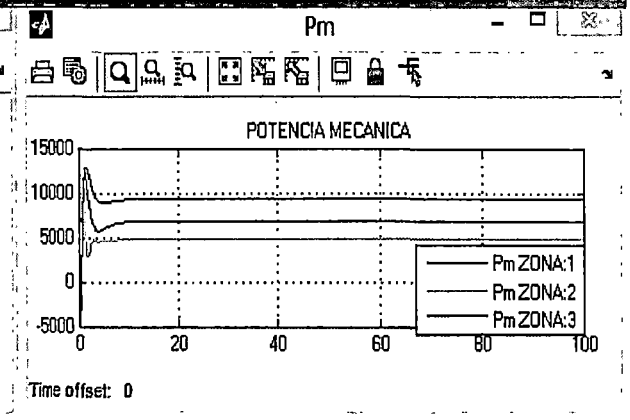
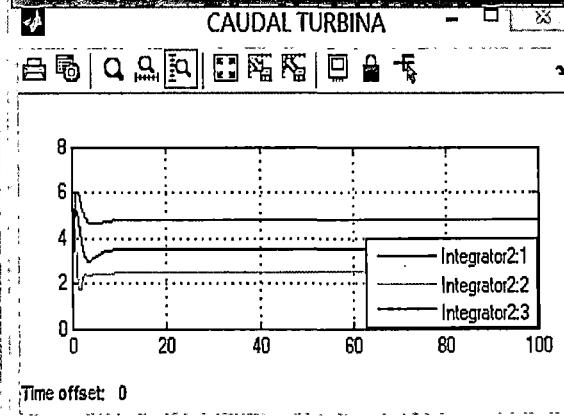
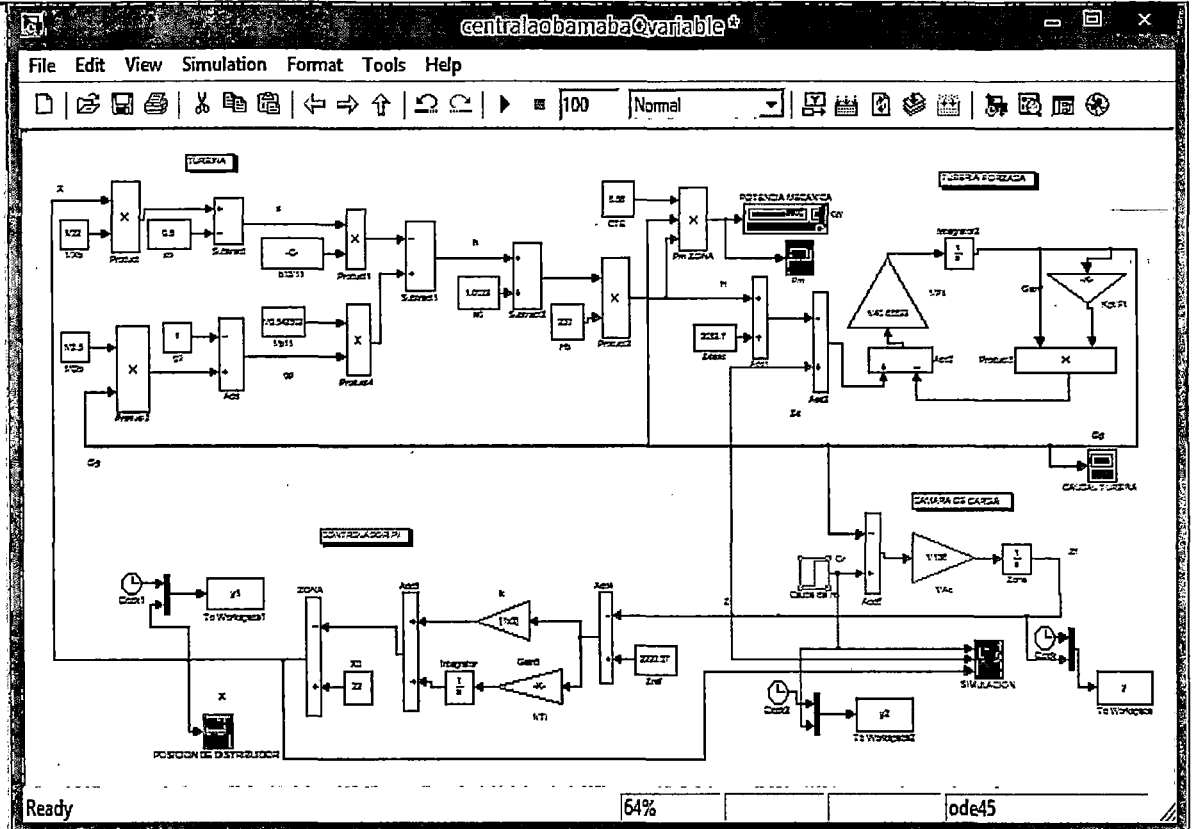
