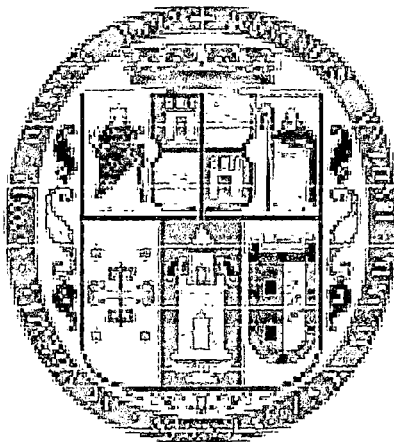


UNIVERSIDAD NACIONAL SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUIMICAS,
FISICAS Y MATEMATICAS

CARRERA PROFESIONAL DE MATEMATICA



**“EFICIENCIA DEL DISEÑO 2^k CON ORDEN
ESTÁNDAR Y ORDEN DE MÍNIMO NÚMERO DE
CAMBIOS Y SESGO”**

Tesis presentada por:

Br. Mary Patricia Ticuña Santiago.

**Para Optar al Título Profesional de
Licenciada en Matemática Mención
Estadística**

Asesora:

Mgt. Nelly M. Salazar Peña.

**CUSCO - PERU
2011**

“TESIS AUSPICIADA POR EL CONSEJO DE INVESTIGACIÓN – UNSAAC”

DEDICATORIA

A Dios por haberme permitido llegar a este momento tan especial en mi vida y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A mis padres Nativo y Martha, por su comprensión y ayuda en todo momentos. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia y mi empeño, y todo ello con una gran dosis de amor y sin pedir nunca nada a cambio.

A mi hermanita Pamela, por el gran amor que le tengo y quiero todo lo mejor para ella.

A mis abuelos Zacarías y Fidelia, porque siempre han sido un ejemplo, un estímulo a querer vivir y sacarle todo el jugo a la vida.

A mis tíos Teresa, Mario, Esperanza, Yanet y Cirila porque no han dejado que el significado de familia se quede en solo cinco personas y por todo su apoyo incondicional porque siempre he contado con ellos para todo.

A Gino, por su paciencia, por su comprensión, por su empeño, por su fuerza, por su amor, por ser tal y como es, porque lo quiero. Es la persona que más directamente ha sufrido las consecuencias del trabajo realizado.

A todos ellos, muchas gracias de todo corazón.

Mary Patricia Ticuña Santiago.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, y en especial a la Carrera Profesional de Matemática que me dieron la oportunidad de formar parte de ellos y por permitirme ser parte de una generación de triunfadores y gente productiva para el país.

A mi asesora Mgt. Nelly M. Salazar Peña por su tiempo, por su apoyo así como por haber guiado el desarrollo de este trabajo y llegar a la culminación del mismo; al Mgt. Alejandro Tito Ttica por su tiempo compartido y por impulsar el desarrollo de mi formación profesional.

A los docentes del Departamento Académico de Matemática y Estadística por su enseñanza impartida durante los años de formación, que de una manera u otra han aportado su granito de arena a mi formación.

Por último quiero agradecer a todas aquellas personas que sin esperar nada a cambio compartieron pláticas, conocimientos y que de una u otra forma aportaron a la realización de esta tesis.

Para ellos,

Muchas gracias por todo.

Mary Patricia Ticuña Santiago.

PRESENTACIÓN

SEÑOR DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS.

SEÑOR COORDINADOR DE LA CARRERA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA.

SEÑORES DOCENTES MIEMBROS DEL JURADO.

Con el fin de Óptar al Título Profesional de Licenciada en Matemática Mención Estadística y en cumplimiento a lo estipulado en el Reglamento de Grados y Títulos de la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco en actual vigencia, pongo a vuestra consideración el presente trabajo de Tesis Intitulado **“EFICIENCIA DEL DISEÑO 2^k CON ORDEN ESTÁNDAR Y ORDEN DE MÍNIMO NÚMERO DE CAMBIOS Y SESGO”**.

El presente trabajo tiene por objetivo fundamental; Analizar la eficiencia de los diseños factoriales 2^k con orden estándar y orden de mínimo número de cambios de nivel de los factores y mínimo sesgo máximo.

En tal sentido, este trabajo de investigación pretende comparar los resultados de las experimentaciones llevados a cabo en orden estándar y orden con el mínimo número de cambios de nivel de los factores y mínimo sesgo máximo en diseños factoriales 2^k .

Atentamente;

Br. Mary Patricia Ticuña Santiago.

ÍNDICE GENERAL

| | |
|-------------------|---|
| INTRODUCCIÓN..... | 1 |
|-------------------|---|

CAPÍTULO I: ASPECTOS GENERALES

| | | |
|-------|---------------------------------|----|
| 1.1 | Planteamiento del problema..... | 3 |
| 1.1.1 | Descripción del problema..... | 3 |
| 1.1.2 | Formulación del problema..... | 4 |
| 1.2 | Objetivos..... | 4 |
| 1.2.1 | Objetivo General..... | 4 |
| 1.2.2 | Objetivos Específicos..... | 4 |
| 1.3 | Hipótesis..... | 5 |
| 1.4 | Justificación del estudio..... | 5 |
| 1.5 | Limitaciones..... | 6 |
| 1.6 | Metodología..... | 6 |
| 1.7 | Antecedentes del estudio..... | 7 |
| 1.8 | Marco conceptual..... | 28 |

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

| | | |
|---------|--|----|
| 2.1 | Diseños factoriales 2^k | 37 |
| 2.1.1 | Introducción..... | 37 |
| 2.1.2 | Diseño factorial 2^2 | 39 |
| 2.1.2.1 | Representación simbólica de los datos..... | 41 |
| 2.1.2.2 | Estimación de los efectos de los factores..... | 42 |
| 2.1.2.3 | Análisis de varianza..... | 45 |
| 2.1.3 | Diseño factorial 2^3 | 48 |
| 2.1.3.1 | Representación simbólica de los datos..... | 49 |
| 2.1.3.2 | Estimación de los efectos de los factores..... | 51 |
| 2.1.3.3 | Análisis de varianza..... | 63 |

| | | |
|---------|--|----|
| 2.1.3.4 | Otra forma de encontrar los contrastes..... | 65 |
| 2.1.4 | Diseño factorial general 2^K | 67 |
| 2.2 | Orden Estándar..... | 69 |
| 2.3 | Orden de experimentación..... | 70 |
| 2.4 | Hipótesis sobre un modelo para la respuesta | 71 |
| 2.5 | Medida de la influencia de los factores desconocidos..... | 72 |
| 2.6 | Aleatorización y neutralización de la influencia de los factores desconocidos | 74 |
| 2.7 | Número de cambios de nivel de los factores..... | 75 |

CAPÍTULO III: MÉTODOS DE OBTENCIÓN DE ÓRDENES DE EXPERIMENTACIÓN CON MÍNIMO NÚMEROS DE CAMBIOS Y MÍNIMO SESGO

| | | |
|---------|--|-----|
| 3.1 | Método de Duplicación. | 77 |
| 3.1.1 | Obtención de los órdenes de experimentación para diseños 2^4 | 78 |
| 3.1.2 | Propiedades de la matriz obtenida..... | 80 |
| 3.1.3.1 | La matriz obtenida es una matriz completa..... | 80 |
| 3.1.3.2 | La matriz obtenida tiene el mínimo número de cambios posibles..... | 80 |
| 3.1.3.3 | La matriz obtenida permite estimar los efectos con un sesgo conocido..... | 82 |
| 3.1.3 | Resumen de las características del diseño obtenido..... | 89 |
| 3.2 | Búsqueda totalmente aleatoria..... | 89 |
| 3.3 | Búsqueda aleatoria con restricciones..... | 90 |
| 3.3.1 | Restricciones en las filas sucesoras..... | 90 |
| 3.3.2 | Algoritmo para la búsqueda de órdenes con sesgo mínimo..... | 93 |
| 3.3.3 | Resultados obtenidos | 93 |
| 3.4 | Búsqueda exhaustiva de órdenes semilla..... | 95 |
| 3.4.1 | Algoritmo de Dickinson..... | 95 |
| 3.4.2 | Resultados obtenidos..... | 102 |
| 3.5 | Algoritmo de Dickinson con alimentación forzada..... | 103 |
| 3.5.1 | Alimentación y resultados obtenidos para diseños con 64 experimentos..... | 104 |

| | | |
|---------|--|-----|
| 3.5.2 | Alimentación y resultados obtenidos para diseños con 128 experimentos..... | 107 |
| 3.6 | Resumen. Mejores sesgos encontrados..... | 110 |
| 3.7 | Obtención de nuevos órdenes a partir de los órdenes semilla..... | 111 |
| 3.7.1 | Método de la columna de expansión..... | 112 |
| 3.7.1.1 | Paso de un diseño 2^2 a otro 2^3 | 112 |
| 3.7.1.2 | Generalización del procedimiento descrito..... | 117 |
| 3.7.1.3 | Ventajas del método de la columna de expansión..... | 121 |
| 3.7.2 | Implementación en MINITAB del método propuesto..... | 123 |
| 3.7.2.1 | Procedimiento..... | 124 |
| 3.7.2.2 | Esquema de la macro..... | 126 |

CAPÍTULO IV: APLICACIÓN

| | | |
|----------------------|---|-----|
| 4.1 | Introducción..... | 129 |
| 4.2 | Estudio del efecto de tres factores en la Tensión Arterial | 131 |
| 4.3 | Análisis del diseño factorial 2^3 en orden estándar..... | 134 |
| 4.4 | Análisis del diseño factorial 2^3 en el orden con el mínimo número de cambios y mínimo sesgo..... | 139 |
| 4.5 | Comparación estadística..... | 145 |
| CONCLUSIONES..... | | 147 |
| RECOMENDACIONES..... | | 148 |
| BIBLIOGRAFÍA..... | | 149 |
| ANEXOS..... | | 152 |

INTRODUCCIÓN

La elección de un orden de experimentación en un diseño factorial 2^k depende básicamente de la aleatorización, que es considerada como una de las piezas clave del proceso y siempre se insiste en la importancia de diferenciar el orden estándar de la matriz de diseño del orden de experimentación, que debe ser, por supuesto, aleatorio.

Con la aleatorización se pretende forzar a las discrepancias desconocidas a contribuir homogéneamente entre las variables de estudio, luego de haber eliminado las fuentes “conocidas” de perturbación, ya sea manteniéndolas constantes durante el experimento. De esta forma se desea evitar sesgos en la estimación de los efectos por vinculaciones con el orden de experimentación; no obstante esto frecuentemente no sucede cuando la fuente de variación desconocida varía sistemáticamente en el tiempo, resultando conveniente restringir la aleatorización en el orden de experimentación.

Sin embargo, restringir la aleatorización en el orden de experimentación puede causar mayor error en la obtención de los resultados y puede ser menos eficiente que el diseño factorial 2^k con orden estándar. En tal sentido, este trabajo de investigación pretende comparar los resultados de las experimentaciones llevados a cabo en orden estándar y orden con el mínimo número de cambios de nivel y sesgo en diseños factoriales 2^k . Por lo tanto; para evaluar la eficiencia de los estimadores de la variable respuesta, se ha propuesto un procedimiento basado en el sesgo, como es el caso del criterio del cuadrado medio del error.

Esta tesis consta de 4 capítulos en relación a los órdenes de ejecución en diseños factoriales 2^k , como es el orden estándar y el orden con el mínimo número de cambios de nivel en los factores y mínimo sesgo.

El Capítulo I, trata sobre el planteamiento, formulación del problema, hipótesis, objetivos, justificación, descripción y definición de los términos básicos utilizados.

En el capítulo II, se realiza la descripción de los diseños factoriales 2^K , se plantea los problemas que genera la aleatorización de los órdenes de experimentación y se propone la posibilidad de utilizar órdenes sistemáticos.

En el capítulo III, este capítulo está dividido en dos partes; en la primera parte se presentan diferentes métodos de búsqueda para hallar órdenes de experimentación con el mínimo número de cambios de nivel y mínimo sesgo máximo, tales como el algoritmo de Dickinson, la búsqueda aleatoria restringida, el método de duplicación y el algoritmo de Dickinson con alimentación forzada, con lo cual se logra obtener órdenes con un mínimo sesgo máximo en los diseños factoriales con 8, 16, 32, 64 y 128 experimentos. En la segunda parte se presenta el método de la Columna de Expansión, para obtener órdenes con el mínimo número de cambio y sesgo a partir de los órdenes semilla identificados en la primera parte de este capítulo. Este método fue programado en macros del programa estadístico Minitab, lo cual permite generar de forma automática y aleatoria los órdenes con las características propuestas.

En el capítulo IV, se presenta una aplicación en el uso del diseño factorial 2^3 , con la finalidad de comparar los resultados de los experimentos llevados a cabo en el orden estándar y orden con el mínimo número de cambios en los niveles y mínimo sesgo máximo para luego analizar la eficiencia del diseño 2^3 con ambos órdenes.

Para finalizar, se presentan las principales conclusiones obtenidas en la realización de esta tesis y las recomendaciones para futuras líneas de investigación.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1 Descripción del problema

En el área industrial se realizan con mucha frecuencia, experimentos para conocer el efecto de un número de factores sobre una variable respuesta. Cuando se propone un diseño factorial, en general se recomienda que los experimentos se realicen en orden aleatorio para minimizar la influencia de factores desconocidos. Esta práctica tiene también algunos inconvenientes, en el caso de existir factores desconocidos parece razonable suponer que la influencia de ellos pueda presentar una cierta correlación con el orden de realización de los experimentos y en este caso existen órdenes de experimentación que en realidad anulan, o distribuyen homogéneamente, dicha influencia y otros que no lo hacen.

Uno de los aspectos que complican, en muchas ocasiones, la ejecución de un diseño factorial es el número de cambios que es necesario realizar en los valores de los factores, especialmente para aquellos que entrañan una dificultad especial, ya sea por exigir un gran esfuerzo, por ser necesario esperar un cierto tiempo o por otras razones de índole práctico o económico.

Un aspecto fundamental para lograr el éxito de lo planteado es usar un orden de experimentación apropiado, la elección de un orden de experimentación depende básicamente de minimizar los costos experimentales, la reducción del tiempo de experimentación y maximizar la eficiencia de estimación de la respuesta.

Dado que las estimaciones de los efectos y de interacción no son siempre igualmente precisas en los diferentes órdenes de experimentación se hace necesario establecer una comparación teórica y práctica entre estos para determinar su aplicabilidad. La comparación de los diseños factoriales en orden estándar y orden con el mínimo número de cambios y sesgo se puede efectuar mediante el criterio de la eficiencia, utilizando el cuadrado medio del error.

1.1.2 Formulación del problema

¿Los diseños factoriales 2^K con orden de mínimo número de cambios de nivel en los factores y mínimo sesgo máximo presentaran mayor nivel de eficiencia que los diseños factoriales 2^K con orden estándar?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo General

Analizar la eficiencia de los diseños factoriales 2^K con orden estándar y orden de mínimo número de cambios de nivel de los factores y mínimo sesgo máximo.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Elaborar un marco teórico atinente al tema.
- Cuantificar la influencia de los factores ajenos a la experimentación en la estimación de los efectos.
- Utilizar diferentes métodos de búsqueda para hallar órdenes de experimentación con el mínimo número de cambios de nivel y mínimo sesgo máximo.

- Diseñar un procedimiento de las ordenaciones, con sus propiedades para el fácil manejo del investigador.
- Comparar los resultados de los diseños factoriales 2^K con orden estándar y orden con mínimo número de cambios y sesgo.

1.3 HIPÓTESIS

Los diseños factoriales 2^K con orden de mínimo número de cambios de nivel de los factores y mínimo sesgo máximo presentan mayor nivel de eficiencia que los diseños factoriales 2^K con orden estándar.

1.4 JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

El presente trabajo de investigación tiene su justificación por la siguiente razón:

El diseño estadístico de experimentos en la industria y en el sector agropecuario se ha caracterizado por ser una disciplina en constante crecimiento. Sin embargo, la gran mayoría de aplicaciones que se llevan a cabo en el ámbito que nosotros conocemos se circunscriben a un reducido número de técnicas, muchas de las cuales han sido replanteadas y mejoradas por los investigadores, pero sin que estas mejoras se hayan llevado a la práctica, quizá por la dificultad implícita en el método o por el nivel sofisticado de conocimiento matemático y estadístico requerido para su correcta aplicación.

Se necesita contar con procedimientos que, sin soslayar su aspecto formal, sean fáciles de comprender y de aplicar en la industria y en el sector agropecuario. En este sentido se pretende comparar los resultados de los experimentos llevados a cabo en orden estándar y orden con el mínimo número de cambios de nivel y sesgo en diseños factoriales 2^k , con el fin de evaluar la eficiencia de los estimadores de la variable respuesta, para lo cual se ha propone un procedimiento basado en el sesgo, como es el caso del criterio del cuadrado medio del error, siendo este un métodos alternativo simple fácil de usar.

1.5 LIMITACIONES

La falta de conocimiento por parte de los experimentadores en la práctica industrial y en el sector agropecuario sobre los problemas que puede causar la aleatorización en los diseños factoriales, lo que impide conseguir una aplicación en nuestro entorno y así poder evitar complicaciones y encarecimiento de la experimentación.

1.6 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación se inicia con una recopilación documental que servirá como un aporte de la información requerida sobre los antecedentes de trabajos previos en los que se utilizaron estos métodos y cuáles fueron las conclusiones.

Así mismo se realizó una recopilación bibliográfica adecuada que nos proporcionó información para obtener el marco teórico que permitió desarrollar en forma adecuada los diferentes métodos o procedimientos que permiten obtener órdenes de experimentación en diseños factoriales a dos niveles que presenten el mínimo número de cambios de nivel que protejan contra la influencia lineal debida a factores desconocidos, los cuales son de gran importancia para la experimentación en la industria y en el sector agropecuario dado el bajo costo de experimentación y la atenuación del sesgo que estos presentan.

Posteriormente se ha diseñado una macro en el programa estadístico Minitab que permite generar automáticamente y de forma aleatoria, órdenes que presenten el mínimo número de cambios de nivel y que protegen de la influencia lineal de los factores ajenos a la experimentación.

Finalmente se ha realizado la comparación estadística de los resultados obtenidos con el orden estándar y orden con el mínimo número de cambios de nivel de los factores y mínimo sesgo máximo, con el fin de analizar la eficiencia del diseño factorial 2^K llevados a cabo con los órdenes de experimentación mencionados.

1.7 ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

Cox, D. R. (1952) “Some Recent Work on Systematic Experimental Design”

Presenta por primera vez el concepto de diseños sistemáticos como aquellos en los que la aleatorización del orden de ejecución no es la mejor opción posible, ya que la selección de una secuencia determinada permite contrarrestar la influencia de los factores ajenos a la experimentación. Para mostrar la utilidad práctica de este concepto presenta un caso de aplicación en una fábrica textil, en el cual define como debería ser planeado un experimento con el fin de eliminar la influencia que puede ejercer el tiempo (envejecimiento del algodón) en el proceso de fabricación de la lana.

En particular el experimento consiste en investigar el efecto que tiene el cambiar la humedad relativa en dos etapas de fabricación de la lana. La humedad relativa se estudia en tres niveles 50%, 60% y 70%. La lana se divide en lotes lo más parecidos posibles que son numerados de forma aleatoria. Cada semana sólo uno de los lotes es procesado con un cierto tratamiento.

El experimentador sospecha que la edad de la lana puede afectar el proceso, por lo que se podría generar una tendencia debido al añejamiento. Por esta razón se desarrolla un plan de ejecución de las pruebas de experimentación que permita eliminar la influencia que pueda tener el envejecimiento de los lotes de lana en el proceso.

Para ello se asignan los experimentos a las etapas del proceso en el siguiente orden: T_2 , T_1 , T_3 , T_3 , T_2 , T_1 , T_1 , T_3 y T_2 , donde T_1 representa un lote con humedad relativa del 50%, T_2 un lote con humedad relativa del 60% y T_3 un lote con humedad relativa del 70%.

Este orden garantiza que al realizar el análisis con un método tradicional como los mínimos cuadrados ordinarios y las pruebas de significancia, el efecto de la etapa no se vea afectado por factores ajenos a la experimentación, lo que podría distorsionar los resultados obtenidos.

Daniel, C. y Wilcoxon, F. (1966) “Factorial 2^{p-q} Plans Robust Against Linear and Quadratic trends”

Se basan en la idea de que el diseño se puede plantear en bloques, cuadrados latinos, etc. con el fin de hacer más preciso el análisis. Pero cuando se tiene información adicional que permite suponer que el comportamiento de la influencia de los factores ajenos presenta una tendencia lineal o cuadrática, se puede construir un diseño no aleatorizado que permite proteger de dicha influencia a los efectos de interés.

Daniel y Wilcoxon, definen una forma de medir la influencia de los factores ajenos a la experimentación en cada uno de los efectos del diseño, usando para ello el producto interno del contraste del efecto por la respuesta o Contador de Tiempo (*Time Count*) definido por Draper y Stoneman (1968). A partir de esta medida se identifican los efectos que presentan un sesgo cero, a los cuales se les asignan los factores que se desea proteger de la influencia no deseada.

Estos autores encontraron órdenes para los diseños factoriales 2^{k-p} con $k-p=2, 3, 4$ y 5 . A continuación se presenta un ejemplo de este procedimiento para un diseño factorial a dos niveles con ocho experimentos.

En primer lugar se plantea el diseño factorial en el orden estándar y se construye la matriz completa, se calcula el Contador de Tiempo (*Time Count*) lineal y el cuadrático para todos los efectos, como se presenta en la Tabla N° 1.

A partir del cálculo de los Contador de Tiempo (*Time Count*) de la influencia lineal y cuadrática se seleccionan las tres columnas de contrastes que representan a los tres factores de interés en el diseño, con los cuales se define el orden de experimentación para los ocho experimentos en un diseño factorial a dos niveles, como el que se presenta en la Tabla N° 2, el cual permite proteger de la posible influencia lineal o cuadrática de los factores ajenos a la experimentación.

Tabla N° 1:

Selección del orden de experimentación para un diseño factorial a dos niveles con el método propuesto por Daniel y Wilcoxon (1966)

| | A | B | C | AB | AC | BC | ABC | Y | Y ² |
|------------------------------|---|----|----|----|----|----|-----|---|----------------|
| | - | - | - | + | + | + | - | 1 | 1 ² |
| | + | - | - | - | - | + | + | 2 | 2 ² |
| | - | + | - | - | + | - | + | 3 | 3 ² |
| | + | + | - | + | - | - | - | 4 | 4 ² |
| | - | - | + | + | - | - | + | 5 | 5 ² |
| | + | - | + | - | + | - | - | 6 | 6 ² |
| | - | + | + | - | - | + | - | 7 | 7 ² |
| | + | + | + | + | + | + | + | 8 | 8 ² |
| <i>Time Count Lineal</i> | 8 | 16 | 32 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| <i>Time Count Cuadrático</i> | 0 | 0 | 0 | 8 | 16 | 32 | 0 | | |

Tabla N° 2:

Orden de experimentación para un diseño factorial a dos niveles obtenido con el método propuesto por Daniel y Wilcoxon (1966)

| Orden | A(ABC) | B(A) | C(AB) |
|------------------------------|--------|------|-------|
| 5 | - | - | + |
| 4 | + | + | - |
| 2 | + | - | - |
| 7 | - | + | + |
| 6 | + | - | + |
| 3 | - | + | - |
| 1 | - | - | - |
| 8 | + | + | + |
| <i>Time Count Lineal</i> | 0 | 8 | 0 |
| <i>Time Count Cuadrático</i> | 0 | 0 | 8 |

Draper, N. y Stoneman, D. (1968) “Factor Changes and Linear Trends in Eight-Run Two-Level Factorial Designs”

Tal vez la primera insinuación acerca de la necesidad de tener órdenes de experimentación con el doble propósito de proteger contra la influencia de factores ajenos a la experimentación y con un bajo costo, se debe al comentario realizado por el

señor Grant Wernimont, citado en Daniel y Wilcoxon, 1966, en cuanto hacer más económicos los órdenes de ejecución propuestos en el trabajo de estos mismos autores, los cuales sólo buscaban la eliminación de la influencia de los factores no controlados en los efectos principales del diseño factorial.

Pero fueron Draper y Stoneman (1968), los primeros autores en proponer la búsqueda de órdenes de experimentación en diseños factoriales 2^3 buscando un equilibrio entre el número de cambios de nivel de los factores y la atenuación de la influencia lineal que los factores no controlados pueden ejercer en los efectos principales. Hasta ese momento los esfuerzos se habían concentrado en hallar órdenes de experimentación que eliminaran completamente la influencia de factores no controlados en los efectos principales del modelo, en especial el trabajo presentado por Daniel y Wilcoxon (1966). Este trabajo fue pionero también, en definir que la influencia lineal de los factores no controlados podría ser simulada al colocar como respuesta de cada uno de los tratamientos el valor de la fila de ejecución de los experimentos.

