UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TESIS

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ECONÓMICOS QUE INVOLUCRAN MODELOS MATEMÁTICOS (ECUACIONES INTEGRO DIFERENCIALES, ECUACIONES INTEGRALES, ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES) UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS

AUTOR:

Br. GREGORIO SOTO MENDOZA

ASESOR:

Dr. GUIDO ALVAREZ JAUREGUI

CODIGO ORCID:0000-0002-2669-9847

CUSCO – PERÚ

2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, asesor del trabajo de tesis titulado: **SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ECONÓMICOS QUE INVOLUCRAN MODELOS MATEMÁTICOS (ECUACIONES INTEGRO DIFERENCIALES, ECUACIONES INTEGRALES, ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES) UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE**

presentado por: Gregorio Soto Mendoza con Nro. de DNI: 23883689 para optar al grado académico de **MAESTRO EN MATEMATICAS** Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por tres veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 9% por tanto:

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera hoja del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco,22 de setiembre de 2024

....
Firma

Post firma Dr. Guido Álvarez Jauregui

Nro. de DNI 23868575

ORCID del Asesor 0000-0002-2669-9847

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: oid: oid:27259:384031335

turnitin

Identificación de reporte de similitud: oid:27259:384031335

NOMBRE DEL TRABAJO

SOLUCION DE PROBLEMAS ECONOMICOS QUE INVOLUCRAN MODELOS MATEMATICOS UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DE LA

AUTOR

Gregorio Soto Mendoza

RECUENTO DE PALABRAS

21986 Words

RECUENTO DE CARACTERES

103587 Characters

RECUENTO DE PÁGINAS

98 Pages

TAMAÑO DEL ARCHIVO

1.2MB

FECHA DE ENTREGA

Sep 22, 2024 9:15 AM GMT-5

FECHA DEL INFORME

Sep 22, 2024 9:16 AM GMT-5

9% de similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cada base de datos.

- 9% Base de datos de Internet
- Base de datos de Crossref
- 2% Base de datos de publicaciones
- Base de datos de contenido publicado de Crossref

Excluir del Reporte de Similitud

- Base de datos de trabajos entregados
- Material citado
- Coincidencia baja (menos de 10 palabras)
- Material bibliográfico
- Material citado

V° B°

Guido Alvarez Jáuregui

C-22-09-24.

ÍNDICE

Índice de cuadros V

Índice de figura VI

Dedicatoria VII

Agradecimientos VIII

Resumen IX

ABSTRACT X

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.- Situación Problemática 1

1.2. Formulación del Problema 2

A. Problema General 3

B. Problemas Específicos 3

1.3.- Justificación de la Investigación 3

1.4.- Objetivos de la Investigación 4

A. Objetivo General 4

B. Objetivos Específicos 4

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1.- Bases Teóricas 5

2.1.1. Definición de Modelo 5

2.1.2. Definición de Modelo Matemático 5

2.1.3. La Economía: 5

2.1.4. El Mercado y Precios 6

2.1.5. El Mercado 6

2.1.6. Estructura De Mercado 7

2.1.6.1. Mercado de Competencia Perfecta. 7

2.1.6.2. Mercado De Competencia Imperfecta. 7

2.1.7. El Costo 8

2.1.8. El Precio 8

2.1.8.1. Clasificación De Precio. 8

2.1.9. Oferta y Demanda en el Mercado 9

2.1.10. Funciones de Oferta, Demanda y Punto de Equilibrio 9

2.1.10.1. Leyes De Oferta Y Demanda. 12

2.1.10. 2.- El Ingreso Bruto Anual. 13

2.1.11. Espacios Producto Interno 14

2.1.12. Espacio de Hilbert 14

2.1.13. Espacio Lp 15

2.1.14. Espacio Cuadrado Integrable 15

2.1.15. Espacio Lineal De Funciones Cuadrado Integrables 16

2.1.16. Integral de Fubini 17

2.1.17. Transformadas Integrales 19

2.1.18. La Transformada de Laplace 19

2.1.18.1. Propiedades de la Transformada de Laplace. 21

2.1.19. Transformada Inversa de Laplace 23

2.1.19.1. Lineal dad de la Transformada Inversa de Laplace. 23

2.1.21. Convolución de Funciones 24

2.1.21.1. Teorema de la Convolución. 24

2.1.21.2.- Propiedades de Convolución. 25

2.1.22. Ecuaciones Integro Diferenciales 25

2.1.22.1. Solución de Ecuaciones Integro Diferenciales Mediante la Transformada de Laplace. 26

2.1.23. Ecuaciones Integrales Lineales 27

2.1.23.1. Ecuación Integral Lineal de Fredholm. 28

2.1.23.2. Ecuaciones Integrales Lineales de Volterra. 29

2.1.24. Ecuaciones Integrales De Volterra Tipo Convolución 31

2.1.25.- Ecuaciones Diferenciales Parciales 32

2.1.25.1. Ecuación Diferencial Parcial Lineal de Primer Orden 32

2.1.25.2. Solución de una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales Usando la Transformada de Laplace. 32

2.1.25.3. Ecuación Diferencial Parcial Lineal de Segundo Orden 35

2.1.25.4. Clasificación de las Ecuaciones en Derivadas Parciales de Segundo Orden 35

2.1.26. Transformada de Laplace para Funciones de dos Variables 36

2.1.27. Transformada de Laplace para Ecuaciones Diferenciales Parciales 36

2.2. Marco Conceptual (Palabras Clave) 37

2.3. Antecedentes de la Investigación 37

2.3.1. Antecedentes Nacionales 37

2.3.2. Antecedentes Internacionales 39

CAPITULO III

3.1. Hipótesis 42

a) Hipótesis General 42

b) Hipótesis Específica 42

3.2.- Identificación de Variables e Indicadores 42

3.3.- Operacionalización de Variables 42

CAPÍTULO IV

Metodología

4.1. Ámbito de Estudio: Localization Política y Geográfica 43

4.2. Tipo y Nivel de Investigación 43

4.3. Unidad de Análisis 43

4.3.1. Método de Solución Aplicando la Transformada de Laplace 43

4.4. Población de Studio 43

4.5. Tamaño de Muestra 43

4.6. Técnicas de Selección de Muestra 44

4.7. Técnicas de la Recolección de Información 44

CAPÍTULO V

Resultados Y Discusión

5.1.- Procesamiento, Análisis, Interpretación y Discusión de Resultados 45

5.1.1. Para resolver los problemas económicos se aplica el siguiente procedimiento: 45

5.1.2. Problemas Económicos de Oferta y Demanda 45

Conclusiones 81

Recomendaciones 82

Bibliografía 83

ANEXO 85

Índice de cuadros

Cuadro 1: Análisis Movimiento de Oferta y Demanda Problema 1 49

Cuadro 2: Análisis Movimiento de Oferta y Demanda Problema 2 52

Cuadro3: Análisis Movimiento de Oferta y Demanda Problema 4 62

Cuadro 4: Análisis Movimiento de las Funciones de Oferta y Demanda Problema 5 67

Índice de Figura

Figura 1: Gráfica de Función Oferta 10

Figura 2: Gráfica de función Demanda. 11

Figura 3: Gráfica de Punto de equilibrio. 11

Figura 4. Gráfica de desplazamiento de Oferta a derecha y izquierda 12

Figura 5. Gráfica desplazamiento de demanda a izquierda y derecha. 13

Figura 6: Gráfica punto de equilibrio de oferta y demanda del problema 1 48

Figura 7. Gráfica del punto de equilibrio del problema 2 51

Figura 8. Gráfica del punto de equilibrio del problema 3. 56

Figura 9: Del punto de equilibrio del problema 4 62

Figura 10. Gráfica del punto de equilibrio del problema 5. 66

Figura 11. Gráfica de las rectas isocuanta, isocoste y curva de expansión del problema 6 71

Figura 12. Gráfica del punto de equilibrio del problema 6 73

Figura 13. Gráfica de la curva trayectoria EDO homogénea del problema 7. 75

Figura 14. Gráfica de la trayectoria de la función h(x) del problema 7. 76

Figura 15: Gráfica de la función beneficio del problema 7. 80

Dedicatoria

El presente trabajo de investigación, la dedico con todo amor y cariño a mi Esposa FORTUNATA ALVAREZ, Quien con su inmenso amor Fortalece mi alma en todo momento y apoyándome para seguir adelante en el trayecto de nuestra vida.

También dedico con mucho Cariño y amor a mis hijas gemelas TATIANA LUZ y PATY LUCY, y que Dios le guie en sus caminos para que ellas puedan ser ejemplo de sus Prójimos.

GREGORIO

Agradecimientos

A Dios, fuente de infinita sabiduría, por darme la vida, la salud, la inteligencia y la capacidad de pensamiento. Y así poder seguir el sendero de mis estudios.

Al Profesor y amigo Dr. GUIDO ALVAREZ JÁUREGUI, por tener paciencia para guiarme y contribuir con su conocimiento en distintas etapas del presente trabajo de investigación, para seguir adelante y lograr una de mis metas.

A los Docentes y Autoridades de la Escuela de Posgrado Maestría en Matemática UNSAAC. por permitirme implementar este trabajo de investigación.

GREGORIO

Resumen

Muchos problemas de la economía correspondientes a la oferta y demanda están planteadas mediante un sistema de ecuaciones que involucran ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales, el propósito del presenta trabajo de investigación es resolver estas ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales, utilizando la transformada de Laplace como una herramienta matemática de mucha utilidad, con la finalidad de determinar un sistema de ecuaciones o conjunto de ecuaciones simultaneas que expresen la oferta y demanda en términos de ecuaciones lineales en expresiones algebraicas más simples, para aplicar y analizar las condiciones del equilibrio de mercado.

Teniendo el sistema de ecuaciones consideradas más simples después de resolver estas ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales, para graficar estas funciones se utilizará el Software Graph o Wólfram Alpha para luego dar la interpretación pertinente a la solución en base al grafico obtenido, considerando la variable tiempo, precio y la cantidad de productos o bienes como característica fundamental en el análisis dinámico de la economía.

Palabras Clave:

Problema Económico / Oferta y Demanda / punto de Equilibrio / ecuaciones Integrales, integro diferenciales y derivadas parciales / Transformada de Laplace.

ABSTRACT

Many economic problems corresponding to supply and demand are posad through a system of equations that involve integral differential equations, integral equations and partial differential equations. The purpose of this research work is to solve these integral differential equations, integral equations and equations. in partial derivatives, using the Laplace transform as a very useful mathematical tool, with the purpose of determining a system of equations or set of simultaneous equations that express supply and demand in terms of linear equations in many cases or in others in expressions simpler algebraic methods to use dynamic stability conditions in microeconomic models of market equilibrium.

Having the system of equations considered simplest after solving these integral differential equations, integral equations and partial differential equations, it is solved using the Graph and Wólfram Alpha Software to interpret the solution based on the graph obtained, considering the variable time, Price and the quantity of products or goods as a fundamental characteristic in the dynamic analysis of the economy.

Key Words:

Economic Problems / Supply and Demand / Equilibrium point / Laplace Transform / Integral equations, I integrate differentials and partial derivative.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.- Situación Problemática

Nuestro país el Perú, es un país en desarrollo pujante que tiene el reto de alcanzar su desarrollo social, económico y tecnológico. La economía es un campo de estudio que examina el complicado sistema de producción, distribución, consumo de mercancías y servicios proporcionados por la sociedad, a través de empresas y cadenas de tiendas que pretenden dinamizar la economía en base a un modelo de economía social de mercado. Los ciudadanos tenemos el reto de alcanzar la igualdad social en base al equilibrio de la distribución de riquezas y pretender el crecimiento y estabilidad económica. Todo esto requiere del conocimiento profundo en temas especializados en matemática y en la economía, en este caso un método matemático para resolver problemas de la economía que involucran modelos matemáticos a través de ecuaciones integrales, ecuaciones integro diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales, problemas con amplias aplicaciones económicas que se utilizan para establecer los parámetros para la estabilidad dinámica en modelos microeconómicos de equilibrio de mercado, así para graficar e interpretar el punto de equilibrio de oferta y demanda de diversos problemas microeconómicos.

La economía, es un área de mucha importancia para el ser humano, de mucho debate, cuyo propósito es emplear los recursos económicos escasos y finitos disponibles, para satisfacer con ellos la mayor cantidad posible de las infinitas necesidades humanas. A menudo estos asuntos pueden parecerse difíciles de comprender, especialmente cuando se plantea con un lenguaje especializado dentro del problema económico, analizado a través de la solución de modelos matemáticos.

Estudiar economía en un período de rápido avance tecnológico que nos ha dado computadoras portátiles, conexiones inalámbricas de banda ancha y dispositivos móviles que han cambiado por completo nuestra forma de vida.

Sin embargo, la constante subida de los precios de los artículos de primera necesidad y combustibles como consecuencia del crecimiento económico mundial también se suma a la expansión volátil de la economía y del sistema financiero.

Los problemas planteados dentro de la economía para lograr el equilibrio de mercado, están expresados mediante ecuaciones o expresiones matemáticas que involucran ecuaciones integrales, ecuaciones integro diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales que representan a la oferta y demanda, por tanto, el propósito es resolver previamente estas expresiones matemáticas para simplificar y expresar el sistema de ecuaciones que expresen la oferta y demanda.

En los problemas que se plantean para determinar el equilibrio de mercado no podríamos determinar de manera inmediata pues están expresados mediante ecuaciones o expresiones matemáticas que requieren previamente resolver utilizando métodos adecuados que requieren tener el conocimiento de un método matemática, cómo es el uso de la Transformada de Laplace que posibilita resolver estos problemas de manera eficiente y simplifica las tediosas operaciones para dar respuesta a las preguntas de los problemas de microeconomía expresadas mediante ecuaciones integrales, ecuaciones integro diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales.

1.2. Formulación del Problema

La incidencia de la oferta y la demanda en el desarrollo social económico, es un problema de larga data, incluso las teorías y estrategias de desarrollo a mediados del siglo pasado trataron de resolver en muchos países entre ellos nuestro país, que no es ajeno a este problema y estamos en la búsqueda de encontrar el equilibrio económico para el buen desarrollo de nuestro país.

Por esta razón es que se ha realizado el estudio de los conceptos y definiciones para resolver los problemas de economía con respecto a equilibrio de mercado, utilizando los modelos matemáticos de ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales, para relacionar y resolver los problemas, el propósito es difundir en nuestro medio la solución de problemas de economía expresados mediante los modelos matemáticos indicados, al problema económico de oferta y demanda, utilizando la Transformada de Laplace, para luego dar su interpretación pertinente.

A. Problema General

¿Será posible resolver los problemas económicos que involucran modelos matemáticos, utilizando La Transformada de Laplace?

B. Problemas Específicos

1. ¿En un problema económico planteado para determinar el equilibrio de mercado será posible identificar modelos matemáticos a través de ecuaciones integrales, ecuaciones integro diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales?
2. ¿Luego de identificar el modelo matemático en los problemas económicos, será posible resolver utilizando la transformada de Laplace?
3. ¿Sera factible interpretar la solución de los problemas económicos de oferta y demanda?

1.3.- Justificación de la Investigación

El objetivo de este trabajo de investigación es resolver los modelos matemáticos de economía de mercado, aplicando la transformada de Laplace para posibilitar la solución de las ecuaciones de oferta y demanda que están expresadas mediante ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales para ser expresadas en ecuaciones o expresiones matemáticas más simples y luego determinar el equilibrio de mercado y graficar e interpretar su solución.

Los economistas tienen poca información y conocimiento sobre el desarrollo de los temas considerados como métodos matemáticos avanzados en los temas de ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales que son útiles e importantes en el desarrollo de áreas del Análisis Económico y su manejo resultara de mucha importancia en otras disciplinas propias de la Economía como son la Teoría Económica y la Econometría.

Como matemáticos nos involucramos en la Economía, teniendo el conocimiento y sapiencia en el desarrollo de las ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales. Bajo este concepto nuestro propósito es resolver expresiones matemáticas complicadas expresadas en problemas de la economía que corresponden a la oferta y demanda, para determinar el equilibrio de mercado, graficar y simular la solución de las ecuaciones oferta y demanda de los problemas económicos. Con este propósito utilizo el método de la transformada de Laplace incluido a sus propiedades las cuales al aplicar me permite a transformar ecuaciones complicadas en expresiones algebraicas más simples de fácil manejo y resolución.

1.4.- Objetivos de la Investigación

A. Objetivo General

Utilizar la Transformada de Laplace para resolver los problemas económicos de oferta y demanda expresados mediante ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales.

B. Objetivos Específicos

1. Identificar los Modelos Matemáticos que involucra ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales lineales, ecuaciones en derivadas parciales, en problemas de la economía
2. Resolver los Modelos Matemáticos que involucran a ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales lineales, ecuaciones derivadas parciales, en problemas de la economía, utilizando la transformada de Laplace.
3. Utilizar Software Graph o Wólfram Alpha para graficar, luego determinar el punto de equilibrio e interpretar la solución de problemas económicos de oferta y demanda bajo la condición de equilibrio de mercado.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1.- Bases Teóricas

A continuación, presento los conceptos pertinentes para cada tema que se serán necesarias en el trascurso del desarrollo del presente trabajo de investigación.

2.1.1. Definición de Modelo

Un modelo puede tener varios significados en diferentes contextos, en términos generales una representación simplificada de un sistema, objeto o idea se denomina modelo que se utiliza para comprender, estudiar o predecir su comportamiento.

2.1.2. Definición de Modelo Matemático

Es una representación abstracta y simplificada de un sistema, fenómeno o proceso de un mundo real utilizando expresiones, conceptos y ecuaciones matemáticas. Estos modelos ayudan a comprender, analizar y predecir el comportamiento de situaciones complejas, como en la economía, la física, la biología entre otros, a través de la formulación de las relaciones matemáticas que describen las interacciones y variables relevantes en el sistema en cuestión.

Los modelos matemáticos son ampliamente utilizados en la ciencia, la ingeniería, la economía y en diversas disciplinas del saber humano, para tomar decisiones y resolver problemas.

CONCEPTOS PRELIMINARES DE ECONOMÍA

2.1.3. La Economía:

Es una disciplina que estudia en general a los recursos, cómo se producen, venden y distribuyen los productos y/o servicios en una sociedad. Investiga los procesos de toma de decisiones utilizados por las personas, organizaciones y gobiernos para distribuir los recursos para satisfacer sus necesidades y/o deseos.

Son cuatro componentes que juegan un papel importante en la economía, para toda cadena de producción de bienes y servicios.

1. **La Producción:** la que se ocupa de la creación o (fabricación) de un bien o servicio.
2. **La Distribución:** que incluye a todos los procedimientos seguidos para que el producto llegue al cliente (consumidor).
3. **El Comercio:** que es el intercambio de mercancías o servicios entre empresas, individuos (vendedores y compradores) integrantes de un sistema económico.
4. **El Consumo:** es el acto de comprar un artículo o servicio para satisfacer una necesidad en particular.

Comprender cómo funciona la economía es decisivo porque articula todos los aspectos de nuestros sistemas financieros, incluida la elección que hacemos y la forma en que manejamos el dinero.

2.1.4. El Mercado y Precios

Si necesito comprar una camisa, quiero comprar los productos de primera necesidad o tengo la intención de comprar un equipo de limpieza. ¿Dónde las encuentro y cuánto me cuesta todos estos productos? Para ubicar un lugar donde la gente venda esas cosas y brinde esos servicios es el mercado.

2.1.5. El Mercado

Es el lugar (ubicación) donde los compradores y vendedores realizan sus transacciones comerciales de compra y venta de diversos productos. Es el área pública con tiendas o puestos de venta donde se realiza el comercio, en particular con respecto a los alimentos y otros productos de primera necesidad.

Los que componen un mercado son dos grupos de personas: vendedores y compradores. Aquí se permite el acuerdo a los compradores y vendedores intercambiar y hacer negocios.

Es la ubicación teórica donde los precios de bienes, servicios y productos se deciden según la oferta y demanda.