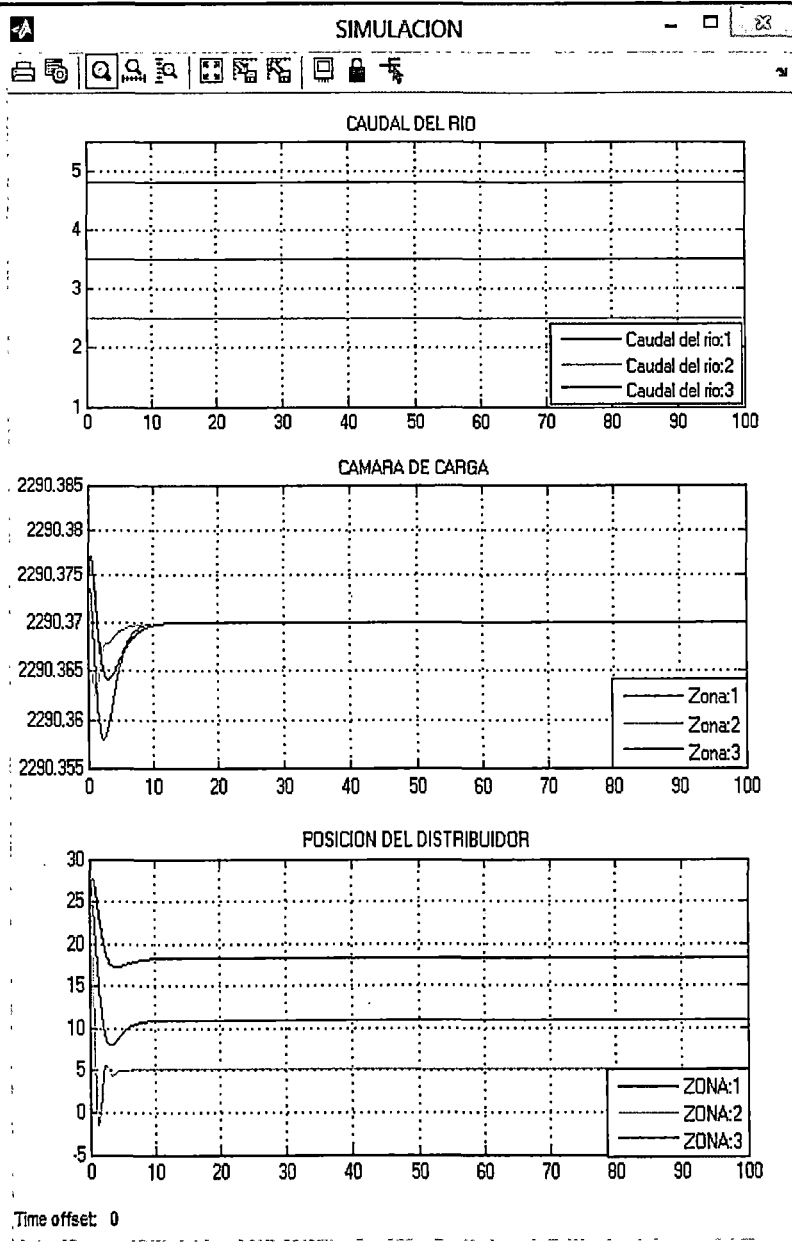
UBICACIÓN DE POLOS QUE SERAN ANALIZADOS