Por ejemplo, para el caso de los diseños factoriales 2^3 estas respuestas serían: 1, 2, ..., 8, respectivamente. Adicionalmente definieron que la influencia de los factores no controlados podría ser obtenida a través del producto interno entre la columna del efecto deseado y la columna de respuesta, a esta medida la denominaron “Contador de Tiempo” (*Time Count*), que puede ser interpretada como el contador de la influencia lineal ejercida en el tiempo. Para realizar la búsqueda de los órdenes de experimentación que cumplen el doble propósito de proteger de la influencia de factores no controlados y a su vez tener un bajo número de cambios de nivel de los factores en los diseños factoriales 2^3 , construyeron un programa de ordenador que permitiera explorar la totalidad de órdenes ($8!=40\ 320$), clasificándolos en dos aspectos, el número de cambios de nivel y el máximo Contador de Tiempo (*Time Count*) en valor absoluto.

Los 40 320 órdenes fueron divididos en 840 grupos de 48 órdenes equivalentes cada grupo. Los 48 órdenes equivalentes que pueden ser obtenidos al permutar las columnas de los factores (seis formas) y al cambiar la posición de los signos de una o más columnas (8 formas; $6 \times 8 = 48$). En la Tabla N° 3 se presentan los mejores órdenes

obtenidos para el diseño factorial completo 2^3 en cuanto a un número bajo de cambios de nivel y un bajo sesgo máximo en los efectos principales.

Tabla N° 3:

Órdenes de experimentación con pocos cambios de nivel y bajo sesgo en el diseño 2^3 hallados por Draper y Stoneman (1968)

| Órdenes | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 8 | 4 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 6 | 6 | 8 | 8 | 4 | 6 |
| 6 | 7 | 5 | 3 | 6 | 5 | 8 | 8 | 6 | 6 | 6 | 8 |
| 5 | 3 | 6 | 7 | 5 | 6 | 7 | 5 | 5 | 7 | 5 | 7 |
| 7 | 5 | 2 | 5 | 2 | 7 | 5 | 7 | 3 | 5 | 7 | 3 |
| 3 | 6 | 3 | 6 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 3 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 7 | 4 | 7 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Si tomamos uno de los órdenes presentados en la Tabla N° 3, por ejemplo, el orden 1, 4, 8, 6, 5, 2, 3, 7 y lo analizamos en relación al número de cambios de nivel de los factores y el sesgo máximo, se obtienen un total de 10 cambios de nivel y un sesgo máximo de 1,5 en los efectos principales, pero un sesgo de 3.5 en el efecto de la interacción *AB* si consideramos todos los efectos del modelo, en la Tabla N° 4 se pueden observar los efectos principales y el número de cambios en los factores correspondientes al orden descrito.

Tabla N° 4:

Número de cambios de nivel y sesgo máximo en efectos principales en uno de los órdenes del diseño 2^3 , hallados por Draper y Stoneman (1968)

| Orden | A | B | C |
|---------|-----|----|----|
| 1 | -1 | -1 | -1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 |
| Cambios | 4 | 3 | 3 |
| Sesgo | 1,5 | 1 | 1 |

Como se puede observar en la Tabla N° 4 estos órdenes no presentan el valor mínimo en ninguno de los aspectos, ya que, el mínimo número de cambios que pueden ser alcanzado en estos diseños es de 7 y el mínimo sesgo máximo un valor 0 en los efectos principales. Pero estas dos condiciones no pueden ser alcanzadas de forma simultánea por lo cual se debe buscar un equilibrio en estos dos aspectos, según la propuesta de Draper y Stoneman (1968).

Procediendo de forma similar a lo presentado en el caso de los diseños factoriales completos se realizó el estudio para los diseños factoriales fraccionales, comenzando por los diseños 2^{4-1} . Ahora los 40 320 órdenes fueron divididos en 210 grupos distintos con 192 órdenes equivalentes por grupo. El número equivalente de órdenes puede ser obtenido por la permutación de las columnas de los factores A, B, C y la interacción ABC que representa al cuarto factor o factor D ($4!=24$ formas) y cambiar la posición de los signos de una o más columnas (8 formas; $24 \times 8 = 192$). En la Tabla N° 5, se presentan los mejores órdenes obtenidos para este tipo de diseños.

Tabla N° 5:

Órdenes de experimentación con pocos cambios de nivel y bajo sesgo en el diseño 2^{4-1} hallados por Draper y Stoneman (1968)

| Órdenes | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 8 | 2 | 8 | 8 | 2 | 8 | 8 | 2 | 2 | 2 | 8 | 8 |
| 8 | 8 | 7 | 8 | 8 | 2 | 8 | 2 | 2 | 8 | 2 | 2 | 7 | 7 | 8 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 8 | 3 | 7 | 3 | 7 | 3 | 7 | 7 | 3 | 7 | 8 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 7 | 3 | 7 | 3 | 7 | 3 | 7 | 3 | 3 | 7 | 3 | 3 | 8 | 6 | 6 | 7 |
| 5 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 5 | 6 | 6 | 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 6 | 5 | 5 | 6 | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 | 5 | 7 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 4 | 4 | 4 | 6 |

Continuando con la búsqueda de los órdenes de experimentación en diseños factoriales fraccionales con ocho experimentos, Draper y Stoneman examinaron los órdenes para los diseños 2^{5-2} , obteniéndose los órdenes que se muestran en la Tabla N° 6. Adicionalmente se evaluaron los órdenes para los diseños 2^{6-3} , donde fueron encontrados los órdenes que se presentan en la Tabla N° 7. Finalmente se evaluaron los órdenes para los diseños saturados 2^{7-4} obteniéndose los órdenes que se presentan en la Tabla N° 8.

Tabla N° 6:

Órdenes de experimentación con pocos cambios de nivel y bajo sesgo en el diseño 2^{5-2} hallados por Draper y Stoneman (1968)

| Órdenes | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 2 | 7 | 2 | 7 | 2 | 2 | 7 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 | 7 | 2 | 7 | 7 | 8 | 8 |
| 8 | 2 | 6 | 3 | 4 | 8 | 4 | 4 | 4 | 4 | 8 | 8 | 7 | 3 |
| 6 | 6 | 7 | 8 | 8 | 4 | 8 | 8 | 8 | 8 | 3 | 4 | 3 | 7 |
| 5 | 8 | 5 | 6 | 6 | 5 | 6 | 5 | 6 | 5 | 6 | 5 | 6 | 5 |
| 7 | 4 | 8 | 5 | 5 | 6 | 3 | 6 | 5 | 6 | 5 | 3 | 5 | 6 |
| 3 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 5 | 3 | 3 | 3 | 4 | 6 | 4 | 4 |

Tabla N° 7:

Órdenes de experimentación con pocos cambios de nivel y bajo sesgo en el diseño 2^{6-3} , hallados por Draper y Stoneman (1968)

| Órdenes | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 4 |
| 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 6 | 6 | 2 | 6 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 4 | 6 | 3 | 6 |
| 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 2 | 5 | 2 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 5 | 2 |
| 7 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 7 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 2 |
| 8 | 7 | 7 | 5 | 8 | 8 | 5 | 6 | 5 | 8 | 5 | 7 | 8 | 7 | 8 | 5 | 7 | 5 |
| 6 | 5 | 5 | 7 | 5 | 5 | 3 | 8 | 8 | 3 | 8 | 3 | 5 | 5 | 5 | 7 | 6 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 8 | 3 | 3 | 5 | 3 | 5 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 7 |

Tabla N° 8:

Órdenes de experimentación con pocos cambios de nivel y bajo sesgo en el diseño 2^{7-4} hallados por Draper y Stoneman (1968)

| Órdenes | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 8 | 7 | 7 | 8 | 7 | 8 | 7 | 8 | 6 | 6 | 6 | 7 | 6 | 7 | 6 | 8 | 6 | 8 |
| 7 | 6 | 8 | 6 | 6 | 6 | 8 | 7 | 4 | 4 | 8 | 4 | 7 | 4 | 7 | 4 | 8 | 4 |
| 6 | 4 | 4 | 7 | 8 | 4 | 6 | 4 | 8 | 7 | 4 | 8 | 4 | 6 | 8 | 6 | 7 | 7 |
| 4 | 8 | 6 | 4 | 4 | 7 | 4 | 6 | 7 | 8 | 7 | 6 | 8 | 8 | 4 | 7 | 4 | 6 |

Al finalizar su trabajo en los diseños factoriales a dos niveles con ocho experimentos, Draper y Stoneman hicieron el siguiente comentario: *“Con los actuales equipos de computación, el análisis exhaustivo de los diseños con 16 o más experimentos parece ser un tarea formidable en términos de tiempo computacional, por el gran número de posibles órdenes que pueden ocurrir. Por esta razón no hemos extendido este trabajo a diseños factoriales a dos niveles con más experimentos”*.

Este comentario fue la base de la propuesta de Dickinson (1974) para la búsqueda de órdenes de experimentación en diseños factoriales 2^4 y 2^5 que presentaran el mínimo número de cambios de nivel y el mínimo sesgo máximo en los efectos principales.

Dickinson, A. W. (1974) “Some Run Orders Requiring a Minimum Number of Factor Level Changes for the 2^4 and 2^5 Main Effect Plans”

Dada la necesidad de ampliar la propuesta de Draper y Stoneman (1968), que presentaba órdenes de experimentación para diseños 2^3 con las propiedades de tener pocos cambios de nivel y los efectos principales casi libres de la influencia lineal debida a factores ajenos a la experimentación, Dickinson (1974) continuó la búsqueda de órdenes con características similares para diseños 2^4 y 2^5 , salvando de manera adecuada la restricción computacional debida a la elevada cantidad de órdenes que era necesario explorar.

Así, limitó la búsqueda de los órdenes que atenuaban la influencia lineal en los efectos principales a sólo aquellos que presentaban el mínimo número de cambios de nivel, pues se conocía que este número estaba predeterminado para los diseños factoriales a dos niveles, por la expresión 2^k-1 , ya que cuando sólo cambia un nivel de los factores en cada par de pruebas consecutivas de un diseño factorial a dos niveles el número de cambios es mínimo¹.

¹ Tiahrt, K.J. y Weeks, P.L. (1970). “A Method of Constrained Randomization for 2^k Factorial”.

Para evaluar la influencia de los factores no controlados en los efectos principales Dickinson utilizó como medida el criterio “*Time Count*”² (contador de tiempo), presentado por Draper y Stoneman (1968), que consiste en el producto interno entre la columna de un efecto particular y vector de respuesta que simula la influencia lineal de los factores no controlados. Para mantener la notación en nuestro trabajo utilizaremos como medida de esta influencia el valor del sesgo de forma similar a la utilizada por de León (2004), el cual puede ser calculado con la siguiente expresión:

$$\text{Sesgo} = \frac{\text{Time Count}}{2^{k-1}} = \frac{\text{Contador de Tiempo}}{2^{k-1}}$$

En la Tabla N° 9 se presenta un ejemplo de cómo pueden ser utilizadas estas medidas (número de cambios y sesgo) para evaluar el diseño factorial 2^4 en orden estándar en relación a estos dos criterios.

Puede observarse que el número de cambios de nivel que presenta este diseño es de 26 y la influencia de los factores no controlados en los cuatro efectos principales, medida con el sesgo es de 1, 2, 4, y 8, respectivamente.

Obsérvese que el número de cambios de nivel es grande, si lo comparamos con el mínimo número de cambios posibles en este tipo de diseños, que es de 15 cambios.

Adicionalmente, el sesgo máximo obtenido en el factor D, es de ocho (8), el mayor valor del sesgo que se puede presentar en un diseño 2^4 , ya que las ocho primeras observaciones se realizan con este factor a nivel bajo y las ocho restantes con el nivel alto.

² Draper, N. y Stoneman, D. (1968) “Factor Changes and Linear Trends in Eight-Run Two-Level Factorial Designs”

Tabla N° 9:

Evaluación del diseño 2^4 con el orden estándar en cuanto a número de cambios de nivel y el sesgo máximo en los efectos principales

| Orden de experimentación | A | B | C | D | Respuesta |
|--------------------------|----|---|---|---|-----------|
| 1 | - | - | - | - | 1 |
| 2 | + | - | - | - | 2 |
| 3 | - | + | - | - | 3 |
| 4 | + | + | - | - | 4 |
| 5 | - | - | + | - | 5 |
| 6 | + | - | + | - | 6 |
| 7 | - | + | + | - | 7 |
| 8 | + | + | + | - | 8 |
| 9 | - | - | - | + | 9 |
| 10 | + | - | - | + | 10 |
| 11 | - | + | - | + | 11 |
| 12 | + | + | - | + | 12 |
| 13 | - | - | + | + | 13 |
| 14 | + | - | + | + | 14 |
| 15 | - | + | + | + | 15 |
| 16 | + | + | + | + | 16 |
| Sesgo | 1 | 2 | 4 | 8 | |
| Número de cambios | 15 | 7 | 3 | 1 | |

Ahora si deseamos hallar órdenes en los diseños factoriales 2^k , en los cuales el número de cambios de nivel sea el mínimo y la influencia lineal ejercida por los factores no controlados también lo sea, es necesario evaluar las $k!$ permutaciones de las columnas o factores, lo que genera un número de posibilidades exageradamente grande, por lo que es necesario limitar la búsqueda a un conjunto estratégico de órdenes, como aquellos en los cuales el número de cambios de nivel de los factores sea mínimo, para posteriormente evaluar los sesgos en los efectos principales de los órdenes hallados.

En el capítulo III se presenta una descripción detallada, a nivel operativo, del algoritmo que propone Dickinson. Con su aplicación a los diseños factoriales 2^4 se pueden hallar la totalidad de órdenes semilla (238) que presentan el mínimo número de cambios de nivel (15 cambios) en este tipo de diseños. Cada uno de estos órdenes fue evaluado con base en el sesgo máximo presente en los efectos principales y los siete órdenes con el valor más bajo del sesgo máximo que se pueden observar en la Tabla N° 10. Estos órdenes tienen la característica de poseer el mínimo costo de experimentación y proteger de la influencia lineal de factores ajenos al experimento en los diseños

factoriales 2^4 , simultáneamente. Es necesario aclarar que con cada uno de los órdenes presentados en la Tabla N° 10 se pueden generar 384 órdenes adicionales, al permutar las columnas y/o cambiar los signos de los elementos de una columna o conjunto de columnas.

Tabla N° 10:

Órdenes de experimentación en el diseño factorial 2^4 con el mínimo sesgo máximo en los efectos principales y con 15 cambios de nivel de los factores

| | Órdenes | | | | | | |
|--|---------|----|----|----|----|----|-----|
| | a | b | c | d | e | f | g |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 10 | 10 | 6 | 6 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 12 |
| 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 | 11 |
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 12 | 15 |
| 7 | 7 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 16 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 12 | 15 | 14 | 14 |
| 11 | 4 | 4 | 7 | 4 | 7 | 6 | 6 |
| 12 | 8 | 8 | 5 | 3 | 3 | 8 | 8 |
| 4 | 6 | 7 | 13 | 7 | 4 | 4 | 4 |
| 8 | 5 | 5 | 9 | 8 | 8 | 3 | 3 |
| 6 | 13 | 13 | 10 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| 5 | 9 | 9 | 12 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 13 | 11 | 10 | 4 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| 9 | 12 | 12 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| Mínimo sesgo máximo en efectos principales | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3,5 |

De manera similar Dickinson utilizó el algoritmo descrito anteriormente para hallar órdenes de experimentación con el mínimo número de cambios de nivel de los factores en los diseños factoriales 2^5 , pero dada la excesiva cantidad de órdenes que deben ser explorados (2.63×10^{35}), la búsqueda exhaustiva aún en el caso de restringirla sólo a los diseños con el mínimo número de cambios de nivel era inviable para esa época, por lo cual se truncó la búsqueda. Para el caso particular del trabajo realizado por Dickinson (1974) la búsqueda fue interrumpida cuando se habían obtenido 26 000 órdenes de experimentación con el mínimo número de cambios de nivel de los factores y con estos se realizó la evaluación del mínimo sesgo máximo en los efectos principales. El mínimo sesgo máximo obtenido para los efectos principales fue de 2.25 en cuatro órdenes de

experimentación, 2.5 en un orden de experimentación y 2.75 en diez órdenes de experimentación, en la Tabla N° 11 se presentan dichos órdenes.

Tabla N° 11:

Órdenes de experimentación en el diseño factorial 2^5 con el mínimo sesgo máximo en los efectos principales y con 31 cambios de nivel de los factores

| Órdenes de experimentación | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m | n | o |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 |
| 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 |
| 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 |
| 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 | 31 |
| 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 11 | 11 | 11 | 11 | 16 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 16 | 16 | 11 | 16 | 16 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 14 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 8 | 12 | 3 | 12 | 14 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 4 | 4 | 7 | 4 | 13 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 22 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 3 | 5 | 3 | 29 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 24 | 21 | 6 | 21 | 21 | 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 25 |
| 22 | 22 | 22 | 22 | 23 | 29 | 22 | 29 | 29 | 22 | 5 | 5 | 22 | 5 | 27 |
| 21 | 21 | 30 | 30 | 19 | 13 | 21 | 30 | 30 | 30 | 13 | 13 | 30 | 21 | 19 |
| 29 | 29 | 29 | 26 | 27 | 9 | 29 | 26 | 26 | 29 | 9 | 29 | 26 | 22 | 3 |
| 30 | 30 | 25 | 25 | 11 | 10 | 30 | 10 | 10 | 13 | 25 | 21 | 10 | 30 | 7 |
| 26 | 26 | 26 | 29 | 3 | 26 | 26 | 9 | 9 | 9 | 17 | 22 | 9 | 29 | 5 |
| 10 | 10 | 10 | 13 | 7 | 30 | 10 | 13 | 13 | 25 | 21 | 30 | 25 | 13 | 6 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 5 | 22 | 9 | 14 | 14 | 26 | 29 | 26 | 29 | 9 | 8 |
| 13 | 13 | 13 | 10 | 13 | 6 | 13 | 16 | 16 | 10 | 30 | 25 | 13 | 11 | 4 |
| 14 | 14 | 14 | 14 | 9 | 14 | 14 | 12 | 12 | 14 | 26 | 27 | 14 | 27 | 12 |
| 16 | 16 | 16 | 16 | 25 | 16 | 16 | 4 | 4 | 16 | 10 | 11 | 16 | 25 | 11 |
| 12 | 12 | 12 | 12 | 17 | 12 | 12 | 8 | 8 | 12 | 14 | 9 | 12 | 26 | 9 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 21 | 4 | 4 | 6 | 6 | 4 | 6 | 10 | 4 | 10 | 10 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 29 | 8 | 8 | 22 | 22 | 8 | 22 | 14 | 8 | 14 | 26 |
| 24 | 24 | 24 | 24 | 30 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 6 | 24 | 6 | 30 |
| 23 | 23 | 23 | 23 | 26 | 23 | 23 | 23 | 23 | 23 | 23 | 8 | 23 | 8 | 22 |
| 19 | 19 | 21 | 21 | 10 | 19 | 19 | 19 | 19 | 21 | 19 | 24 | 21 | 24 | 24 |
| 27 | 17 | 17 | 17 | 12 | 27 | 17 | 17 | 27 | 17 | 27 | 23 | 17 | 23 | 23 |
| 25 | 25 | 19 | 19 | 4 | 25 | 25 | 25 | 25 | 19 | 11 | 19 | 19 | 19 | 21 |
| 17 | 27 | 27 | 27 | 8 | 17 | 27 | 27 | 17 | 27 | 12 | 17 | 27 | 17 | 17 |
| Mínimo sesgo máximo en efectos principales | 2,25 | 2,25 | 2,25 | 2,25 | 2,5 | 2,75 | 2,75 | 2,75 | 2,75 | 2,75 | 2,75 | 2,75 | 2,75 | 2,75 |

Dada las evidentes restricciones que este método presenta para la búsqueda de órdenes con el mínimo número de cambios de nivel, debido al elevado número de combinaciones que deben ser analizadas, la búsqueda de órdenes con características similares en diseños factoriales a dos niveles con un mayor número de factores (2^6 , 2^7 ,

etc.), no ha sido posible, por lo cual sigue teniendo vigencia el comentario hecho por Dickinson (1974) en el numeral de posibles extensiones, donde afirma que: *“La carga computacional podría ser reducida considerablemente si se pudiera encontrar una forma sistemática de generar órdenes que posean buenas propiedades sin generar órdenes adicionales con propiedades no adecuadas”*.

Joiner, B. y Campbell, C. (1976) “Designing Experiments when Run Order is Important”

Presentan una serie de ejemplos en los cuales se observa claramente la influencia que pueden ejercer factores desconocidos relacionados con el tiempo, tales como la descripción del ejemplo propuesto por Draper y Smith (1966) en el que se presenta un experimento para evaluar el efecto de tres factores sobre la cantidad de vitamina B en los nabos. Los tres factores son: la radiación solar, la mezcla de tierra y la temperatura. Al analizar detalladamente los datos obtenidos en la respuesta se encuentra que al establecer una regresión lineal simple entre y_i (respuesta) y i (posición) se obtiene un 90% de correlación. En otras palabras, que los valores de la vitamina B disminuyen casi linealmente con el orden en que se realizan los experimentos. Lo que nos lleva a pensar que por alguna razón los resultados disminuyen con el tiempo (¿disminuye la vitamina? o ¿Disminuyen los reactivos?).

Otro ejemplo, corresponde a un trabajo encomendado por la agencia de estándares a Brian Joiner para diseñar un experimento que permita evaluar la precisión de una instalación que había sido construida para calibrar los medidores usados para venta de fluidos criogénicos (nitrógeno líquido, oxígeno líquido, etc.). Se sabe que los medidores se deterioran con el uso, y se consideraba tanto la instalación como los medidores que podían tener la posibilidad de ser sensibles a la temperatura, presión y a la velocidad de flujo del líquido que estaba siendo medido. Otra variable de interés en la valoración de la instalación fue el peso total del líquido bombeado durante la prueba.

Comúnmente un estadístico puede sugerir que las medidas deben hacerse en orden aleatorio. Pero en este caso, cambiar la temperatura consume mucho tiempo (alto costo) y hasta cierto punto la presión también, pero cambiar la velocidad y el peso podría

hacerse de forma instantánea. Una vez se tiene preparadas todas las variables para una prueba, la medición podría hacerse en 5 minutos. Pero cambiar la temperatura podría consumir medio día, por lo cual una aleatorización del orden fue descartada, pero el orden óptimo de experimentación no es obvio.

Para solucionar los problemas mencionados en los párrafos anteriores, se propone una estrategia de búsqueda de diseños factoriales a dos niveles, a través de la selección aleatoria de 50 órdenes de experimentación y a partir de estos escoger el mejor. Para realizar esta selección, todos los órdenes son evaluados con una Medida de Eficiencia (ME) definida como la razón entre una medida de calidad y un costo, que puede ser representada por la siguiente expresión:

$$ME = \frac{|\mathbf{X}'\mathbf{X}|^{1/p}}{\text{Costo}}$$

Donde p es el número de vectores en \mathbf{X} y el valor del costo representa las sumas de los costos incurridos en el cambio de nivel de los factores y el costo de las mediciones. Esta medida se complementa con un gráfico bivalente entre la calidad y el costo de cada uno de los órdenes obtenidos, con el fin de buscar un equilibrio entre el costo de la experimentación y la atenuación del sesgo, para facilitar la identificación y selección del mejor o mejores órdenes, el diagrama bivalente pueden ser acotado.

Esquemáticamente el procedimiento es definido así:

- Seleccionar aleatoriamente 50 órdenes de experimentación de un diseño factorial 2^k .
- Calcular la medida de calidad $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|^{1/p}$.
- Calcular el número de cambios de nivel de los factores.
- Hacer un gráfico bivalente con la medida de calidad y el número de cambios de nivel.
- Seleccionar el orden que presente simultáneamente la medida de calidad alta y el número de cambios de nivel de los factores bajo.

Coster, D. D. y Cheng, Ch (1988) “Minimum Cost Trend-free Run Orders of Fractional Factorial Designs”

Utilizando una estructura matemática compleja, basada en la teoría de los grupos de Galois, Coster y Cheng desarrollaron una técnica conocida con el nombre de método *foldover* generalizado (GFS, de sus siglas en inglés) que permite obtener órdenes de experimentación en diseños factoriales fraccionados que minimizan una función de costo basada en el número de veces que los factores cambian de nivel en la ejecución del experimento y, simultáneamente, también consigue que todos los efectos principales sean ortogonales a la tendencia lineal.

En términos generales este procedimiento consiste en construir la matriz de diseño de un orden de experimentación libre de tendencia en factores principales, a partir de una matriz generadora de un cierto número de factores (generadores) de la siguiente forma:

Inicialmente se ubica en la primera fila aquella que presenta todos los factores a nivel bajo, luego se multiplica esta fila por la primera fila de la matriz generadora (o primer generador) y se obtiene una nueva fila que es agregada a la matriz de diseño. Las dos filas de la matriz de diseño obtenidas en el paso anterior son multiplicadas por la segunda fila de la matriz generadora (o segundo generador), con lo cual se obtienen dos nuevas filas que son agregadas a la matriz de diseño, para un total de cuatro filas y así se continua hasta agotar todas las filas de la matriz generadora y a su vez obtener todas las filas de la matriz de diseño, a partir de esta se puede deducir el orden del diseño factorial fraccional obtenido.

Esquemáticamente el procedimiento podría resumirse tal como se muestra en los siguientes pasos:

- Seleccionar las filas (generadores) de la matriz generadora para un determinado número de factores.
- Ubicar la primera fila de la matriz de diseño como aquella en la que todos los factores están a nivel bajo.