2.1.6. Estructura De Mercado

La estructura de mercado se refiere a que como está organizado el mercado o sector en términos de competencia y la calidad de empresas que participan en ella. El mercado perfectamente competitivo y el mercado imperfecto competitivo son los dos principales tipos de mercado que se deben mencionar.

2.1.6.1. Mercado de Competencia Perfecta.

El mercado perfectamente competitivo es un escenario de mercado hipotético en el que existe la ley de oferta y demanda, quienes autorregulan los precios, con un perfecto control de precios, y en el que no hay fallos de ningún tipo para el mercado, es un MERCADO IDEAL. y se caracteriza por:

a. Amplia presencia de compradores y vendedores: hay muchos clientes y vendedores en el mercado.

b. Los compradores y vendedores tienen acceso libre: Es decir, no existen obstáculos que impidan que compradores y vendedores entren o salgan del mercado, por lo que pueden aparecer nuevos mercados.

c. Se comercializan mercancías semejantes: No puede no haber diferencia en la elección de vendedores por parte de ciertos compradores porque todos los vendedores tienen mercancías semejantes (bienes y servicios) en cuanto a sus envases, empaques, precios, marcas y componentes físicos.

d. Nadie puede influir en los precios: ni el vendedor ni el comprador tienen ninguna influencia en los precios. El propio mercado determina los precios, procurando que ni sean excesivamente caros para asustar al consumo ni excesivamente bajos desalienten la producción o favorezcan el consumo excesivo.

2.1.6.2. Mercado De Competencia Imperfecta.

La estructura de mercado que es imperfecta es aquella en la que una o un pequeño número de empresas tienen influencia sobre el mercado que pueden cambiar los precios a su voluntad. Hay muchos tipos diferentes de competencias imperfectas, por lo tanto, mencionare algunos de ellos a continuación.

Dentro de este tipo mercado se encuentran el monopolio, el oligopolio, la competencia monopolística. Los bienes y servicios que venden los vendedores son diferentes, incluyendo aquellos en sus envases, empaques, costos, etiquetas y componentes físicos

2.1.7. El Costo

En economía el costo es el gasto realizado para producir un bien o brindar un servicio. En ese sentido el costo comprende el gasto realizado en la fabricación en sí, así como los insumos fueron comprados y mano de obra.

2.1.8. El Precio

A la cantidad de dinero que se asigna a un bien, servicio o producto para adquirir (comprar o vender) se conoce como **Precio**. Todo objeto o servicio que será vendido en un mercado tiene un precio fijo. Además, el precio de un determinado producto puede cambiar según una serie de variables como la calidad y la cantidad del artículo, bienes y servicio.

El precio es capaz de afectar directamente el comportamiento de equilibrio de mercado, o sea en la variación de la oferta y la demanda.

2.1.8.1. Clasificación De Precio.

En el mercado, el precio se clasifica para hacer un compra y venta de la siguiente manera:

1. **Precio de Costo:** Todo producto que compran los comerciantes de un mayorista en mercado lo hacen con precio de costo.
2. **Precio de venta:** Todo producto que se vende al público por un comerciante en un mercado, las transacciones se hacen con precio de venta.

El vendedor, siempre tiende a vender en un precio mayor al que le costó, entonces tiene una ganancia.

2.1.9. Oferta y Demanda en el Mercado

Es posible observar en un mercado de que como funcionan los precios, a medida de la escasez del producto se elevan y para detener el alza de precios, se debe dar decisiones en diversos mercados. Estos mercados son los de productos básicos, en donde el dinero, los compradores y vendedores intentan equilibrar sus planes individuales, en lo que resulta la presencia de oferta y demanda.

Es un instrumento esencial para la economía, la presencia de oferta y demanda, que ayuda a equilibrar los diferentes problemas de precio que se presenta en el mercado.

La Oferta

La noción de **oferta** agrupa a los proveedores de los bienes o servicios correspondientes. Se conoce como oferta a la cantidad considerable de bienes y/o servicios que diversas empresas, organizaciones e individuos ponen a la venta en un mercado. Estos productos pueden ser frutas, papas, arroz, calzados u otros artículos que el proveedor ofrece a la venta, a un precio favorable al comprador.

La Demanda

El concepto **demanda** agrupa a los compradores de bienes o servicio en específico. La demanda se refiere a la cantidad suficiente requerida de productos o servicios de los clientes, partes interesadas desean y/o quieren comprar de un mercado.

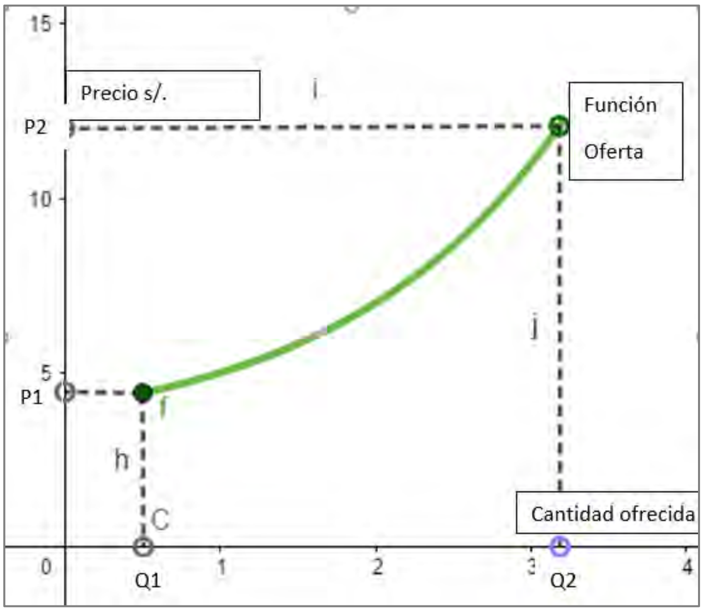
2.1.10. Funciones de Oferta, Demanda y Punto de Equilibrio

La función de oferta y demanda es la fórmula matemática que conecta las cantidades de un producto que se solicitan y se proporcionan en la economía de libre mercado. Si hay más oferta que demanda, entonces los precios bajan y les resulta difícil vender sus productos y /o servicios por menos dinero. cuando la demanda es mayor los precios aumentan y los compradores dificultan a comprar el producto y/o servicio deseado.

A. La Función de Oferta.

Denotado por O(p), es una función de variable “p”, representa la cantidad de productos y servicios que los proveedores venderán a un precio especifico. de manera general el número de artículos ofrecidos y su precio están directamente correlacionados, significa que, si el precio del producto aumenta, los productores están dispuestos a ofrecer más productos al mercado.

Figura 1: Gráfica de Función Oferta



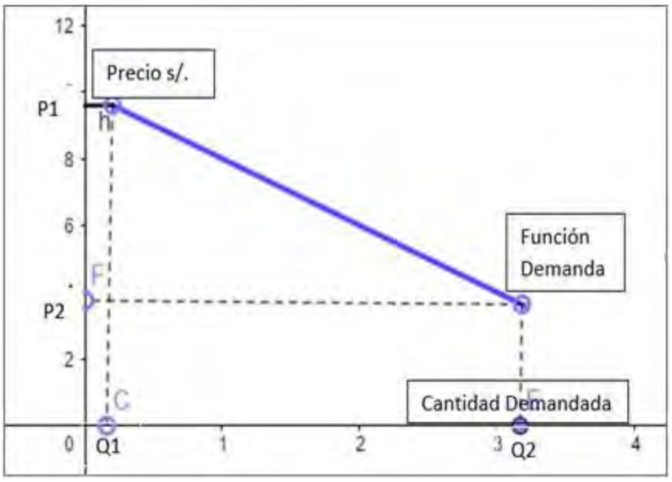
Fuente: *propio del presente estudio.*

Nota: La función **oferta es creciente**. Pues los fabricantes ofertan más, si los precios se aumentan (suben).

B. La Función de Demanda.

Denotado por D(p), es una función de variable “p”, que representa la cantidad de un determinado bien o servicio que los consumidores están dispuestos a adquirir a un precio especifico. Dé manera general, la cantidad de artículos demandadas y el precio tienen una relación inversa, significa que a medida que el precio disminuye los consumidores están dispuestos a comprar más cantidad el producto.

Figura 2: Gráfica de función Demanda.



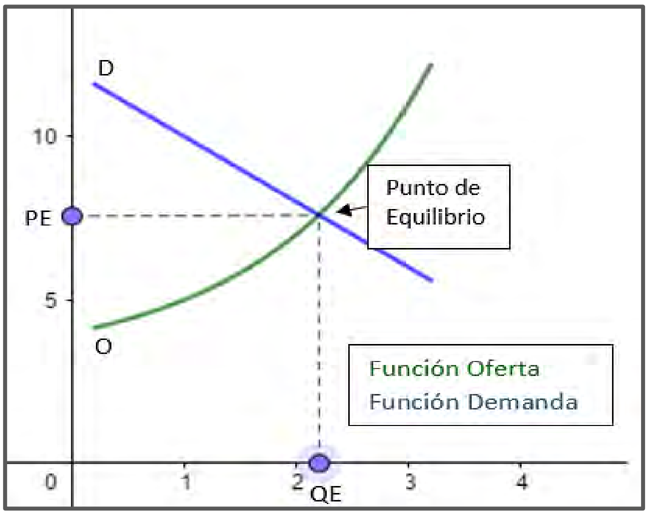
Nota: La función de **Demanda es decreciente**. El cliente tiende a comprar más cantidad si los precios disminuyen (bajan).

C. El Punto de Equilibrio (o equilibrio de mercado):

Gráficamente es el punto donde se interceptan las gráficas las curvas de las funciones de oferta y demanda, dicho de otra manera, es donde la cantidad ofertada es lo mismo a la cantidad demandada de algún producto o servicio para el mismo precio. La cantidad en este punto es cantidad de equilibrio y el precio en este punto es precio de equilibrio, como podemos ver la siguiente figura.

Figura 3: Gráfica de Punto de equilibrio.

.



Fuente: *propio del presente estudio.*

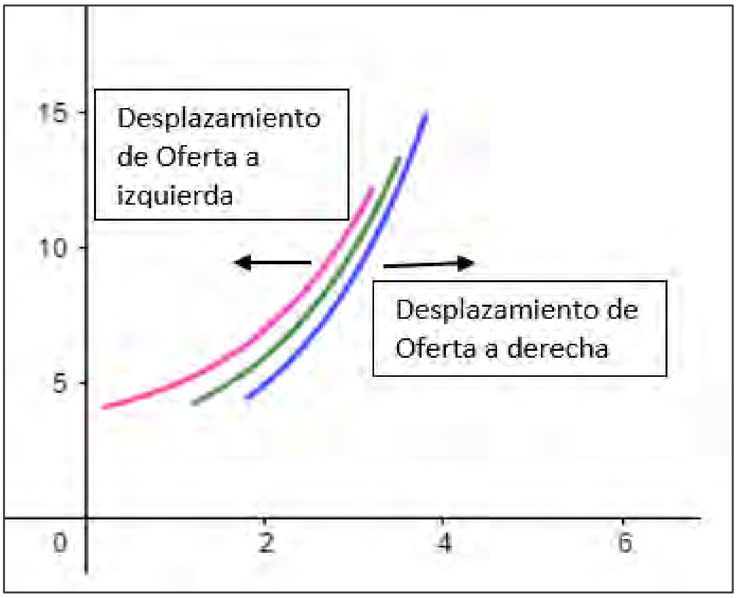
Nota: En el punto de equilibrio los productos se compran y se vende todo a todo, esto es, no sobran ni faltan.

2.1.10.1. Leyes De Oferta Y Demanda.

A. Ley de Oferta: Es una relación que se realiza, el precio y la cantidad de productos.

1. Si el precio del bien o servicio aumenta, la cantidad de bienes o servicios en oferta también aumentan. Dando lugar al cambio de posición de la curva una traslación hacia la derecha.
2. Cuando el precio de un producto disminuye, también se reduce la cantidad de productos que se ofertan. haciendo un cambio de posición de la curva una traslación hacia la izquierda. Lo que muestra la siguiente gráfica.

Figura 4. Gráfica de desplazamiento de Oferta a derecha y izquierda



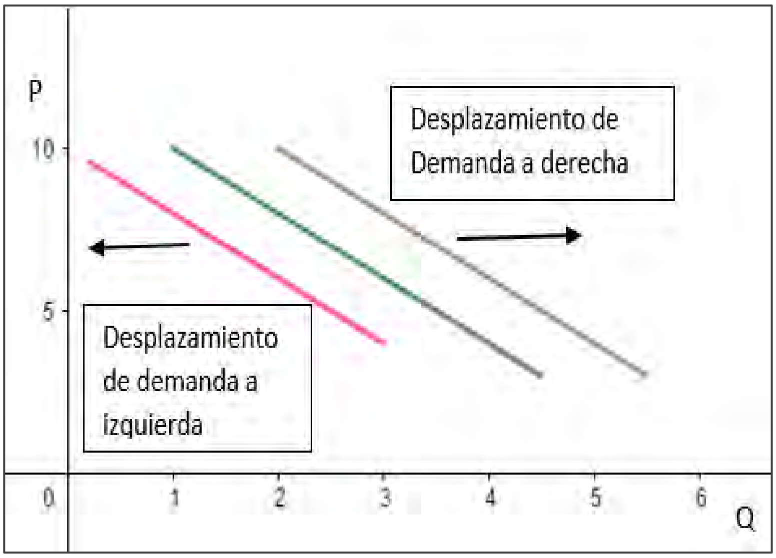
Fuente: *propio del presente estudio.*

B. Ley de Demanda: Es una relación que se realiza, el precio y la cantidad de productos.

1. Si el precio de un bien o servicio aumenta, se reduce la cantidad de productos en demanda, dando lugar al cambio de posición de la curva una traslación a la izquierda

2. cuando disminuye el precio del producto o servicios, aumenta la cantidad de productos o servicios en demanda, haciendo un cambio de posición de la curva demanda se traslada a la derecha. Tal como muestra la gráfica.

Figura 5. Gráfica desplazamiento de demanda a izquierda y derecha.



Fuente: *propio del presente estudio.*

2.1.10. 2.- *El Ingreso Bruto Anual.*

El ingreso bruto anual de un comerciante o una empresa, es el ingreso total de dinero por las ventas de productos o servicio de un comerciante o de una empresa durante un año de actividad continua. Son también conocidos como ventas brutas.

Aquí no se restan las ganancias o gastos en el transcurso del tiempo, sólo se suman todas las ventas o ingresos de dinero del comerciante o empresa. Para determinar el ingreso bruto anual se usa la siguiente relación.

Ingreso bruto anual = (Precio)(Cantidad)(Año)   Entonces   IB = P. Q . A

Donde: IB: ingreso bruto anual del vendedor y/o (productor)

P: precio del producto en venta

Q: cantidad del producto vendido

A: días o meses por año

Definiciones y Conceptos Preliminares de Análisis Funcional

2.1.11. Espacios Producto Interno

Definición 2.1.11.- Sea X un espacio vectorial real o complejo, Un producto interno una aplicación $\langle . \rangle$: X x X $\rightarrow K$, definida por

$$(x,\ y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

Donde X es un espacio vectorial y K es el cuerpo definido en los reales o complejo, la operación binaria $\langle . \rangle$ asigna un número complejo (escalar) representado por $\langle x, y \rangle$ a cada par ordenado de vectores $x, y \in$ X, conocido como el **Producto Interno** en *X*, y cumplen las siguientes propiedades:

1. a) Linealidad por la izquierda: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

   b) Linealidad conjugada por la derecha $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{a} \langle x, y \rangle + \bar{b} \langle x, z \rangle$

2. Hermiticidad $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, (la barra denota encima, es la conjugación compleja).

3. Positividad $\langle x, x \rangle \geq 0$, y $\langle x, x \rangle = 0$, si y sólo si $x = 0$. $\forall\ x,\ y, z \in X$. $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Definición 2.1.11.1.- Un espacio vectorial *X***,** provisto con un producto interno $\langle , \rangle$, o sea el par (*X***,**$\langle , \rangle$) se llama **espacio producto interno**.

Definición 2.1.11.2.- (Norma en un espacio producto interno) Sea el espacio Producto interno (*X***,**$\langle , \rangle$). La norma de un vector $x \in X$, se define por: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ y que satisfacen las siguientes condiciones:

Desigualdad de Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, para todo $x, y \in X$.

Desigualdad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in X$.

Definición 2.1.11.3.- Sea el espacio Producto interno $(X, \langle , \rangle)$, se define la ***distancia*** entre *x* e *y* mediante la expresión

$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$, ahora tenemos que X es un espacio métrico.

2.1.12. Espacio de Hilbert

Definición 2.1.12.- Un espacio producto interno (o un espacio pre Hilbert) es un par $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ donde $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en X.

Definición 2.1.12.1.- (Espacio de Hilbert) Sea un par (H, $\langle\, , \rangle$) un espacio producto interno, además H es provisto de la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ es completo entonces (H, $\langle\, , \rangle$) se llama **Espacio de Hilbert**. Se puede expresar que, un espacio producto interno completo es un espacio de Hilbert.

2.1.13. Espacio L^p

Un Espacio L^p es un concepto en matemática utilizado en la teoría de vectores normados. En se sentido L^p, se refiere a una familia de vectores de funciones continúas normados que satisfacen ciertas propiedades de convergencia.

El número p en L^p, indica el tipo de norma utilizada para medir la magnitud de las funciones en ese espacio. Los valores comunes que puede tomar p son 1, 2 e infinito y corresponden a las normas L^1, L^2 y L^∞ respectivamente. Cada norma L^p tiene sus propias propiedades y aplicaciones en diversas ramas de la matemática y la teoría de funciones.

Definición 2.1.13.1- Dado un espacio de medida (E, A, μ) y una función medible f, definimos para $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Llamada la norma de L^p de f y si $|f|^p$ es infinito no es integrable.

2.1.14. Espacio Cuadrado Integrable

Definición 2.1.14. Se dice que f (x) es una **función de cuadrado Integrable en** [a,b], si la integral $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ existe (es finita); denotaremos por L_2[a,b] o simplemente por L_2 al conjunto de todas las funciones cuadrado integrables en [a, b].

Definición 2.1.14.1.- Una función $f: X \to \mathbb{R}$, de una variable real o complejo definido en el intervalo $A \subset X$, se dice que es **Cuadrado Integrable**, si la integral del cuadrado de su módulo converge en su intervalo de definición.

Esto es: $\int_A |f(x)|^2 dx < \infty$ la integral existe y es finita,

Notación: Se denota con $L_2(X, \mu)$, o simplemente L_2. la colección de todos los funciones cuadrado integrables X. donde μ es la medida o norma de f en X.

2.1.15. Espacio Lineal De Funciones Cuadrado Integrables

Las funciones cuadrado integrables tienen las siguientes características:

a). Para dos funciones cuadrado integrables su producto de funciones es también cuadrado integrable. Es el resultado directo de la desigualdad.

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$$

y de las propiedades de la integral de Lebesgue.

b). Para dos funciones cuadrado integrables. la suma de funciones es también cuadrado integrable.

$$[f(x) + g(x)]^2 \leq f^2(x) + 2|f(x)g(x)| + g^2(x)$$

y en esta propiedad, cada una de las tres funciones del segundo miembro es integrable.

c). Si $f \in L_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f \in L_2$. luego se tiene:

$$\int [\alpha f]^2 \, d\mu = \alpha^2 \int f^2 d\mu < \infty$$

Luego, el conjunto $L_2(X, \mu)$ de funciones de cuadrado integrables establece un espacio lineal.