ANALISIS DE POLOS EN EL PLANO S PARA LA PAREJA DE GANANCIAS , PARA EL ESTUDIO DE ESTABILIDAD

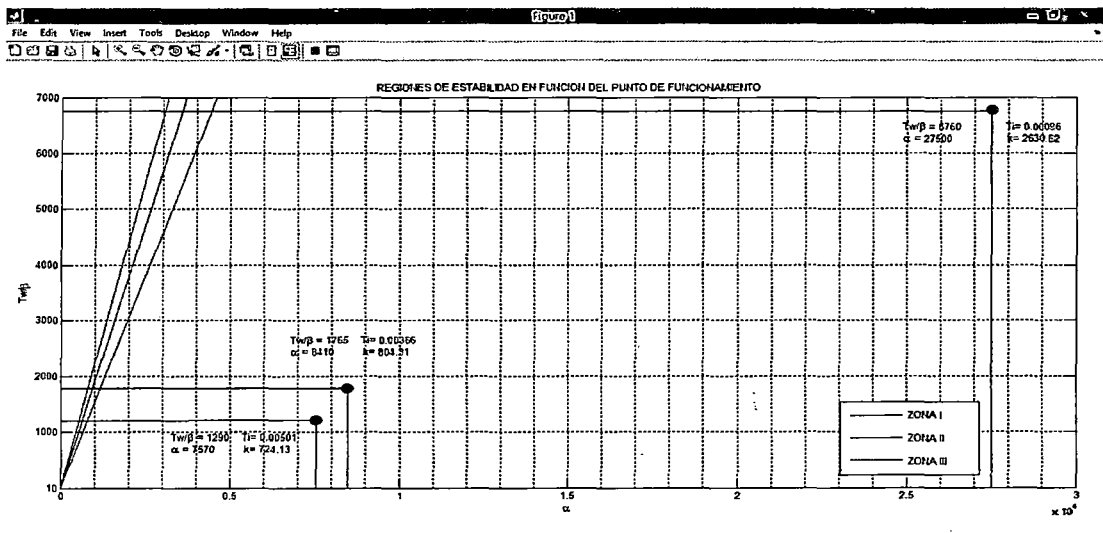
Tw/b=100	Ti=0.06468	k=50.101	-0.0291	0.138
			-0.0291	-0.138
			-3.02	0
Tw/b=250	Ti=0.025872	k=125.95	-0.0742	0.213
			-0.0742	-0.213
			-2.92	0
Tw/b=500	Ti=0.012936	k=252.37	-0.158	0.29
			-0.158	-0.29
			-2.74	0
Tw/b=750	Ti=0.008624	k=378.79	-0.253	0.335
			-0.253	-0.335
			-2.55	0
Tw/b=1000	Ti=0.006468	k=505.21	-0.365	0.352
			-0.365	-0.352
			-2.33	0
Tw/b=1200	Ti=0.005292	k=606.35	-0.475	0.349
			-0.475	-0.349
			-2.11	0
Tw/b=1400	Ti=0.00462	k=707.48	-0.636	0.255
			-0.636	-0.255
			-1.79	0
Tw/b=1500	Ti=0.00431	k=758.05	-0.687	0
			-0.875	0
			-1.5	0
Tw/b=1600	Ti=0.004042	k=808.62	-0.541	0
			-1.26	0.434
			-1.26	0.434
Tw/b=2000	Ti=0.003234	k=1010.89	-0.431	0
			-1.31	1.03
			-1.31	-1.03





ANEXO C: CALCULO DE LAS RECTAS DE ESTABILIDAD PARA EL ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

```
%DISEÑO DE LAS REGIONES DE ESTABILIDAD DE LA MINI CENTRAL DE AOBAMBA
%diagrama de Tw/B<(1+2pqb11) (b11+b13&)/b11b13
% zona I
p=0.0246; % Coeficiente de perdidas en la tubería forzada
% Zona I
qot=1;
b11=0.5428;
b13=1.1121;
x=[0:10000];
Y=((1+2*p*qot*b11)*(b11+b13*x))/(b11*b13);
%Zona II
qot=0.7143;
b11=0.4602;
b13=0.3928;
Z=((1+2*p*qot*b11)*(b11+b13*x))/(b11*b13);
%Zona III
qot=1.3714;
b11=0.6862;
b13=1.0214;
A=((1+2*p*qot*b11)*(b11+b13*x))/(b11*b13);
plot(x,Y,x,Z,x,A)
grid
legend('ZONA I','ZONA II','ZONA III')
xlabel('\alpha')
ylabel('Tw/\beta')
title ('REGIONES DE ESTABILIDAD EN FUNCION DEL PUNTO DE FUNCIONAMIENTO')
```



CALCULO DE RAÍCES, PARA LA MINI CENTRAL HIDROELÉCTRICA DE AOBAMBA

%DISEÑO DEL LUGAR DE LAS RAICES (MINI CENTRAL DE AOBAMBA)

%datos

Lt=345;

Dt=1.05;

At=(pi*Dt^2)/4

Tc=8937.14;

Kpt=0.4625;

b11=0.5428;

b13=1.1121;

qot=1;

Ti=0.00366;

k=804.31;

Qb=3.5;

Hb=230;

Xb=22;

g=9.8;

Tw=(Lt*Qb)/(g*At*Hb)

p=(Kpt*Qb^2)/Hb

%matris de 3x3

a11=(1/(Tw*b11))+(2*p*qot)/Tw;

a21=1/Tc;

a31=(k*Hb)/(Xb*Tc);

a12=1/Tw;

a22=0;

a32=Hb/(Ti*Xb);

a13=b13/(Tw*b11);

a23=0;

a33=0;

A=[-a11 a12 a13;-a21 a22 a23;-a31 a32 a33];

%ganacia

A=[-a11 a12 a13;-a21 a22 a23;-a31 a32 a33];

%grafica de lugar de las raices

A=[-a11 a12 a13;-a21 a22 a23;-a31 a32 a33];

B=[1;0;0];

C=[1,0,0];

D=[0];

rlocus(A,B,C,D);

[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)

grid