- Usar las filas de la matriz generadora y el método *foldover* generalizado para obtener la matriz de diseño de un diseño factorial fraccional.
- Obtener el orden para el diseño factorial fraccional a dos niveles con los efectos principales libres de tendencia.

Adicionalmente, en la Tabla N° 12 se presenta la matriz de diseño y el orden de experimentación para un diseño 2^4 que fue obtenido por la matriz generadora compuesta por las filas 4, 7, 14 y 11 de la matriz con el orden estándar, la cual presenta un orden con todos los efectos principales libres de tendencia y 27 cambios de nivel de los factores. Este valor del número de cambios es bastante elevado si lo comparamos con el mínimo posible que sería de 15. Por lo cual podríamos afirmar que este orden es bastante bueno para contrarrestar los efectos de factores ajenos a la experimentación pero poco adecuado desde el punto de vista económico, dado el elevado número de cambios de nivel que es necesario realizar.

Tabla N° 12:

Orden para un diseño 2^{4-0} , hallado por el método foldover generalizado propuesto por Coster y Cheng (1988)

| Orden | A | B | C | D |
|---------|----|---|---|---|
| 1 | - | - | - | - |
| 4 | + | + | - | - |
| 7 | - | + | + | - |
| 6 | + | - | + | - |
| 14 | + | - | + | + |
| 15 | - | + | + | + |
| 12 | + | + | - | + |
| 9 | - | - | - | + |
| 11 | - | + | - | + |
| 10 | + | - | - | + |
| 13 | - | - | + | + |
| 16 | + | + | + | + |
| 8 | + | + | + | - |
| 5 | - | - | + | - |
| 2 | + | - | - | - |
| 3 | - | + | - | - |
| Cambios | 12 | 9 | 4 | 2 |
| Sesgo | 0 | 0 | 0 | 0 |

Cheng, Ch. y Jacroux, M. (1988) “The Construction of Trend-Free Run Orders of Two-Level Factorial Designs”

Construyeron un procedimiento para obtener órdenes de experimentación en diseños factoriales a dos niveles que eliminan la influencia debida a factores ajenos a la experimentación en los efectos principales y en algunas de las interacciones dobles, pero sin considerar de forma simultánea el número de cambios que presentan dichos órdenes.

La idea de la construcción de los órdenes de experimentación libres de tendencia, partió de un lema planteado por los autores mediante el cual se puede comprobar que en cualquier diseño factorial completo 2^k , el número de contrastes ortogonales a la tendencia lineal es como máximo de $2^k - k - 1$ [Cheng y Jacroux (1988)]. En otras palabras, que en un diseño factorial se pueden obtener $2^k - k - 1$ columnas de signos que representen a los efectos de interés en los cuales el valor del sesgo es cero.

A partir de esta idea construyeron un algoritmo que permite encontrar órdenes de experimentación en diseños factoriales a dos niveles libres de tendencia lineal en los efectos principales y algunas interacciones dobles. Para concretar esta idea es necesario construir k generadores que representen a los efectos de los k factores de un nuevo diseño factorial 2^k libre de tendencia.

Estos generadores son construidos por medio de la asignación de un efecto principal del nuevo diseño a un producto interno o interacción de las columnas de los efectos principales del diseño factorial 2^k en el orden estándar. La construcción de estas interacciones depende de si el número de factores en el diseño, es par o impar y si se parte de un diseño con 3 o con 4 factores. Esta construcción se puede describir de la siguiente forma:

Partiendo de un diseño con 3 factores:

Si denominamos A_i al efecto principal del factor i de un diseño factorial 2^k , la asignación se realiza de la siguiente forma:

- i. Para $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$, asignar a A_i la interacción de todos los factores del orden estándar excepto el i -ésimo factor.
- ii. Asignar A_k (último efecto del diseño libre de tendencia), la interacción de todos los factores del orden estándar. Una vez obtenidas las k columnas del diseño factorial 2^k se puede encontrar el orden de experimentación asociando las filas en este orden a las filas del diseño factorial en orden estándar.

Partiendo de un diseño con 4 factores:

Si denominamos A_i al efecto principal del factor i , entonces la asignación debe ser realizada de la siguiente forma:

Si el número de factores k es par:

- i. Para $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$, asignar a A_i la interacción de todos los factores excepto el i -ésimo.
- ii. Asignar a A_k la interacción de todos los factores.

Si el número de factores k es impar:

- i. Para $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$, asignar a A_i la interacción de todos los factores excepto el i -ésimo y el último.
- ii. Asignar a A_k la interacción de todos los factores. Una vez obtenidas las k columnas del diseño factorial 2^k se puede encontrar el orden de experimentación asociando las filas de tratamientos a los tratamientos del diseño factorial con el orden estándar.

Ejemplo de cómo funciona el algoritmo. Supongamos que el número de factores es de cuatro ($k = 4$) y deseamos un orden de ejecución de un diseño factorial completo 2^4 . Ahora siguiendo los pasos del algoritmo tendríamos:

Tabla N° 13:

Diseño factorial 2^4 con el orden estándar.

| Orden | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | - | - | - | - |
| 2 | + | - | - | - |
| 3 | - | + | - | - |
| 4 | + | + | - | - |
| 5 | - | - | + | - |
| 6 | + | - | + | - |
| 7 | - | + | + | - |
| 8 | + | + | + | - |
| 9 | - | - | - | + |
| 10 | + | - | - | + |
| 11 | - | + | - | + |
| 12 | + | + | - | + |
| 13 | - | - | + | + |
| 14 | + | - | + | + |
| 15 | - | + | + | + |
| 16 | + | + | + | + |

A partir del orden estándar se deben construir los 4 generadores para este diseño, dado que k es par, debemos hacer la siguiente asignación de interacciones de los efectos a los efectos principales del nuevo diseño libre de tendencia, así:

$$\begin{aligned}
 A_1 &\rightarrow A_2A_3A_4 \\
 A_2 &\rightarrow A_1A_3A_4 \\
 A_3 &\rightarrow A_1A_2A_4 \\
 A_4 &\rightarrow A_1A_2A_3A_4
 \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene el diseño que se presenta en la Tabla N° 14. De la Tabla N° 14, observamos que el sesgo es eliminado en los factores principales, pero el número de cambios total de cambios en el diseño es de 37, siendo 15 el mínimo posible para este diseño. Por tanto, podemos afirmar que este algoritmo es adecuado para la eliminación de la influencia lineal debida a los factores no controlados en los efectos principales y algunas interacciones dobles del diseño, pero inadecuado en relación al número de cambios de nivel de los factores.

Tabla N° 14:

Orden de experimentación de un diseño factorial 2^4 con los factores principales y algunas interacciones dobles libres de sesgo, hallados con el algoritmo de Cheng y Jacroux (1988)

| Orden | $A_2A_3A_4$ | $A_1A_3A_4$ | $A_1A_2A_4$ | $A_1A_2A_3A_4$ |
|---------|-------------|-------------|-------------|----------------|
| 9 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 12 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 14 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 15 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| 10 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 11 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| 13 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Cambios | 5 | 13 | 9 | 10 |
| Sesgo | 0 | 0 | 0 | 0 |

De León, G. (2004) “Análisis y Propuestas Sobre Algunos Aspectos de la Aplicación del Diseño de Experimentos en la Industria”.

Una reciente modificación al trabajo propuesto por Dickinson (1974) fue presentada por de León et al. (2004), la cual consistió en hallar órdenes de experimentación en los diseños factoriales a dos niveles con 8 y 16 experimentos que presentan el mínimo número de cambios de nivel de los factores, utilizando para ello el algoritmo de búsqueda propuesto por Dickinson (1974). Una vez obtenidos dichos órdenes se procedió a evaluar el mínimo sesgo máximo en todos los efectos del diseño y no sólo el de los efectos principales como lo proponía Dickinson (1974), con el fin de que estos órdenes no sólo fueran útiles para la atenuación de la influencia de los factores ajenos a la experimentación en diseños factoriales a dos niveles completos, sino también para diseños fraccionados, de forma similar al trabajo propuesto por Draper y Stoneman (1966), pero restringiendo los órdenes al mínimo número de cambios de nivel de los factores.

El total de órdenes que presentan las características de tener el mínimo número de cambios de nivel y el mínimo sesgo máximo en valor absoluto en todos los efectos, fueron 48 en el diseño con 8 experimentos y 16 en el diseño con 16 experimentos (ver Anexo A). Dos órdenes del diseño 2^4 hallados por de León (2004) coinciden con los órdenes e y f de la Tabla N° 10, hallados por Dickinson (1974), lo que nos permite afirmar que dichos órdenes no solo atenúan la influencia en los efectos principales, sino también en todos los efectos del modelo.

Uno de los aportes de este trabajo fue el reinterpretar el concepto del *Time Count* propuesto por Draper y Stoneman (1968) para medir la influencia de los factores ajenos a la experimentación a través de un concepto más claro para usuarios no expertos, como es el sesgo, y a partir de este concepto determinar la forma en que su influencia podía ser homogenizada entre todos los efectos del modelo y no sólo en los efectos principales.

Dado que los órdenes hallados por de León et al. (2004) son el resultado de una búsqueda exhaustiva, se puede identificar claramente que el mínimo sesgo máximo en todos los efectos del modelo obtenidos en los diseños factoriales con 8 experimentos (diseños factoriales 2^3) es igual a 2, cuando se restringe al mínimo número de cambios de nivel de los factores. De forma similar el mínimo sesgo máximo para los diseños factoriales con 16 experimentos (diseños factoriales 2^4) es igual a 4. Dichos valores permiten atenuar de forma importante la influencia de los factores ajenos a la experimentación cuando se fuerza el mínimo número de cambios de nivel de los factores.

La búsqueda de órdenes con las características de tener el mínimo número de cambios de nivel y el mínimo sesgo máximo en diseños factoriales a dos niveles para un mayor número de experimentos o factores, presenta los mismos inconvenientes descritos en la propuesta de Dickinson (1974), dado que el algoritmo de búsqueda es el mismo y lo que varía es la forma de evaluar el sesgo en los efectos del modelo, por lo cual para continuar con la búsqueda de este tipo de órdenes es necesario construir un nuevo algoritmo que salve dicha restricción.

1.8 MARCO CONCEPTUAL

Diseños factoriales³

Se llaman Diseños Factoriales a aquellos experimentos en los que se estudia simultáneamente dos o más factores, y donde los tratamientos se forman por la combinación de los diferentes niveles de cada uno de los factores. Por ejemplo, si el factor A tiene a niveles y el factor B tiene b niveles, cada réplica contiene todas las ab combinaciones de los tratamientos.

Características generales

En un diseño factorial se investigan simultáneamente los efectos de cierto número de diferentes factores. La necesidad de estudiar conjuntamente varios factores obedece principalmente a dos razones:

- a. Encontrar un modelo que describa el comportamiento general del fenómeno en estudio. Esto se restringe al rango de variación de los niveles de los factores.
- b. Optimizar la respuesta o variable independiente, es decir, encontrar la combinación de niveles de los factores que optimizan esa respuesta.

Los tratamientos en el análisis factorial consisten en todas las combinaciones que se forman de los distintos niveles de los factores. Por ello, la característica esencial que hace necesario el estudio conjunto de factores es la posibilidad de que el efecto de un factor cambie en presencia de los niveles de otro factor, es decir, que los factores interactúen, lo cual conlleva al concepto de interacción entre ellos.

Si se estudia un factor en forma separada el resultado puede ser diferente al que daría con un estudio conjunto, y es más difícil describir el comportamiento general o encontrar el óptimo.

³ Montgomery D. C. (2004) "Diseño y Análisis de Experimentos"

Ventajas de los experimentos factoriales

- i. Al obtener información sobre varios factores sin aumentar el tamaño del experimento hay economía en el material experimental.
- ii. Se amplía la base de la inferencia en relación a un factor ya que se estudia en las diferentes condiciones representadas por los niveles de otros factores.
- iii. Se puede obtener una estimación de la interacción de los efectos, o sea, se determina el grado y la forma en la cual se modifica el efecto de un factor en presencia de los niveles de los otros factores.
- iv. El conjunto de los tratamientos en el diseño factorial es óptimo para estudiar efectos principales e interacciones.

Desventajas de los experimentos factoriales

- i. El gran número de combinaciones de tratamientos cuando se estudian muchos factores a muchos niveles. Esto tiene dos efectos:
 - a) Si se desea usar bloques completos es difícil encontrar grupos de unidades experimentales homogéneos para asignar todos los tratamientos, esto se puede eliminar usando el principio de confusión.
 - b) Se aumenta el costo del experimento al tener muchas unidades experimentales, problema que se minimiza usando experimentos factoriales fraccionados, en este caso, se prueba solo una parte de los tratamientos posibles.
- ii. Dificil interpretación principalmente de las interacciones de orden superior (interacciones de más de tres efectos).

Factores

Las variables independientes relacionadas con una variable de respuesta Y se denominan factores. Los factores se acostumbran a denotar con letras mayúsculas: A, B, C, etc. Ejemplo:

Tipos de riego, dosis de fertilización, variedades de cultivo, manejo de crianzas, etc.

Nivel

Es el grado de intensidad de un factor. Los niveles de un factor son los tipos o grados específicos del factor que se tendrán en cuenta en la realización del experimento. Según sean elegidos por el experimentador o elegidos al azar de una amplia población se denominan factores de efectos fijos o factores de efectos aleatorios.

Factor cualitativo

Son aquellos factores cuyos niveles toman valores discretos o de tipo nominal que no pueden ser fracciones. Ejemplo:

Factor A: Variedades de cultivo.

Niveles: Variedad 1, Variedad 2.

Factor cuantitativo

Son aquellos factores cuyos niveles de prueba pueden tomar cualquier nivel de cierto intervalo, es decir son cantidades numéricas. La escala es continua. Ejemplo:

Factor A: Dosis de fertilización

Niveles: 10 Kg/Ha (a0), 20Kg/Ha (a1), 30Kg/Ha (a2).

Factores controlables

Son variables del proceso que se pueden fijar en un punto o nivel de operación. Algunos de estos son los que usualmente se controlan durante la operación normal del proceso, y se distinguen porque para cada uno de ellos existe la manera o el mecanismo para cambiar o manipular su nivel de operación. A los factores controlables también se les llama variables de entrada, condiciones de proceso, variables de diseño, parámetros del proceso o simplemente factores.

Factores no controlables

Son variables que no se pueden controlar durante la operación normal del proceso como la luz, temperatura que se investigan en el experimento para observar cómo afectan o influyen en la variable de respuesta.

Tratamiento

Es una combinación específica de niveles de los factores que intervienen en un experimento. Son, por tanto, las condiciones experimentales que se desean comparar en el experimento. En un diseño con un único factor son los distintos niveles del factor y en un diseño con varios factores son las distintas combinaciones de niveles de los factores. Los tratamientos se denotan de varias formas:

- a. Con letras y números, ejemplo: $a_1b_2c_3$; $a_1b_0c_1, \dots$, obteniendo:

$$a_1b_2c_3 = T1$$

$$a_1b_0c_1 = T2$$

- b. Únicamente con los números y el orden se indica el factor. Así los tratamientos anteriores son:

$$123 = T1, 101 = T2, \text{ etc.}$$

Efecto de un factor

El efecto de un factor se define como el cambio observado en la variable de respuesta debido a un cambio del nivel de tal factor.

Efecto principal

Los efectos principales son los cambios en la media de la variable de respuesta debidos a la acción individual de cada factor, es decir, es igual a la respuesta promedio observada en el nivel alto de un factor menos la respuesta promedio en el nivel bajo. Se le llama efecto principal porque se refiere a los factores de interés primario en el experimento.

Efecto de interacción

Es el efecto recíproco entre 2 o más factores, o la modificación de efecto de un factor por la acción de otro u otros. El estudio de la interacción entre los factores es una de las características importantes en los experimentos factoriales.

La posibilidad de estudios en forma conjunta de dos o más factores con sus correspondientes niveles, hace a los factoriales muy útiles para investigaciones exploratorias y como un paso previo para concentrar posteriormente la atención en los aspectos que puedan ser de mayor interés, de acuerdo a las conclusiones generales que proporcionan estos experimentos.

Variable de respuesta

Es la variable que se desea estudiar y controlar su variabilidad. Es la variable objetivo, que se pretende optimizar, y que depende potencialmente de los factores. La respuesta es lo que se mide como resultado de la experimentación, no es controlada por el experimentador. Es una variable medida en escala numérica.

Experimento

Un estudio en el que el investigador tiene un alto grado de control sobre las fuentes de variación importantes, se denomina experimento. Si se tiene poco control sobre los factores, se habla de un estudio observacional.

Unidad experimental

Unidad a la cual se le aplica un solo tratamiento (que puede ser una combinación de muchos factores) en una reproducción del experimento. Es decir son el material donde se evalúa la variable respuesta y al que se le aplican los distintos niveles de los factores tratamiento, son los objetos, individuos, intervalos de espacio o tiempo sobre los que se experimenta.

En cada diseño de experimentos es importante definir cuidadosamente la unidad experimental, ya que esta puede ser una pieza o conjunto de piezas producidas, dependiendo del proceso que se estudia. Ejemplo:

- En informática, ordenadores, páginas web, buscadores de internet,
- En agricultura, parcelas de tierra,
- En medicina, individuos humanos u animales,
- En industria, lotes de material, trabajadores, máquinas.

Arreglo factorial⁴

Un experimento factorial o arreglo factorial es el conjunto de puntos experimentales o tratamientos que pueden formarse al considerar todas las posibilidades de combinaciones de los niveles de los factores.

Ortogonalidad de factores

Dos factores F_I y F_J con I y J niveles, respectivamente, son ortogonales si en cada nivel I de F_I el número de observaciones de los J niveles de F_J están en las mismas proporciones. Esta propiedad permite separar los efectos simples de los factores en estudio.

Factor de efectos fijos

Es un factor en el que los niveles han sido seleccionados por el experimentador. Es apropiado cuando el interés se centra en comparar el efecto sobre la respuesta de esos niveles específicos. Ejemplo: un empresario está interesado en comparar el rendimiento de tres máquinas del mismo tipo que tiene en su empresa.

⁴ Kuehl, R. (2001) "Diseño de Experimentos"

Factor de efectos aleatorios

Es un factor del que sólo se incluyen en el experimento una muestra aleatoria simple de todos los posibles niveles del mismo. Evidentemente se utilizan estos factores cuando tienen un número muy grande de niveles y no es razonable o posible trabajar con todos ellos. En este caso se está interesado en examinar la variabilidad de la respuesta debida a la población entera de niveles del factor. Ejemplo: una cadena de hipermercados que tiene en plantilla 300 trabajadores de caja está interesada en estudiar la influencia del factor trabajador en la variable tiempo en el cobro a un cliente.

Observación experimental

Es cada medición de la variable respuesta.

Error aleatorio

Es la variabilidad observada que no se puede explicar por los factores estudiados; y resulta del pequeño efecto de los factores no estudiados y del error experimental.

Error experimental

El error experimental describe la variación entre las unidades experimentales tratadas de manera idéntica e independiente. Los distintos orígenes del error experimental son:

- 1) La variación natural entre unidades experimentales.
- 2) La variabilidad en la medición de la respuesta.
- 3) La imposibilidad de reproducir las condiciones del tratamiento con exactitud de una unidad a otra.
- 4) La interacción de los tratamientos con las unidades experimentales.
- 5) Cualquier otro factor externo que influya en las características medidas.

Corrida Experimental

Cada una de las fases en que se lleva a cabo el experimento. Cada corrida experimental corresponde a una realización del experimento, bajo una determinada combinación de tratamientos, y produce una observación.

Réplicas

Todas las corridas experimentales que corresponden a una misma combinación de tratamientos. Son repeticiones del experimento, bajo idénticas condiciones de los factores. Tienen un doble objetivo: Lograr mayor precisión en la estimación de los efectos de los factores y de sus interacciones, y estimar el error experimental.

Aleatorización

Consiste en hacer corridas experimentales en orden aleatorio; este principio aumenta la posibilidad de que la independencia del error se cumpla. “Aleatorizar todos los factores no controlados por el experimentador en el diseño experimental y que pueden influir en los resultados serán asignados al azar a las unidades experimentales”.

Ventajas de aleatorizar los factores no controlados:

- Transforma la variabilidad sistemática no planificada en variabilidad no planificada o ruido aleatorio. Dicho de otra forma, aleatorizar previene contra la introducción de sesgos en el experimento.
- Evita la dependencia entre observaciones al aleatorizar los instantes de recogida muestral.
- Valida muchos de los procedimientos estadísticos más comunes.

Time Count⁵

Es el resultado del producto interno de la columna de respuesta (1, 2, 3,..., N) y un efecto deseado, denominado con el nombre de Contador de Tiempo o medida de la Influencia Lineal de los factores ajenos a la experimentación.

Sesgo⁶

Mide la influencia de los factores desconocidos sobre la respuesta y que en realidad se puede considerar como sesgos introducidos en la estimación de los efectos.

Órdenes Semilla

Son órdenes que a partir de cada uno de estos órdenes se pueden obtener órdenes adicionales que presentan las mismas características en cuanto a sesgo y número de cambios.

⁵ Draper, N. y Stoneman, D. (1968) "Factor Changes and Linear Trends in Eight-Run Two-Level Factorial Designs".

⁶ De León, G. (2004) "Análisis y Propuestas Sobre Algunos Aspectos de la Aplicación del Diseño de Experimentos en la Industria"

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 DISEÑOS FACTORIALES 2^k ⁷

2.1.1 Introducción

En el área industrial, la experimentación requiere frecuentemente conocer el efecto sobre una variable respuesta de un número grande de factores. En estos casos, el Diseño Factorial puede necesitar un tamaño tan grande de réplicas que lo haga irrealizable. Por ejemplo, un Diseño con seis factores cada uno con cinco niveles, en el cual se deben realizar $5^6=3125$ réplicas, para reducir el número de réplicas se requiere o bien eliminar factores, o bien disminuir los niveles a los que se aplican; es decir que el estudio de los Diseños Factoriales se complican cuando existe un número considerable de factores y un número bastante grande de niveles de cada factor.

Sin embargo, los Diseños Factoriales son ampliamente utilizados en Experimentos para estudiar el efecto conjunto de éstos sobre la variable respuesta. Aunque el tamaño del Diseño resultante sea aceptable, si sólo uno o dos factores influyen sobre la variable respuesta, la mayoría de los datos medirán únicamente el error experimental, por lo que el Diseño será poco eficiente. Si se tiene un Diseño de cinco factores con cuatro niveles en donde tres factores no influyen significativamente sobre la variable respuesta; es

⁷ Montgomery D. C. (2004) "Diseño y Análisis de Experimentos"

decir, son inertes, proporcionan casi el mismo resultado si se hiciera el estudio de un Diseño Factorial, para los dos factores que influyen sobre la variable respuesta (activos).

Para minimizar el riesgo de realizar Experimentos con factores inertes, se debe utilizar una estrategia secuencial; donde los factores a considerar en el Experimento en cada etapa se eligen en función de los resultados de las etapas anteriores. La ventaja principal de los Diseños Factoriales, es la posibilidad de determinar si los factores actúan de manera independiente o interaccionan entre ellos para afectar las unidades experimentales.

Existen varios casos especiales del Diseño Factorial general que resultan importantes en la práctica y se usan ampliamente en los estudios de investigación; y además constituyen la base para otros diseños de gran valor práctico.

El caso especial más importante de estos ocurre cuando se tienen k factores, fijándoles el número de niveles en dos. Estos niveles pueden ser cuantitativos como por ejemplo, dos valores de Temperatura, dos de presión o dos de tiempo, etc.; también pueden ser cualitativos como dos máquinas, dos operadores, etc. Estos dos niveles podrían ser considerados como "superior" e "inferior", "alto" o "bajo", "ausencia" o "presencia" del factor.

Por lo tanto, en un Experimento en el que intervienen k factores y cada factor contiene dos niveles se conoce con el nombre de Experimento Factorial 2^k .

En una réplica completa de tal Diseño se necesita que se recopilen $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^k$ observaciones.

Cuando es probable que haya muchos factores por investigar, son útiles los Diseños 2^k en las primeras fases del trabajo experimental; ya que se hace menor número de corridas con los cuales pueden estudiarse k factores en un Diseño Factorial Completo, debido a que sólo hay dos niveles para cada factor.

A continuación se presentan métodos especiales para el análisis de los tipos de Diseños

Factoriales 2^2 , 2^3 y una generalización de estos (2^k), suponiendo que los Factores son Fijos, los Diseños son Completamente Aleatorizados, y que satisfacen la suposición usual de normalidad.

2.1.2 Diseño factorial 2^2

Este Diseño Factorial es el primero de la serie 2^k , en el cual sólo existen dos factores en estudio, los cuales pueden ser A y B, cada uno con dos niveles; que se suelen considerar como "alto" y "bajo". El nivel alto del Factor A y Factor B se denota por el signo más "+" y el nivel bajo con el signo menos "-".