Definición 2.1.15.1.- Producto Escalar: Se define el producto escalar en L_2, de la siguiente manera

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x) \, dx$$

Propiedades: Para todo $f, h, g \in L_2$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se cumplen:

1.- Conmutatividad $\langle f, \ g \rangle = \langle g, \ f \rangle$

2.- Distributividad $\langle f + h \, , \ g \rangle = \langle f, \ g \rangle + \langle h \, , \ g \rangle$

3.- Linealidad $\langle \beta f,\ g\rangle = \beta\langle f,\ g\rangle$

4.- Existencial $\langle f,\ f\rangle > 0$ para $f > 0$

Definición 2.1.15.2. Se llama a L_2 espacio euclidiano, a las clases de funciones cuadrado integrables equivalentes, en el que la definición del producto escalar y las operaciones de suma y multiplicación por números se definen como las operaciones estándar de la siguiente manera:

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)\,dx$$

En L_2, la Desigualdad de Cauchy tiene la siguiente forma, opera como lo haría en cualquier espacio euclidiano:

$$\left(\int f(x)g(x)\right)^2 \leq \int f^2 \int g^2\,dx$$

Y para la desigualdad triangular tiene la siguiente forma

$$\sqrt{\int [f(x)+g(x)]^2 dx} \leq \sqrt{\int [f(x)]^2\,dx} + \sqrt{\int [g(x)]^2 dx}$$

En particular para $g(x) = 1$ se obtiene la siguiente desigualdad

$$\left(\int f(x)\right)^2 \leq \mu(X)\int f^2 dx$$

La métrica es:

$$d(f, g) = \|f - g\|_2 = \sqrt{\int [f(x) - g(x)]^2\,dx}$$

A esta última expresión también se conoce como desviación cuadrática entre las funciones f y g.

2.1.16. Integral de Fubini

El teorema de Fubini nos proporciona un método para calcular las integrales de funciones de múltiples variables mediante el cálculo de integrales múltiples, de una variable por teorema fundamental del cálculo, o todos los métodos conocidos de análisis de una variable que pueden ser aplicados al cálculo de integrales

Teorema de Fubini 2.1.16.- (En honor a Guido Fubini, matemático Italiano) Sea $A = [a, b] \text{ x } [c, d]$, un rectángulo del producto cartesiano de dos intervalos en $\mathbb{R}^2$, los elementos de A son pares ordenados (x, y) con $x \in [a, b]$ e $y \in [c, d]$ y sea f una función integrable, definida como: $f\colon A \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \to f(x, y)$$

Para $x \in [a, b]$ fijo, se considera una función $f_x\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ integrable en $[c, d]$ definido como: $y \to f_x(y) = f(x, y)$ donde: x es constante, y es una variable, entonces

$$f_x(y) = \int_c^d f(x, y)dy$$

Luego análogamente para $y \in [c, d]$ fijo se considera una función $f_y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ definido como: $x \to f_y(x) = f(x, y)$ donde y es constante, x variable, entonces

$$f_y(x) = \int_a^b f(x, y)dx$$

y la integral de la funcion bajo la region A esta dado por:

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)\, dy \right) dx$$

con una notación más practica

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

Análoga ... para cada $y \epsilon [c, d]$, se obtiene que:

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Observación. - si la función *f* es continua, entonces las funciones, f_x, f_y

(con $x \in [a, b]$, $y \in [m, n]$), son todas integrables, y entonces se obtiene que:

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_m^n f(x, y)\, dy \right) dx = \int_m^n \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Se puede generalizar a las regiones A, delimitados por rectángulos.

Corolario. - Sea g , h: $[a,b] \to \mathbb{R}$, dos funciones continuas tales que $g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in [a,b]$, sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$ una región limitada y sea $f: A \to \mathbb{R}$, una función continua, entonces se cumple:

$$\textstyle\int_A f = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

2.1.17. Transformadas Integrales

Definición 2.1.17.1.- Se dice transformada integral, a la transformación T que se aplica a una función $f(t)$ expresado en una integral definida y dando como resultado a otra función $F(u)$ de la siguiente forma:

$$T(f(t)) = \int_{t_1}^{t_2} K(u,t) f(t) dt = F(u)$$

Una clase especial de operador matemático T se llama transformada integral.

a. La función $f(t)$ es una función de entrada y la función de salida es $F(u)$.

b. Los límites de integración t_1 y t_2 varían dependiendo la definición.

c. Las transformadas integrales dependen de la función del núcleo $K(u,t)$ de dos variables conocido como núcleo ó Kernel. Hay núcleos que tienen inversa $K^{-1}(u,t)$ que producen la transformada inversa esto es:

$$f(t) = \int_{u_1}^{u_2} K^{-1}(u,t) f(u) du = T^{-1}(F(u))$$

2.1.18. La Transformada de Laplace

El 23 de octubre de 1749, en Beaumont-Auge, Francia, Pierre-Simón Laplace nació en una familia de agricultores modestos. Falleció en París, Francia, el 5 de marzo de 1827. Fue un matemático, físico y astrónomo francés que avanzó en la mecánica newtoniana e influyó significativamente en la creación de la **Transformada de Laplace** en honor a su nombre. Estudió las integrales de la siguiente forma:

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{ax}dx$$

En matemática un caso especial de transformada integral, es la transformada de Laplace, que transforma a una función compleja de variable $\boldsymbol{t}$ a una función simple lineal con variable $\boldsymbol{s}$

Se aplican a los problemas en la rama de la ciencia, ingenierías y problemas físicos, circuitos eléctricos etc. Su utilidad es muy eficiente para resolver las ecuaciones diferenciales e integrales de difícil solución, para convertir en funciones algebraicos simples, para ser resueltos de manera más sencilla, por ello se convierte en una herramienta más eficaz para resolver ecuaciones.

Definición 2.1.18. Sea función f definida en $[0, +\infty) \to \mathbb{C}$, se llama **Transformada de Laplace** de $f(t)$ a la función *F*(s) de la variable real o compleja $\boldsymbol{s}$ denotada por $\mathscr{L}$ o $\mathscr{L}\{f(t)\}$, definida por

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \int_o^{\infty} e^{-sx}f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_o^{b} e^{-sx}f(x)dx = F(\mathrm{s}). \qquad (2.1.18)$$

En todos los valores de $\boldsymbol{s}$ **,** para las cuales la integral impropia sea convergente.

Para establecer las condiciones de existencia de la integral de Laplace, es preciso hacer algunas hipótesis acerca de la función f, Comenzaremos por suponer que f es continua por tramos en cualquier intervalo (a, b) $\subset [0, +\infty)$. Esto implica que la función $e^{-sx}f(x)$ es integrable en todo intervalo de la forma [0, b] con b > 0, así que la existencia de la integral de Laplace dependerá del comportamiento del integrando para valores grandes de x .

Nota:

a. La transformada de Laplace se denota con la letra mayúsculas $\mathscr{L}$

b. la Transformada de Laplace de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ serán, respectivamente, *F*(s), *G*(s), *H*(s) esto es:

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = F(s)$$

$$\mathscr{L}\{g(x)\} = G(s)$$

$$\mathscr{L}\{h(x)\} = H(s)$$

2.1.18.1. Propiedades de la Transformada de Laplace.

1.- Teorema de Continuidad: Sea $f(x)$ una función de orden exponencial para $x > T$ y continua por tramos para $x > 0$,entonces existe la transformada de Laplace de $f(x)$ para $s > c$.

Prueba:

Usando la definición de la transformada de Laplace (2.1.18), se tiene que:

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \int_0^T e^{-sx} f(x)dx + \int_T^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = I_1 + I_2$$

Como el segundo miembro puede ser expresado como la suma de integrales sobre intervalos donde f es continua, se ve que por definición I_1 existe. En seguida veamos que para I_2 existe, por hipótesis nos indica para $x > T$, es de orden exponencial luego

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_T^\infty \left|e^{-sx} f(x)\right| dx \\ &\leq M \int_T^\infty e^{-sx} e^{cx}\, dx \\ &= M \int_T^\infty e^{-(s-c)x}\, dx \\ &= -M \frac{e^{-(s-c)x}}{s-c}\Big|_T^\infty \\ &= -M \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c} \end{aligned}$$

para s>c I_2 existe.

Por tanto: $\mathscr{L}\{f(x)\} = I_1 + I_2$ existe para s > *c*.

Comportamiento de la Transformada *F*(*S*) en Infinito

2.- Teorema de Convergencia: Sea $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, una función real, tales que $f(x)$ es continua por partes y de orden exponencial en el intervalo $[0, +\infty)$ entonces se cumple:

$$\lim_{s\to\infty} \mathscr{L}\{f(x)\} = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Prueba: Por hipótesis $f(x)$ es continua por partes en $[0, +\infty)$, entonces es acotada en este intervalo.

$|f(x)| \leq M$ para todo x $\in [0, +\infty)$ se tiene

$$| \mathscr{L}\{f(x)\}| \leq \int_0^\infty |e^{-sx} f\,(x)\,| dx$$

$$= \int_T^\infty |f\,(x)\,| e^{-sx} dx$$

$$= -M \frac{e^{-sx}}{s} \Big|_0^\infty = \frac{M}{s}$$

Y así, $|\mathscr{L}\{f(x)\}| \to 0$ cuando $s \to \infty$, de modo que

$\mathscr{L}\{f(x)\} \to 0$ cuando $s \to \infty$ por consiguiente $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

3.- Propiedad de Linealidad: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas, con sus transformada de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ respectivamente, sean $M\,y\,N$ constantes cualesquiera, entonces se cumple:

$$\mathscr{L}\{Mf(x) + Ng(x)\} = MF(s) + NG(s$$

Prueba:

Usando la definición de la transformada de Laplace (2.1.18.1)

$$\mathscr{L}\{Mf(x) + Ng(x)\} = \int_o^\infty e^{-sx}[Mf(x) + Ng(x)]dx$$

$$= \int_0^\infty [Me^{-sx} f(x) + Ng(x)]dx$$

$$= \int_0^\infty [Mf(x) + Ne^{-sx} g(x)]dx$$

$$= \int_0^\infty Mf(x)\,dx + \int_0^\infty Ng(x)dx$$

$$= M\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx + N\int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx$$

$$= \quad MF(s) \quad + \quad NG(s)$$

$$\therefore \ \mathscr{L}\{Mf(x) + Ng(x)\} = MF(s) + NG(s)$$

4.- Teorema de Traslación

Sea $f(x)$una función continua, cuya Transformada de Laplace existe, si $\mathscr{L}\{f(x)\}$ = *F*(s) y $a \geq 0$ sea un número real, entonces se cumple: $\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\}$= $F(s-a)$ para *s* > *a*

Prueba:

Usando la definición de transformada de Laplace (2.1.28.1), la demostración es inmediata

$$\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\} = \int_o^{\infty} e^{-sx}e^{ax}f(x)dx$$

$$= \int_o^{\infty} e^{-(s-a)x}f(x)dx$$

$$= F(s-a)$$

$\therefore$ $\mathscr{L}\{f(x)\}$ = *F*(s)

podemos calcular $\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\}$ sin otras operaciones, al cambiar *F*(s) por $F(s-a)$.

2.1.19. Transformada Inversa de Laplace

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}dt$, es la transformada de Laplace, entonces se dice que f es la transformada inversa de $F(s)$ es decir $f = L^{-1}\{F(s)\}$ aplicando las propiedades respectivas, queda bien determinada la función $f(t)$.

2.1.19.1. Lineal dad de la Transformada Inversa de Laplace.

Se utiliza las fracciones parciales F_1, F_2, F_3, …, F_k son las transformaciones de Laplace y C_1, C_2, C_3,…, C_k son constantes reales, si $F = C_1F_1 + C_2F_2 + \ ... + C_k\, F_k$ entonces se cumple

$$f = L^{-1}\{F\} = L^{-1}\{C_1F_1 + C_2F_2 + \ ... + C_k\, F_k\}$$

$$= C_1L^{-1}\{F_1\} + C_2L^{-1}\{F_2\} + \cdots + C_kL^{-1}\{F_k\}$$

Para encontrar la función f.

2.1.21. Convolución de Funciones

Definición 2.1.21: Sean f y g funciones continuas a trozos en [0, +∞[, entonces su convolución denotada por $f * g$ esta definida mediante la siguiente integral

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau \qquad (2.1.21)$$

Nota: La convolución de dos funciones es un tipo especial de producto de dos funciones continuas integrables.

2.1.21.1. Teorema de la Convolución.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones de orden exponencial y continuas por tramos definidas en $[0, +\infty)$, entonces la transformada de Laplace aplicado a la convolución de funciones $f(x) * g(x)$ existe y se define como producto de las transformada de Laplace de dichas funciones

$$\mathscr{L}\{f(x) * g(x)\} = \mathscr{L}\{f(x)\}\,\mathscr{L}\{g(x)\} = F(s)\,G(s)$$

Prueba: Sean $F(s) = \mathscr{L}\{f(x)\} = \int_o^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$

$G(s) = \mathscr{L}\{g(x)\} = \int_o^\infty e^{-s\beta} f(\beta)d\beta$

Multiplicando ambos miembros se tiene:

$$F(s)\,G(s) = \left(\int_o^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\right)\left(\int_o^\infty e^{-s\beta} f(\beta)d\beta\right)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)d\tau\, d\beta$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)}\, g(\beta)d\beta$$

poniendo τ fijo se tiene $t = \tau + \beta$ luego se obtiene $dt = d\beta$

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-st}\, g(t-\tau)dt$$

Como f y g son de orden exponencial y continuas por partes para $t > 0$ intercambiando el orden del integrando

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^{\infty} e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau) d\tau\right] dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} [f(x) * g(x)] dt$$

$$F(s)G(s) = \mathscr{L}\{f(x) * g(x)\}$$

2.1.21.2.- Propiedades de Convolución.

Sean las funciones f , g y h ambos continuas en el intervalo I = [0,+∞), y una constante $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces se cumplen :

1. $f * g = g * f$ conmutatividad.
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$ asociatividad de convolución
3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ distributividad de convolución.
4. $(\alpha.f) * g = f * (\alpha.g) = \alpha.(f * g)$ homogeneidad de convolución
5. $f * 0 = 0 * f = 0$ nulidad de convolución

2.1.22. Ecuaciones Integro Diferenciales

Las ecuaciones integro diferenciales, matemáticamente es una ecuación que involucra a dos operadores matemáticos los cuales son derivadas e integrales que se muestran de función incógnita.

A. Las Ecuaciones integro diferenciales de primer orden tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} + \int_0^x f\big(t, y(t)\big) dt = g(x) \qquad con \quad y(0) = a \dots\dots\dots\dots (1)$$

Con un valor inicial $y(0) = a$ tal que $\boldsymbol{a}$ es una constante.

Donde:

1. $y(x)$ es la función incógnita que se encuentra en la derivada y dentro de la integral.

2. $f(t, y(t))$ es la función que relaciona a la función incógnita con la variable "x " y que está dentro de la integral.
3. $g(x)$ una función cualquiera que está en el segundo miembro de la ecuación.

La solución de estas ecuaciones integrales es difícil de determinar, pero aplicando el método de la transformada de Laplace, hallar la solución es más simple.

B. Las ecuaciones integro diferenciales de segundo orden no homogéneas es de la forma

$ax''(t) + bx'(t) + \int_0^t cx(\tau)\,d\tau = g(t)$ ……. (2)

Con las condiciones iniciales $x'(0) = 0, \; x(t) = d$

Los coeficientes a, b, c y d son constantes, la función $x(t)$ es la función incógnita.

C. Las ecuaciones integro diferenciales de tercer orden no homogéneas es de la forma

$ax'''(t) + bx'(t) + \int_0^t cx(\tau)\,d\tau = g(t)$ ……. (3)

Con las condiciones iniciales: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0, \; x(0) = d$

Donde los coeficientes $a, b, c \; y \; d$ son constantes; $g(t)$ es la función que hace la no homogeneidad y $x(t)$ es la función incógnita.

Nota: Si en las ecuaciones (1), (2) y (3) la función $g(t) = 0$, entonces las ecuaciones integro diferenciales son homogéneas de primero, segundo y tercer orden respectivamente.

2.1.22.1. Solución de Ecuaciones Integro Diferenciales Mediante la Transformada de Laplace.

Para la solución de una ecuación integro diferencial se sigue los pasos.

1. Identificar la ecuación presentada en el problema
2. Se aplica la transformada de Laplace, en ambos miembros de la ecuación dada
3. Usar las propiedades pertinentes de la transformada de Laplace en cada término y luego despejar la función incógnita.

4. En este punto aplicar la transformada inversa de Laplace mediante las propiedades pertinentes y dar su solución final de $x(t)$.
5. Si la fracción racional no admite la transformada inversa, entonces simplificar la fracción por método de fracciones parciales, luego aplicando la linealidad de la transformada inversa de Laplace se tiene su solución final de $x(t)$.

2.1.23. Ecuaciones Integrales Lineales

Una ecuación que tiene una función desconocida (incógnita) dentro del integral se denomina ecuación integral.

$$y = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-t)} y(t)dt$$

El estudio de la teoría de las ecuaciones integrales es muy amplio y tiene una serie de aplicaciones matemáticas, como teoría de operadores, espacios normados y cuadrado integrable. El tema de la inversión de la integral fue posiblemente el primer ejemplo de este tipo de ecuación utilizado por los matemáticos en el siglo XIX. y existen dos clases de ecuaciones integrales, de Fredholm y de Volterra según el límite de integración que tiene la ecuación integral.

Definición 2.1.23.- Una ecuación integral lineal de la forma general, es considerada como la siguiente relación:

$$h(x)\, f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)dt \qquad (2.1.23)$$

Donde:

1) Las funciones $h(x)$, $g(x)$ y $K(x,t)$ son conocidas

La función $f(x)$ es desconocida (función incógnita)

2) $K(x,t)$ es la función llamada núcleo o kernel de la ecuación integral (2.1.23), y además esta función es continua en $[a,b] \times [a,b]$.

3) λ es un número real cualquiera diferente de cero, inclusive puede ser 1.

4) *Los valores a y b* son límites de integración, dadas en las funciones de *x.*

5) *h*(*x*), es una función constante conocida que puede tomar valores uno o cero, es el indicador de primera o segunda especie.

6) *g*(*x*), es una función dada que puede tomar valores igual a cero o diferente de cero, es el indicador de que es homogénea o no homogénea.

Nota: En la ecuación (2.1.23) se tiene lo siguiente:

Si $h(x) = 0$, entonces la ecuación integral es de primera especie.

Si $h(x) = 1$, entonces la ecuación integral es de segunda especie.

Si $g(x) = 0$, entonces la ecuación integral es homogénea.

Si $g(x) = 1$, entonces la ecuación integral es no homogénea.

Clasificación de Ecuaciones Integrales

Las ecuaciones integrales lineales pueden clasificarse en dos tipos según el límite de integración en:

A. Ecuaciones Integrales de Fredholm, Son las ecuaciones integrales donde los límites de integración son constantes; es en honor a su nombre del matemático Sueco Erik Ivar Fredholm (1866- 1927) quien instauro las bases de estas ecuaciones.

B. Ecuaciones Integrales de Volterra, son las ecuaciones integrales donde el límite superior de la integral es una variable y su límite inferior es cero; es en honor a su nombre del matemático, Italiano Vito Volterra (1860 – 1940) quien abordo estudios a estas ecuaciones que fueron publicadas a fines del siclo XIX.

2.1.23.1. Ecuación Integral Lineal de Fredholm.

Consideremos una ecuación integral lineal de Fredholm de la forma general (2.1.23) es decir:

$$h(x).\, f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt \qquad (2.1.23.1)$$

aquí los límites de integración $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ambos constantes.

Definición 2.1.23.1.1.- Si en la relación (2.1.23.1) reemplazamos *h* (*x*) = 0 , la ecuación transformada , se llama **ecuación integral de Fredholm de primera especie no homogénea** que tiene la siguiente forma:

$g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt = 0$ .... (2.1.23.1.1)

Donde: $f(x)$ es la función incógnita y los limites $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son constantes reales.

Definición 2.1.23.1.2.- Si en la relación (2.1.23.1), si reemplazamos $h(x) = 1$, la ecuación transformada, tiene la siguiente forma y se llama **ecuación integral de Fredholm de segunda especie no homogénea.**

$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt$ (2.1.23.1.2)

Donde $f(x)$ es función incógnita que se encuentra dentro y fuera de la integral.

Nota: Se observa que en las ecuaciones (2.1.23.1.1) y (2.1.23.1.2) , $g(x)$ es la función de no homogeneidad de la ecuación integral, de manera que:

Definición 2.1.23.1.3.- Si en la relación (2.1.23.1.1) reemplazamos *g* (*x*) = 0 , la ecuación transformada , se llama **ecuación integral de Fredholm de primera especie homogénea** que tiene la siguiente forma:

$\lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt = 0$ … … … … … (2.1.23.1.3)

La función incógnita es $f(x)$ y está dentro de la integral.