En este Diseño habrán cuatro combinaciones de tratamiento que son: bajoA–bajoB, altoA-bajoB, bajoA-altoB y altoA-altoB. En general una combinación de tratamiento se representa por una serie de letras minúsculas, de la siguiente forma:

a : alto A - bajo B

b : bajo A - alto B

ab : alto A - alto B

(1) : bajo A - bajo B

Las cuales verbalmente significan:

a : Representa la combinación de tratamiento, en la que el factor A se encuentra en el nivel alto y el factor B en el nivel bajo.

b : Representa la combinación de tratamiento, en la que el factor A se encuentra en el nivel bajo y el factor B en el nivel alto.

ab : Representa la combinación de tratamiento, en la que el factor A se encuentra en el nivel alto y el factor B en el nivel alto.

(1): Representa la combinación de tratamiento, en la que ambos factores (A y B) se encuentra en el nivel bajo.

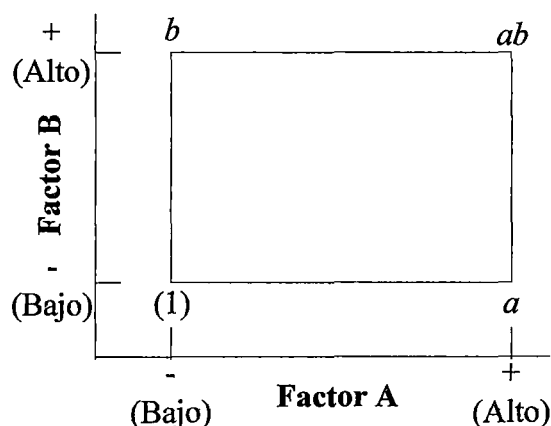
Por lo tanto, el nivel "alto" de cualquier factor de una combinación de tratamiento está representado por la presencia de la letra minúscula correspondiente; mientras que la

ausencia de está representa el nivel "bajo" del factor. Por ejemplo, si hay cuatro factores (A, B, C y D) la combinación de tratamiento cd , correspondería a los niveles altos de los factores C y D, bajos de los factores A y B.

Las letras minúsculas (1), a , b y ab también se usaran para representar los totales de las n réplicas de las combinaciones de tratamientos correspondientes. Las combinaciones de tratamiento se representan geoméricamente de la siguiente forma:

Figura N° 1:

Experimento Factorial de dos factores con la respuesta (Y) indicada en los vértices.



El uso de las palabras alto y bajo, es arbitrario y no tiene un significado particular en el análisis. Tratándose de un factor cuantitativo, un nivel tendrá un valor más alto y el otro un valor más bajo; coincidiendo con la simbología adoptada, pero si se trata de un factor cualitativo no habrá esta ordenación entre los niveles de los factores, y podría señalarse arbitrariamente a uno como "alto" y al otro como "bajo".

Las letras mayúsculas A, B y AB se utilizaran para denotar el efecto de un factor; por lo tanto:

"A" : Se refiere al efecto del factor A.

"B" : Se refiere al efecto del factor B.

"AB" : Se refiere al efecto de la interacción del factor A y el factor B.

2.1.2.1 Representación simbólica de los datos

Como en los Diseños Factoriales 2^2 , el número de factores son dos con dos niveles cada uno y en cada nivel existen "n" réplicas del Experimento; entonces la representación de los datos observados para este tipo de Diseño Factorial será de la siguiente forma:

Tabla N° 15:

Representación de los datos observados en un Diseño factorial 2^2

| Factor A | Factor B | |
|----------|------------------------------------|------------------------------------|
| | 1 | 2 |
| 1 | $Y_{111}, Y_{112}, \dots, Y_{11n}$ | $Y_{121}, Y_{122}, \dots, Y_{12n}$ |
| 2 | $Y_{211}, Y_{212}, \dots, Y_{21n}$ | $Y_{221}, Y_{222}, \dots, Y_{22n}$ |

Como puede observarse esta tabla es sólo una parte de la Tabla de la Representación Simbólica de un Diseño de dos factores con "a" niveles del factor A y "b" del factor B con "n" réplicas en cada nivel. El número total de observaciones en el Experimento es de $N = 2 \times 2 \times n = 4n$; ya que se realizan "n" réplicas.

El modelo estadístico para el diseño factorial 2^2 es:

$$y_{ijm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijm}$$

$i=1,2$ $j=1,2$ $m=1,2,\dots, n$

Donde:

y_{ijm} : Es la respuesta de la unidad experimental m sujeta a la combinación de niveles "i" de A y "j" de B.

μ : Es la media general.

α_i : Es el efecto debido al i -ésimo nivel del factor A.

β_j : Es el efecto debido al j -ésimo nivel del factor B.

$(\alpha\beta)_{ij}$: Representa al efecto de interacción en la combinación ij .

ε_{ijm} : Es el error aleatorio que tiene distribución normal con media cero y varianza σ^2 , además las observaciones son independientes entre sí.

2.1.2.2 Estimación de los efectos de los factores

En general, el efecto de un factor vendrá dado por el promedio del efecto del mismo factor en los niveles bajo y alto del otro factor, siendo “ n ” el número de réplicas. Para encontrar los efectos de los factores y de la interacción, existen dos métodos en los cuales se utiliza la representación geométrica, los cuales se explicaran a continuación:

Primer Método

Efecto promedio del factor A

De la representación geométrica de las combinaciones de tratamientos; tomando de derecha a izquierda se observa que:

El efecto del Factor A en el nivel bajo del Factor B es: $\frac{(a-(1))}{n}$

El efecto del Factor A en el nivel alto del Factor B es: $\frac{(ab-b)}{n}$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{(a-(1))}{n} + \frac{(ab-b)}{n} \right]$$

$$A = \frac{1}{2n} (a-(1) + ab-b)$$

$$A = \frac{1}{2n} (ab+a-b-(1))$$

Efecto promedio del factor B

De la representación geométrica de las combinaciones de tratamientos; tomando de arriba hacia abajo se observa que:

El efecto del Factor B en el nivel bajo del Factor A es: $\frac{(b-(1))}{n}$

El efecto del Factor B en el nivel alto del Factor A es: $\frac{(ab-a)}{n}$

Por lo tanto:

$$B = \frac{1}{2} \left[\frac{(b-1)}{n} + \frac{(ab-a)}{n} \right]$$

$$B = \frac{1}{2n} (b-1) + \frac{ab-a}{2n}$$

$$B = \frac{1}{2n} (ab+b-a-1)$$

Efecto promedio de la interacción AB

Se define como la diferencia promedio entre el efecto del factor A en el nivel alto del Factor B, que es $\left[\frac{(ab-b)}{n} \right]$; y su efecto promedio en el nivel bajo del Factor B, que es

$$\left[\frac{(a-1)}{n} \right].$$

Por lo tanto:

$$AB = \frac{1}{2} \left[\frac{(ab-b)}{n} - \frac{(a-1)}{n} \right]$$

$$AB = \frac{1}{2n} (ab-b-a+1)$$

$$AB = \frac{1}{2n} (ab+1-a-b)$$

También se puede definir como la diferencia promedio entre el efecto del Factor B en el nivel alto del Factor A, que es $\left[\frac{(ab-a)}{n} \right]$; y el efecto promedio del Factor B en el nivel

bajo del Factor A, que es $\left[\frac{(b-1)}{n} \right]$.

Por lo tanto:

$$AB = \frac{1}{2} \left[\frac{(ab-a)}{n} - \frac{(b-1)}{n} \right]$$

$$AB = \frac{1}{2n} (ab-a-b+1)$$

$$AB = \frac{1}{2n} (ab+1-a-b)$$

Segundo Método

Sea:

\bar{Y}_{F+} : La respuesta promedio para las combinaciones de tratamientos a las que el factor (F) se encuentra en el nivel alto.

\bar{Y}_{F-} : La respuesta promedio para las combinaciones de tratamientos a las que el factor (F) se encuentra en el nivel bajo.

Por lo tanto, el efecto del factor será la diferencia en la respuesta promedio de \bar{Y}_{F+} y \bar{Y}_{F-} .

Efecto promedio del factor A.

\bar{Y}_{A+} : Respuesta promedio para las combinaciones de tratamiento a las que el factor A se encuentra en el nivel alto.

$$\bar{Y}_{A+} = \frac{(ab + a)}{n}$$

\bar{Y}_{A-} : Respuesta promedio para las combinaciones de tratamiento a las que el factor A se encuentra en el nivel bajo.

$$\bar{Y}_{A-} = \frac{(b + (1))}{n}$$

Encontrando el efecto promedio se tiene:

$$A = \bar{Y}_{A+} - \bar{Y}_{A-}$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{(ab + a)}{n} - \frac{(b + (1))}{n} \right]$$

$$A = \frac{1}{2n} [ab + a - b - (1)]$$

Efecto promedio del factor B.

\bar{Y}_{B+} : Respuesta promedio para las combinaciones de tratamiento a las que el factor B se encuentra en el nivel alto.

$$\bar{Y}_{B+} = \frac{(ab + b)}{n}$$

\bar{Y}_{B-} : Respuesta promedio para las combinaciones de tratamiento a las que el factor B se encuentra en el nivel bajo.

$$\bar{Y}_{B-} = \frac{(a+(1))}{n}$$

Encontrando el efecto promedio se tiene:

$$B = \bar{Y}_{B+} - \bar{Y}_{B-}$$

$$B = \frac{1}{2} \left[\frac{(ab+b)}{n} - \frac{(a-(1))}{n} \right]$$

$$B = \frac{1}{2n} [ab + b - a - (1)]$$

Efecto promedio de la interacción AB.

Se define como la diferencia del promedio de las combinaciones de tratamientos en la

diagonal de derecha a izquierda: $\left[\frac{ab+(1)}{n} \right]$ y el promedio de las combinaciones de

tratamientos en la diagonal de izquierda a derecha: $\left[\frac{b+a}{n} \right]$

Por lo tanto:

$$AB = \frac{1}{2} \left[\frac{(ab+(1))}{n} - \frac{(b+a)}{n} \right]$$

$$AB = \frac{1}{2n} [ab + (1) - a - b]$$

El efecto principal de un factor es el efecto promedio que se produce a consecuencia de cambiarlo del nivel bajo al nivel alto de ese factor. La interacción entre dos factores se da cuando el efecto de uno de ellos es diferente para los niveles alto y bajo del otro factor.

2.1.2.3 Análisis de varianza

El Análisis de Varianza en los Diseños 2^k puede utilizarse para examinar la magnitud y la dirección de los efectos de los factores, para determinar cuáles variables

es probable que sean importantes. A continuación, se presenta un método rápido para llevar a cabo los cálculos del Análisis de Varianza.

Si se observa, en los efectos encontrados para A, B y AB anteriormente están involucrados o inmersos sus respectivos contrastes, que son los que se encuentran entre paréntesis en dichos efectos, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla N° 16:

Efecto y contraste en un Diseño factorial 2^2

| Factor | Efecto | Contraste |
|--------|--|--------------------------|
| A | $\frac{1}{2n}[ab + a - b - (1)]$ | $ab + a - b - (1)$ |
| B | $\frac{1}{2n}[ab + b - a - (\bar{1})]$ | $ab + b - a - (\bar{1})$ |
| C | $\frac{1}{2n}[\bar{a}b + (1) - \bar{a} - b]$ | $ab + (1) - \bar{a} - b$ |

Por lo tanto, de la tabla anterior se tiene que:

$$\text{Contraste}_A = ab + a - b - (1)$$

$$\text{Contraste}_B = ab + b - a - (\bar{1})$$

$$\text{Contraste}_{AB} = ab + (1) - \bar{a} - b$$

A estos contrastes se suelen denominar efecto total de A, B y AB respectivamente. Estos tres contrastes son ortogonales. La suma de cuadrados para cada uno puede calcularse como el contraste elevado al cuadrado, entre el producto del número de observaciones de cada total del contraste y la suma de los cuadrados de los coeficientes del mismo. Es decir que

$$SS_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^a c_i y_i \right)^2}{n \sum_{i=1}^a c_i^2}$$

Por lo tanto, las sumas de cuadrados de los efectos principales y la interacción puede obtenerse por el contraste respectivo elevado al cuadrado entre el número total de observaciones; tal como:

$$SS = \frac{(\text{contraste})^2}{4n}$$

Entonces la suma de cuadrados de A, B y AB es:

$$SS_A = \frac{[ab + a - b - (1)]^2}{4n}$$

$$SS_B = \frac{[ab + b - a - (1)]^2}{4n}$$

$$SS_{AB} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n}$$

La suma total de cuadrados y la suma total de cuadrados del error se obtienen de forma usual.

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}^2 - \frac{y^2}{4n}$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

Donde

SS_T : Tiene $4n-1$ grados de libertad; ya que un total de $N=4n$

SS_E : Tiene $4(n-1)$ grados de libertad; porque cada uno de los efectos principales y doble tiene un grado de libertad.

Tabla N° 17:

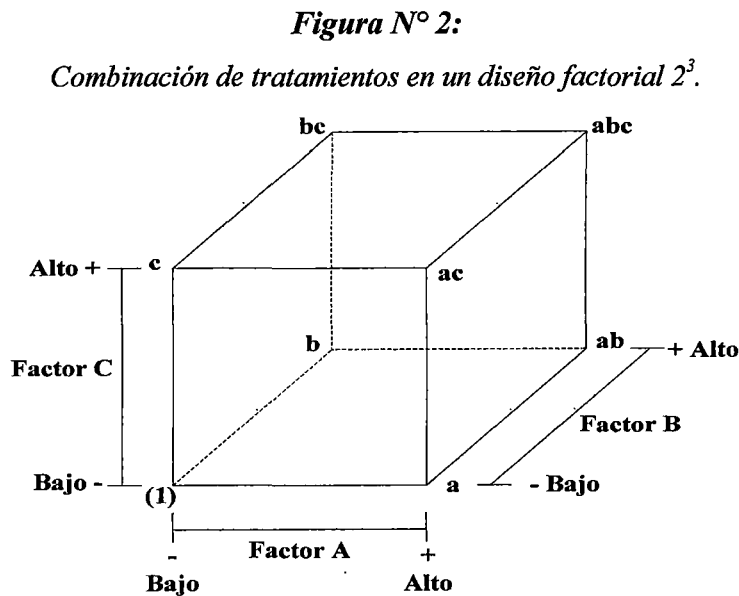
ANOVA para el Diseño factorial 2^2

| Fuentes de Variabilidad | Suma de Cuadrados | Grados de Libertad | Cuadrados Medios | F Calculado |
|-------------------------|-------------------|--------------------|------------------|-------------|
| A | SCA | 1 | CMA | CMA/CME |
| B | SCB | 1 | CMB | CMB/CME |
| AB | SCAB | 1 | CMAB | CMAB/CME |
| Error | SCE | $4(n-1)$ | CME | |
| Total | SCT | $4n-1$ | CMT | |

2.1.3 Diseño factorial 2^3

Si en un Experimento se estudian tres factores A, B y C, cada uno con dos niveles. Este Diseño se conoce como Diseño Factorial 2^3 . Para el estudio de este Diseño Factorial se retomará la notación definida en el Diseños Factorial 2^2 , que fue planteada anteriormente.

En este Diseño habrán ocho combinaciones de tratamiento ($2^3 = 8$) que son (1), a, b, c, ab, ac, bc, abc, las cuales se pueden representar geoméricamente mediante un cubo de la siguiente manera:



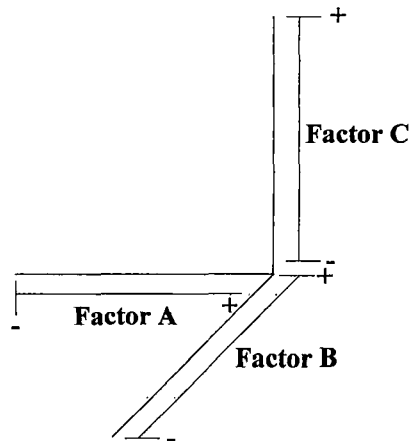
Estas combinaciones de tratamientos representan los niveles a los que se encuentran dichos factores y significan:

- (1) : El factor A, B y C se encuentra en el nivel bajo
- a : alto A - bajo B - bajo C
- b : bajo A - alto B - bajo C
- c : bajo A - bajo B - alto C
- ab : alto A - alto B - bajo C
- ac : alto A - bajo B - alto C
- bc : bajo A - alto B - alto C
- abc : alto A - alto B - alto C

Las representaciones anteriores pueden ser fácilmente observadas trasladando los ejes de los niveles de cada factor a cada uno de los vértices que representa cada combinación de tratamientos. Por ejemplo, para encontrar la combinación de tratamientos *ab*, geoméricamente los ejes se trasladan de la siguiente manera:

Figura N° 3:

*Combinación de tratamientos *ab* en un diseño factorial 2^3 .*



Ya que *ab* representa que el factor A está en nivel alto, el factor B en nivel alto y el factor C en nivel bajo. Entre estas ocho combinaciones de tratamiento existen siete grados de libertad; de los cuales tres se asocian con los efectos principales (A, B y C); y los otros cuatro se asocian con las interacciones (AB, AC, BC y ABC), cada una con un grado de libertad.

2.1.3.1 Representación simbólica de los datos

Ya que en los Diseños Factoriales 2^3 , el número de factores son Tres (A, B y C) con dos niveles cada uno y en cada nivel existen "*n*" réplicas del Experimento; entonces la representación de los datos observados para este tipo de Diseño Factorial será de la siguiente forma:

Tabla N° 18:

Representación de los datos observados en un Diseño factorial 2^3

| Factor A | Factor B | | | |
|----------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| | 1 | | 2 | |
| | Factor C | | Factor C | |
| | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | $Y_{1111}, Y_{1112}, \dots, Y_{111n}$ | $Y_{1121}, Y_{1122}, \dots, Y_{112n}$ | $Y_{1211}, Y_{1212}, \dots, Y_{121n}$ | $Y_{1221}, Y_{1222}, \dots, Y_{122n}$ |
| 2 | $Y_{2111}, Y_{2112}, \dots, Y_{211n}$ | $Y_{2121}, Y_{2122}, \dots, Y_{212n}$ | $Y_{2211}, Y_{2212}, \dots, Y_{221n}$ | $Y_{2221}, Y_{2222}, \dots, Y_{222n}$ |

Como puede observarse esta tabla es sólo una parte de la tabla de la representación simbólica de un Diseño de Tres factores con "a" niveles del factor A, "b" del factor B y "c" niveles del factor C; con "n" réplicas cada nivel. Cualquier observación de tabla se interpreta de la misma forma que el Diseño de Tres Factores. El número total de observaciones en el Experimento es $N = 2 \times 2 \times 2 \times n = 8n$; ya que se realizaron n réplicas.

El modelo estadístico para el diseño factorial 2^3 es:

$$y_{ijkm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkm}$$

$$i=1,2 \quad j=1,2 \quad k=1,2, \quad m=1,2,\dots, n$$

Donde:

y_{ijm} : Es la respuesta de la unidad experimental m sujeta a la combinación de niveles "i" de A, "j" de B y "k" de C.

μ : Es la media general.

α_i : Es el efecto debido al i -ésimo nivel del factor A.

β_j : Es el efecto debido al j -ésimo nivel del factor B.

γ_k : Es el efecto debido al k -ésimo nivel del factor C.

$(\alpha\beta)_{ij}, (\alpha\gamma)_{ik}, (\beta\gamma)_{jk}$: Representan efectos de interacción dobles (de dos factores) en la combinación "ij", "ik" y "jk" respectivamente.

$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$: Es el efecto de interacción triple en la combinación "ijk".

ε_{ijm} : Es el error aleatorio en la combinación ijk de la l -ésima observación. que tiene distribución normal con media cero y varianza σ^2 , además las observaciones son independientes entre sí.

2.1.3.2 Estimación de los efectos de los factores

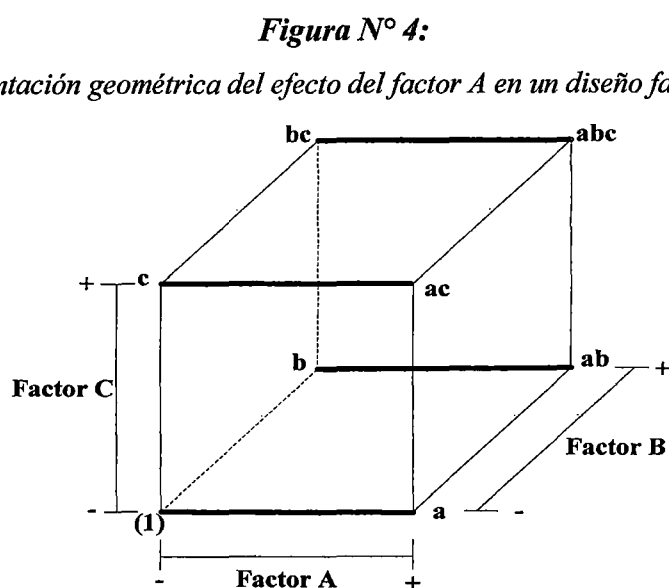
La estimación de los efectos principales y las interacciones; igual que el Diseño 2^2 se puede calcular por medio de dos métodos, observando la representación geométrica.

Primer Método

Efecto del Factor A

El efecto promedio del factor A vendrá dado como el promedio de la suma de los efectos del factor A de las diferentes combinaciones de los niveles de los factores B y C.

La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor A a las diferentes combinaciones de los niveles alto y bajo de los factores B y C; tomando las combinaciones de derecha a izquierda. Es decir, los vértices de los segmentos gruesos del cubo siguiente:



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 19:

Efecto del factor A en un Diseño factorial 2^3

| Factor B | Factor C | Efecto del factor A |
|-----------------|-----------------|----------------------------|
| Nivel bajo | Nivel bajo | $\frac{(a-1)}{n}$ |
| Nivel alto | Nivel bajo | $\frac{(ab-b)}{n}$ |
| Nivel bajo | Nivel alto | $\frac{(ac-c)}{n}$ |
| Nivel alto | Nivel alto | $\frac{(abc-bc)}{n}$ |

El efecto promedio del factor A es:

$$A = \frac{1}{4} \left[\frac{(a-1)}{n} + \frac{(ab-b)}{n} + \frac{(ac-c)}{n} + \frac{(abc-bc)}{n} \right]$$

$$A = \frac{1}{4n} [a-1 + ab-b + ac-c + abc-bc]$$

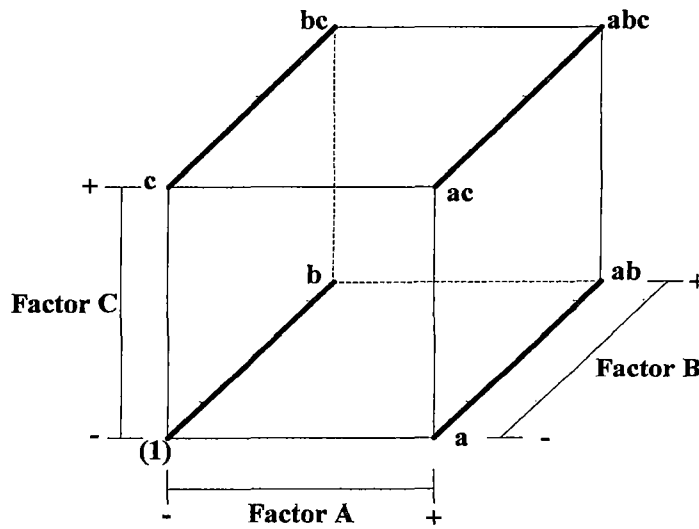
Efecto del Factor B

El efecto promedio del factor B vendrá dado como el promedio de la suma de los efectos del factor B de las diferentes combinaciones de los niveles de los factores A y C.