Definición 2.1.23.1.4.- Si en la relación (2.1.23.1.2) reemplazamos *g* (*x*) = 0 , la ecuación transformada ,tiene la forma siguiente y es conocido como **Ecuación Integral de Fredholm de segunda especie homogénea.**

$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt$ (2.1.23.1.4)

la función incógnita $f(x)$ se encuentra dentro y fuera de la integral.

2.1.23.2. Ecuaciones Integrales Lineales de Volterra.

Es una ecuación integral, donde el límite inferior es una constante y el límite superior de la integral es una variable.

$y + \int_0^x y(t) dt = 21$

Definición 2.1.26.2.- Consideremos una **Ecuación Integral Lineal de Volterra** de la forma general (2.1.23) es decir:

$$h\,(x).\,f\,(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K\,(x,t) f\,(t) dt \qquad (2.1.23.2)$$

donde los límites de integración inferior *a* es constante y el límite superior *x* es una variable.

Definición 2.1.23.2.1.- Si en la relación (2.1.23.2) reemplazamos $h(x) = 0$, la ecuación transformada, se le conoce como **Ecuación Integral de Volterra de primera especie no homogénea** que tiene la forma:

$$g(x) + \lambda \int_0^x K\,(x,t) f\,(t) dt = 0 \qquad (2.1.23.2.1)$$

La función $f(x)$ es la funcion incógnita se encuentra dentro de la integral.

Definición 2.1.23.2.2.- Si en la relación (2.1.23.2) reemplazamos $h(x) = 1$, la ecuación transformada, se conoce como **Ecuación Integral de Volterra de segunda especie no homogénea** que tiene la forma:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) f\,(t) dt \qquad (2.1.23.2.2)$$

La función incógnita $f(x)$ se encuentra dentro y fuera del signo integral.

Nota: Se observa que en las ecuaciones (2.1.23.2.1) y (2.1.23.2.2), $g(x)$ es la función de no homogeneidad de la ecuación integral, de manera que:

Definición 2.1.23.2.3.- Si en la relación (2.1.23.2.1) reemplazamos $g(x) = 0$, la ecuación transformada, es conocido como **Ecuación Integral de Volterra de primera espacie homogénea** que adopta la forma:

$$\lambda \int_0^x K\,(x,t) f\,(t) dt = 0 \qquad (2.1.23.2.3)$$

Donde f (x) es la función incógnita y está dentro de la integral.

Definición 2.1.23.2.4.- Si en la relación (2.1.23.2.2) reemplazamos $g(x) = 0$, entonces la relación se convierte a una **Ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea**, que tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) f\,(t) dt \qquad (2.1.23.2.4)$$

La función incógnita *f* (*x*), se encuentra dentro y fuera del signo integral.

2.1.24. Ecuaciones Integrales De Volterra Tipo Convolución

Una ecuación integral lineal de **Volterra de tipo Convolución** es de la forma:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K\,(x-t) f\,(t) dt \qquad (2.1.24)$$

La característica de este tipo de ecuaciones integrales lineales es que la función $K(x,t) = K(x-t)$ es la función núcleo de desplazamiento, dentro de este tipo de ecuaciones integrales lineales se pueden clasificar en las siguientes:

Definición 2.1.24. 1. Ecuación integral de **Volterra primera especie homogénea de tipo convolución**

$$\int_0^x K\,(x-t) f\,(t) dt = 0 \qquad (2.1.24.1)$$

Definición 2.1.24.2. Ecuación integral de **Volterra primera especie no homogénea de tipo convolución**

$$g(x) = \int_0^x K\,(x-t) f\,(t) dt \qquad (2.1.24.2)$$

Definición 2.1.24.3. Ecuación integral lineal de **Volterra segunda especie homogénea de tipo convolución**

$$g(x) = \int_0^x K\,(x-t) f\,(t) dt \qquad (2.1.24.3)$$

Definición 2.1.24.4. Ecuación integral lineal de **Volterra segunda especie no homogénea de tipo convolución**

$$f(x) = g(x) + \int_0^x K\,(x-t) f\,(t) dt \qquad (2.1.24.4)$$

Estas expresiones son las ecuaciones de Volterra de tipo convolución de primera y segunda especie respectivamente. Donde la función $K(x-t)$ es conocida como la función núcleo o función de traslación, estas ecuaciones podrán ser analizadas y resuelta por la transformada de Laplace.

2.1.25.- Ecuaciones Diferenciales Parciales

Una ecuación con derivadas parciales de funciones de dos o más variables independientes se llama ecuación en derivadas parciales (EDP). Se reconocen fácilmente al utilizar el símbolo delta ∂ para denotar el diferencial parcial.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x.t) + 3\,\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 2x$$

Cuya solución de esta ecuación radica en encontrar la función $u(x.t)$ con diferentes métodos de solución.

2.1.25.1. Ecuación Diferencial Parcial Lineal de Primer Orden

Definición 2.1.25.1. – Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de primer orden son aquellas en las que más de una variable independiente influye en la función incógnita con derivadas de primer orden. de la forma:

$$F(x, y, u,\ u_x, u_y) = 0 \qquad (2.1.25.1)$$

Donde $u(x, y)$ una función de dos variables independientes

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Son las derivadas parciales.

Resolver una EDP es hallar una función $u(x, y)$ que representa a una familia de curvas.

2.1.25.2. Solución de una Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales Usando la Transformada de Laplace.

Sea la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden no homogénea

$$x\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + ay = bx^2 \quad para\ \ x > 0\,, t > 0\ \ con\ \ a, b \in \mathbb{R} \quad \dots\dots\dots (i)$$

Donde $y = y(x, t)$ es la función incógnita de dos variables, sujeto a las condiciones iniciales. $y(0, t) = 0$ e $Y(x, 0) = 0$

Solución

Se observa que, es una ecuación en derivadas parciales de dos variables, para resolver se aplica la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación.

$$\mathscr{L}\left\{x\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}+ay\right\}=\mathscr{L}\{bx^2\}$$

$$x\,\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial x}\right\}+\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\}+a\,\mathscr{L}\{y\}=bx^2\,\mathscr{L}\{1\} \quad \ldots\ldots\ (ii)$$

Luego por la definición de la transformada de Laplace para funciones de dos variables se tiene lo siguiente: $\mathscr{L}\{y\}=Y(x,s)$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial x}\right\}=\frac{dY(x,s)}{dx}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\}=s\,Y(x,s)-Y(x,0)$$

Sustituyendo en (ii)

$$x\frac{dY(x,s)}{dx}+\ s\,Y(x,s)-Y(x,0)+aY(x,s)=\ bx^2\frac{1}{s}$$

Aplicando condiciones iniciales $Y(x,0)=0$

$$x\frac{dY(x,s)}{dx}+\ s\,Y(x,s)+\ aY(x,s)=\ bx^2\frac{1}{s}$$

$$Y'(x,s)+\frac{s+a}{x}Y(x,s)=\ \frac{bx}{s}$$

Prescindiendo de sus argumentos $Y'+\frac{s+a}{x}Y=\ \frac{bx}{s}$

Observando se tiene una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea de la transformada de Laplace de la forma:

$y'+py=f$ con factor integrando $u=\ e^{\int pdx}$,con $p=\frac{s+a}{x}$ entonces

$$u(x)=\ e^{\int\frac{s+a}{x}dx}=e^{(s+a)\int\frac{1}{x}dx}=e^{(s+a\,)lnx}=e^{lnx^{(s+a)}}=x^{s+a}$$

Multiplicando el factor integrando a ambos miembros de la ecuación

$$x^{s+a}Y'+x^{s+a}\frac{s+a}{x}Y=\ x^{s+a}\frac{bx}{s}$$

$$(x^{s+a}Y)'=\ x^{s+a}\frac{bx}{s}$$

Integrando ambos miembros respecto de x

$$x^{s+a}Y = \int x^{s+a}\frac{bx}{s}dx$$

$$x^{s+a}Y = \frac{b}{s}\int x^{s+a+1}\,dx$$

$$x^{s+a}Y = \frac{b}{s}.\frac{x^{s+a+2}}{s+a+2} + c$$

$$Y = x^{-(s+a)}\ \frac{b}{s}.\frac{x^{s+a+2}}{s+a+2} + cx^{-(s+a)}$$

$$Y = \frac{b}{s}.\frac{x^{-(s+a)}x^{s+a}x^{2}}{(s+a+2)} + cx^{-(s+a)}$$

$$Y = \frac{bx^2}{s(s+a+2)} + cx^{-(s+a)}$$

Luego por condiciones de contorno si $y(0,s) = 0$, entonces se obtiene c =0

Se tiene $Y = \frac{bx^2}{s(s+a+2)}$, como $\mathscr{L}\{y\} = Y(x,s)$

Aplicamos en ambos miembros de la ecuación la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{bx^2}{s(s+a+2)}\right\}$$

$$\mathrm{y}(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{bx^2}{s(s+a+2)}\right\} \quad \dots\dots\dots..(iii)$$

En la expresión $\frac{bx^2}{s(s+a+2)}$ aplicamos fracciones parciales

$$\frac{bx^2}{s(s+a+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+a+2)}$$

$$\frac{bx^2}{s(s+a+2)} = \frac{A(s+a+2)+Bs}{s(s+a+2)}$$

$$\frac{bx^2}{s(s+a+2)} = \frac{(A+B)s+(aA+2A)}{s(s+a+2)}$$

Igualando coeficientes se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ aA+2A = bx^2 \end{cases}$$

De donde $A = \frac{bx^2}{a+2}$ y $B = \frac{-bx^2}{a+2}$

Luego sustituyendo en (iii)

$$y(x,t) = \frac{bx^2}{a+2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{bx^2}{a+2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+(a+2)}\right\}$$

$$y(x,t) = \frac{bx^2}{a+2}.1 - \frac{bx^2}{a+2}e^{-(a+2)t}$$

$$y(x,t) = \frac{bx^2}{a+2}(1 - e^{-(a+2)t})$$

Esta función representa la solución de la ecuación en derivadas parciales.

2.1.25.3. Ecuación Diferencial Parcial Lineal de Segundo Orden

Son las ecuaciones que tienen la siguiente forma genérica:

$$A(x,t)\frac{\partial^2}{\partial_{x^2}}u(x.t) + B(x,t)\frac{\partial^2}{\partial_{xt}}u(x.t) + C(x,t)\frac{\partial^2}{\partial_{t^2}}u(x.t) + D(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + E(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t) = F(x,t)$$

Donde $u(x,t), A(x,t), B(x,t), C(x,t), D(x,t), E(x,t), F(x,t)$ son todas funciones de dos variables definidas en un intervalo común. Para el caso que $F(x,t) = 0$ se dice que la EDP es homogénea, para el caso contrario, si $F(x,t) \neq 0$ es no homogénea.

En forma resumida.

$$A\frac{\partial^2}{\partial_{x^2}}u + B\frac{\partial^2}{\partial_{xt}}u + C\frac{\partial^2}{\partial_{t^2}}u + D\frac{\partial}{\partial x}u + E\frac{\partial}{\partial t}u + u = F$$

(2.1.25.2) donde los coeficientes A, B, C, D, E, F son constantes y la EDP se conoce como EDP de segundo orden con coeficientes constantes. Al resolver se determina la función $u = u(x.t)$ que representa solución de la ecuación diferencial parcial.

2.1.25.4. Clasificación de las Ecuaciones en Derivadas Parciales de Segundo Orden

Las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, se encuentran en diversos problemas de ingeniería y física. Específicamente las ecuaciones de onda, de calor y de Laplace, se clasifica en tres tipos dependiendo de las segundas derivadas y a los coeficientes A, B y C son constantes y sean diferente de cero.

La ecuación diferencial parcial homogénea de segundo orden

$$A\frac{\partial^2}{\partial_{x^2}}u + B\frac{\partial^2}{\partial_{xt}}u + C\frac{\partial^2}{\partial_{t^2}}u + D\frac{\partial}{\partial x}u + E\frac{\partial}{\partial t}u + u = 0 \qquad (2.1.25.2)$$

Se clasifica en tres clases de ecuaciones, según su discriminante: $B^2 - 4AC$

1. HIPERBÓLICA, si $B^2 - 4AC > 0$
2. PARABÓLICA, si $B^2 - 4AC = 0$
3. ELÍPTICA, si $B^2 - 4AC < 0$

2.1.26. Transformada de Laplace para Funciones de dos Variables

Sea $u(x.t)$ una función de las variables x y t. La transformada de Laplace de la función $u(x.t)$ respecto a la variable t se define como:

$$\mathscr{L}\{u(x,t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, u(x,t)dt \qquad (2.1.35.3)$$

Nota.- la variable "x" es un parámetro y la transformada por convención se escribe como $\mathscr{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$

2.1.27. Transformada de Laplace para Ecuaciones Diferenciales Parciales

1. La transformada de una derivada de una función de una variable $f(t)$ de orden exponencial y continua en $[0,+\infty[$, con derivada $\frac{d}{dt}f(t)$ continua en todo intervalo de la forma $[0,\mathrm{b}]$, entonces:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$$

2. La transformada de EDP para funciones de dos variables tiene como propiedades a cuatro situaciones tomando como parámetro la variable $\boldsymbol{x}$

a. $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\} = sU(x,s) - U(x,0)$

b. $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\} = s^2U(x,s) - sU(x,0) - u_t(x,0)$

c. $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right\} = \frac{d}{dx}u(x,t)$

d. $\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\} = \frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{u(x,t)\}$

Nota:

1. Para resolver los problemas de ecuaciones diferenciales parciales por el método de transformada de Laplace es necesario conocer los valores iniciales $U(x,0)$, $u_t(x,0)$ según el problema planteado y luego aplicarla.

Condiciones de Contorno y Laterales

Para resolver los problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es necesario conocer ciertas condiciones que cumplan de manera apropiada para determinar la función solución $u(x,y)$, estos son condiciones de contorno y laterales o valores iniciales.

En seguida se presenta algunos ejemplos de tales condiciones:

$u(x,0) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, se indica el valor de $\mathcal{U}$ sobre el eje x

$u(0,y) = g(y), \forall x \in \mathbb{R}$, se indica el valor de $\mathcal{U}$ sobre el eje y

$u(x,2) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, se indica el valor de $\mathcal{U}$ sobre la recta $y = 2$

$u(x,x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, se indica el valor de $\mathcal{U}$ sobre la recta $y = x$

$u(e^s,s) = g(s), \forall x \in \mathbb{R}$, se indica el valor de $\mathcal{U}$ sobre la gráfica de $x = e^y$

$u(2x,x+1) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, se indica el valor de $\mathcal{U}$ sobre la recta $y = \frac{x}{2} + 1$

Se llaman Condiciones de contorno o de frontera a las restricciones o condiciones adicionales definidas en el dominio de solución de una ecuación en derivadas parciales.

2.2. Marco Conceptual (Palabras Clave)

Micro economía / Oferta y Demanda/ punto de Equilibrio/ Transformada de Laplace / ecuaciones Integrales, integro diferenciales y derivadas parciales.

2.3. Antecedentes de la Investigación

Presento antecedentes de diferentes autores Nacionales e Internacionales referentes al tema de estudio a fin de brindar soporte a la presente investigación y de esa manera dar credibilidad a los resultados del estudio.

2.3.1. Antecedentes Nacionales

(1) MAMANI FLORES, Adelina (2027), en su tesis de investigación titulada “aplicación de la transformada de Laplace para la solución de problemas de circuitos

eléctricos en ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes con valores iniciales, que por objetivo tiene aplicar la transformada de Laplace en la solución de problemas de circuitos eléctricos. Para lo cual utiliza el método deductivo – aplicativo, donde se han analizado las definiciones y teoremas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, las definiciones y propiedades de la transformada de Laplace y sus inversas además los conceptos básicos de circuitos eléctricos, en la solución de problemas de circuitos eléctricos con ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y condiciones iniciales. En conclusión con la aplicación de la transformada de Laplace se puede encontrar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes de los problemas de los circuitos eléctricos RLC en serie y RLC en paralelo siguiendo los procesos necesarios. convirtiéndose en un problema algebraico simple que pueden ser resueltos de manera más sencilla". Mamani (2017)

(2) REBASA Blas, (2021), en su tesis titulada "Modelos didácticos para el desarrollo de competencias en la unidad, transformada de Laplace en estudiantes universitarios de ingenieria civil de la Universidad Nacional de pedro Ruiz Gallo. Trujillo, que tiene como objetivo crear un modelo didáctico que se centre en desarrollar habilidades y potenciar capacidades en la solucion de problemas, mediante la transformada de Laplace las cuales ayudaran a los estudiantes de ingenieria civil. Y aplicó el método de investigación Descriptivo – Positiva, con una poblacion muestral de 50 estudiantes que llevaron el curso de Matematica para ingenieros III, evidenciando como resultado que con el uso de la transformada de laplace se obtuvo una base de casi homogénea en la competencia matemática por lo tanto este método centra en su interes de toda secuencia didáctica, cuya diversificación debe atender al objeto de conocimiento y un proceso de aprendizaje basado en razonamiento en la solucion de problemas. En conclusion con esta estrategia, el uso de la transformada de Laplace debe estar presente en las etapas de planificación, implementación, ejecución y evaluación de seciones didáctica con el potencial desarrollo de aprendizaje de la competencia matemámtica". Rebasa Blas (2021)

(3) FLORES GALLO, Diana (2021) en su tesis titulada "Un modelo o la razón de ser de las praxeologías identificadas para la enseñanza de la transformada de Laplace en un curso de ecuaciones diferenciales de la carrera de ingeniería mecatrónica, Pontificia Universidad Católica del Perú- Lima. Tiene por objetivo que los estudiantes de ingeniería mecatrónica, consideren y valoren el uso de la transformada de Laplace en su entorno profesional. Para ello usa metodología cualitativa en dos etapas. En la primera realiza un estudio de la transformada de Laplace, y revisión de la malla curricular del curso de ecuaciones diferenciales, de acuerdo a los objetivos que se plantearon. Y en la segunda se realiza una entrevista a un especialista (Ingeniero Mecatrónica). Las tareas que se hacen son de intramatemático, en algunas veces con la ayuda de la tabla de transformada de Laplace y la transformada inversa de Laplace se resuelven los problemas de ecuaciones diferenciales y finalmente estudia modelación matemática.

En la actualidad con el avance de la tecnología la mayoría de las empresas tienen un área de automatización donde trabaja un ingeniero Mecatrónica que puede automatizar cosas sencillas que van desde un brazo robótico hasta un automóvil, gracias a modelos matemáticos cuya base está dada por transformada de Laplace y la función de transferencia". Flores Gallo (2021).

2.3.2. Antecedentes Internacionales

(4) VILLAGRÁN CÁCERES Wilson Javier (2015), en su tesis de investigación titulada "la utilización de la transformada de Laplace como herramienta metodológica, para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes del sexto semestre de la escuela de ingeniería automotriz en el análisis de circuitos eléctrico, Escuela superior de Chimborazo – Quito, tiene por objetivo utilizar la transformada de Laplace como herramienta metodológica para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, para ello se utilizó el método científico deductivo, analítico, sintético y longitudinal. En la muestra de su trabajo considera los estudiantes matriculados en los periodos académicos de Marzo – agosto 2014 y octubre – febrero 2015, haciendo la media aritmética de los estudiantes antes y

después de haber utilizado la transformada de Laplace en los periodos correspondientes y para su validación se aplicó el estadístico “z“, normalizado para el contraste de igual medida de poblaciones normales con un nivel de significación de 5% en la cual muestra el área de rechazo de la hipótesis nula y aceptación de la hipótesis de la investigación. A si finalmente demostrando el uso de la transformada de Laplace como herramienta metodológica funciona positivamente, mejorando el rendimiento académico de los estudiantes en el análisis de circuitos eléctricos en un 21.9%, por lo cual es prudente dar continuidad a la propuesta para elevar el porcentaje indicado”. Villagran Caceres (2015)

(5) GALLEGO ABAROA, Elena (2004), en su trabajo de tesis titulado “De las fuentes de La Oferta y la Demanda de Trabajo en la Historia del Pensamiento Económico, Universidad Complutense Madrid, tiene objetivo responder tres preguntas. ¿Especificar los origines de los modelos y las aportaciones de los principales autores sobre la composición del mercado?,¿Determinar el camino por donde se ha edificado la economía laboral?,¿La importancia del estudio de la economía laboral que ha tenido sobre la construcción de la teoría económica? y llega a las siguientes conclusiones, al ser tratado como un mercado agregado hizo que fuera necesario introducir aspectos de la competencia perfecta, dentro de la economía laboral incluso antes de que se plantearan en otros campos de la microeconomía y de la macro economía actual. El modelo de competencia perfecta es útil para el armazón ilustrativo de los fundamentos económicos. Este corriente de pensamiento continuo con los neoclásicos quienes también distinguieron la teoría de la competencia perfecta, con un factor de trabajo homogéneo que permitirá realizar un análisis. Por tanto, los movimientos internacionales de mercancías y de factores de producción cola problemática del mercado de trabajo agregado de mano de obra, reflexionaron a partir de la competencia perfecta para la oferta y demanda de trabajo. Dando entrada a la discusión del desempleo y del ajuste del estudio del mercado de trabajo. Gallegos Abaroa”,(2004)

(6) PÉREZ PEÑA, Rafael (2022), en su tesis, titulado “Determinantes del precio del maíz en el periodo 2000 - 2011 y sus efectos en el bienestar de México y Estados

Unidos, Universidad Colegio Frontera del Norte, Tijuana – México. Tiene por objetivo determinar factores que intervienen en el alza de del precio del maíz durante el periodo 2000 – 2011, en estados unidos y el efecto de dicha alza en el bienestar de los agentes de México y EE UU. La metodología empleada en la presente tesis se comenzó por describir el modelo de oferta y demanda, lo que se especificó usando un sistema de ecuaciones simultaneas, para medir los determinantes del precio del maíz de las cuales una le corresponde a oferta y demanda, incorporando el equilibrio del sistema. Para estimar el sistema se utilizó el método de mínimos cuadrados. Llegando a las siguientes conclusiones, se presentan los impactos de las variables consideradas en el análisis de sensibilidad respecto al precio del maíz, se propone la implementación de una política encaminada a mejorar las condiciones del cultivo. En primer lugar, a través de capacitaciones y asesoramientos de los productores en cuanto a técnicas de cultivo más productivos, dando prioridad a pequeños y medianos productores, posterior mente se pueden llevar a cabo programas para mecanización, la implementación de sistema de riego y otorgamiento de créditos. Esto con la finalidad de incentivar que la brecha sea más pequeña en términos de productividad del cultivo de maíz por hectáreas entre México y EE.UU. sea pequeña. Pérez Peña", (2022).

CAPITULO III

3.1. Hipótesis

a) Hipótesis General

Identificar los Modelos Matemáticos que involucra ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales lineales, ecuaciones diferenciales parciales en problemas de la economía.

b) Hipótesis Específica

1. Identificar los modelos matemáticos en problemas de la economía que involucran ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales
2. Resolver estos modelos matemáticos utilizando la Transformada de Laplace.
3. Considerando la solución de los modelos matemáticos para los problemas económicos graficar, simular e interpretar en términos económicos.

3.2.- Identificación de Variables e Indicadores

En el presente trabajo se aborda a encontrar la solución de los problemas económicos de oferta y demanda encontrando el punto de equilibrio, que depende de los modelos matemáticos expresados por ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales con derivadas parciales que son resueltos mediante la Transformada de Laplace, considerando como indicador la solución que posibilita su análisis e interpretación del problema económico.

3.3.- Operacionalización de Variables

En lo que se refiere a la operación de variables consideramos las funciones de oferta y demanda, variables necesarias para determinar el punto de equilibrio e interpretar su solución.

CAPÍTULO IV

Metodología

4.1. Ámbito de Estudio: Localization Política y Geográfica

El presente trabajo de investigación, **solución de problemas económicos que involucran modelos matemáticos (ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales) utilizando la transformada de Laplace,** se ha realizado en la Escuela de Posgrado Maestría en Matemática de la Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco, en el periodo comprendido entre los meses del 2023.

4.2. Tipo y Nivel de Investigación

Este trabajo de investigación está ubicado dentro de la categoría de investigación

Descriptiva – Aplicativa. Es descriptivo porque proporciona definiciones fundamentales significativas necesarias para los temas cubiertos en este estudio y es aplicativo en la solución de los problemas.

4.3. Unidad de Análisis

4.3.1. Método de Solución Aplicando la Transformada de Laplace

Resolver los modelos matemáticos de los problemas económicos expresados mediante:

Ecuaciones integro diferenciales

Ecuaciones integrales

Ecuaciones diferenciales parciales

4.4. Población de Studio

El presente trabajo de studio no utiliza para el estudio a una población.

4.5. Tamaño de Muestra

En el Desarrollo de éste trabajo de investigation no se tiene el tamaño de la muesta

4.6. Técnicas de Selección de Muestra

El tipo y/o nivel de mi trabajo de investigación no utiliza estadígrafos para su análisis e interpretación de datos

4.7. Técnicas de la Recolección de Información

Para la implementación de este trabajo se recurre a la recopilación de la información bibliográfica a diferentes textos de los temas de economía, ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales; Transformadas de Laplace, fracciones parciales y Transformada inversa de Laplace

4.8.- Técnicas de Análisis E Interpretación de la Información

Encontrar la solución de los problemas y presentar las soluciones y las gráficas de los modelos matemáticos aplicado a los problemas económicos luego también presentar mediante un cuadro para diferentes costos de las funciones de oferta y demanda se determina sus respectivas cantidades luego interpretar su solución correspondiente.

CAPÍTULO V

Resultados Y Discusión

5.1.- Procesamiento, Análisis, Interpretación y Discusión de Resultados

En esta parte del trabajo se desarrolla la solución de problemas aplicados a economía de mercado para determinar el punto de equilibrio (o equilibrio de mercado), representados por funciones incógnita de oferta y demanda, en cuya solución se realiza mediante el método de transformada de Laplace.

Esquema de Solución de Problemas Aplicados a la Economía por Método de la Transformada de Laplace

5.1.1. Para resolver los problemas económicos se aplica el siguiente procedimiento:

1. Teniendo el enunciado del problema, caracterizados mediante modelos matemáticos en las ecuaciones de oferta y demanda se identifica los modelos matemáticos como son las ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales.

2. Se resuelve estos modelos matemáticos utilizando La Transformada de Laplace, con el propósito de expresar las ecuaciones de oferta y demanda de manera más simple.

3. Determinamos el punto de equilibrio de manera analítica o utilizando Software, Graph o Wólfram Alpha, para la interpretación de la solución en términos económicos.

5.1.2. Problemas Económicos de Oferta y Demanda

A continuación, se presentan problemas de oferta y demanda que involucran ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales.

Problema 1: Oferta y Demanda en Mercado de Arroz.

En el mercado Mayorista Vino canchón de San Jerónimo, considerado como un mercado de competencia perfecta, se presenta el análisis económico adecuado para la venta de arroz con las funciones de oferta y demanda, en la siguiente forma:

$$\begin{cases} Oferta: \quad y' + 2y - 3\int_0^x y dt = 5x + 5 \ , \quad y(0) = 2 \quad \ldots\ldots(1) \\ \quad Demanda \ : \qquad\qquad 5y = 20 - 4x \qquad \ldots.(2) \end{cases}$$

donde "y" el precio (p) expresado en soles /kilogramo de arroz. y "x" la cantidad del bien (q) expresada en decenas de miles de kilogramos por día.

a) Establecer el equilibrio del mercado.

Solución

En la ecuación de oferta (1), se observa una ecuación integro diferencial, donde la función incógnita es $y(x)$, para determinar el punto de equilibrio es necesario previamente resolver esta ecuación integro diferencial, utilizando la transformada de Laplace. Por tanto, en la ecuación de la oferta:

$$y' + 2y - 3\int_0^x y dt = 5x + 5$$

Aplicamos la Transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación, considerando sus propiedades, esto es:

$$\mathscr{L}\{y'\} + \mathscr{L}\{2y\} - 3\,\mathscr{L}\left\{\int_0^x y dt\right\} = \mathscr{L}\{5x\} + \mathscr{L}\{5\}$$

se tiene:

$$s\mathscr{L}\{y\} - y(0) + 2\mathscr{L}\{y\} - \frac{3}{s}\mathscr{L}\{y\} = 5\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}$$

$$s\mathscr{L}\{y\} + 2\mathscr{L}\{y\} - \frac{3}{s}\mathscr{L}\{y\} = 5\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s} + 2$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(s + 2 - \frac{3}{s}\right) = \frac{5}{s^2} + \frac{5}{s} + 2$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(\frac{s^2+2s-3}{s}\right) = \frac{5+5s+2s^2}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(\frac{s^2+2s-3}{s}\right) = \frac{5+5s+2s^2}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{5+5s+2s^2}{s(s^2+2s-3)}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

Luego: $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5+5s+2s^2}{s(s^2+2s-3)}\right\}$

Aplicando fracciones parciales se tiene: $\frac{5+5s+2s^2}{s(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}$ ....(*)

$$\frac{2s^2+5s+5}{s(s-1)(s-3)} = \frac{A(s-1)(s+3)+Bs(s+3)+Cs(s-1)}{s(s-1)(s+3)}$$

$$2s^2 + 5s + 5 = As^2 + 2As - 3A + Bs^2 + 3Bs + Cs^2 - Cs$$

$$2s^2 + 5s + 5 = (A + B + C)s^2 + (2A + 3B - C)s - 3A$$

Luego igualando coeficientes se tiene: $\begin{cases} A + B + C = 2 \\ 2A + 3B - C = 5 \\ -3A = 5 \end{cases}$

de donde se obtiene $A = -\frac{5}{3}$, $B = 3$ y $C = \frac{2}{3}$

Luego sustituyendo en (*) $\frac{5+5s+2s^2}{s(s-1)(s+3)} = -\frac{5}{3s} + \frac{3}{s-1} + \frac{2}{3(s+3)}$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{5}{3s} + \frac{3}{s-1} + \frac{2}{3(s+3)}\right\}$$

$$y(x) = -\frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$y(x) = -\frac{5}{3} + 3e^x + \frac{2}{3}e^{-3x}$$

Esta expresión representa la solución de la oferta que involucra la ecuación integro diferencial, resuelta utilizando la transformada de Laplace; por tanto, la oferta y demanda queda expresado como sistema de ecuaciones en la forma:

$$\begin{cases} \mathrm{y}(x) = -\frac{5}{3} + 3e^x + \frac{2}{3}e^{-3x} \\ y(x) = \frac{20 - 4x}{5} \end{cases}$$

Para establecer el equilibrio del mercado, utilizamos la ley de oferta y demanda, esto ocurre cuando la función demanda y oferta son iguales esto es:

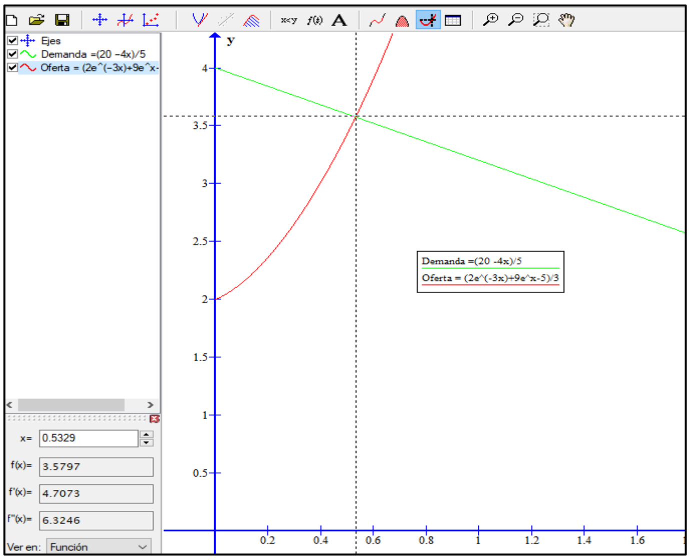
$$Demanda = Oferta$$

$$\frac{20 - 4x}{5} = \frac{2}{3}e^{-3x} + 3e^{x} - \frac{5}{3}$$

$$\frac{20 - 4x}{5} = \frac{1}{3}\left(2e^{-3x} + 9e^{x} - 5\right)$$

Esta expresión determina el punto de equilibrio, como se observa no es posible resolver de manera algebraica, por tanto, utilizamos el software Graph.

Figura 6: Gráfica punto de equilibrio de oferta y demanda del problema 1



Fuente: *propio del presente estudio.*

Considerando el grafico de la figura 6, tomando algunos valores para la variable x que representa la cantidad de arroz en kilogramos analizamos el movimiento del oferta y demanda, en la siguiente forma:

Cuadro 1: Análisis Movimiento de Oferta y Demanda Problema 1

Cantidad kilogramos x	Precio de oferta y(x)	Precio de Demanda y(x)	Observaciones
0.0000	2.0000	4.0000	A menor precio mayor demanda
0.0888	2.4821	3.9290	
0.2163	3.3334	3.8270	
0.5329	3.5797	3.5797	Se vacía el mercado, se vende todo lo que se ofrece
0.6014	3.9171	3.5187	A mayor precio mayor oferta
0.8032	5.0913	3.3574	

Fuente: *propio del presente estudio.*

Concluyendo de acuerdo al grafico que el punto de equilibrio ocurre para un precio aproximado de 3.57 soles por kilogramo de arroz, para una venta de (0.5329 decenas de miles de kilogramos por día) = 53290 kilogramos por día.

Problema 2: Mercado de Venta de Pescados y Mariscos

En el mercado Sabro - Mar Cusco, venta de pescados y mariscos, considerado como un mercado de competencia perfecta, se presenta un análisis económico adecuado para la venta de los mariscos representadas con modelos matemáticos a las funciones de oferta y demanda, en la siguiente forma:

$$\begin{cases} Demanda: \ y = 40 - 8x & \ldots\ldots(1) \\ Oferta: \ y = x + \int_0^x y(t)\ \sin(x-t)\, dt & \ldots(2) \end{cases}$$

Donde $\boldsymbol{y}$ representa el precio expresado en soles por kilogramo de mariscos y $\boldsymbol{x}$ representa la cantidad de pescados y mariscos en toneladas por mes.

a) calcular el punto de equilibrio de oferta y demanda.

b) Para el mercado Sabro-Mar Cusco, de pescados y mariscos determine su ingreso bruto anual.

Solución:

En la ecuación (2) la función de oferta es una ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea de tipo convolución, para determinar el punto de equilibrio es necesario previamente resolver esta ecuación integral utilizando la transformada de Laplace por tanto la ecuación de oferta es:

$$y = x + \int_0^x y(t)\ \sin(x-t)\,dt \qquad \dots(2)$$

Seguidamente se observa que la integral

$$\int_0^x y(t)\ \sin(x-t)\,dt$$

es una convolución de dos funciones de la forma $f * y \ = \int_o^x f(t)g(x-t)dt$

donde $f(t) = y$ y $g(x-t) = \text{sen}(x-t)$, entonces la ecuación (2) se convierte en:

$$y\ = x + y * sen\ (x)$$

Aplicando la transformada de Laplace, a ambos miembros de la ecuación y considerando sus propiedades

$$\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{x\} + \mathscr{L}\{y * sen\ (x)\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{x\} + \mathscr{L}\{y\}\mathscr{L}\{sen(x)\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2}} + \mathscr{L}\{y\}\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2+1}}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(\frac{s^2+1-1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{s^2}\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

En seguida se aplica la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{y\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$$

$$y(x) = x + \frac{x^3}{3!}$$

Esta expresión es la solución de la ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea de tipo convolución resuelta utilizando la transformade de Laplace. representa de la función oferta.

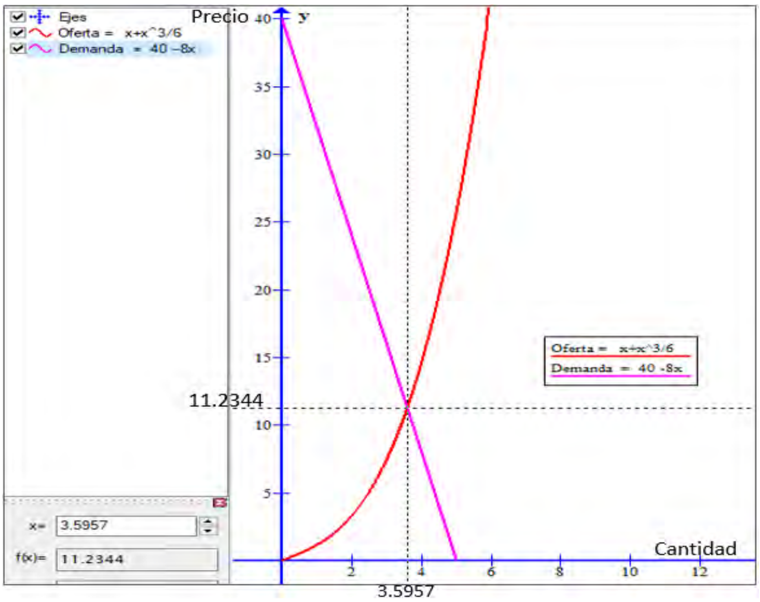
$$\begin{cases} Demanda \ : \ y = 40 \ - 8x & \ldots \ldots .(1) \\ Oferta : \ \ y = \ x + \dfrac{x^3}{6} & \ldots (2) \end{cases}$$

Es así que, entonces se tiene el nuevo sistema equivalente de ecuaciones de oferta y de demanda de la siguiente manera y para establecer el equilibrio de mercado, utilizamos la les de oferta y demanda esto ocurre cuando la función de demanda y oferta son iguales esto es

$$40 \ - 8x = \ x + \frac{x^3}{6}$$

Esta expresión determina el punto de equilibrio, como se observa no es posible resolver de manera algebraica, por tanto, utilizaremos el Software Gráph para determinar el punto de equilibrio y dar su interpretación pertinente en términos económicos.

Figura 7. Gráfica del punto de equilibrio del problema 2



Fuente: *propio del presente estudio*

Considerando el grafico de la figura 7, tomando algunos valores para la variable "x" que representa la cantidad de mariscos en kilogramos se analiza el movimiento de oferta y demanda, en la siguiente forma

Cuadro 2: Análisis Movimiento de Oferta y Demanda Problema 2

Cantidad Kilos *x*	Precio de oferta y(*x*)	Precio de Demanda y(*x*)	Observaciones
0.0000	0.0000	40.0000	A menor precio menor oferta
1.0215	1.1991	31.8280	
2.0022	3.3399	23.9824	
3.5957	11.2344	11.2344	Se vacía el mercado, se vende todo lo que se ofrece
4.4947	14.6286	4.0424	A mayor precio menor demanda
5.00	25.8333	0.0000	

Fuente: *propio del presente estudio.*

Concluyendo de acuerdo al gráfico, el punto de equilibrio ocurre para un precio aproximado de 11.2344 soles por kilogramo de mariscos, para una venta de 3.5957 toneladas de mariscos por día. La gráfica muestra la solución punto de equilibrio E $(x, y) = (3.59,\ 11.29)$

En seguida se calculan los ingresos brutos anuales del mercado Sabro-Mar Cusco, que será el dinero total que ingresa al mercado por las ventas de los mariscos durante un año:

Ingreso bruto anual = (Precio por kilo de los mariscos) (Cantidad)(Año)

para q= (3.589Kg/día)(30dias/mes)= 107.67Kg/mes

I = (11.29 soles/Kg)(107.67 Kg/mes)(12 meses/año = 2 431.1886 soles por año.

Problema 3: Producción de Barras de Chocolate.

La fábrica de Chocolates Real Cusco, tiene un local de venta de barras de chocolate, considerada como un mercado de competencia perfecta, tiene un análisis económico adecuado mediante un modelo matemático para la venta de Chocolates con las funciones de oferta y la demanda en la siguiente forma:

$$\begin{cases} Demanda: \quad 4y = 20 - x & \ldots\ldots.(1) \\ Oferta: \quad y = 2x - 4\int_0^x \operatorname{sen}(\tau)y(x-\tau)d\tau & \ldots(2) \end{cases}$$

Donde "x" es la cantidad en miles de unidades de barras de chocolate producidas por día, "y" es el precio en soles por unidad de barras de chocolate.

a) Determinar el equilibrio de mercado.

b) Hallar el Ingreso Bruto anual de la fábrica de chocolates con un mercado laboral de 240 días por año.