La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor B a las diferentes combinaciones de los niveles alto y bajo de los factores A y C; tomando las combinaciones de tratamientos en diagonal del fondo hacia adelante. Es decir, los vértices del los segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 5:

Representación geométrica del efecto del factor B en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 20:

Efecto del factor B en un Diseño factorial 2^3

| Factor A | Factor C | Efecto del factor B |
|------------|------------|----------------------|
| Nivel bajo | Nivel bajo | $\frac{(b-(1))}{n}$ |
| Nivel alto | Nivel bajo | $\frac{(ab-a)}{n}$ |
| Nivel bajo | Nivel alto | $\frac{(bc-c)}{n}$ |
| Nivel alto | Nivel alto | $\frac{(abc-ac)}{n}$ |

El efecto promedio del factor B es:

$$B = \frac{1}{4} \left[\frac{(b-(1))}{n} + \frac{(ab-a)}{n} + \frac{(bc-c)}{n} + \frac{(abc-ac)}{n} \right]$$

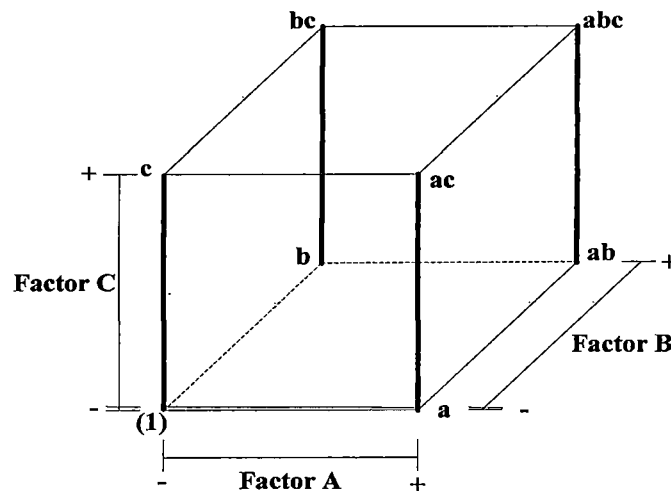
$$B = \frac{1}{4n} [b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac]$$

Efecto del Factor C

El efecto promedio del factor C vendrá dado como el promedio de la suma de los efectos del factor C de las diferentes combinaciones de los niveles de los factores A y B. La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor C a las diferentes combinaciones de los niveles alto y bajo de los factores A y B; tomando las combinaciones de tratamiento de arriba hacia abajo. Es decir, los vértices del los segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 6:

Representación geométrica del efecto del factor C en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 21:

Efecto del factor C en un Diseño factorial 2^3

| Factor A | Factor B | Efecto del factor C |
|------------|------------|------------------------|
| Nivel bajo | Nivel bajo | $\frac{(c - (1))}{n}$ |
| Nivel alto | Nivel bajo | $\frac{(ac - a)}{n}$ |
| Nivel bajo | Nivel alto | $\frac{(bc - b)}{n}$ |
| Nivel alto | Nivel alto | $\frac{(abc - ab)}{n}$ |

El efecto promedio del factor C es:

$$C = \frac{1}{4} \left[\frac{(c-1)}{n} + \frac{(ac-a)}{n} + \frac{(bc-b)}{n} + \frac{(abc-ab)}{n} \right]$$

$$C \equiv \frac{1}{4n} [c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab]$$

Efectos de las Interacciones Dobles

Efecto de AB

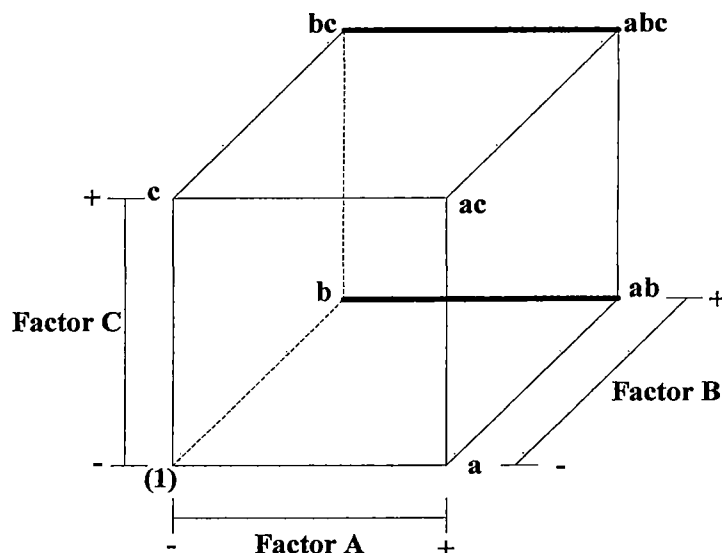
El efecto promedio de la interacción AB vendrá dada como la diferencia del promedio de la suma de los efectos del factor A, a las diferentes combinaciones de los niveles del factor B, cuando el factor C se encuentra en los niveles alto y bajo. Como se muestra a continuación.

El factor B a nivel alto

La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor A al nivel alto de B, y luego observando los vértices para los niveles alto y bajo del factor C; tomando las combinaciones de tratamiento de derecha a izquierda. Es decir, los vértices del de los dos segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 7:

Representación geométrica de la interacción AB en el nivel alto del factor B en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 22:

Efecto del factor A para el nivel alto del factor B en un Diseño factorial 2^3

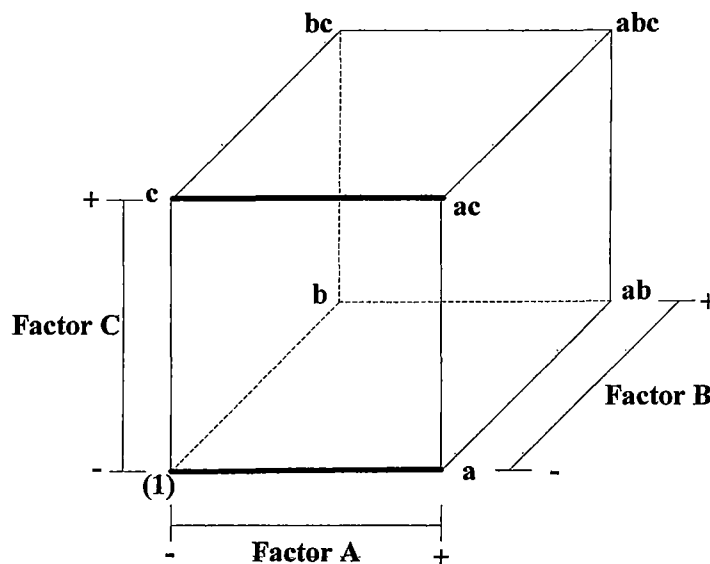
| Efecto de A para el nivel alto del factor B | |
|---|-------------------------|
| Nivel alto del factor C | Nivel bajo del factor C |
| $\frac{(abc - bc)}{n}$ | $\frac{(ab - b)}{n}$ |

El factor B a nivel bajo

La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor A al nivel bajo de B, y luego observando los vértices para los niveles alto y bajo del factor C; tomando las combinaciones de tratamiento de derecha a izquierda. Es decir, los vértices de los dos segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 8:

Representación geométrica de la interacción AB en el nivel bajo del factor B en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 23:

Efecto del factor A para el nivel bajo del factor B en un Diseño factorial 2^3

| Efecto de A para el nivel bajo del factor B | |
|--|-------------------------|
| Nivel alto del factor C | Nivel bajo del factor C |
| $\frac{(ac-c)}{n}$ | $\frac{(a-(1))}{n}$ |

Por lo tanto, el efecto promedio de AB es:

$$AB = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(abc-bc)}{n} + \frac{(ab-b)}{n} - \left[\frac{(ac-c)}{n} + \frac{(a-(1))}{n} \right] \right\}$$

$$AB = \frac{1}{4n} [(1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc]$$

Efecto de AC

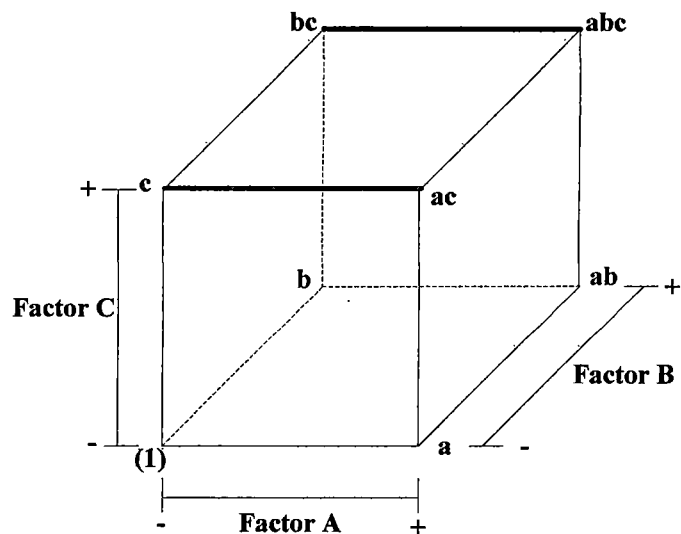
El efecto promedio de la interacción AC vendrá dada como la diferencia del promedio de la suma de los efectos del factor A, a las diferentes combinaciones de los niveles del factor C, cuando el factor B se encuentra en los niveles alto y bajo. Como se muestra a continuación.

El factor C a nivel alto

La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor A al nivel alto de C, y luego observando los vértices para los niveles alto y bajo del factor B; tomando las combinaciones de tratamiento de derecha a izquierda. Es decir, los vértices de los dos segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 9:

Representación geométrica de la interacción AC en el nivel alto del factor C en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 24:

Efecto del factor A para el nivel alto del factor C en un Diseño factorial 2^3

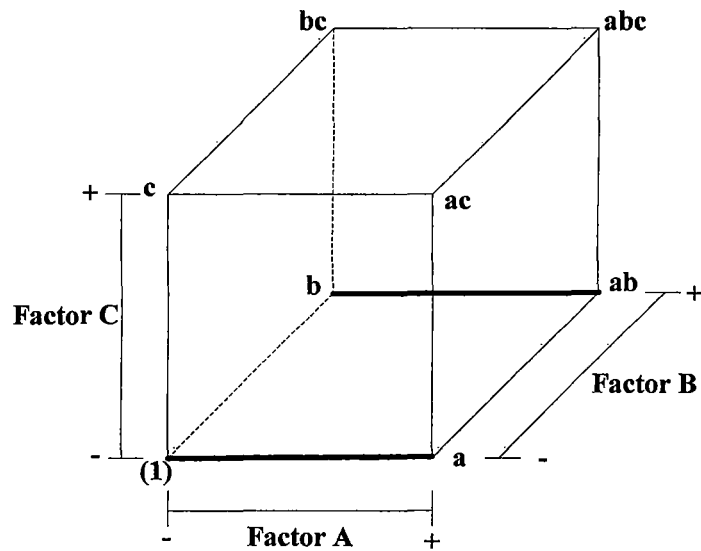
| Efecto de A para el nivel alto del factor C | |
|--|-------------------------|
| Nivel alto del factor B | Nivel bajo del factor B |
| $\frac{(abc - bc)}{n}$ | $\frac{(ac - c)}{n}$ |

El factor C a nivel bajo

La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor A al nivel bajo de C, y luego observando los vértices para los niveles alto y bajo del factor B; tomando las combinaciones de tratamiento de derecha a izquierda. Es decir, los vértices de los dos segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 10:

Representación geométrica de la interacción AC en el nivel bajo del factor C en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 25:

Efecto del factor A para el nivel bajo del factor C en un Diseño factorial 2^3

| Efecto de A para el nivel bajo del factor C | |
|---|-------------------------|
| Nivel alto del factor B | Nivel bajo del factor B |
| $\frac{(ab-b)}{n}$ | $\frac{(a-(1))}{n}$ |

Por lo tanto, el efecto promedio de AC es:

$$AC = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(abc-bc)}{n} + \frac{(ac-c)}{n} - \left[\frac{(ab-b)}{n} + \frac{(a-(1))}{n} \right] \right\}$$

$$AC = \frac{1}{4n} [(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc]$$

Efecto de BC

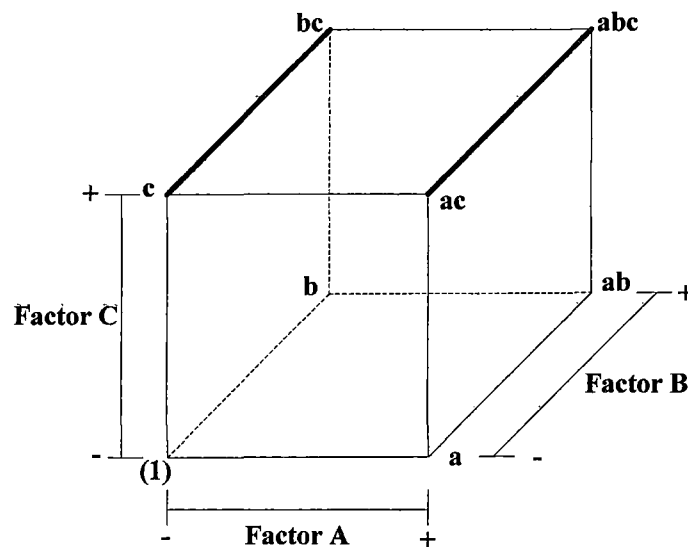
El efecto promedio de la interacción BC vendrá dada como la diferencia del promedio de la suma de los efectos del factor B, a las diferentes combinaciones de los niveles del factor C, cuando el factor A se encuentra en los niveles alto y bajo. Como se muestra a continuación:

El factor C a nivel alto

La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor B al nivel alto de C, y luego observando los vértices para los niveles alto y bajo del factor A; tomando las combinaciones de tratamiento de derecha a izquierda. Es decir, los vértices de los dos segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 11:

Representación geométrica de la interacción BC en el nivel alto del factor C en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 26:

Efecto del factor B para el nivel alto del factor C en un Diseño factorial 2^3

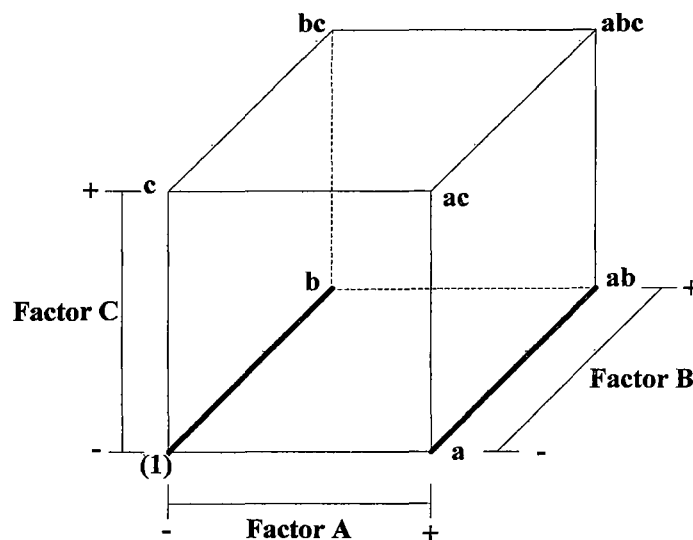
| Efecto de B para el nivel alto del factor C | |
|---|-------------------------|
| Nivel alto del factor A | Nivel bajo del factor A |
| $\frac{(abc - ac)}{n}$ | $\frac{(bc - c)}{n}$ |

El factor C a nivel bajo

La forma de visualizarlo en el cubo es desplazando el factor B al nivel bajo de C, y luego observando los vértices para los niveles alto y bajo del factor A; tomando las combinaciones de tratamiento en diagonal de adentro hacia enfrente. Es decir, los vértices de los dos segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 12:

Representación geométrica de la interacción BC en el nivel bajo del factor C en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 27:

Efecto del factor B para el nivel bajo del factor C en un Diseño factorial 2^3

| Efecto de B para el nivel bajo del factor C | |
|---|-------------------------|
| Nivel alto del factor A | Nivel bajo del factor A |
| $\frac{(ab-a)}{n}$ | $\frac{(b-(1))}{n}$ |

Por lo tanto, el efecto promedio de BC es:

$$\bar{BC} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(abc-ac)}{n} + \frac{(bc-c)}{n} - \left[\frac{(ab-a)}{n} + \frac{(b-(1))}{n} \right] \right\}$$

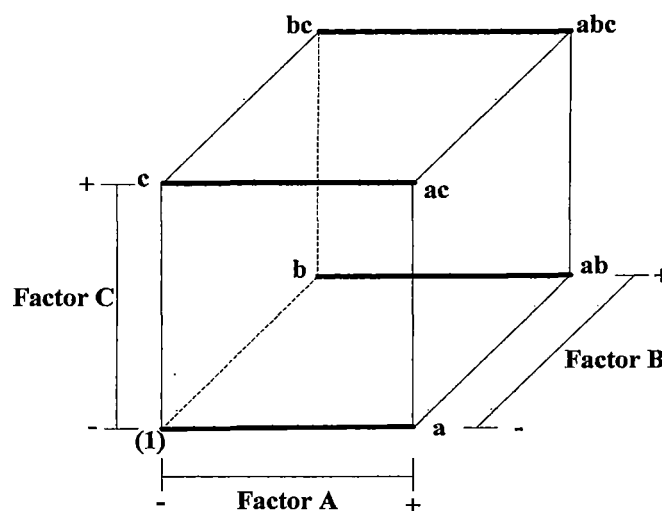
$$BC = \frac{1}{4n} [(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc]$$

Efecto de ABC

Este efecto se define como la diferencia promedio entre la interacción AB para el nivel bajo y alto del factor C. Es decir, los vértices de los segmentos gruesos del cubo siguiente:

Figura N° 13:

Representación geométrica de la interacción ABC en un diseño factorial 2^3 .



De la figura anterior se obtiene la siguiente tabla:

Tabla N° 28:

Efecto de la Interacción ABC en un Diseño factorial 2^3

| Efecto de la Interacción AB | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| Nivel alto del factor C | Nivel bajo del factor C |
| $\frac{(abc - bc) - (ac - c)}{4n}$ | $\frac{(ab - b) - (a - (1))}{n}$ |

Por lo tanto, el efecto promedio de ABC es:

$$\bar{ABC} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(abc - bc) - (ac - c)}{4n} - \left[\frac{(ab - b) - (a - (1))}{4n} \right] \right\}$$

$$ABC = \frac{1}{4n} [abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)]$$

2.1.3.3 Análisis de varianza

Para llevar a cabo el Análisis de Varianza se debe obtener los contrastes de los efectos encontrados anteriormente; que no son más que las cantidades entre paréntesis de los efectos. Es decir:

$$\text{Contraste}_A = a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc$$

$$\text{Contraste}_B = b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac$$

$$\text{Contraste}_C = c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab$$

$$\text{Contraste}_{AB} = abc - bc + ab - b - ac + c - a + (1)$$

$$\text{Contraste}_{AC} = (1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc$$

$$\text{Contraste}_{BC} = (1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc$$

$$\text{Contraste}_{ABC} = abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)$$

Las sumas de cuadrados de los efectos pueden ser obtenidas fácilmente; ya que a cada una le corresponde un contraste y un sólo grado de libertad. Por lo tanto, la suma de cuadrados para cualquier efecto de un Diseño 2^3 con "n" réplicas, vendrá dada por el contraste correspondiente al cuadrado entre el total de las observaciones.

$$SS = \frac{(\text{contraste})^2}{8n}$$

Entonces la Suma de Cuadrados para los efectos principales e interacciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 SS_A &= \frac{(\text{contraste}_A)^2}{8n} & SS_B &= \frac{(\text{contraste}_B)^2}{8n} & SS_C &= \frac{(\text{contraste}_C)^2}{8n} \\
 SS_{AB} &= \frac{(\text{contraste}_{AB})^2}{8n} & SS_{AC} &= \frac{(\text{contraste}_{AC})^2}{8n} & SS_{BC} &= \frac{(\text{contraste}_{BC})^2}{8n} \\
 SS_{ABC} &= \frac{(\text{contraste}_{ABC})^2}{8n}
 \end{aligned}$$

La suma de cuadrado total y la suma de cuadrados del error se calcula de forma usual.

$$\begin{aligned}
 SS_T &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n y_{ijkl}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{8n} \\
 SS_E &= SS_T - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} - SS_{ABC}
 \end{aligned}$$

donde

SS_T : Tiene $8n-1$ grados de libertad; ya que existe un total de $N = 8n$ observaciones.

SS_E : Tiene $8(n-1)$ grados de libertad; porque cada suma de los efectos principales e interacciones tienen un grado de libertad cada una.

Tabla N° 29:

ANOVA para el Diseño factorial 2^3

| Fuentes de Variabilidad | Suma de Cuadrados | Grados de Libertad | Cuadrados Medios | F Calculado |
|-------------------------|-------------------|--------------------|------------------|-------------|
| A | SCA | 1 | CMA | CMA/CME |
| B | SCB | 1 | CMB | CMB/CME |
| C | SCC | 1 | CMC | CMC/CME |
| AB | SCAB | 1 | CMAB | CMAB/CME |
| AC | SCAC | 1 | CMAC | CMAC/CME |
| BC | SCBC | 1 | CMBC | CMBC/CME |
| ABC | SCABC | 1 | CMABC | CMABC/CME |
| Error | SCE | 4(n-1) | CME | |
| Total | SCT | 4n-1 | CMT | |

2.1.3.4 Otra forma de encontrar los contrastes

Una forma más sencilla de obtener los contrastes de los efectos es utilizando una tabla de signos positivos y negativos (más y menos) para un Diseño Factorial 2^3 , la cual estará formada de la siguiente manera:

Tabla N° 30:

Matriz de diseño completo, de un diseño factorial 2^3 en el orden estándar.

| Combinación de tratamientos | Efectos Factoriales | | | | | | | |
|--------------------------------|---------------------|----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------|------------|
| | <i>I</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>AB</i> | <i>C</i> | <i>AC</i> | <i>BC</i> | <i>ABC</i> |
| (1) | + | - | - | + | - | + | + | - |
| a | + | + | - | - | - | - | + | + |
| b | + | - | + | - | - | + | - | - |
| ab | + | + | + | + | - | - | - | - |
| c | + | - | - | + | + | - | - | + |
| ac | + | + | - | - | + | + | - | - |
| bc | + | - | + | - | + | - | + | + |
| abc | + | + | + | + | + | + | + | + |

Los signos de los efectos principales (columna A, B y C) se determinan asignando un signo positivo al nivel superior y uno negativo al nivel inferior. Es decir, signo positivo si en la combinación de tratamiento aparece el efecto Factorial y negativo si no aparece. Una vez que se han establecido los signos para los efectos principales, los de las columnas restantes o iteraciones se encuentran multiplicando los signos de renglón por renglón de las columnas correspondientes a la interacción que se desea obtener. Por ejemplo, los signos de la columna BC, se obtienen por medio del producto de los signos de las columnas B y C de cada uno de los renglones. Los signos de la columna de la interacción triple ABC, se obtienen multiplicando los signos de cualquier conjunto de columnas cuyo efecto es ABC. Es decir, los signos para ABC se pueden obtener de cualquier producto de signos de las columnas $A \times B \times C$, $AB \times C$, $AC \times B$ o $BC \times A$.

En esta tabla se pueden observar algunas propiedades interesantes como:

- a) Cada columna tiene un número igual de signos positivos y negativos, con excepción de la columna I.

- b) La suma de los productos de los signos de cualquier par de columnas siempre es cero; ya que las columnas en la tabla son ortogonales.
- c) El producto de cualquier columna con la columna I, no produce ningún cambio en sus signos de dicha columna; ya que la columna I es el elemento identidad.
- d) El producto de cualquier par de columnas siempre produce otra columna que se encuentra en la tabla. Ejemplo, $A \times C = AC$, $AC \times C = AC^2 = A$.

Obtención de los Coeficientes de los Contrastes.

Los coeficientes de los contrastes para cada efecto se obtienen de la tabla anterior simplemente multiplicando los signos de la columna apropiada por la correspondiente combinación de tratamientos, y luego sumándolos.

Por lo tanto, los contrastes para un Diseño 2^3 obtenidos por medio de la tabla anterior son:

$$\text{Contraste}_A = - (1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc$$

$$\text{Contraste}_B = - (1) - a + b + ab - c - ac + bc + abc$$

$$\text{Contraste}_C = - (1) - a - b - ab + c + ac + bc + abc$$

$$\text{Contraste}_{AB} = (1) - a - b + ab + c - ac - bc + abc$$

$$\text{Contraste}_{AC} = (1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc$$

$$\text{Contraste}_{BC} = (1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc$$

$$\text{Contraste}_{ABC} = - (1) + a + b - ab + c - ac - bc + abc$$

Se puede observar que son los mismos resultados que se encontraron anteriormente. La estimación de cualquier efecto o interacción se obtiene multiplicando las combinaciones de tratamientos por los signos de la columna correspondiente de interacción o efecto que se desea obtener su efecto, sumando el resultado para producir un contraste y dividiendo luego el doble del contraste entre el número total de ejecuciones en el Experimento.

$$\text{Efecto} = \frac{2(\text{contraste})}{8n}$$

2.1.4 Diseño factorial general 2^k

Cuando se considera un Diseño Factorial 2^k , se está generalizando los Diseños Factoriales de dos niveles que tienen k factores. En general el Modelo Estadístico del Diseño Factorial 2^k tiene k factores principales, $\binom{k}{2}$ interacciones de dos factores, $\binom{k}{3}$ interacciones de tres factores, etc., y una interacción de k factores; es decir, que el Modelo completo tiene $2^k - 1$ efectos.

Las combinaciones de tratamientos pueden escribirse en el orden estándar, introduciendo los factores de uno en uno, combinado en forma sucesiva cada nuevo factor con aquellos introducidos anteriormente. Por ejemplo, el orden estándar para un Diseño 2^4 es: $(1), a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, y abcd$. En el cual cd representa la combinación de tratamientos en la que el Factor C y Factor D se encuentran en el nivel superior, mientras que A y B están en el nivel inferior.

Para estimar cualquier efecto o calcular su correspondiente Suma de Cuadrado es necesario determinar el contraste de cada uno de los efectos; los cuales se pueden obtener utilizando una tabla de signos positivos y negativos; pero para un número grande de factores (k grande), resulta demasiado tedioso o complicado; y por lo tanto, es preferible utilizar otro método para encontrar los contrastes.

A continuación se presenta una forma o método más general y sencillo para obtener los contrastes de cada uno de los Efectos del Diseño Factorial. En general, el contraste para el efecto $AB\dots K$, se obtiene desarrollando el segundo miembro de la siguientes ecuación. $\text{Contraste}_{AB\dots K} = (a\pm 1)(b\pm 1)\dots(k\pm 1)$

Para encontrar un contraste determinado, en la ecuación anterior del conjunto de paréntesis se debe usar el signo negativo si el factor está presente en el efecto (para todas aquellas letras que aparecen en el contraste) y positivo en caso contrario. Al terminar de desarrollar los factores de la ecuación, se debe reemplazar el "1" por (1) en la expresión final.