Solución

En la función de oferta se observa que está representada una ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea de tipo convolución. con $\lambda = -4$; para determinar el punto de equilibrio es necesario previamente resolver esta ecuación oferta haciendo uso de la transformada de Laplace, y esto es:

$$y = 2x - 4\int_0^x \operatorname{sen}(\tau)y(x-\tau)d\tau$$

Recordando la convolución de dos funciones

$$g * f = \int_o^x g(t)f(x-t)dt$$

Aplicando el teorema de convolución

$$y = 2x - 4sen\,(x) * y$$

Continuamos usando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación

$$\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{2x\} + 4\,\mathscr{L}\{sen(\,x)\}\,\mathscr{L}\{y\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{2}{S^2} - 4\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\mathscr{L}\{y\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} + \left(\frac{4}{s^2+1}\right)\mathscr{L}\{y\} = \frac{2}{S^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(1 + \frac{4}{s^2+1}\right) = \frac{2}{S^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(\frac{s^2+1+4}{s^2+1}\right) = \frac{2}{S^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(\frac{s^2+5}{s^2+1}\right) = \frac{2}{S^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{2(s^2+1)}{S^2(s^2+5)}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{2s^2+2}{S^2(s^2+5)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(*)$$

Luego usamos la transformada inversa de Laplace en ambos miembros de la ecuación

$$\mathcal{L}^{-1}\mathscr{L}\{y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+2}{S^2(s^2+5)}\right\}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+2}{S^2(s^2+5)}\right\}$$

Aplicando fracciones parciales se tiene:

$$\frac{2s^2+2}{S^2(s^2+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{S^2} + \frac{CS+D}{S^2+5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(**)$$

$$\frac{2s^2+2}{S^2(s^2+5)} = \frac{AS(s^2+5) + B(s^2+5) + (CS+D)S^2}{S^2(s^2+5)}$$

$$2s^2 + 2 = AS(s^2+5) + B(s^2+5) + (CS+D)S^2$$

$$2s^2 + 2 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + 5AS + 5B \text{ ....(***)}$$

Por comparación, igualando coeficientes en (***) se deduce que:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 2 \\ \quad 5A = 0 \\ \quad 5B = 2 \end{cases}$$

De donde se tiene

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 2/5 \\ C = 0 \\ D = 8/5 \end{cases}$$

Así se ha obtenido los valores de los coeficientes de fracciones parciales y luego Sustituyendo en la ecuación (**)

$$\frac{2s^2 + 2}{S^2(s^2 + 5)} = \frac{2}{5S^2} + \frac{8}{5(S^2 + 5)}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{5S^2} + \frac{8}{5(S^2 + 5)}\right\}$$

Luego esta expresión admite la transformada inversa de Laplace y considerando sus propiedades se tiene

$$y(x) = \frac{2}{5}\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} + \frac{8}{5\sqrt{5}}\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\sqrt{5}}{s^2 + 5}\}$$

$$y(x) = \frac{2x}{5} + \frac{8\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}x)}{5\sqrt{5}}$$

$$y(x) = \frac{2x}{5} + \frac{8\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}x)}{5\sqrt{5}\sqrt{5}}$$

$$y(x) = \frac{2x}{5} + \frac{8\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}x)}{5.5}$$

$$y(x) = \frac{2}{25}\left(5x + 4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(x\sqrt{5})\right)$$

Esta expresión representa la solución a la función que expresa la ecuación integral de Volterra de segunda espacie no homogénea de tipo convolución, resuelta utilizando la transformada de Laplace. Por tanto, las ecuaciones de oferta y demanda quedan expresada como un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} y = \dfrac{20-x}{4} & \ldots\ldots.(1) \\ y = \dfrac{2}{25}\left(5x + 4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}x)\right) & \ldots\ldots\ldots.\ldots(2) \end{cases}$$

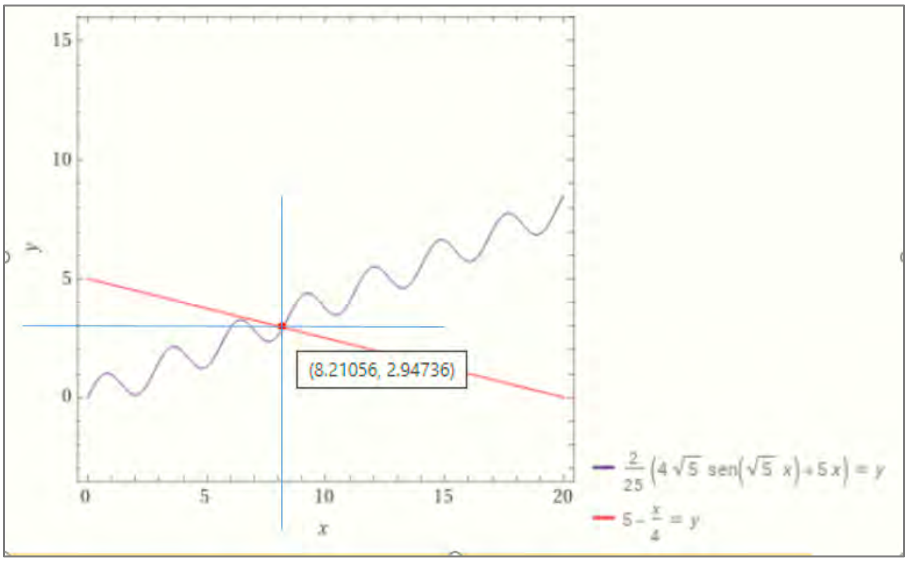
Para establecer el equilibrio de mercado, utilizamos la ley de oferta y demanda y esto ocurre cuando la función de oferta y demanda son iguals:

$$Demanda = oferta$$

$$\frac{20-x}{4} = \frac{2}{25}\left(5x + 4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}x)\right)$$

Esta expresión determina el punto de equilibrio, como se observa es una curva senoidal que no es posible resolver de manera algebraica, por tanto, se utiliza el Software Wólfram Alpha.

Figura 8. Gráfica del punto de equilibrio del problema 3.



Fuente: *propio del presente estudio.*

Considerando el gráfico de la figura 8, el punto de equilibrio ocurre para un precio de 2.9473 aproximado 2.95 soles se venden 8.2105 miles de unidades por día.

Luego el cálculo del ingreso bruto anual para la fábrica de Chocolates Real Cusco, de la barra de chocolates se realiza de la siguiente manera:

I = p. q. año

Siendo I: ingreso bruto anual, "*p*" precio de barras de chocolate y "*q*" cantidad de barras de chocolate.

I = (2.95 soles / unidad)(8210.56 unidades /día)(240 días / año)

I = 5 813 076.48 soles/año, Por la venta de ricos chocolates.

Problema 4: Mercado Produtores de Papa.

En el mercado de mayorista de papas de Vino Canchón de San Jerónimo, considerado como un mercado de competencia perfecta, se presenta un análisis económico mediante un modelo matemático adecuado para la venta de papas, con la función oferta y demanda de la siguiente manera:

$Oferta: \; y'' + y' - 2y = x$, con las condiciones iniciales $y(0) = 2, \; y'(0) = -1$,

$$Demanda: \; y + 2\int_0^x y(t)\cos(x-t)dt = 4e^{-x} + \operatorname{sen}(x)$$

Donde "y" representa el precio de papas por kilos y "x" la cantidad de papas vendidas en miles de kilogramos por día. a) establecer el equilibrio de mercado. b) Calcule el ingreso bruto anual del mercado de papas con un trabajo de 240 días laboradas por año.

SOLUCIÓN

La ecuación de oferta presenta una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes de segundo orden no homogénea, donde la función incógnita es $y(x)$ para determinar el punto de equilibrio es necesario previamente resolver esta ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación.

$$y(x)'' + y(x)' - 2y(x) = x,$$

$$\mathscr{L}\{\, y'' + y' - 2y \,\} = \mathscr{L}\{\, x \}$$

$$\mathscr{L}\{y''\} + \mathscr{L}\{\, y'\} - \mathscr{L}\{2y\,\} = \mathscr{L}\{\, x\,\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 2,\ \ y'(0) = -1$

Recordar que: $\mathscr{L}\{\, y'\} = s\mathscr{L}\{y\,\} - y(0)$ entonces $\mathscr{L}\{\, y'\} = s\mathscr{L}\{y\,\} - 2$

$\mathscr{L}\{y''\} = s\mathscr{L}\{\, y'\} - y'(0)$ entonces $\mathscr{L}\{y''\} = s\mathscr{L}\{\, y'\} - (-1)$

Sustituyendo en (*) se tiene $(s\mathscr{L}\{\, y'\} + 1) + (s\mathscr{L}\{y\,\} - 2) - 2\mathscr{L}\{y\,\} = \frac{1}{s^2}$

$$s\mathscr{L}\{\, y'\} + s\mathscr{L}\{y\,\} - 2\mathscr{L}\{y\,\} = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$s(s\mathscr{L}\{y\,\} - 2\,) + s\mathscr{L}\{y\,\} - 2\mathscr{L}\{y\,\} = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$s^2\mathscr{L}\{y\,\} - 2s + s\mathscr{L}\{y\,\} - 2\mathscr{L}\{y\,\} = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$(s^2 + s - 2)\mathscr{L}\{y\,\} = \frac{1}{s^2} + 1 + 2s$$

$$(s^2 + s - 2)\mathscr{L}\{y\,\} = \frac{1+s^2+s^3}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\,\} = \frac{1+s^2+s^3}{s^{2(s^2+s-2)}}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\,\mathscr{L}\{y\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1+s^2+s^3}{s^{2(s^2+s-2)}}\}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1+s^2+s^3}{s^{2(s^2+s-2)}}\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

Luego aplicando el método de fracciones parciales en

$$\frac{1+s^2+s^3}{s^{2(s^2+s-2)}}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{s+2}$$

Haciendo las operaciones respectivas e igualando coeficientes respectivos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A \ + C \ + D \ = 2 \\ A \ + B + 2\,C \ - \ D \ = 1 \\ -2A + \ B \ = 0 \\ -2B \ = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $B=-\frac{1}{2}$, $A=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{4}{3}$ y $D=\frac{11}{12}$ luego

sustituyendo en (**) $y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{4s}-\frac{1}{2s^2}+\frac{4}{3(s-1)}+\frac{11}{12(s+2)}\}$

Luego por la linealidad de transformada inversa.

$$y(x)=-\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{4s}\}-\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{2s^2}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{3(s-1)}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{12(s+2)}\}$$

$$y(x)=-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}+\frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-1)}\}+\frac{11}{12}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+2)}\}$$

$$y(x)=-\frac{1}{4}-\frac{x}{2}+\frac{4}{3}e^{x}+\frac{11}{12}\mathrm{e}^{-2x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Esta expresión representa la solución de la función oferta que involucra a la ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes de segundo orden no homogénea resuelta utilizando la TLP.

Luego la ecuación de Demanda del problema esta determinada por una ecuación integral de Volterra no homogénea de segunda especie de tipo convolución donde la función incógnita es $y(x)$, para determinar el punto de equilibrio es necesario previamente resolver utilizando la transformada de Laplace

$$y(x)+2\int_0^x y(t)\cos(x-t)dt=4e^{-x}+\operatorname{sen}(x) \quad \ldots\ldots\ldots..(\&)$$

Recordando $g * f = \int_o^x g(t)f(x-t)dt$ convolución de funciones

$$y(x) * \cos x = \int_0^x y(t)\cos(x-t)dt$$

Por el teorema de convolución en la ecuación de la función de Demanda (&)

$$y(x) + 2[y(x) * \cos(x)] = 4e^{-x} + \sin(x)$$

Luego haciendo uso de la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación y considerando su linealidad se tiene:

$$\mathscr{L}\{y\} + 2\,\mathscr{L}\{y\}\,\mathscr{L}\{\cos(x)\} = 4\,\mathscr{L}\{e^{-x}\} + \mathscr{L}\{\sin(x)\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} + 2\,\mathscr{L}\{y\}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = 4\left(\frac{1}{s+1}\right) + \left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(1 + \frac{2s}{s^2+1}\right) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\left(\frac{s^2+2s+1}{s^2+1}\right) = \frac{4\,(s^2+1) + s + 1}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$\mathscr{L}\{y\}(S+1)^2 = \frac{4(s^2+1)+S+1}{(s+1)}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{4s^2+S+5}{(s+1)^3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\&\&)$$

Aplicando la inversa de la transformada de Laplace en la ecuación (&&)

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{y(x)\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{4s^2+S+5}{(s+1)^3}\}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2+S+5}{(s+1)^3}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (\&\&\&)$$

Luego por el método fracciones parciales en la fracción racional:

$$\frac{4s^2+S+5}{(s+1)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

$$\frac{4s^2+S+5}{(s+1)^3} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1) + C}{(s+1)^3}$$

$$4s^2 + S + 5 \ = As^2 + 2As + A + Bs + B + C$$

$$4s^2 + S + 5 \ = As^2 + (2A + B)s + (A + B + C)$$

Luego igualando coeficientes: A = 4 ; 2A+ B =1 , entonces B = -7

A+B+C = 5, entonces C = 8

En seguida reemplazando los valores en (*) se tiene:

$$\frac{4s^2 + S + 5}{(s+1)^3} = \frac{4}{s+1} - \frac{7}{(s+1)^2} + \frac{8}{(s+1)^3}$$

Sustituyendo en (&&&) estas fracciones parciales admiten la transformada inversa de Laplace y considerando las propiedades se tiene:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+1} - \frac{7}{(s+1)^2} + \frac{8}{(s+1)^3}\right\}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{s+1}\} - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{7}{(s+1)^2}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{8}{(s+1)^3}\}$$

$$y(x) = 4\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} - 7\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\} + 8\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^3}\}$$

$$y(x) = 4e^{-x} - 7xe^{-x} + 8x^2e^{-x} \qquad \ldots\ldots (2)$$

Esta expresión es la solución de la ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea de tipo convolución resuelta utilizando la transformada de Laplace.

Luego, la oferta y demanda queda expresado como el sistema de ecuaciones en la forma:

$$\begin{cases} y = \ -\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{4}{3}e^{x} + \frac{11}{12}\mathrm{e}^{-2x} \ldots\ldots(1) \\ y = \ 4e^{-x} - 7xe^{-x} + 8x^2e^{-x} \ \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

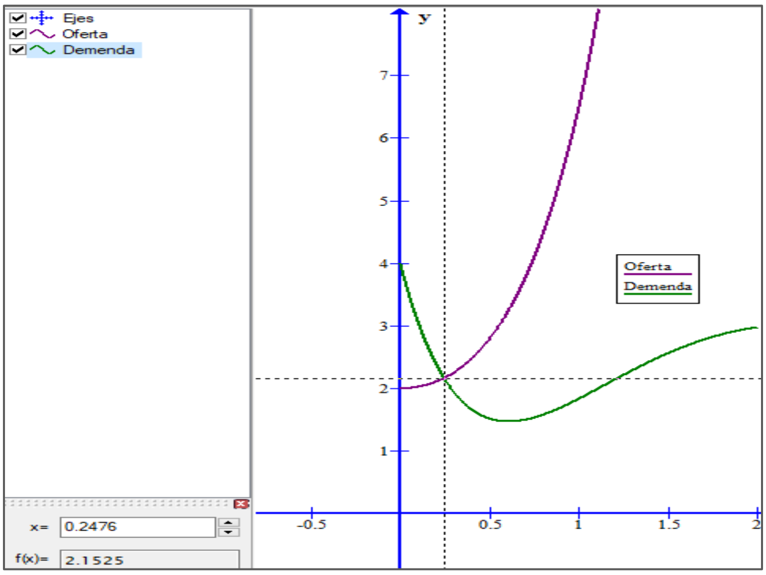
Para establecer el equilibrio del mercado, usamos ley de oferta y demanda, esto ocurre cuando la función de oferta y demanda son iguales:

$$Oferta = Demanda$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{4}{3}e^{x} + \frac{11}{12}\mathrm{e}^{-2x} = 4e^{-x} - 7xe^{-x} + 8x^2e^{-x}$$

Esta expresión determina el punto de equilibrio, como se observa no es posible resolver de manera algebraica por tanto utilizaremos el Software Graph

Figura 9: Del punto de equilibrio del problema 4



Fuente: *propio del presente estudio.*

Considerando el gráfico de la figura 9, tomando algunos valores para la variable x que representa la cantidad de papas en miles de kilos por día analizamos el movimiento de oferta y demanda en la siguiente forma:

Cuadro3: Análisis Movimiento de Oferta y Demanda Problema 4

Cantidad Miles de Kilos ***X***	**Precio de Oferta** ***F*(*X*)**	**Precio de Demanda** ***F*(*X*)**	**Observaciones**
0.0000	2.0000	4.0000	A menor precio mayor demanda
0.1680	2.0759	2.5782	
0.2476	2.1525	2.1525	Se vacía el mercado, se vende todo lo que se ofrece
0.4510	2.6330	1,5735	A mayor precio mayor oferta
0.5836	3.1573	1.4725	

Fuente: *propio del presente estudio.*

Concluyendo de acuerdo al gráfico que el punto de equilibrio ocurre para un precio aproximado de 2.15 soles por kilogramo de papa, para una venta aproximada de 0.25 miles de unidades de kilos por día.

El punto de equilibrio tiene las siguientes coordenadas ($x = 0.2476, y = 2.1525$).

Luego determinamos el ingreso bruto anual esperado del mercado mayorista de papas de Vino canchón

I = *p . q. año* donde I: ingreso bruto, "*p*" precio por kilo de papas y "*q*" cantidad en kilos de papas vendidas por día. para un año laboral de 240 días

I = (2.15 soles por kilo) (250 kilos por día) (240 día por año)

I = 129 000 soles por año, por la venta de variedades de papas.

Problema 5 : El Gran Mercado de Frutas.

En un mercado de frutas de San Pedro, considerado como un mercado de competencia perfecta, se tiene un estudio de análisis económico adecuado para venta de las ricas cerezas, con las funciones de oferta y demanda en la siguiente forma:

$$\begin{cases} Demanda: \quad y + \int_0^x y(t)dt = 21 & \ldots\ldots.(1) \\ Oferta: \quad y = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-t)} y(t)dt & \ldots(2) \end{cases}$$

Donde $\boldsymbol{x}$ representa la cantidad de cerezas vendidas en toneladas mensuales e $\boldsymbol{y}$ el precio de venta al público en soles por kilogramo.

a) Determinar el punto de equilibrio.

b) Por la venta de las cerezas, calcule el ingreso bruto anual teniendo en cuenta que la temporada dura promedio dos meses al año.