La forma general para obtener los efectos, viene dada por:

$$AB\dots K = \frac{2}{n2^k}(\text{contraste}_{AB\dots K}) \quad \text{ó} \quad AB\dots K = \frac{1}{n2^{k-1}}(\text{contraste}_{AB\dots K})$$

Por lo tanto, la forma general de obtener las sumas de cuadrados, vendrá dada por:

$$SS_{AB\dots K} = \frac{1}{n2^k}(\text{contraste}_{AB\dots K})^2, \text{ en las ecuaciones anteriores } n \text{ es el número de réplicas.}$$

Luego de haber obtenido los contrastes para los efectos, la estimación de los efectos y la Suma de Cuadrado de cada uno de ellos, se puede determinar mediante las siguientes expresiones generales.

Tabla N° 31:

Expresiones generales para la estimación de los efectos y suma de cuadrados de un diseño factorial general 2^K

| Fuente de Variación | Suma de Cuadrados | Grados de Libertad |
|---|-------------------|--------------------|
| K Efectos Principales | | |
| A | SS_A | 1 |
| B | SS_B | 1 |
| C | SS_C | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| K | SS_K | 1 |
| $\binom{k}{2}$ Interacciones de dos factores | | |
| AB | SS_{AB} | 1 |
| AC | SS_{AC} | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| JK | SS_{JK} | 1 |
| $\binom{k}{3}$ Interacciones de tres factores | | |
| ABC | SS_{ABC} | 1 |
| ABD | SS_{ABD} | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| IJK | SS_{IJK} | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $\binom{k}{k}$ Interacciones de tres factores | | |
| ABC...K | $SS_{AB\dots K}$ | 1 |
| Error | SS_E | $2^k(\bar{n}-1)$ |
| Total | SS_T | $n2^k - 1$ |

2.2 ORDEN ESTÁNDAR⁸

Las combinaciones de tratamientos es posible escribirlas en el orden (1) , a , b y ab ; el cual se conoce como **Orden Estándar**, el cual está formada por los coeficientes de los contrastes usados para estimar los efectos, y siempre son +1 ó -1, como se presenta en la siguiente tabla:

Tabla N° 32:

Combinación de tratamientos en orden estándar en un diseño factorial 2^2

| Efectos | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>AB</i> |
|---------|----------|----------|-----------|
| (1) | -1 | -1 | +1 |
| a | +1 | -1 | -1 |
| b | -1 | +1 | -1 |
| ab | +1 | +1 | +1 |

De la tabla anterior se puede elaborar una tabla de signos algebraicos (positivos y negativos), en la cual en el encabezado de las columnas se encuentran los efectos principales (*A* y *B*), la interacción (*AB*), e *I*, que representa el total o el promedio de todo el Experimento.

Tabla N° 33:

Tabla de signos algebraicos en orden estándar en un diseño factorial 2^2

| Combinación de tratamientos | Efectos Factoriales | | | |
|-----------------------------|---------------------|----------|----------|-----------|
| | <i>I</i> | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>AB</i> |
| (1) | + | - | - | + |
| a | + | + | - | - |
| b | + | - | + | - |
| ab | + | + | + | + |

En la tabla anterior se puede observar que la columna encabezada por *I*, que representa el total o el promedio de todo el experimento, está formada sólo por signos positivos; los signos de la columna *AB* se obtiene como el producto de los signos de los dos

⁸ Box, G., Hunter, W. y Hunter, J (1993) "Estadística para Investigadores, Introducción al Diseño de Experimentos, Análisis de Datos y Construcción de Modelos", Editorial Reverté

efectos principales (A y B), es decir multiplicando los signos de las columnas encabezadas por A y B.

Esta tabla puede ser utilizada para encontrar los coeficientes de los contrastes, con el fin de estimar cualquier efecto; simplemente multiplicando los signos de la columna apropiada por la correspondiente combinación de tratamientos, y luego sumándolos.

Por lo tanto, los contrastes para estimar A, B y AB se obtienen:

$$\text{Contraste}_A = - (1) + a - b + ab$$

$$\text{Contraste}_B = - (1) - a + b + ab$$

$$\text{Contraste}_{AB} = (1) - a - b + ab$$

Como puede observarse estos contrastes coinciden con los que se obtuvieron anteriormente.

2.3 ORDEN DE EXPERIMENTACIÓN⁹

Normalmente se aconseja aleatorizar el orden de ejecución de los experimentos de un diseño factorial para minimizar la influencia de los factores desconocidos. Así, el orden de ejecución de un diseño 2^3 podría ser el que se indica en la Tabla N° 34.

Tabla N° 34:

Matriz de Diseño en Orden Aleatorio de un diseño factorial 2^3 .

| Orden estándar | Orden de ejecución | A | B | C |
|----------------|--------------------|---|---|---|
| 5 | 1 | - | - | - |
| 6 | 2 | + | - | - |
| 8 | 3 | - | + | - |
| 4 | 4 | + | + | - |
| 7 | 5 | - | - | + |
| 3 | 6 | + | - | + |
| 2 | 7 | - | + | + |
| 1 | 8 | + | + | + |

⁹ De León, G. (2004) "Análisis y Propuestas Sobre Algunos Aspectos de la Aplicación del Diseño de Experimentos en la Industria"

La aleatorización persigue neutralizar la influencia de variables desconocidas que afectan a la respuesta y no se pueden mantener constantes a lo largo de todo el plan de experimentación. Es fácil observar que si se realizan los experimentos en orden estándar, la primera mitad de estos experimentos se realizan con el último factor a nivel $-$, y la otra mitad con dicho factor a nivel $+$, de forma que si existe algún factor ligado al orden de experimentación que afecta a la respuesta, esa influencia será atribuida, erróneamente, al último factor que aparezca en la matriz de diseño.

Aleatorizando el orden de experimentación se espera que esa influencia se disperse entre todos los efectos y evite tomar decisiones equivocadas sobre la significación estadística de alguno de ellos, aunque esto no siempre ocurre, tal como se verá más adelante.

2.4 HIPÓTESIS SOBRE UN MODELO PARA LA RESPUESTA¹⁰

Supondremos para la respuesta el modelo:

$$Y = f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{Z}) + \varepsilon$$

donde:

$f(\mathbf{X})$: Es la función que expresa la relación entre los factores en estudio y la respuesta.

$g(\mathbf{Z})$: Corresponde a la influencia de los factores desconocidos que no se mantienen constantes a lo largo del plan de experimentación.

ε : Es el error experimental.

Si los valores de las variables representadas por \mathbf{Z} se mantuvieran constantes, su presencia no afectaría a la estimación de los efectos, sino que simplemente añadirían un valor a la media de las respuestas, independientemente de cuál fuera la forma de $g(\mathbf{Z})$.

El problema estriba en que los valores de \mathbf{Z} vayan variando durante el plan de experimentación de acuerdo con algún patrón desconocido. En principio, este patrón puede ser de cualquier tipo, pero si esas variables están relacionadas con las condiciones

¹⁰ De León, G. (2004) "Análisis y Propuestas Sobre Algunos Aspectos de la Aplicación del Diseño de Experimentos en la Industria"

ambientales, con el deterioro o transformación de las materias primas, con cambios en la maquinaria, o con el proceso de medida, parece razonable suponer que la magnitud de la influencia irá aumentando a medida que se realizan los experimentos.

2.5 MEDIDA DE LA INFLUENCIA DE LOS FACTORES DESCONOCIDOS

De acuerdo con las consideraciones realizadas, y suponiendo que en el rango de variación de las Z la expresión $g(Z)$ se puede considerar lineal, podemos asumir que $g(Z) = k \cdot i$, donde i representa el orden en que se ha realizado el experimento y k es una constante de proporcionalidad. Para simplificar las expresiones que se plantean, se supone que $k = 1$, que todos los factores son inertes y que no existe error experimental.

De esta forma, el valor de la respuesta coincide con el orden de experimentación y el sesgo que se produce en la estimación de los efectos coincide con el valor de los efectos calculados.

Por ejemplo, sea un diseño 2^3 que se realiza en orden estándar y en el que se obtienen unas respuestas de la forma indicada anteriormente. Su matriz de diseño ampliada junto con los valores de la respuesta y de los efectos se encuentra en la Tabla N°35.

Tabla N° 35:

Matriz ampliada y valores de los efectos para un diseño 2^3 en que la respuesta es igual al orden de ejecución de los experimentos

| Orden estándar | Orden de ejecución | A | B | C | AB | AC | BC | ABC | Y |
|----------------|--------------------|----|----|----|----|----|----|-----|---|
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 3 |
| 4 | 4 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 4 |
| 5 | 5 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 5 |
| 6 | 6 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 6 |
| 7 | 7 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 7 |
| 8 | 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| Efectos | | 1 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

En este caso, la influencia de los factores desconocidos, representada por los valores que va tomando la respuesta, hace que el efecto principal de los factores A , B y C no sea cero (valor que tomaría si no existiera la influencia de esos factores) sino que tenemos: $A = 1$, $B = 2$ y $C = 4$. Recuérdese que estos efectos están midiendo sólo la influencia de los factores desconocidos sobre la respuesta y que en realidad se pueden considerar como sesgos introducidos en la estimación de los efectos.

Como medida de dicha influencia tomaremos el valor del efecto máximo (en valor absoluto) calculado de esta forma, lo cual es lo mismo que decir el sesgo máximo introducido en la estimación de los efectos. Por tanto, buscaremos órdenes de experimentación que produzcan el mínimo sesgo máximo en valor absoluto, expresión que, por comodidad, simplificaremos y nos referiremos a diseños con mínimo sesgo.

Esta medida fue utilizada por de León (2004), quien demostró que minimizar su valor tiene gran interés ya que la suma de los cuadrados de los sesgos es constante, respondiendo a la expresión:

$$\sum_{i=1}^{2^k} (\text{sesgo})^2 = 4 \frac{(2^k - 1)}{2^k} S_Y^2$$

Donde S_Y^2 representa la varianza de las respuestas. Esto significa que si un sesgo es muy grande, los demás no pueden ser grandes también, sino que deben ser pequeños para que la suma de los cuadrados se mantenga constante, y esto hace que sea más probable tomar erróneamente como significativos a los efectos con sesgo grande.¹¹

Otros autores, como Draper y Stoneman (1968), Dickinson (1974) utilizan lo que denominan Contador de Tiempo o *Time Count*¹², que es igual al producto escalar de la columna correspondiente al efecto en cuestión y la columna de respuestas, es decir:

¹¹ De León, G. (2004) "Análisis y Propuestas Sobre Algunos Aspectos de la Aplicación del Diseño de Experimentos en la Industria"

¹² Este término fue creado por Draper y Stoneman (1968), para denominar el resultado del producto interno de la columna de respuesta (1, 2, 3, ..., N) y un efecto deseado con el nombre de Contador de Tiempo o medida de la Influencia Lineal de los factores ajenos a la experimentación.

$$\text{Efecto} = \frac{\text{Time Count}}{2^{k-1}} = \frac{\text{Contador de Tiempo}}{2^{k-1}}$$

Existe por tanto una relación directa entre el valor del efecto y el Contador de Tiempo (*Time Count*), por lo que es indiferente usar uno u otro.

2.6 ALEATORIZACIÓN Y NEUTRALIZACIÓN DE LA INFLUENCIA DE LOS FACTORES DESCONOCIDOS¹³

De León (2004) realizó un análisis exhaustivo del sesgo que se obtiene en la estimación de los efectos al ejecutar un diseño 2^3 en todos los órdenes posibles, con un modelo para la respuesta como el descrito anteriormente. Observó que el sesgo máximo solo toma valores entre 2,0 y 4,0 a saltos de 0,5. El resumen de las frecuencias obtenidas para cada sesgo se encuentra en la Tabla N° 36.

Tabla N° 36:

Valores del sesgo máximo (SMA) en un diseño 2^3

(¹) Incluye el orden estándar

| Sesgo máximo | Frecuencia | % |
|--------------|----------------------|-------|
| 2.0 | 1344 | 3.33 |
| 2.5 | 9408 | 23.33 |
| 3.0 | 13440 | 33.33 |
| 3.5 | 8064 | 20.00 |
| 4.0 | 8064(¹) | 20.00 |
| Total | 40320 | 100 |

Es decir, una ordenación tan mala como el orden estándar, que carga toda la influencia de los factores desconocidos en el efecto principal del último factor de la matriz de diseño, produce un sesgo en la estimación de este factor, igual al que provocan una quinta parte de los órdenes obtenidos aleatorizando. Sólo un 3,3% de los órdenes producen un sesgo mínimo en el diseño.

¹³ De León, G. (2004) "Análisis y Propuestas Sobre Algunos Aspectos de la Aplicación del Diseño de Experimentos en la Industria"

Para diseños 2^4 , de León también realizó un estudio, en parte analítico y en parte por simulación, llegando a los valores que se indican en la Tabla N° 37.

Tabla N° 37:

Porcentaje de aparición de cada uno de los valores posibles de SMA en un diseño 2^4 .

| Sesgo máximo | % | Sesgo máximo | % |
|--------------|--------|--------------|-------|
| 3.00 | 0.0016 | 5.75 | 6.48 |
| 3.25 | 0.063 | 6.00 | 5.13 |
| 3.50 | 0.669 | 6.25 | 3.49 |
| 3.75 | 2.70 | 6.50 | 2.56 |
| 4.00 | 6.37 | 6.75 | 1.63 |
| 4.25 | 10.16 | 7.00 | 1.16 |
| 4.50 | 12.94 | 7.25 | 0.704 |
| 4.75 | 13.27 | 7.50 | 0.470 |
| 5.00 | 12.62 | 7.75 | 0.235 |
| 5.25 | 10.47 | 8.00 | 0.235 |
| 5.50 | 8.64 | | |

Si consideramos los valores de SMA comprendidos entre 6.00 y 8.00 como susceptibles de producir un sesgo considerable, se tiene que el porcentaje de veces que aparecen esos valores al aleatorizar el orden de los experimentos es de 15.62 %. Al incluir en esos valores el sesgo de 5.75 el porcentaje sube al 22.10%. En cambio, solo aparecen en promedio 16 ordenes que tienen un valor de SMA igual a 3 en cada millón de aleatorizaciones del orden de experimentación.

Por tanto, parece razonable buscar los órdenes de experimentación que mejor neutralizan la influencia de los factores desconocidos.

2.7 NÚMERO DE CAMBIOS DE NIVEL DE LOS FACTORES

El criterio del número de cambios de nivel de los factores es tal vez uno de los más importantes a considerar a la hora de enfrentar un proceso de experimentación. Esto es debido a que existen factores que implican características técnicas de difícil manejo (por ejemplo, cambios de molde), o que requieren un tiempo de estabilización para obtener condiciones de operación adecuadas (p.e.: temperatura de un horno), o por múltiples motivos (p.e.: lavado a fondo de tuberías para una nueva experimentación) y esto puede

tener un impacto importante en el esfuerzo y, por tanto, el costo que es necesario para llevar a cabo la experimentación. Evidentemente, el número de cambios de nivel de los factores depende del resultado de la aleatorización.

En la Tabla N° 38 se tienen 2 órdenes de ejecución posibles al aleatorizar un diseño 2^4 . El primer resultado exige realizar 42 cambios de nivel, mientras que el segundo sólo requiere 15.

Tabla N° 38:

Número de cambios de nivel en dos órdenes de ejecución del diseño 2^4

| <i>a) 42 cambios de nivel</i> | | | | | <i>b) 15 cambios de nivel</i> | | | | |
|-------------------------------|---|----|----|----|-------------------------------|---|---|---|---|
| Orden | A | B | C | D | Orden | A | B | C | D |
| 16 | + | + | + | + | 3 | - | + | - | - |
| 10 | + | - | - | + | 1 | - | - | - | - |
| 7 | - | + | + | - | 2 | + | - | - | - |
| 9 | - | - | - | + | 6 | + | - | + | - |
| 12 | + | + | - | + | 14 | + | - | + | + |
| 6 | + | - | + | - | 10 | + | - | - | + |
| 11 | - | + | - | + | 12 | + | + | - | + |
| 4 | + | + | - | - | 4 | + | + | - | - |
| 14 | + | - | + | + | 8 | + | + | + | - |
| 3 | - | + | - | - | 16 | + | + | + | + |
| 2 | + | - | - | - | 15 | - | + | + | + |
| 15 | - | + | + | + | 7 | - | + | + | - |
| 1 | - | - | - | - | 5 | - | - | + | - |
| 5 | - | - | + | - | 13 | - | - | + | + |
| 8 | + | + | + | - | 9 | - | - | - | + |
| 13 | - | - | + | + | 11 | - | + | - | + |
| Número de cambios | 9 | 13 | 10 | 10 | Número de cambios | 2 | 4 | 4 | 5 |

El menor número de cambios de nivel de los factores se logra cuando sólo se cambia el nivel de un factor entre dos pruebas experimentales consecutivas, o de forma equivalente cuando se cambia un sólo signo al pasar de una fila a la siguiente en la matriz de diseño, tal como ocurre en la Tabla N° 38b. Por tanto, en un diseño 2^k (diseño completo) el mínimo número de cambios de nivel es igual a $2^k - 1$, pues si se presentara un número menor de cambios se tendrían filas repetidas.

CAPÍTULO III

MÉTODOS DE OBTENCIÓN DE ÓRDENES DE EXPERIMENTACIÓN CON MÍNIMO NÚMEROS DE CAMBIOS Y MÍNIMO SESGO

En la primera parte de este capítulo se presentan una serie de métodos de búsqueda para hallar órdenes de experimentación con el mínimo número de cambios de nivel y mínimo sesgo máximo, tales como el algoritmo de Dickinson, la búsqueda aleatoria restringida, el método de duplicación y el algoritmo de Dickinson con alimentación forzada.

En la segunda parte se presenta un método para obtener nuevos órdenes que cumpla con las características deseadas a partir de los órdenes semilla identificados en la primera parte de este capítulo que cumple las propiedades de mínimo número de cambios en los factores y mínimo sesgo máximo en valor absoluto. Este es el método de la Columna de Expansión, el cuál fue programado en macros de Minitab, lo cual permite generar de forma automática y aleatoria los órdenes con las características propuestas.

3.1 MÉTODO DE DUPLICACIÓN

Es un procedimiento que permite encontrar órdenes de experimentación para diseños factoriales 2^K , con el mínimo número de cambios en los niveles de los factores y un sesgo conocido. La característica más importante de este procedimiento es que puede ser aplicado a diseños factoriales a 2 niveles con cualquier número de factores.

3.1.1 Obtención de los órdenes de experimentación para diseños 2^4

Empezamos de los órdenes para un diseño con 8 experimentos que cumplen con las propiedades deseadas y que pueden ser obtenidos mediante una exploración exhaustiva de todos los órdenes posibles tal como realizó de León (2004).

Sea, por ejemplo, el orden 1, 2, 6, 8, 4, 3, 7, 5 que aparece en primer lugar en la tabla propuesta por de León, ver Anexo A.

Tabla N° 39:

Diseño 2^3 con un orden de ejecución que cumple con la propiedad de mínimo número de cambios en los factores y mínimo sesgo máximo (igual a 2)

| Orden estándar | Factores | | |
|----------------|----------|----|----|
| | A | B | C |
| 1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 |
| Cambios | 2 | 2 | 3 |
| Sesgo | -2 | 2 | 2 |

Partiendo de esta matriz construimos otra matriz duplicando las filas, tal como se presenta en la Tabla N° 40.

Evidentemente, esta operación siempre mantiene el número de cambios en los factores de la matriz original (A, B y C en nuestro ejemplo), ya que entre las filas duplicadas el número de cambios es cero.

Tabla N° 40:

Matriz de diseño de la Tabla N° 39 con las filas duplicadas

| Orden | Factores | | |
|----------------|----------|----------|----------|
| | A | B | C |
| 1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 |
| Cambios | 2 | 2 | 3 |

En seguida se crea la secuencia de signos para el nuevo factor (D en el ejemplo), de la siguiente forma:

- Colocamos -1 en la primera y en la última fila.
- Llenamos las filas intermedias repitiendo la secuencia 1, 1, -1, -1.

Y de esta forma obtenemos la matriz de diseño de la Tabla N° 41.

Esta nueva matriz, así como la que se obtendría multiplicando la última columna por -1, cumple las propiedades deseadas para un diseño con 16 experimentos, tal como a continuación se pone de manifiesto.

Tabla N° 41:

Diseño 2^4 con un orden de ejecución que presenta las propiedades deseadas

| Orden estándar | Factores | | | |
|----------------|----------|----|----|----|
| | A | B | C | D |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 9 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 10 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 14 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 12 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 11 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 15 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| Cambios | 2 | 2 | 3 | 8 |

3.1.2 Propiedades de la matriz obtenida.

3.1.2.1 La matriz obtenida es una matriz completa

Efectivamente, la matriz obtenida tiene 16 filas y todas son distintas ya que para cada pareja de 2 filas iguales en los 3 primeros factores, el cuarto factor tiene siempre distinto signo. Por tanto, se trata de una matriz completa para un diseño 2^4 . El argumento es el mismo para pasar de cualquier diseño 2^k a un diseño 2^{k+1} aplicando la metodología propuesta.

3.1.2.2 La matriz obtenida tiene el mínimo número de cambios posibles.

Sabemos que el mínimo número de cambios en un diseño 2^k es $2^k - 1$. Así, en un diseño 2^3 es igual a 7, y en un 2^4 será igual a 15, etc.

Hemos visto que al duplicar las filas en un diseño 2^k se mantiene el número de cambios en sus factores, y al añadir el factor $k+1$ con el procedimiento definido, este nuevo factor siempre presentará 2^k cambios de nivel.

En efecto, puede verse en el ejemplo que en el factor D existen 7 parejas de signos y, por tanto, hay 6 cambios de signo entre parejas. Además, hay un cambio de signo al principio y otro al final. En total 8 cambios tal como se observa en la siguiente tabla.

Tabla N° 42:

Cambios de signo en el factor añadido al pasar de un diseño 2^3 a un 2^4

| Orden estándar | Factores | | | | 7 parejas | 6 cambios de signo entre parejas | Cambio inicial + cambio final |
|----------------|----------|----|----|----|-----------|----------------------------------|-------------------------------|
| | A | B | C | D | | | |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | | | |
| 9 | -1 | -1 | -1 | 1 | | | |
| 10 | 1 | -1 | -1 | 1 | | | |
| 2 | 1 | -1 | -1 | -1 | | | |
| 6 | 1 | -1 | 1 | -1 | | | |
| 14 | 1 | -1 | 1 | 1 | | | |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 1 | 1 | -1 | | | |
| 4 | 1 | 1 | -1 | -1 | | | |
| 12 | 1 | 1 | -1 | 1 | | | |
| 11 | -1 | 1 | -1 | 1 | | | |
| 3 | -1 | 1 | -1 | -1 | | | |
| 7 | -1 | 1 | 1 | -1 | | | |
| 15 | -1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 13 | -1 | -1 | 1 | 1 | | | |
| 5 | -1 | -1 | 1 | -1 | | | |
| Cambios | 2 | 2 | 3 | 8 | | | |

En general, en un diseño 2^{k+1} tendremos 2^k-1 parejas de signos y, por tanto, 2^k-2 cambios de signos entre ellas más los cambios en la primera y la última fila dan un total de 2^k cambios.

Tendremos, por tanto, los 2^k-1 de los k primeros factores más los 2^k del factor $k+1$ lo cual suma un total de $2^{k+1}-1$ cambios de nivel que, tal como hemos visto, es el mínimo posible en el diseño 2^{k+1} .

3.1.2.3 La matriz obtenida permite estimar los efectos con un sesgo conocido.

A continuación se deducen los valores que toman los efectos de la matriz obtenida en función de los que se tienen en la matriz de partida.

Los efectos principales e interacciones, que ya aparecen en el diseño de partida, duplican su valor.

Veamos el caso del paso del diseño 2^3 al 2^4 en el ejemplo que hemos visto anteriormente.

Tabla N° 43:

Cálculo de los efectos en el diseño de partida 2^3

| Orden estándar | A | B | C | AB | AC | BC | ABC | Y |
|----------------|----|----|----|----|----|----|-----|---|
| 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 2 |
| 6 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 3 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 5 |
| 3 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 6 |
| 7 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 7 |
| 5 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 8 |
| Efectos | -2 | 2 | 2 | 0 | -2 | -2 | 1 | |

Tabla N° 44:

Cálculo de los efectos en el diseño obtenido 2^4

| Orden estándar | A | B | C | D | AB | AC | AD | BC | BD | CD | ABC | ABD | ACD | BCD | ABCD |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 9 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| 10 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 11 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 15 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| 13 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| Efectos | -4 | 4 | 4 | 0 | 0 | -4 | 0 | -4 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | -1 |

Los contadores de Tiempo (*Time Count*; numerador de la expresión que da los efectos) para cualquier efecto en el diseño 2^3 y el mismo efecto en el diseño 2^4 obtenido siguiendo el procedimiento descrito, son los que se indican en la Tabla N° 45, en la que s_i representa el signo en la fila i de la columna correspondiente al efecto calculado en la matriz de diseño ampliada (matriz de diseño a la que se han añadido las columnas correspondientes a las interacciones).