Solución

En la ecuación de demanda (1) presenta una ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea con función incógnita $y(x)$, para determinar el punto de equilibrio es necesario previamente resolver la ecuación integral de Volterra utilizando la transformada de Laplace. Por tanto, la ecuación de demanda es:

$$y + \int_0^x y(t)dt \;\; = 21$$

Usando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación

$$\mathscr{L}\left\{y + \int_0^x y(t)dt\right\} = \quad \mathscr{L}\{21\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} + \mathscr{L}\left\{\int_0^x y(t)dt\right\} = \quad \mathscr{L}\{21\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} + \mathscr{L}\{y\} /\text{s} = \frac{21}{s}$$

$$\mathscr{L}\{y\}\frac{(s+1)}{s} = \frac{21}{s}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{21}{(s+1)}$$

Luego aplicando la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\mathscr{L}\{y\} \quad = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{21}{s+1}\}$$

$$y(x) \;\; = 21\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}$$

$$y(x) = \;\; 21e^{-x} \qquad\qquad \dots\dots(1')$$

Esta expresión representa la solución de la ecuación integral de Volterra, resuelta utilizando la transformada de Laplace.

luego veamos la ecuación de oferta (2), se observa una ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea de tipo convolución, donde la función incógnita es $y(x)$,para determinar el punto de equilibrio es necesario previamente resolver esta ecuación integral de Volterra utilizando la transformada de Laplace por tanto la ecuación de oferta es:

$$y = \;\; 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-t)}y(t)dt$$

Aplicando el teorema de convolución de dos funciones

Recordando $\quad g * f = \int_o^x g(t)f(x-t)dt \quad$ convolución de funciones

$$y * \; e^{-2x} = \int_0^x e^{-2(x-t)}y(t)dt$$

$$y = 1 + x + y * e^{-2x}$$

En ambos lados de la ecuación aplicamos la transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{1 + x + y * e^{-2x}\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{1\} + \mathscr{L}\{x\} + \mathscr{L}\{e^{-2x}\}. \mathscr{L}\{y\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+2}. \mathscr{L}\{y\}$$

$$\mathscr{L}\{y\} \left(\frac{s+2-1}{s+2}\right) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\} \left(\frac{s+1}{s+2}\right) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{s+2}{s^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\mathscr{L}\{y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2}\right\}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2}\right\} \quad \dots\dots\dots..(*)$$

Aplicando fracciones parciales en

$$\frac{s+2}{s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}$$

$$\frac{s+2}{s^2} = \frac{As+B}{s^2}$$

$s + 2 = As + B$ luego igualando coeficientes se tiene $A = 1$ y $B = 2$

$$\frac{s+2}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (*) estas fracciones admiten transformada inversa de Laplace

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right\}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}$$

$$y(x) = 1 + 2x \qquad \ldots.\ldots(2')$$

Esta expresión representa la solución de la oferta que involucra una ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea de tipo convolución resuelta utilizando la transformada de Laplace. por tanto, la oferta y demanda queda como un sistema de ecuaciones de la forma:

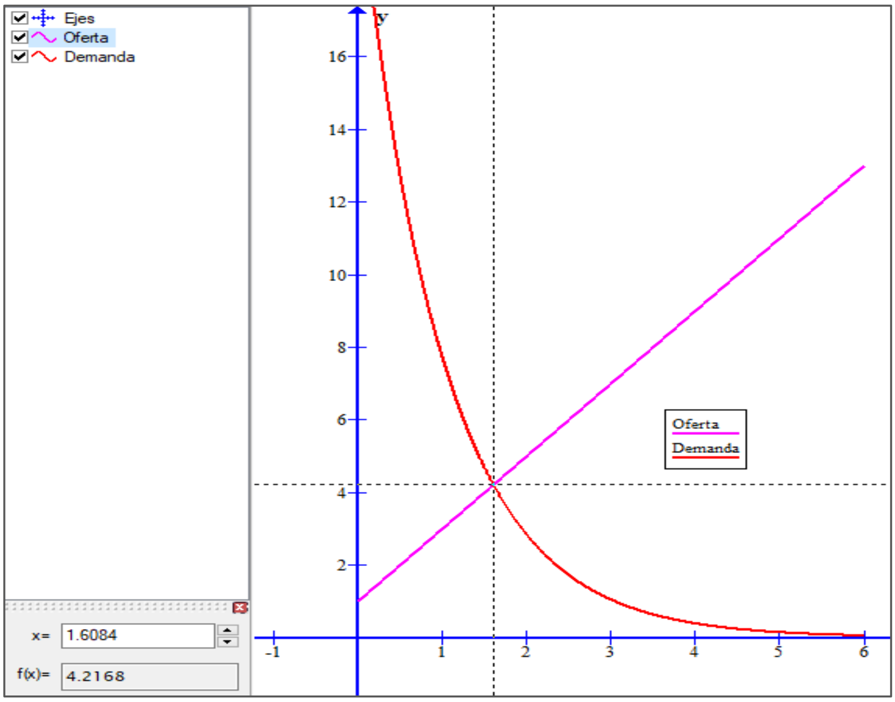
$$\begin{cases} y(x) = 21e^{-x} & \ldots\ldots.(1') \\ y(x) = 1 + 2x & \ldots.\ldots(2') \end{cases}$$

Para establecer el equilibrio d de mercado, utilizamos la ley de oferta y demanda

$$2x + 1 = 21e^{-x}$$

Esta expresión determina el punto de equilibrio, como se observa no se puede resolver de manera algebraica. por tanto, utilizamos el Software Graph para su interpretación correspondiente en términos económicos.

Figura 10. Gráfica del punto de equilibrio del problema 5.



Fuente: *propio del presente estudio.*

Considerando el grafico de la figura 10, tomando algunos valores para la variable x que representa la cantidad de kilogramos de cereza analizamos el movimiento de oferta y demanda en la siguiente forma.

Cuadro 4: Análisis Movimiento de las Funciones de Oferta y Demanda Problema 5

Cantidad Kilogramos x	**Precio de Oferta Y(x)**	**Precio De Demanda Y(x)**	**Observaciones**
1.00	3.00	7.47	A menor precio mayor demanda
1.50	4.00	4.82	
1.61	4.22	4.22	Se vacía el mercado, se vende todo lo que se ofrece
2.00	5.00	2.77	A mayor precio mayor oferta
3.00	7.00	1.o1	
6.00	13.00	0.05	

Fuente: *propio del presente estudio.*

Concluyendo de acuerdo al gráfico que el punto de equilibrio ocurre para un precio aproximado de 4.2168 soles por unidad de kilógramo de cerezas

El equilibrio ocurre para una cantidad de $x = 1.6084$ toneladas de cerezas vendidas.

Luego se determina ingreso bruto anual por la venta de las ricas cerezas, para un periodo de producción de dos meses por año, sabiendo que 1 tonelada es 1000 Kg

$$I = p\,.\,q.\text{ año}$$
$$I = (4.22\ soles/Kg)\ (1\ 608.4\ Kg/mes)(2\ mese/año)$$

$$I = 13{,}574.88 \text{ soles /año}$$

Problema 6: Proyecciones de Una Empresa Monopolio

La empresa de fábrica de frazadas Marangani, considerada como una empresa monopolística de mercado de competencia perfecta, se presenta un análisis económico para la venta de frazadas clásicas, con las funciones de oferta y demanda en la siguiente forma.

$$\begin{cases} Demanda: & D(q) = 28 - 2q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ Oferta: & f(q) = q^3 + \int_o^q 4f(\tau)d\tau \ldots\ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

Donde la función de producción es $q = \sqrt{\frac{1}{v(y_1,y_2)}}$ miles por año, donde la función $v(y_1, y_2) = \frac{1}{y_1 y_2}$, donde $\boldsymbol{y_1}$ e $\boldsymbol{y_2}$ son los factores que se emplean en la producción. Si el costo por unidad de los factores mencionados para ambas **rendimiento** es $r_1 = r_2 = 6$ soles.

a) Determinar la función trayectoria expansiva de la empresa,

b) Maximizar las utilidades de la empresa

c) Calcular el punto de equilibrio de mercado, también el ingreso bruto anual de la empresa, considerando 240 días laborables por año.

Solución

a) La trayectoria de la función expansión se determina a partir de su función de producción que está dado por la función $"q"$

Como $q = \sqrt{\frac{1}{v(y_1,y_2)}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{y_1 y_2}}} = \sqrt{y_1 y_2} = \sqrt{y_1}\sqrt{y_2} = y_1^{\frac{1}{2}}.y_2^{\frac{1}{2}}$

$q = y_1^{\frac{1}{2}}.y_2^{\frac{1}{2}}$, esta expresión representa la trayectoria de producción.

Se observa que es una función de $(Cobb\ Douglas)$ homotecia y homogénea de grado 1.

Luego la propiedad de la productividad marginal se tiene:

$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$ ……..(*) esto se calcula a partir de la función de producción “q”

$q = y_1^{\frac{1}{2}}.y_2^{\frac{1}{2}}$ de donde hacemos las derivadas parciales respecto a q_1 y q_2

Y esto es:

$$q_1 = \frac{\partial q}{\partial y_1} = \frac{1}{2}y_2^{\frac{1}{2}}.y_1^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}y_2^{\frac{1}{2}}.y_1^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}y_1^{\frac{-1}{2}}.y_2^{\frac{1}{2}}$$

$$q_1 = \frac{1}{2}y_1^{\frac{-1}{2}}.y_2^{\frac{1}{2}}$$

$$q_2 = \frac{\partial q}{\partial y_2} = \frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}}.y_2^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}}.y_2^{\frac{-1}{2}}$$

$$q_2 = \frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}}.y_2^{\frac{-1}{2}}$$

Luego sustituyendo en (*)

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{1}{2}y_1^{\frac{-1}{2}}.y_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}y_1^{\frac{1}{2}}.y_2^{\frac{-1}{2}}} = \frac{y_2^{\frac{1}{2}}.\ y_2^{\frac{1}{2}}}{y_1^{\frac{1}{2}}.y_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{6}{6} = 1 \ \rightarrow \ y_2 = y_1$$

Es la trayectoria expansiva buscada de la empresa, que tiene simetría de sus variables y también igualdad en sus costos de producción.

b) Seguidamente determinamos el máximo beneficio de la empresa monopolista, por la siguiente relación

Beneficio = ingreso – costo

B = I - C

B = D. q $-(6y_1 + 6y_2)$ aquí D es la función de manda

B = (28 -2q)q$-(6y_1 + 6y_2)$ ....(*)

B = $\left(28 - 2\sqrt{y_1 y_2}\right)\sqrt{y_1 y_2} - (6y_1 + 6y_2)$

B = 28 $\sqrt{y_1 y_2} - 2y_1 y_2 - 6y_1 - 6y_2$

Esta expresión representa la función beneficio de la fábrica de frazadas

Para maximizar la función beneficio se realiza haciendo las derivadas parciales y igualando a cero, condiciones necesarias de primer grado

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial y_1} = \dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(28\sqrt{y_1 y_2} - 2y_1 y_2 - 6y_1 - 6y_2\right) \\ \dfrac{\partial B}{\partial y_2} = \dfrac{\partial}{\partial y_2}\left(28\sqrt{y_1 y_2} - 2y_1 y_2 - 6y_1 - 6y_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial y_1} = \ 14\dfrac{y_2}{\sqrt{y_1 y_2}} - 2y_2 - 6 = 0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial y_2} = \ 14\dfrac{y_1}{\sqrt{y_1 y_2}} - 2y_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

Luego por la base de simetría $y_1 = y_2$ luego se tendrá

$\begin{cases} 7 - y_1 = 3 \\ 7 - y_2 = 3 \end{cases}$ entonces se tiene $y_1 = y_2 = 4$

De esta manera el máximo beneficio (ganancia) esperado será

B = (Ingreso total) - (Costo total)

B = I - C = D. q – $(6y_1 + 6y_2)$ = (28 - 2.4) 4 – $(6.4 + 6.4)$

= (28 -8) 4–$(24 + 24) = 80 - 48 = 32$

$\mathrm{B} = 32$ u. m. es el máximo beneficio.

luego la cantidad total será $q = \sqrt{y_1 y_2} = \sqrt{4.4} = 4$ entonces se ha determinado el punto (4,4) por donde pasan todas las rectas incluido la trayectoria de expansión.

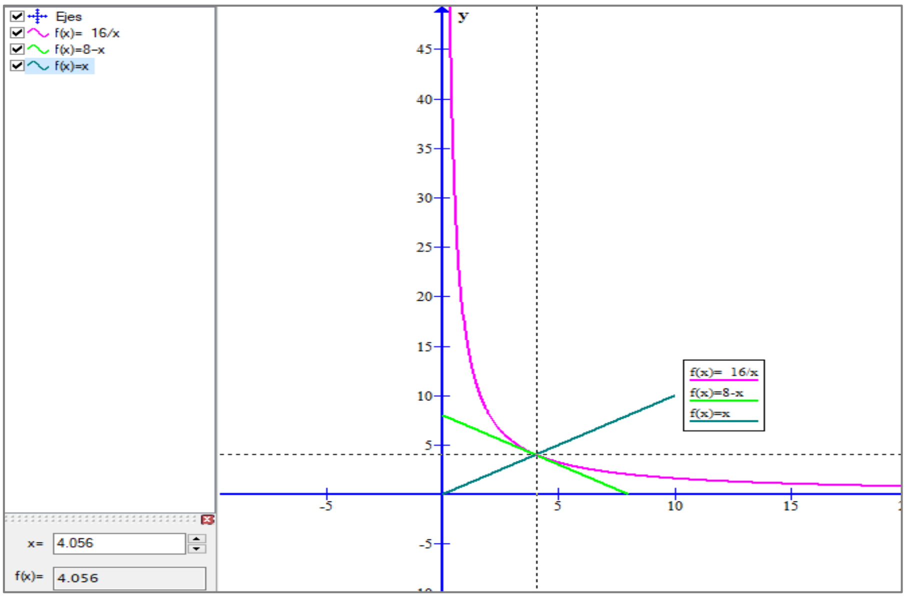
$y_2 = y_1$ (bisectriz del primer cuadrante) y la recta isocoste que pasa el punto (4,4) y cualquier punto (y_1, y_2) es de la siguiente forma

$y_2 - 4 = -(y_1 - 4)$ entonces $y_2 = 8 - y_1$ es la recta isocoste

Y la curva isocuanta $y_1 . y_2 = 4.4$ entonces $y_2 = \frac{16}{y_1}$

Gráficamente se representa: mediante el Software Grap

Figura 11. Gráfica de las rectas isocuanta, isocoste y curva de expansión del problema 6



Fuente: *propio del presente estudio.*

c) La ecuación de oferta (2) presenta una ecuación integrade Volterra de segunda especie no homogénea, para determinar el punto de equilibrio es necesario previamente resolver esta ecuación integral utilizando la transformada de Laplace. Y esto es:

$$f(q) = q^3 + \int_o^q 4f(\tau)d\tau$$

Empezamos a resolver haciendo uso de la trasformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{p(q)\} = \mathscr{L}\{q^3\} + 4\mathscr{L}\{p(q)\}$$

$$\mathscr{L}\{p\} = \frac{3!}{s^4} + \frac{4}{s}\mathscr{L}\{p\}$$

$$\mathscr{L}\{p\} - \frac{4}{s}\mathscr{L}\{p\} = \frac{6}{s^4}$$

$$\mathscr{L}\{p\}\left(1 - \frac{4}{s}\right) = \frac{6}{s^4}$$

$$\mathscr{L}\{p\}\left(\frac{s-4}{s}\right) = \frac{6}{s^4}$$

$$\mathscr{L}\{p\} = \frac{6}{s^3(s-4)}$$

En ambos lados Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\mathscr{L}\{p\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{6}{s^3(s-4)}\}$$

En seguida aplicando el método de fracciones parciales.

$$\frac{6}{s^3(s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-4} \ldots\ldots\ldots (*)$$

Haciendo las operaciones respectivas se obtiene

$$A = \frac{-3}{32}, \quad B = \frac{-3}{8}, \quad C = \frac{-3}{2} \text{ y } D = \frac{3}{32},$$

luego sustituyendo en la ecuación (*)

$$\frac{6}{s^3(s-4)} = -\frac{3}{32s} - \frac{3}{8s^2} - \frac{3}{2s^3} + \frac{3}{32(s-4)}$$

$$p(q) = \frac{3}{32}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)} - \frac{1}{s} - \frac{4}{s^2} - \frac{16}{s^3}\right]$$

$$p(q) = \frac{3}{32}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 16\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}\right]$$

$$p(q) = \frac{3}{32}\left[e^{4q} - 16q^2 - 4q - 1\right]$$

Esta expresión es la solución de la de la ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea

por tanto, la función de demanda y oferta queda expresado como un sistema de ecuaciones en la forma:

$$\begin{cases} D(q) = 28 - 2q \\ p(q) = \frac{3}{32}\left[e^{4q} - 16q^2 - 4q - 1\right] \end{cases}$$

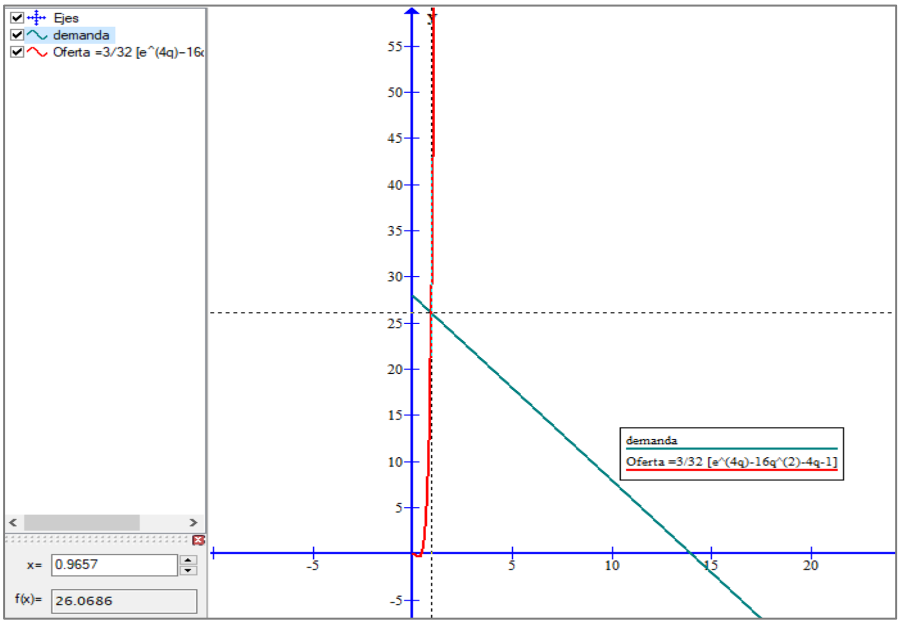
Para establecer el equilibrio de mercado utilizamos la ley de oferta y demanda esto es:

Oferta = Demanda

$28 - 2q = \frac{3}{32}\left[e^{4q} - 16q^2 - 4q - 1\right]$

Esta expresión determina el punto de equilibrio, como se observa no se puede resolver de manera algebraica. por tanto, utilizamos el Software Graph.

Figura 12. Gráfica del punto de equilibrio del problema 6



Fuente: *propio del presente estudio.*

Concluyendo de acuerdo al gráfico el punto de equilibrio ocurre para un precio aproximado 26.0686 por unidad de frazadas, se produce una cantidad de q =0.9657 de frazadas por día.

Luego calculamos el ingreso bruto anual considerando 240 días laborables por año.

$I = p.q.$ año

I =(26.0686 soles/producto) (0,9657producto/día)(240dias/año)

$I =$ 6041.856 soles/ año. Es el ingreso de la empresa fábrica de frazadas Marangani.

Problema 7. Resultado Contable de una Empresa

El estudio de mercado de una agencia de viajes turístico del valle sagrado de los incas Cusco, tiene los resultados contables $f(x,t)$ representada por el siguiente modelo matemático

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = h(x) + y(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Con las siguientes condiciones de iniciales y contorno

$$\begin{cases} f(0,t) = -f(\pi,t) = \cos(0\,) & \forall t > 0 \\ \quad f(x,0) = y(x) - h(x) \end{cases}$$

Y además $y(x)$ esta expresada por la ecuación diferencial ordinaria

$$y^{(4)} - y = 0 \qquad \ldots\ldots. (**)$$

Provisto de las siguientes condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(0) = -1, \qquad y'''(0) = 0$$

Y la función $h(x)$ está definida mediante una ecuación integral

$$h(x) + \int_o^x (x - \tau)h(\tau)d\tau = x \qquad \ldots\ldots\ldots.(***)$$

donde $\boldsymbol{x}$ es la cifra de transacciones expresados en miles de soles y **t** es el tiempo en años.

a) determinar la trayectoria temporal del resultado contable.

b) Determinar el beneficio neto esperable en el tiempo $t = {}^{1}/_{2}\,año$ de su movimiento económico si se espera que su facturación sea de 30 mil soles considerando el 24%de IGV.