Tabla N° 45:

Contador de Tiempo para los efectos del diseño 2^3 de partida y el diseño 2^4 obtenido

| Contador de Tiempo para un efecto de un diseño 2^3 | Contador de Tiempo para el mismo efecto en un diseño 2^4 Obtenido del 2^3 anterior aplicando la metodología propuesta |
|--|---|
| $s_{1.1}$ | $s_{1.(1+2)} = s_{1.3}$ |
| $s_{2.2}$ | $s_{2.(3+4)} = s_{2.7}$ |
| $s_{3.3}$ | $s_{3.(5+6)} = s_{3.11}$ |
| $s_{4.4}$ | $s_{4.(7+8)} = s_{4.15}$ |
| $s_{5.5}$ | $s_{5.(9+10)} = s_{5.19}$ |
| $s_{6.6}$ | $s_{6.(11+12)} = s_{6.23}$ |
| $s_{7.7}$ | $s_{7.(13+14)} = s_{7.27}$ |
| $s_{8.8}$ | $s_{8.(15+16)} = s_{8.31}$ |

La Tabla anterior también puede escribirse de la siguiente forma:

Tabla N° 46:

Otra forma de escribir los Contadores de Tiempo correspondientes al diseño 2^4

| Contador de Tiempo para un efecto de un diseño 2^3 | Contador de Tiempo para el mismo efecto en un diseño 2^4 Obtenido del 2^3 anterior aplicando la metodología propuesta |
|--|---|
| $s_{1.1}$ | $s_{1.4} - s_1$ |
| $s_{2.2}$ | $s_{2.8} - s_2$ |
| $s_{3.3}$ | $s_{3.12} - s_3$ |
| $s_{4.4}$ | $s_{4.16} - s_4$ |
| $s_{5.5}$ | $s_{5.20} - s_5$ |
| $s_{6.6}$ | $s_{6.24} - s_6$ |
| $s_{7.7}$ | $s_{7.28} - s_7$ |
| $s_{8.8}$ | $s_{8.32} - s_8$ |

Puede observarse que el Contador de Tiempo (*Time Count*) en el diseño 2^4 es igual a 4 veces su valor en el diseño 2^3 menos $\sum_{i=1}^8 s_i$, y como $\sum_{i=1}^8 s_i = 0$, ya que existen la mitad de valores -1 y la otra mitad de +1, resulta el Contador de Tiempo (*Time Count*) para un efecto en un diseño 2^4 es 4 veces el valor del mismo efecto en un diseño 2^3 .

Respecto al valor de los efectos, recordemos que responden a la expresión:

$$\text{Efecto} = \frac{\text{Time Count}}{2^k} = \frac{\text{Contador de Tiempo}}{2^k}$$

Como el numerador (*Time Count*) se multiplica por 4 y el denominador (2^k) se multiplica por 2, el efecto estará multiplicado por 2.

Para generalizar a cualquier tipo de diseño, veamos la Tabla N° 47 que es una generalización de la Tabla N° 45.

Tabla N° 47:

Generalización del cálculo del Contador de Tiempo para el diseño obtenido

| Contador de Tiempo para un efecto de un diseño 2^k | Contador de Tiempo para el mismo efecto en un diseño 2^{k+1} obtenido del 2^k anterior aplicando la metodología propuesta |
|--|---|
| $s_1 \cdot 1$ | $s_1 \cdot (1 + 2) = s_1 \cdot 3$ |
| $s_2 \cdot 2$ | $s_2 \cdot (3 + 4) = s_2 \cdot 7$ |
| $s_3 \cdot 3$ | $s_3 \cdot (5 + 6) = s_3 \cdot 11$ |
| ... | ... |
| $s_{2^k-3} \cdot 2^k - 3$ | $s_{2^k-3} \cdot (2^{k+1} - 7 + 2^{k+1} - 6)$ |
| $s_{2^k-2} \cdot 2^k - 2$ | $s_{2^k-2} \cdot (2^{k+1} - 5 + 2^{k+1} - 4)$ |
| $s_{2^k-1} \cdot 2^k - 1$ | $s_{2^k-1} \cdot (2^{k+1} - 3 + 2^{k+1} - 2)$ |
| $s_{2^k} \cdot 2^k$ | $s_{2^k} \cdot (2^{k+1} - 1 + 2^{k+1})$ |

Esta tabla también se puede escribir de la forma:

Tabla N 48:

Generalización del cálculo del Contador de Tiempo para el diseño obtenido

| Contadores de Tiempo para un efecto de un diseño 2^k | Contador de Tiempo para el mismo efecto en un diseño 2^{k+1} obtenido del 2^k anterior aplicando la metodología propuesta |
|--|---|
| $s_1 \cdot 1$ | $s_1 \cdot 4 - s_1$ |
| $s_2 \cdot 2$ | $s_2 \cdot 8 - s_2$ |
| $s_3 \cdot 3$ | $s_3 \cdot 12 - s_3$ |
| ... | ... |
| $s_{2^k-3} \cdot 2^k - 3$ | $s_{2^k-3} \cdot (2^{k+2} - 12) - s_{2^k-3}$ |
| $s_{2^k-2} \cdot 2^k - 2$ | $s_{2^k-2} \cdot (2^{k+2} - 8) - s_{2^k-2}$ |
| $s_{2^k-1} \cdot 2^k - 1$ | $s_{2^k-1} \cdot (2^{k+2} - 4) - s_{2^k-1}$ |
| $s_{2^k} \cdot 2^k$ | $s_{2^k} \cdot 2^{k+2} - s_{2^k}$ |

Como $4 \cdot 2^k = 2^{k+2}$, tenemos que el *Contador de Tiempo* para los efectos en el nuevo diseño es siempre 4 veces su valor en el diseño original. Por tanto, el valor de sus efectos se duplica.

El efecto del factor que se añade es siempre igual a cero

Observemos la secuencia de signos utilizada en el ejemplo para el factor que añadimos:

Tabla N° 49:

Valores del Contador de Tiempo en las dobles parejas centrales del factor añadido

| Orden estándar | ... | D | ... | Y | |
|----------------|-----|----|-----|----|----------------|
| 1 | | -1 | | 1 | |
| 9 | | 1 | | 2 | |
| 10 | | 1 | | 3 | |
| 2 | | -1 | | 4 | |
| 6 | | -1 | | 5 | |
| 14 | | 1 | | 6 | -4-5+6+7=4 |
| 16 | | 1 | | 7 | |
| 8 | | -1 | | 8 | |
| 4 | | -1 | | 9 | |
| 12 | | 1 | | 10 | -8-9+10+11=4 |
| 11 | | 1 | | 11 | |
| 3 | | -1 | | 12 | |
| 7 | | -1 | | 13 | |
| 15 | | 1 | | 14 | -12-13+14+15=4 |
| 13 | | 1 | | 15 | |
| 5 | | -1 | | 16 | |

Dejando las 3 primeras y la última, el resto de filas se pueden dividir en 3 grupos en este caso y, en general, en $\frac{2^k}{4}-1$ grupos y dentro de cada grupo la suma de las respuestas por los signos que les corresponden es siempre igual a 4.

Por otra parte, el valor correspondiente a las 3 primeras filas siempre será igual a 4 $(-1+2+3)$ independientemente del número de filas que se tengan. El valor correspondiente a la última fila será siempre -2^k .

Por tanto, el *Contador de Tiempo* para esta columna será:

$$\left[\frac{2^k}{4} - 1 \right] \cdot 4 + 4 - 2^k$$

Y es inmediato comprobar que este valor es siempre igual a cero. También es obvio que si cambiamos los signos a todas las filas (segunda opción para la secuencia de signos del factor que se añade) el Contador de Tiempo (*Time Count*) seguirá siendo cero.

Las interacciones en las que interviene el factor añadido, tienen como máximo, un valor absoluto igual a 1.

La Tabla N° 50 muestra los sumando que permiten calcular el *Contador de Tiempo* (*Time Count*) para cualquier efecto de un diseño 2^4 obtenido mediante la metodología propuesta y que ya aparecen en el diseño de partida 2^3 , así como los correspondientes a cualquier efecto del nuevo diseño en el que interviene el factor añadido (D, en este caso).

Los signos en la columna de X están duplicados, es decir: $s_1=s_2, s_3=s_4, \dots, s_{15}=s_{16}$. Por otra parte, las respuestas son $y_1=1, y_2=2, y_3=3$, etc., así que el valor de X·D también se puede escribir tal como se indica en la Tabla N° 51.

Tabla N° 50:

Sumandos del Contador de Tiempo para los efectos X (cualquier efecto de los que aparecen en el diseño de partida) y X·D

| X | ... | D | ... | X·D |
|---------------------------------|-----|----|-----|----------------------------------|
| S ₁ Y ₁ | | -1 | | -S ₁ Y ₁ |
| S ₂ Y ₂ | | 1 | | S ₂ Y ₂ |
| S ₃ Y ₃ | | 1 | | S ₃ Y ₃ |
| S ₄ Y ₄ | | -1 | | -S ₄ Y ₄ |
| S ₅ Y ₅ | | -1 | | -S ₅ Y ₅ |
| S ₆ Y ₆ | | 1 | | S ₆ Y ₆ |
| S ₇ Y ₇ | | 1 | | S ₇ Y ₇ |
| S ₈ Y ₈ | | -1 | | -S ₈ Y ₈ |
| S ₉ Y ₉ | | -1 | | -S ₉ Y ₉ |
| S ₁₀ Y ₁₀ | | 1 | | S ₁₀ Y ₁₀ |
| S ₁₁ Y ₁₁ | | 1 | | S ₁₁ Y ₁₁ |
| S ₁₂ Y ₁₂ | | -1 | | -S ₁₂ Y ₁₂ |
| S ₁₃ Y ₁₃ | | -1 | | -S ₁₃ Y ₁₃ |
| S ₁₄ Y ₁₄ | | 1 | | S ₁₄ Y ₁₄ |
| S ₁₅ Y ₁₅ | | 1 | | S ₁₅ Y ₁₅ |
| S ₁₆ Y ₁₆ | | -1 | | -S ₁₆ Y ₁₆ |

Tabla N° 51:

Sumandos del Contador de Tiempo para los efectos X (cualquier efecto de los que aparecen en el diseño de partida) y X·D

| X·D | Suma de la pareja |
|----------------------|-------------------|
| -S ₁ .1 | ±1 |
| S ₁ .2 | |
| S ₃ .3 | ±1 |
| -S ₃ .4 | |
| -S ₅ .5 | ±1 |
| S ₅ .6 | |
| S ₇ .7 | ±1 |
| -S ₇ .8 | |
| -S ₉ .9 | ±1 |
| S ₉ .10 | |
| S ₁₁ .11 | ±1 |
| -S ₁₁ .12 | |
| -S ₁₃ .13 | ±1 |
| S ₁₃ .14 | |
| S ₁₅ .15 | ±1 |
| -S ₁₅ .16 | |

El valor máximo del *Contador de Tiempo* se obtiene cuando la suma de cada pareja es igual a +1, lo cual se da cuando:

$$s_1 = s_5 = s_9 = s_{13} = 1$$

$$s_3 = s_7 = s_{11} = s_{15} = -1$$

Y el valor mínimo lo tendremos cuando la suma de cada pareja sea igual a -1 , lo cual se da cuando se tienen los signos:

$$s_1 = s_5 = s_9 = s_{13} = -1$$

$$s_3 = s_7 = s_{11} = s_{15} = 1$$

Tal como se pone de manifiesto en la Tabla N° 52.

Tabla N° 52:

Suma para cada pareja según s sea positivo o negativo

| X · D | s positivo | s negativo |
|---------------------|------------|------------|
| -s _{1.1} | 1 | -1 |
| s _{1.2} | | |
| s _{3.3} | -1 | 1 |
| -s _{3.4} | | |
| -s _{5.5} | 1 | -1 |
| s _{5.6} | | |
| s _{7.7} | -1 | 1 |
| -s _{7.8} | | |
| -s _{9.9} | 1 | -1 |
| s _{9.10} | | |
| s _{11.11} | -1 | 1 |
| -s _{11.12} | | |
| -s _{13.13} | 1 | -1 |
| s _{13.14} | | |
| s _{15.15} | -1 | 1 |
| -s _{15.16} | | |

Por tanto, en este caso el *Contador de Tiempo* puede valer como máximo 8 y como mínimo -8, lo cual significa que los valores del efecto estarán entre 1 y -1.

En general, el *Contador de Tiempo* tomará un valor absoluto máximo igual al número de parejas que se forman, es decir, si se tienen k factores será 2^{k-1} . Como los efectos se calculan dividiendo el *Contador de Tiempo* por la mitad del número de experimentos, el valor absoluto máximo de este tipo de efectos será igual a 1.

3.1.3 Resumen de las características del diseño obtenido

Aplicando la metodología propuesta a un diseño 2^k con las propiedades deseadas, se obtiene un diseño 2^{k+1} con unas propiedades que están resumidas en la Tabla N° 53.

Tabla N° 53:

Resumen de las propiedades del diseño obtenido aplicando la metodología propuesta

| | |
|--|-----------------------------------|
| Número de cambios: | El mínimo posible |
| Sesgo máximo en valor absoluto: | Doble que en el diseño de partida |
| Efectos: Los que ya aparecen en el diseño de partida: | Duplica su valor |
| Efecto principal del factor que se añade: | Nulo |
| Interacciones en las que participa el factor que se añade: | Valor absoluto entre 0 y 1 |

Este método conduce a los mejores órdenes posibles para diseños 2^4 (sesgo máximo absoluto igual a 4) a partir de los diseños 2^3 (sesgo máximo absoluto igual a 2). Pero si se aplica a la obtención de diseños 2^5 se obtiene un sesgo igual a 8 y, de entrada, no se tiene la seguridad de que este sea el mínimo posible ya que para este tipo de diseño no se han realizado análisis exhaustivos.

3.2 BÚSQUEDA TOTALMENTE ALEATORIA

Una primera idea para detectar órdenes con las propiedades deseadas, conceptualmente muy sencilla y fácil de implementar en un programa informático, puede consistir en:

1. Generar un orden aleatoriamente
2. Contar el número de cambios de nivel en los factores. Si este valor es el mínimo posible, seguir. Si no, volver al punto 1.

3. Calcular el sesgo máximo asociado a ese orden. Si el valor obtenido está por debajo de un cierto valor que se considera bueno, se guarda el orden, en caso contrario se descarta.
4. Volver al punto 1 hasta que se generen todos los órdenes deseados.

Pero este método es totalmente inviable ya que los órdenes que presentan mínimo número de cambios son escasísimos, y aunque se generen los órdenes muy rápidamente, tarda mucho en encontrar órdenes con mínimo número de cambios.

Por ejemplo, en el caso de los diseños 2^5 , se tienen $32! = 2.63 \cdot 10^{35}$ órdenes posibles. Por un método de búsqueda exhaustiva que se verá más adelante, se ha podido determinar que el número de órdenes que presentan mínimo número de cambios es $1.87 \cdot 10^{11}$, lo cual significa que la probabilidad de que al generar un orden al azar este presente el mínimo número de cambios es de $7 \cdot 10^{-25}$. No hace falta hacer más cuentas para poner de manifiesto que este método no es viable.

3.3 BÚSQUEDA ALEATORIA CON RESTRICCIONES¹⁴

Se ha diseñado un procedimiento que permite obtener rápidamente órdenes con mínimo número de cambios. Este procedimiento se basa en ir generando los órdenes fila a fila atendiendo a las restricciones que se presentan al asignar las posibles filas sucesoras a las que se van colocando.

3.3.1 Restricciones en las filas sucesoras

Sea un diseño 2^5 y elijamos un número de orden (correspondiente a la matriz en orden estándar) para el primer experimento a realizar (el que figura en primer lugar en la matriz de diseño). Supongamos que ese primer número de orden es el 10. Si

¹⁴ De León, G. (2004) "Análisis y Propuestas Sobre Algunos Aspectos de la Aplicación del Diseño de Experimentos en la Industria"

deseamos que la matriz del diseño presente el mínimo número de cambios, no podemos poner en la segunda fila cualquier otro orden tomado al azar.

Efectivamente, para que sólo haya un cambio entre la primera fila y la segunda, sólo se puede elegir entre las filas 9, 12, 14, 2 y 26, tal como se indica en la Tabla N° 54.

Tabla N° 54:

Posibles filas sucesoras a la número 10 para tener sólo un cambio en una y otra

| Orden de ejecución | Orden estándar | Factores | | | | |
|---------------------------------------|----------------|----------|----|----|----|----|
| | | A | B | C | D | E |
| 1 | 10 | 1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| Posibles órdenes para la segunda fila | 9 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| | 12 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| | 14 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| | 2 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| | 26 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 |

Elegiríamos una al azar, por ejemplo la 9, a continuación habría que elegir otra, de entre las posibles sucesoras de la 9, pero que no sea la 10 porque ya ha salido, y así hasta completar la matriz o llegar a una fila en la que no hay sucesores posibles porque ya todos se han utilizado en las filas anteriores, y en ese caso hay que descartar la secuencia y volver a empezar.

Las posibles sucesoras para cada fila, de forma que sólo se presente un cambio entre una y otra, se encuentran en la Tabla N° 55.

Tabla N° 55:

Posibles filas sucesoras para tener mínimo número de cambios en un diseño 2^5

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | - | - | - | 2 | + | - | - | - | - | 3 | - | + | - | - | - | 4 | + | + | - | - | - |
| 2 | + | - | - | - | - | 1 | - | - | - | - | - | 1 | - | - | - | - | - | 2 | + | - | - | - | - |
| 3 | - | + | - | - | - | 4 | + | + | - | - | - | 4 | + | + | - | - | - | 3 | - | + | - | - | - |
| 5 | - | - | + | - | - | 6 | + | - | + | - | - | 7 | - | + | + | - | - | 8 | + | + | + | - | - |
| 9 | - | - | - | + | - | 10 | + | - | - | + | - | 11 | - | + | - | + | - | 12 | + | + | - | + | - |
| 17 | - | - | - | - | + | 18 | + | - | - | - | + | 19 | - | + | - | - | + | 20 | + | + | - | - | + |
| 5 | - | - | + | - | - | 6 | + | - | + | - | - | 7 | - | + | + | - | - | 8 | + | + | + | - | - |
| 1 | - | - | - | - | - | 2 | + | - | - | - | - | 3 | - | + | - | - | - | 4 | + | + | - | - | - |
| 6 | + | - | + | - | - | 5 | - | - | + | - | - | 5 | - | - | + | - | - | 6 | + | - | + | - | - |
| 7 | - | + | + | - | - | 8 | + | + | + | - | - | 8 | + | + | + | - | - | 7 | - | + | + | - | - |
| 13 | - | - | + | + | - | 14 | + | - | + | + | - | 15 | - | + | + | + | - | 16 | + | + | + | + | - |
| 21 | - | - | + | - | + | 22 | + | - | + | - | + | 23 | - | + | + | - | + | 24 | + | + | + | - | + |
| 9 | - | - | - | + | - | 10 | + | - | - | + | - | 11 | - | + | - | + | - | 12 | + | + | - | + | - |
| 1 | - | - | - | - | - | 2 | + | - | - | - | - | 3 | - | + | - | - | - | 4 | + | + | - | - | - |
| 10 | + | - | - | + | - | 9 | - | - | - | + | - | 9 | - | - | - | + | - | 10 | + | - | - | + | - |
| 11 | - | + | - | + | - | 12 | + | + | - | + | - | 12 | + | + | - | + | - | 11 | - | + | - | + | - |
| 13 | - | - | + | + | - | 14 | + | - | + | + | - | 15 | - | + | + | + | - | 16 | + | + | + | + | - |
| 25 | - | - | - | + | + | 26 | + | - | - | + | + | 27 | - | + | - | + | + | 28 | + | + | - | + | + |
| 13 | - | - | + | + | - | 14 | + | - | + | + | - | 15 | - | + | + | + | - | 16 | + | + | + | + | - |
| 5 | - | - | + | - | - | 6 | + | - | + | - | - | 7 | - | + | + | - | - | 8 | + | + | + | - | - |
| 9 | - | - | - | + | - | 10 | + | - | - | + | - | 11 | - | + | - | + | - | 12 | + | + | - | + | - |
| 14 | + | - | + | + | - | 13 | - | - | + | + | - | 13 | - | - | + | + | - | 14 | + | - | + | + | - |
| 15 | - | + | + | + | - | 16 | + | + | + | + | - | 16 | + | + | + | + | - | 15 | - | + | + | + | - |
| 29 | - | - | + | + | + | 30 | + | - | + | + | + | 31 | - | + | + | + | + | 32 | + | + | + | + | + |
| 17 | - | - | - | - | + | 18 | + | - | - | - | + | 19 | - | + | - | - | + | 20 | + | + | - | - | + |
| 1 | - | - | - | - | - | 2 | + | - | - | - | - | 3 | - | + | - | - | - | 4 | + | + | - | - | - |
| 18 | + | - | - | - | + | 17 | - | - | - | - | + | 17 | - | - | - | - | + | 18 | + | - | - | - | + |
| 19 | - | + | - | - | + | 20 | + | + | - | - | + | 20 | + | + | - | - | + | 19 | - | + | - | - | + |
| 21 | - | - | + | - | + | 22 | + | - | + | - | + | 23 | - | + | + | - | + | 24 | + | + | + | - | + |
| 25 | - | - | - | + | + | 26 | + | - | - | + | + | 27 | - | + | - | + | + | 28 | + | + | - | + | + |
| 21 | - | - | + | - | + | 22 | + | - | + | - | + | 23 | - | + | + | - | + | 24 | + | + | + | - | + |
| 5 | - | - | + | - | - | 6 | + | - | + | - | - | 7 | - | + | + | - | - | 8 | + | + | + | - | - |
| 17 | - | - | - | - | + | 18 | + | - | - | - | + | 19 | - | + | - | - | + | 20 | + | + | - | - | + |
| 22 | + | - | + | - | + | 21 | - | - | + | - | + | 21 | - | - | + | - | + | 22 | + | - | + | - | + |
| 23 | - | + | + | - | + | 24 | + | + | + | - | + | 24 | + | + | + | - | + | 23 | - | + | + | - | + |
| 29 | - | - | + | + | + | 30 | + | - | + | + | + | 31 | - | + | + | + | + | 32 | + | + | + | + | + |
| 25 | - | - | - | + | + | 26 | + | - | - | + | + | 27 | - | + | - | + | + | 28 | + | + | - | + | + |
| 9 | - | - | - | + | - | 10 | + | - | - | + | - | 11 | - | + | - | + | - | 12 | + | + | - | + | - |
| 17 | - | - | - | - | + | 18 | + | - | - | - | + | 19 | - | + | - | - | + | 20 | + | + | - | - | + |
| 26 | + | - | - | + | + | 25 | - | - | - | + | + | 25 | - | - | - | + | + | 26 | + | - | - | + | + |
| 27 | - | + | - | + | + | 28 | + | + | - | + | + | 28 | + | + | - | + | + | 27 | - | + | - | + | + |
| 29 | - | - | + | + | + | 30 | + | - | + | + | + | 31 | - | + | + | + | + | 32 | + | + | + | + | + |
| 29 | - | - | + | + | + | 30 | + | - | + | + | + | 31 | - | + | + | + | + | 32 | + | + | + | + | + |
| 13 | - | - | + | + | - | 14 | + | - | + | + | - | 15 | - | + | + | + | - | 16 | + | + | + | + | - |
| 21 | - | - | + | - | + | 22 | + | - | + | - | + | 23 | - | + | + | - | + | 24 | + | + | + | - | + |
| 25 | - | - | - | + | + | 26 | + | - | - | + | + | 27 | - | + | - | + | + | 28 | + | + | - | + | + |
| 30 | + | - | + | + | + | 29 | - | - | + | + | + | 29 | - | - | + | + | + | 30 | + | - | + | + | + |
| 31 | - | + | + | + | + | 32 | + | + | + | + | + | 32 | + | + | + | + | + | 31 | - | + | + | + | + |

3.3.2 Algoritmo para la búsqueda de órdenes con sesgo mínimo

Esquemáticamente, el procedimiento utilizado sigue los pasos que a continuación se detallan:

- 1) Generar un número aleatorio entre 1 y 2^k . Este será el número de fila de la matriz en orden estándar, correspondiente al experimento que se realizará en primer lugar.
- 2) Identificar los posibles sucesores a la fila que aparece en primer lugar y elegir al azar uno de esos posibles sucesores.
- 3) De los posibles sucesores a la última fila seleccionada, eliminar los números de orden que ya se han asignado a filas anteriores. Si no quedan sucesores posibles volver al punto 1, si sí quedan, elegir uno al azar.
- 4) Cuando ya se han completado las 2^k filas, calcular los efectos e identificar el máximo en valor absoluto.
- 5) Guardar (de forma tabulada, para que no ocupe mucho espacio) el sesgo obtenido. Si dicho sesgo está por debajo de un cierto valor que se considera interesante, guardar también el orden que conduce a ese sesgo.
- 6) Volver al punto 1 hasta finalizar todas las iteraciones deseadas.

3.3.3 Resultados obtenidos

Diseños con 32 experimentos

Se han generado 50 000 000 de órdenes con el mínimo número de cambios de nivel. El menor sesgo obtenido es 5.25.

Diseños con 64 experimentos

Para 64 experimentos se ha generado un total de 10.000.000 de órdenes. El valor mínimo para el sesgo es igual a 8.25. Por debajo de 10.5 (valor que obtendríamos duplicando el mejor orden obtenido para 32 experimentos).