Solución

Para resolver este problema, observamos primero en la ecuación (**) se ve que presenta una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden homogénea de coeficientes constantes provista de condiciones iniciales respectivos, donde $y(x)$ es la función incógnita, para determinar la trayectoria contable es necesario previa mente resolver esta ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace. Esto es (**)

$$.\ y^{(4)} - y = 0$$

Luego, aplicando la transformada de Laplace para derivada de cuarto orden

$$\mathscr{L}\left\{y^{(4)}\right\} - \mathscr{L}\{y\} = 0$$

$$s^4\mathscr{L}\{y\} - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - \mathscr{L}\{y\} = 0$$

Sustituyendo lo Valores iniciales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \qquad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0$$

$$s^4\mathscr{L}\{y\} - s^3(1) - s^2(0) - s(-1) - (0) - \mathscr{L}\{y\} = 0$$

$$s^4\mathscr{L}\{y\} - s^3 + s - \mathscr{L}\{y\} = 0$$

$$(s^4 - 1)\mathscr{L}\{y\} = s^3 - s$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{s(s^2-1)}{(s^2+1)(s^2-1)}$$

$$\mathscr{L}\{y\} = \frac{s}{s^2+1}$$

En seguida usando la inversa de la transformada de Laplace

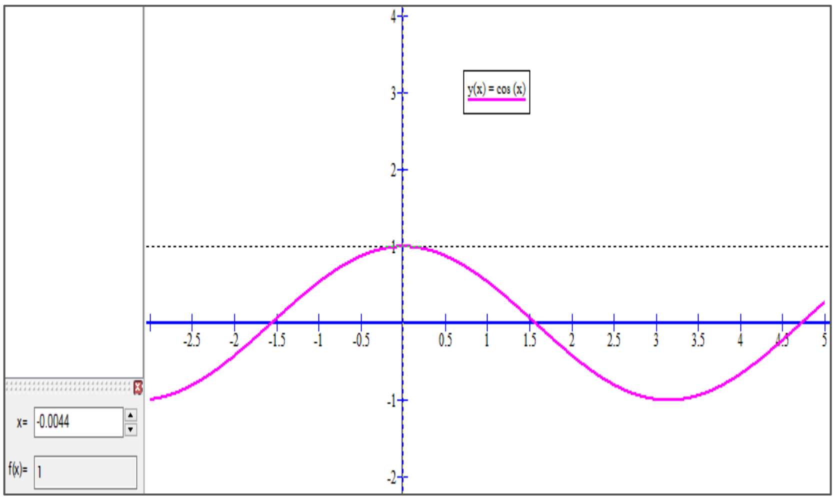
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{y\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$y(x) = \cos(x) \quad \ldots\ldots\ldots.(**')$$

Esta expresión representa la solución particular de la ecuación diferencial.

Cuya representación gráfica se hace mediante Software Graph

Figura 13. Gráfica de la curva trayectoria EDO homogénea del problema 7.



Fuente: *propio del presente estudio.*

En seguida se observa en las condiciones de frontera, la función $h(x)$ esta definida por una ecuación integral de Volterra de segunda especie no homogénea de tipo convolución donde la función incógnita es $h(x)$, para para determinar la trayectoria contable es necesario previamente resolver esta ecuación integral utilizando la transformada de Laplace. Y esto es:

$$h + \int_o^x (x-\tau)h(\tau)d\tau = x$$

Aplicando la convolución de dos funciones y la transformada de Laplace se tiene:

$$h + x * h = x$$

$$\mathscr{L}\{h\} + \mathscr{L}\{x\}\mathscr{L}\{h\} = \mathscr{L}\{x\}$$

$$\mathscr{L}\{h\} + \frac{1}{s^2}\ \mathscr{L}\{h\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{s^2+1}{s^2}\ \mathscr{L}\{h\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{h\} = \frac{1}{s^2+1}$$

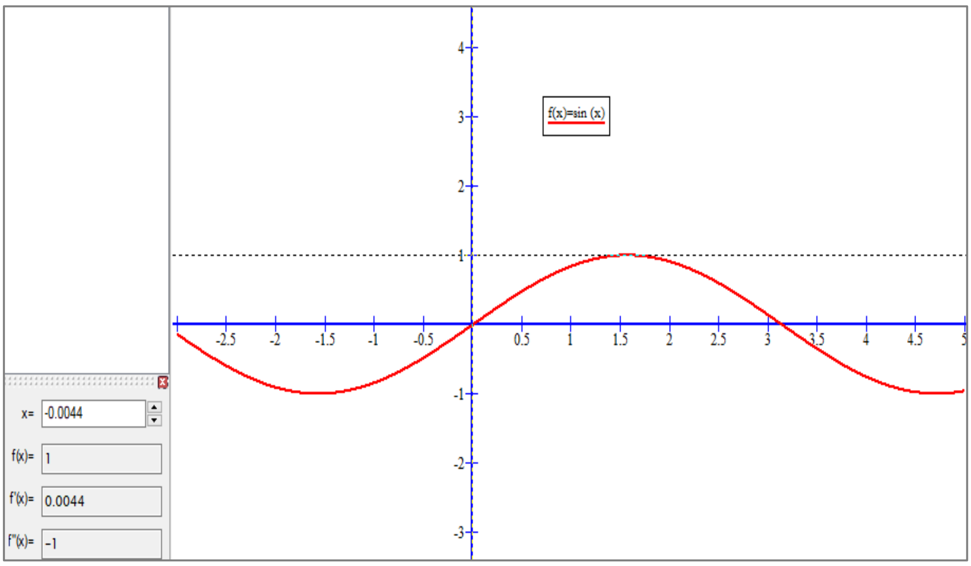
Luego aplicando la inversa de la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathscr{L}\{h\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$h(x) = \text{sen}\ (x) \quad \ldots\ldots\ldots.. \ (***')$$

Esta expresión es la solución de la función $h(x)$ que ha sido resuelta mediante la transformada de Laplace. cuya representación gráfica se hace mediante Software Graph

Figura 14. Gráfica de la trayectoria de la función h(x) del problema 7.



Fuente: *propio del presente estudio.*

En seguida en la ecuación de trayectoria contable de la agencia de viajes (*), donde la función incógnita es $f(x,t)$, se observa que involucra a una ecuación diferencial en derivadas parciales con coeficientes constantes de segundo orden, para resolver usaremos la transformada de Laplace

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) = h(x) + y(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(*)$$

Sustituyendo las funciones y $h(x)$ e $y(x)$ en el lado derecho de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) = sen(x) + cos(x)$$

Aplicando la Transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right\} - \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)\right\} = [sen(x) + cos(x)]\ \mathscr{L}\{1\}$$

$$sF(x,t) - f(x,0) - \frac{d^2}{dx^2}f(x,t) = \frac{sen(x) + cos(x)}{s}$$

Aplicando condiciones iniciales

$$\begin{cases} f(0,t) = -f(\pi,t) = \cos(0)\ \ \forall t > 0 \\ f(x,0) = cos(x) - sen(x) \end{cases}$$

$$sF(x,s) - [cos(x) - sen(x)] - \frac{d^2}{dx^2}f(x,s) = \frac{sen(x) + cos(x)}{s}$$

$$sF(x,s) - \frac{d^2}{dx^2}f(x,s) = \frac{sen(x) + cos(x)}{s} + cos(x) - sen(x)$$

$$sF(x,s) - \frac{d^2}{dx^2}f(x,s) = \frac{sen(x) + cos(x) + s.cos(x) - s\,.sen(x)}{s}$$

$$sF(x,s) - \frac{d^2}{dx^2}f(x,s) = \frac{(1-s)}{s}sen(x) + \frac{(1+s)cos(x)}{s}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,s) - sF(x,s) = \frac{(s-1)}{s}sen(x) - \frac{(1+s)}{s}cos(x)$$

De esta expresión obtenida, se observa que es una EDO lineal de segundo orden no homogénea en "x", provisto de condiciones de contorno

$$\begin{cases} F''(x,s) - sF(x,s) = \frac{(s-1)}{s}sen(x) - \frac{(1+s)}{s}\ cos(x) \qquad \ldots(1) \\ \qquad f(0,t) = -f(\pi,t) = \frac{1}{s} \qquad \ldots..\ (2) \end{cases}$$

De la expresión, (1) primero se halla la solución homogénea, se tiene la ecuación característica de sus raíces de la ecuación diferencial $r^2 - s = 0$ de donde resulta $r_1 = -\sqrt{s}$ y $r_2 = \sqrt{s}$

La solución homogénea será: $F_h(x,s) = A\,e^{-\sqrt{s}x} + Be^{\sqrt{s}x}$

Las funciones A y B son arbitrarias de s y respecto a x son constantes. Luego la solución especifica es de la forma

$$F_p(x,s) = Csen\,(x) + Dcos(x)$$

Como $C\ \ y\,D$ son funciones arbitrarias de variable s se puede asumir que

$$C = -C - Cs \ \ y\ \ D = -D - Ds$$

$$F_p(x,s) = (-C - Cs)sen\,(x) + (-D - Ds)cos(x) \qquad \ldots..(i)$$

$$(-C - Cs)sen\,(x) + (-D - Ds)cos(x) = \frac{(s-1)}{s}sen(x) - \frac{(1+s)}{s}cos(x)$$

$$-(1+s)Csen\,(x) - (1+s)Dcos(x) = \frac{(s-1)}{s}sen(x) - \frac{(1+s)}{s}cos(x)$$

Igualando términos: $-(1+s)Csen\,(x) = \frac{(s-1)}{s}sen(x)$

$$C = \frac{(1-s)}{s(1+s)}$$

$$-(1+s)Dcos(x) = -\frac{(1+s)}{s}cos(x)$$

$$D = \frac{(1+s)}{s(s+1)} = \frac{1}{s}$$

$$F_p(x,s) = \frac{(1-s)}{s(1+s)}sen\,(x) + \frac{1}{s}cos(x)$$

En consecuencia la solución general de (1) será: $F(x,s) = F_h(x,s) + F_p(x,s)$

$$F(x,s) = A\,e^{-\sqrt{s}x} + Be^{\sqrt{s}x} + \frac{(1-s)}{s(1+s)}sen\,(x) + \frac{1}{s}cos(x) \qquad \ldots\ldots.(ii)$$

Aplicando las condiciones de contorno en (2) para $x = 0$ se tiene

$$F(0,s) = A\, e^{-\sqrt{s}0} + Be^{\sqrt{s}0} + \frac{(1-s)}{s(1+s)} sen\,(0) + \frac{1}{s} cos(0) = \frac{1}{s}$$

$A + B + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$ entonces $A + B = 0$

De la misma forma para $x = \pi$ sustituyendo en (ii)

$$F(\pi,s) = A\, e^{-\sqrt{s}\pi} + Be^{\sqrt{s}\pi} + \frac{(1-s)}{s(1+s)} sen\,(\pi) + \frac{1}{s} cos(\pi) = -\frac{1}{s}$$

$$A\, e^{-\sqrt{s}\pi} + Be^{\sqrt{s}\pi} - \frac{1}{s} = -\frac{1}{s}$$

$A\, e^{-\sqrt{s}\pi} + Be^{\sqrt{s}\pi} = 0$Luego como $A + B = 0$, $e^{-\sqrt{s}\pi}$ y $e^{\sqrt{s}\pi}$ son diferentes de cero entonces $A = B = 0$ entonces la función generatriz (ii) buscada será

$$F(\pi,s) = \frac{(1-s)}{s(1+s)} sen\,(x) + \frac{1}{s} cos(x)$$

Luego por fracciones parciales se tiene

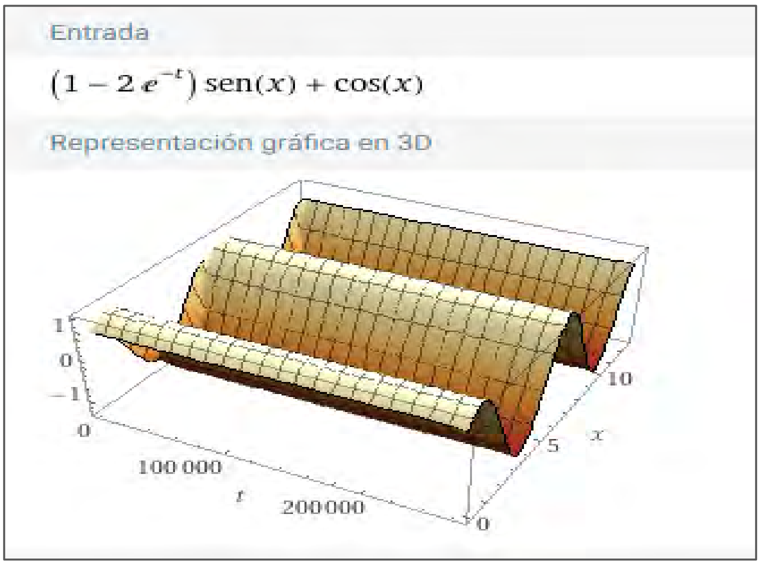
$$F(x,s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{2}{1+s}\right] sen\,(x) + \frac{1}{s} cos(x)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(x,s)\} = \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{1+s}\right\}\right] \operatorname{sen}(x) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \cos(x)$$

$f(x,t) = (1 - 2e^{-t})\operatorname{sen}(x) + cosx$ es la ecuación del beneficio de la empresa agencia de viajes turístico del valle sagrado de los incas Cusco, Cuya grafica lo realizamos por el software wólfram Alpha es:

Figura 15: Gráfica de la función beneficio del problema 7.



Fuente: *propio del presente estudio.*

b) El resultado contable agencia de viajes turístico del valle sagrado de los incas Cusco, para $t = {}^{1}/_{2}\, año$ y $x = 30\ mil$ se espera importe de

$f(x,s) = \ (1 - 2e^{-0.5})\,\mathrm{sen}(30) + \cos(30) =$ 0.75949474 en miles de soles

f = 759.49 soles.

El beneficio neto para agencia de viajes turístico del valle sagrado de los incas Cusco, después de 24% de IGV será

B= (1 - 0.24). f

B = (0.76)759.49 = 577.21 soles. Anuales.

Conclusiones

1) En los problemas económicos indicados se han identificado los modelos matemáticos expresados mediante ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales ecuaciones en derivadas parciales, en los problemas de oferta y demanda aplicado a la vida cotidiana.

2) Los modelos matemáticos planteados en problemas económicos involucran ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales ecuaciones en derivadas parciales, se han resuelto utilizando la transformada de Laplace, con el propósito de describir expresiones de oferta y demanda en forma de ecuaciones con expresiones algebraicas más simples para determinar el punto de equilibrio bajo el principio económico de oferta y demanda.

3) Para determinar el punto de equilibrio no ha sido posible resolver el sistema de ecuaciones o expresiones matemáticas expresadas en las ecuaciones de oferta y demanda de los problemas económicos necesarios para determinar el punto de equilibrio, por tanto, se ha utilizado el Software Graph o Wólfram Alpha, para determinar el punto de equilibrio gráficamente. Así mostrar e interpretar la solución correspondiente al problema económico, mediante los cuadros mostrados en la solución de los problemas económicos.

Recomendaciones

1) A los economistas, se le sugiere conocer la teoría de ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales para que puedan profundizar sus conocimientos en la teoría económica y aplicar estas herramientas matemáticas para la solución de problemas económicos.

2) En el presente trabajo no ha sido posible deducir los modelos económicos a través de modelos matemáticos de ecuaciones integro diferenciales, ecuaciones integrales y ecuaciones en derivadas parciales por lo que recomiendo analizar la deducción de modelos matemáticos aplicados a la economía.

3) Posibilitar la investigación de problemas en economía que involucran otros modelos matemáticos como son las ecuaciones integrales no lineales y ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Bibliografía

Ecuaciones Integrales – M. Krasnov, G. Makárenko, A keseliou. Editorial Mir; 1982.

Análisis Funcional- Mg. Alejandro. Ttito T, Lic. N. Salazar Peña. Editorial Valle; 2004.

Transformada de Laplace – Murray R. Spiegel, McGraw-Hill;1977.

Ecuaciones diferenciales con aplicaciones – Dennis G. Zill- México 1988

Ecuaciones Diferenciales – Giovanni Figueroa M. Escuela Matemática. Costa Rica.

Ecuaciones integrales lineales - José Darío Sánchez Hernández Bogotá - Colombia. 2008

Ecuaciones Diferenciales Parciales - Claudia Marcela Giordano- la Plata – 2017

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas parciales – Hans F Weinberger – Barcelona - 2005

Introducción a las Ecuaciones en Derivadas parciales _ Eduardo Casas Lastaría - España -2021.

Transformadas de Fourier y Aplicaciones - Genaro Gonzales. Divulgaciones matemáticas. Venezuela; 1997.

Aplicaciones a la economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes – Josep María, Franqueo Bernis (ONED-Tortosa 2014)

Espacios Métricos- Lima, Elon Lages (Colección Proyecto Euclides- IMPA- 1977) Editorial Valle; 2004.

Freniche Ibáñez Francisco José, Series de funciones e integral de Lebesgue, 16 de octubre de 2014.

Kondo J, Integral Equations, Editorial: Kondansha /Oxford, 1991

Giordano Claudia Marcela, Ecuaciones Diferenciales Parciales editorial EDULP-2017

Pontón Laura, Ecuaciones diferenciales parciales UNADM- México

Marín Antoña José Miguel, Ecuaciones integrales Editorial Universitaria-2014 Habana Cuba

Escobar A. Jaime, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones –Antioquia 2016

Blas Rebasa, J. D. (2017). Modelo didáctico para el desarrollo de competencias en la unidad: transformada de Laplace, en estudiantes universitarios de Ingeniería Civil. (Tesis doctorado). Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo , Chiclayo, PERU.

Flores Gallo, D. (2021). Un modelo praxeológico para el estudio de la transformada de Laplace en ingeniería mecatrónica. (Tesis maestria). Puntificia Universidad catolica del Pru, Lima, PERU.

GallegosAbaroa, E. (2004). Una investigación de las fuentes de la oferta y la demanda. (Tesis Doctorado). Universidad Complutense Madrid, madrid, España.

Mamani, A. (2017). aplicacion transformada de Laplace para la solución de problemas de circuitos eléctricos en ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes . (Tesis). Univarsidad Nacional del Altiplanno, Puno, PERU.

Pérez Peña, R. (2022). Determinantes del Precio del Maíz en El periodo 2000-2011 Y sus Efectos en el Bienestar De México Y Estados Unidos.(tesis) Universidad de Tennessee. Tijuana, Tijuana, México.

Villagrán Cáceres, W. (2015). Utilización De La Transformada De Laplace Como Herramienta Metodológica en el Análisis de Circuitos Eléctricos. (Tesis de Maestria). Escuels superior politecnico de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.

ANEXO

Tabla de la Transformada de Laplace

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f\} = F(s)$	$f(t)$	$\mathscr{L}\{f\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\int_o^x g(t)f(x-t)dt$	$G(s)F(s)$
t	$\frac{1}{s^2}$	$f'(t)$	s $\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0)$
$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$f''(t)$	$s^2\ \mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(0)$
$t^n, n = 1,2,3\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{1}{s}\mathscr{L}\{f(t)\}$
$sen\ kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$cos\ kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$senh\ kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$sen\ (wt+k)$	$\frac{s.senk + w\,.cosk}{s^2+w^2}$
$cosh\ kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$cos\ (wt+k)$	$\frac{s.cosk - w\,.senk}{s^2+w^2}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	te^{-t}	$\frac{1}{(s+1)^2}$
$e^{at}sen\ kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$, $(s>a)$	t^2e^{-t}	$\frac{1}{(s+1)^3}$
$e^{at}cos\ kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$, $(s>a)$	$sen\ \sqrt{5}\,t$	$\frac{\sqrt{5}}{s^2+5}$
$sen\ t$	$\frac{1}{s^2+1}$	e^{-3t}	$\frac{1}{s+3}$
$cos\ t$	$\frac{s}{s^2+1}$	e^{4t}	$\frac{1}{s-4}$
$\mathscr{L}\{u(x,t)\}$	$U(x,s)$	$\mathscr{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}$	$sF(s) - f(0)$
$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\}$	$sU(x,s) - U(x,0)$	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right\}$	$\frac{d}{dx}u(x,t)$
$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right\}$	$s^2U(x,s) - sU(x,0)$ $- u_t(x,0$	$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\}$	$\frac{d^2}{dx^2}\mathscr{L}\{u(x,t)\}$