Se ha obtenido una sola ordenación, que da el sesgo mínimo. Esta es la que se indica en la Tabla N° 56.

Tabla N° 56:

Único orden obtenido que proporciona el mínimo sesgo hallado con el mínimo número de cambios para un diseño con 64 experimentos

| Posición # Orden | Posición # Orden | Posición # Orden | Posición # Orden |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1 44 | 17 4 | 33 28 | 49 25 |
| 2 48 | 18 36 | 34 20 | 50 57 |
| 3 64 | 19 34 | 35 19 | 51 59 |
| 4 63 | 20 38 | 36 3 | 52 60 |
| 5 47 | 21 54 | 37 1 | 53 52 |
| 6 45 | 22 22 | 38 2 | 54 56 |
| 7 13 | 23 30 | 39 18 | 55 40 |
| 8 15 | 24 26 | 40 17 | 56 8 |
| 9 7 | 25 58 | 41 21 | 57 24 |
| 10 39 | 26 50 | 42 29 | 58 32 |
| 11 35 | 27 49 | 43 61 | 59 16 |
| 12 33 | 28 51 | 44 62 | 60 14 |
| 13 41 | 29 55 | 45 46 | 61 6 |
| 14 43 | 30 23 | 46 42 | 62 5 |
| 15 11 | 31 31 | 47 10 | 63 37 |
| 16 12 | 32 27 | 48 9 | 64 53 |

Diseños con 128 experimentos

De manera similar se procedió a la búsqueda de órdenes con el mínimo número de cambios de nivel en los diseños con 128 experimentos. En este se han generado solo 1000 órdenes, el sesgo mínimo obtenido por este método (igual a 17.625) es mayor que el doble del obtenido para el diseño con 64 experimentos (igual a 8.25) por lo cual este método de búsqueda no ha proporcionado resultados relevantes para este tipo de diseños.

Resumen de resultados obtenidos

Tras aplicar el método de la búsqueda aleatoria con restricciones, la situación en cuanto a los sesgos mínimos es la que se indica en la Tabla N° 57. Puede observarse que para diseños de 32 y 64 experimentos se ha obtenido un resultado mejor al que resultaría de duplicar el obtenido en un diseño con un factor menos.

Tabla N° 57:

Resumen de sesgos obtenidos

| Nro. de Experimentos | Sesgo Obtenido | |
|----------------------|--|---------------------------------------|
| | Expansión del diseño anterior (Método de Duplicación) | Búsqueda aleatoria con restricción |
| 32 | 8 | 5.25 |
| 64 | 10.5 | 8.25 |
| 128 | 16.5 | 17.625 |

Sin embargo, en ningún caso existe garantía de que estos sesgos sean los mínimos posibles. La deducción teórica de cuáles son esos valores mínimos para cada tipo de diseño es una tarea que ha demostrado ser inviable incluso para diseños con un menor número de experimentos (véase de León 2004), de manera que la única forma de identificar los mínimos absolutos es a través de la generación exhaustiva de todos los órdenes posibles.

3.4 BÚSQUEDA EXHAUSTIVA DE ÓRDENES SEMILLA¹⁵

A. W. Dickinson publicó en 1974 un algoritmo que permite explorar de forma exhaustiva todos los órdenes de un diseño factorial con mínimo número de cambios, aunque el desarrollo de la informática en esa época restringía sus posibilidades de aplicación más allá de diseños muy pequeños.

3.4.1 Algoritmo de Dickinson

La característica más destacable de este algoritmo, y la que hace viable su aplicación, es que reduce la búsqueda de los órdenes a un grupo estratégico a partir del cual se pueden deducir todos los demás. Los órdenes que se encuentra son los que llamamos “órdenes semilla”, ya que a partir de cada uno de estos órdenes se pueden obtener órdenes adicionales, que presentan las mismas características en cuanto a sesgo y número de cambios, a base de permutar el orden de las columnas de la matriz de diseño y/o multiplicar por -1 algunas de ellas.

¹⁵ Dickinson, A. W. (1974) “Some Run Orders Requiring a Minimum Number of Factor Level Changes for the 2^4 and 2^5 Main Effect Plans”.

Para obtener sólo órdenes semilla y evitar redundancias en la búsqueda, el algoritmo de Dickinson obliga a que la búsqueda se realice con las siguientes restricciones:

1. Solo debe haber un cambio de signo entre una fila y la siguiente. Evidentemente esto debe ser así para asegurar el mínimo número de cambios en los niveles de los factores.
2. Debe darse una secuencia determinada en las filas que presentan un solo signo positivo. En concreto, exige que los signos positivos se vayan desplazando de izquierda a derecha, lo cual corresponde a la secuencia 2, 3, 5, 9 y 17 para un diseño 2^5 .

Tabla N° 58:

Secuencia de órdenes a que obliga el algoritmo de Dickinson en un diseño 2^5

| Orden | Factores | | | | |
|-------|----------|----|----|----|----|
| | A | B | C | D | E |
| 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | ① | -1 | -1 | -1 | -1 |
| ... | | | | | |
| 3 | -1 | ① | -1 | -1 | -1 |
| ... | | | | | |
| 5 | -1 | -1 | ① | -1 | -1 |
| ... | | | | | |
| 9 | -1 | -1 | -1 | ① | -1 |
| ... | | | | | |
| 17 | -1 | -1 | -1 | -1 | ① |
| ... | | | | | |

De esta forma se asegura que no se obtienen órdenes que se podrían deducir unos de otros a base de permutar el orden de las columnas. Forzando esta secuencia se obtiene una sola de entre todas las que pueden obtenerse permutando las columnas.

3. La primera fila solo debe incluir signos negativos. Es decir, es la que corresponde a la primera posición en el orden estándar.

De esta forma se asegura que no se obtienen dos órdenes que se puedan deducir uno del otro a base de multiplicar por -1 alguna columna.

Esquemáticamente, el procedimiento del este algoritmo sigue los pasos que a continuación se detallan:

- Se fijan las primeras dos filas. Las restricciones comentadas anteriormente imponen que estas filas siempre sean la 1 y la 2 del orden estándar.
- Se buscan las posibles filas sucesoras (que cumplan con las restricciones impuestas) a partir de la segunda fila. De esta forma se genera una primera ordenación de forma similar a como se hacía en la búsqueda aleatoria con restricciones, con la condición añadida de la secuencia en las filas que tienen un solo signo positivo.
- Una vez obtenido el primer orden se inicia una generación exhaustiva de órdenes evaluando todos los posibles sucesores de las filas empezando por abajo y hasta llegar a la fila 2, momento en que ya se han generado todos los órdenes semilla.

Aplicación del algoritmo de Dickinson

Para ilustrar el funcionamiento de este algoritmo, veamos como funcionaría aplicado a un diseño 2^3 . En primer lugar hay que plantear la lista de posibles sucesores para cada fila, estos sucesores son los que se indican en la Tabla N° 59.

Tabla N° 59:

Posibles sucesores de cada una de las filas en un diseño 2^3

| Número de fila | Posibles filas sucesoras (en el orden estándar de la matriz de diseño) |
|----------------|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 - 6 |
| 3 | 4 - 7 |
| 4 | 3 - 8 |
| 5 | 6 - 7 |
| 6 | 5 - 8 |
| 7 | 3 - 5 - 8 |
| 8 | 4 - 6 - 7 |

A continuación, veamos cómo se van seleccionando los números de fila para determinar la primera ordenación (selección de las filas de arriba abajo).

Filas en las posiciones 1 y 2:

Siempre son las 1 y 2 en el orden estándar de la matriz de diseño

| Posición de la fila | Números de fila (orden estándar) |
|---------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| ⋮ | ⋮ |

Filas en la posición 3:

Posibles sucesores de la fila 2 (en el orden estándar) son la 4 y la 6. Elegimos la 4

| Posición de la fila | Números de fila (orden estándar) |
|---------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| ⋮ | ⋮ |

Fila en las posición 4:

Posibles sucesores de la fila 4 son la 3 y la 8. Elegimos la 3. Esta ordenación ya cumplirá la condición de que aparezca primero la fila 3 que la 5.

| Posición de la fila | Números de fila (orden estándar) |
|---------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| ⋮ | ⋮ |

Fila en la posición 5:

Posibles sucesores de la fila 3 son la 4 y la 7. Elegimos la 7 porque la 4 ya ha salido.

| Posición de la fila | Números de fila (orden estándar) |
|---------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | 7 |
| ⋮ | ⋮ |

Fila en la posición 6:

Posibles sucesores de la fila 7 son la 3, la 5 y la 8. Elegimos la 5 porque la 3 ya ha salido.

| Posición de la fila | Números de fila (orden estándar) |
|---------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | 7 |
| 6 | 5 |
| ⋮ | ⋮ |

Filas en las posición 7:

Posibles sucesores de la fila 5 son la 6 y la 7. Elegimos la 6.

| Posición de la fila | Números de fila (orden estándar) |
|---------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | 7 |
| 6 | 5 |
| 7 | 6 |
| ⋮ | ⋮ |

Filas en las posición 8:

Posibles sucesores de la fila 6 son la 5 y la 8. Como la 5 ya ha salido, elegimos la 8.

| Posición de la fila | Números de fila (orden estándar) |
|---------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |
| 5 | 7 |
| 6 | 5 |
| 7 | 6 |
| 8 | 8 |

En este caso de los diseños 2^3 se completa la primera ordenación sin tener que volver hacia atrás. Para diseños con mayor número de factores puede ocurrir que con los sucesores que se van seleccionando se llegue a una posición de fila en que los sucesores posibles no se pueden usar porque ya han aparecido todos en filas anteriores. En este caso hay que volver hacia atrás y cambiar la selección en la primera fila que se encuentra en la que se ha seleccionado un sucesor pero había otros posibles.

Una vez que tenemos la primera ordenación completada, nos situamos en la antepenúltima¹⁶ fila y observamos si había otras alternativas posibles. Si en esta fila no se puede cambiar de sucesor, se va subiendo hasta llegar a una fila en la que este cambio es posible. En nuestro ejemplo, hay que subir a la fila 6 y cambiar el sucesor fila 5 por el sucesor fila 8, y explorar todas las posibilidades de este cambio hacia abajo.

Siguiendo con el mismo procedimiento, después de completar la segunda ordenación subimos y vamos explorando las alternativas que hemos dejado. En nuestro caso, en la fila 4, cambiando del sucesor fila 3 al sucesor fila 8 se entra en un camino que no se puede finalizar (llega un momento en que no hay sucesores posibles). En la fila 3 sí se puede cambiar del sucesor fila 4 a la fila 6 y se llega a una nueva ordenación que también cumple el requisito de mínimo número de cambios. En la siguiente tabla se resume el camino seguido en la primera ordenación de arriba abajo.

Tabla N° 60:

Selección de números de fila hasta completar la primera ordenación (de arriba abajo)

| Posición de la fila | Posibles Números de fila | Números de fila (orden estándar) |
|---------------------|--------------------------|----------------------------------|
| 1 | ① | 1 |
| 2 | ② | 2 |
| 3 | ④ 6 | 4 |
| 4 | ③ 8 | 3 |
| 5 | 4 ⑦ | 7 |
| 6 | 3 ⑤ 8 | 5 |
| 7 | ⑥ 7 | 6 |
| 8 | 5 ⑧ | 8 |

¹⁶ ¿Por qué la antepenúltima? Seguro que para la penúltima se ha seleccionado el único sucesor disponible (evidentemente, es imposible que hayan dos opciones para colocar en la última fila)

Después de la primera ordenación, retrocedemos hasta la primera fila que encontramos en que es posible cambiar el sucesor. En nuestro caso retrocedemos hasta la posición de la fila 6 y cambiamos el sucesor 5 por el 8. A continuación volvemos hacia abajo igual que si fuera la primera ordenación.

Tabla N° 61:

Tras completar la primera ordenación, retrocede hasta la posición 6, cambia el sucesor y sigue.

| Posición de la fila | Posibles Números de fila | Números de fila (orden estándar) | |
|---------------------|--------------------------|----------------------------------|--|
| 1 | ① | 1 | |
| 2 | ② | 2 | |
| 3 | ④ 6 | 4 | |
| 4 | ③ 8 | 3 | |
| 5 | ⑦ | 7 | Primera opción (empezando desde abajo en el proceso de cambiar el sucesor) |
| 6 | ⑤ ⑧ | 8 | |
| 7 | ⑥ | 6 | |
| 8 | ⑤ ⑧ | 5 | |

Después de encontrar esta segunda ordenación, retrocedemos igual que cuando encontramos la primera hasta encontrar una fila en que se puede cambiar de sucesor. Se puede cambiar en la posición de fila 4, cambiando la fila 3 por la 8, pero si se realiza este cambio no se consigue completar la ordenación (se llega a una fila en la que no hay sucesores posibles). Sin embargo, cambiando en la posición de la fila 3 el sucesor fila 4 por el fila 6, se completa un nuevo orden tal como se ilustra en la Tabla N° 62.

Tabla N° 62:

Nuevo orden cambiando el sucesor en la posición de la fila 3. No se puede elegir el sucesor fila 5 en la posición de la fila 4 por la restricción impuesta en el orden de las filas que tienen un solo signo positivo.

| Posición de la fila | Posibles Números de fila | Números de fila (orden estándar) | |
|---------------------|--------------------------|----------------------------------|-------------------|
| 1 | ① | 1 | |
| 2 | ② | 2 | |
| 3 | ④ ⑥ | 6 | Cambio de sucesor |
| 4 | ⑧ | 8 | |
| 5 | ④ ⑦ | 4 | |
| 6 | ③ ⑧ | 3 | |
| 7 | ⑦ | 7 | |
| 8 | ⑤ ⑧ | 5 | |

Después de encontrar esta última ordenación podríamos seguir con el procedimiento subiendo hasta la posición 5 y cambiando el sucesor fila 4 por el fila 7 pero tras realizar este cambio no se logra completar ninguna nueva ordenación.

En este caso ya se han encontrado los únicos 3 órdenes semilla que producen el mínimo número de cambios. El último de ellos tiene, además, sesgo mínimo, y este es el orden semilla de los 48 órdenes existentes con las propiedades deseadas de mínimo número de cambios y mínimo sesgo.

3.4.2 Resultados obtenidos

Diseño con 32 experimentos

Para 32 experimentos el método ha resultado un éxito y ha permitido obtener todos los órdenes semilla para diseños con mínimo número de cambios.

En total se han obtenido $N = 48\ 828\ 036$ órdenes semilla, lo cual significa que existen un total de $187\ 499\ 658\ 240$ órdenes que presentan el mínimo número de cambios ($N \cdot 2^k \cdot k!$).

Este número es muy grande, pero representa una proporción muy pequeña $\frac{48828036 \cdot 2^5 \cdot 5!}{32!} = 7.13 \cdot 10^{-25}$ respecto al total de órdenes posibles (32!).

De todos los órdenes semilla obtenidos sólo 2 presentan el mínimo sesgo. A partir de estos 2 se pueden obtener $2 \cdot 2^5 \cdot 5! = 7680$ órdenes, lo cual representa una proporción de $2.92 \cdot 10^{-32}$ respecto al total de órdenes posibles. En la Tabla N° 63 se presentan estos dos órdenes que poseen el mínimo número de cambios de nivel (31) y el mínimo sesgo máximo en valor absoluto (4.75).

Tabla N° 63:

Órdenes semilla con el mínimo número de cambios de nivel y el mínimo sesgo máximo en diseños con 32 experimentos, hallados por búsqueda exhaustiva

| Ordenación 1 | | | | Ordenación 2 | | | |
|--------------|---------|----------|---------|--------------|---------|----------|---------|
| Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden |
| 1 | 1 | 17 | 30 | 1 | 1 | 17 | 16 |
| 2 | 2 | 18 | 26 | 2 | 2 | 18 | 15 |
| 3 | 4 | 19 | 28 | 3 | 18 | 19 | 7 |
| 4 | 8 | 20 | 27 | 4 | 22 | 20 | 5 |
| 5 | 16 | 21 | 31 | 5 | 30 | 21 | 13 |
| 6 | 12 | 22 | 23 | 6 | 29 | 22 | 9 |
| 7 | 11 | 23 | 19 | 7 | 25 | 23 | 10 |
| 8 | 15 | 24 | 3 | 8 | 27 | 24 | 26 |
| 9 | 13 | 25 | 7 | 9 | 19 | 25 | 28 |
| 10 | 29 | 26 | 5 | 10 | 3 | 26 | 20 |
| 11 | 21 | 27 | 6 | 11 | 11 | 27 | 24 |
| 12 | 22 | 28 | 14 | 12 | 12 | 28 | 32 |
| 13 | 18 | 29 | 10 | 13 | 4 | 29 | 31 |
| 14 | 20 | 30 | 9 | 14 | 8 | 30 | 23 |
| 15 | 24 | 31 | 25 | 15 | 6 | 31 | 21 |
| 16 | 32 | 32 | 17 | 16 | 14 | 32 | 17 |

Se obtuvo que el sesgo máximo que presentan los órdenes con el mínimo número de cambios de nivel en el diseño factorial con 32 experimentos se encuentra entre 4.75 y 16 (mínimo y máximo, respectivamente). Entre los sesgos de 4.75 a 8 se encuentran el 19% de los órdenes y entre 8.25 y 16 se concentran el 81% de los órdenes.

Este método no ha funcionado para diseños con 64 ni 128 experimentos.

3.5 ALGORITMO DE DICKINSON CON ALIMENTACIÓN FORZADA¹⁷

El problema del algoritmo de Dickinson, tal y como ha sido implementado anteriormente, es que debido al orden en que se han introducido los sucesores de cada fila, de menor a mayor, la primera ordenación que se encuentra (en torno a la cual se van realizando los cambios) da un sesgo muy grande.

¹⁷ Dickinson, A. W. (1974) "Some Run Orders Requiring a Minimum Number of Factor Level Changes for the 2^4 and 2^5 Main Effect Plans". *Technometrics*

Si realmente fuera posible la búsqueda exhaustiva este hecho no tendría importancia ya que aun partiendo de un sesgo malo, al final se encontraría la ordenación que da el menor posible. Pero como en la práctica esa exhaustividad no es posible para diseños con 64 o más experimentos.

La solución a este problema consiste en colocar los sucesores en un orden tal que la primera ordenación que encuentre sea la que proporciona el menor sesgo de todas las encontradas por los procedimientos utilizados anteriormente. De esta forma, realizando cambios sobre esa primera ordenación, que ya es buena, probablemente se obtengan otras mejores. A esta forma de proceder la hemos denominado “algoritmo de Dickinson con alimentación forzada”

3.5.1 Alimentación y resultados obtenidos para diseños con 64 experimentos

Con los métodos utilizados hasta ahora el mejor orden para diseños con 64 experimentos es el que proporciona un sesgo de 8.25 y es el que ha sido obtenido a través de la búsqueda aleatoria con restricciones (Tabla N° 56).

Para alimentar el algoritmo con este orden en primer lugar hay que identificar a que orden semilla corresponde. Para ello es necesario buscar la permutación que se debe realizar en los factores y cuáles de ellos hay que multiplicar por -1 para que cumpla con las restricciones de los órdenes semilla (empezar por las filas 1 y 2, y tener en orden creciente las que contienen un solo signo positivo).

En nuestro caso los factores quedan de la siguiente forma:

C -A -F -D -B E

Y conducen al orden semilla que se indica en la Tabla N° 64.

Tabla N° 64:

Orden inicial para el algoritmo de Dickinson en diseños con 64 experimentos

| Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden |
|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 1 | 1 | 17 | 13 | 33 | 37 | 49 | 55 |
| 2 | 2 | 18 | 9 | 34 | 45 | 50 | 51 |
| 3 | 34 | 19 | 25 | 35 | 47 | 51 | 35 |
| 4 | 36 | 20 | 26 | 36 | 15 | 52 | 33 |
| 5 | 4 | 21 | 58 | 37 | 31 | 53 | 41 |
| 6 | 20 | 22 | 62 | 38 | 29 | 54 | 42 |
| 7 | 24 | 23 | 54 | 39 | 61 | 55 | 10 |
| 8 | 8 | 24 | 53 | 40 | 63 | 56 | 14 |
| 9 | 16 | 25 | 49 | 41 | 64 | 57 | 46 |
| 10 | 12 | 26 | 57 | 42 | 56 | 58 | 38 |
| 11 | 11 | 27 | 59 | 43 | 52 | 59 | 6 |
| 12 | 27 | 28 | 43 | 44 | 50 | 60 | 22 |
| 13 | 19 | 29 | 44 | 45 | 18 | 61 | 30 |
| 14 | 3 | 30 | 48 | 46 | 17 | 62 | 32 |
| 15 | 7 | 31 | 40 | 47 | 21 | 63 | 28 |
| 16 | 5 | 32 | 39 | 48 | 23 | 64 | 60 |

Para que este orden sea el primero en ser obtenido, es necesario que en la lista de posibles sucesores de cada fila se coloque en primer lugar aquel que conduce a la ordenación buscada.

A título de ejemplo, los sucesores de las filas 2 a la 10 (el sucesor de la fila 1 siempre es la 2) empleados en la primera versión del algoritmo de Dickinson son los que se indican en la Tabla N° 65 en los que el criterio ha sido, simplemente, colocarlos en orden creciente.

Tabla N° 65:

Posibles sucesores de las filas 2 a la 10 colocados en orden creciente (el utilizado en el algoritmo estándar)

| Fila | Posibles sucesores |
|------|---------------------|
| 2 | 4, 6, 10, 18, 34 |
| 3 | 4, 7, 11, 19, 35 |
| 4 | 3, 8, 12, 20, 36 |
| 5 | 6, 7, 13, 21, 37 |
| 6 | 5, 8, 14, 22, 38 |
| 7 | 3, 5, 8, 15, 23, 39 |
| 8 | 4, 6, 7, 16, 24, 40 |
| 9 | 10, 11, 13, 25, 41 |
| 10 | 9, 12, 14, 26, 42 |

Pero para obtener la ordenación deseada como orden de partida, los sucesores deben colocarse tal como se indica en la Tabla N° 66.

Si no existe un orden inferior al que se coloca en primer lugar, se coloca toda la secuencia en orden creciente, y si no existe un orden superior al primero, después del segundo se colocan el resto de sucesores en orden creciente, tal como ocurre para los sucesores de la fila 2.

Tabla N° 66:

Orden de colocación de los sucesores de cada fila

| Fila | 1er sucesor (el que conduce al orden de partida) | 2do sucesor (el inmediato inferior al orden de partida) | 3er sucesor (el inmediato superior al orden de partida) | Resto de sucesores |
|------|--|---|---|--------------------|
| 2 | 34 | 18 | | 1, 4, 6, 10 |
| 3 | 7 | 4 | 11 | 19, 35 |
| 4 | 20 | 12 | 36 | 3, 8 |
| 5 | 13 | 7 | 21 | 6, 37 |
| 6 | 22 | 14 | 38 | 5, 8 |
| 7 | 5 | 3 | 8 | 15, 23, 39 |
| 8 | 16 | 7 | 24 | 4, 6, 40 |
| 9 | 25 | 13 | 41 | 10, 11 |
| 10 | 14 | 12 | 26 | 9, 42 |

Se obtienen dos ordenaciones diferentes que dan un sesgo de 8. Estos órdenes de sesgo 8, que es el menor de todos los obtenidos, son los que se indican en la Tabla N° 67 (las 2 ordenaciones solo se diferencian en 4 posiciones).

Tabla N° 67:

Órdenes obtenidos que proporcionan el mínimo sesgo máximo hallado con el algoritmo de Dickinson con alimentación forzada para un diseño con 64 experimentos

| Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden |
|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 1 | 1 | 17 | 13 | 33 | 37 | 49 | 52 |
| 2 | 2 | 18 | 9 | 34 | 45 | 50 | 51 |
| 3 | 34 | 19 | 25 | 35 | 47 - 61 | 51 | 35 |
| 4 | 36 | 20 | 26 | 36 | 15 - 29 | 52 | 33 |
| 5 | 4 | 21 | 58 | 37 | 31 | 53 | 41 |
| 6 | 20 | 22 | 62 | 38 | 29 - 15 | 54 | 42 |
| 7 | 24 | 23 | 54 | 39 | 61 - 47 | 55 | 10 |
| 8 | 8 | 24 | 53 | 40 | 63 | 56 | 14 |
| 9 | 16 | 25 | 49 | 41 | 64 | 57 | 46 |
| 10 | 12 | 26 | 57 | 42 | 56 | 58 | 38 |
| 11 | 11 | 27 | 59 | 43 | 55 | 59 | 6 |
| 12 | 27 | 28 | 43 | 44 | 23 | 60 | 22 |
| 13 | 19 | 29 | 44 | 45 | 21 | 61 | 30 |
| 14 | 3 | 30 | 48 | 46 | 17 | 62 | 32 |
| 15 | 7 | 31 | 40 | 47 | 18 | 63 | 28 |
| 16 | 5 | 32 | 39 | 48 | 50 | 64 | 60 |

3.5.2 Alimentación y resultados obtenidos para diseños con 128 experimentos

Con los procedimientos aplicados hasta ahora, para diseños con 128 experimentos, el mejor sesgo se obtiene aplicando el método de duplicación al orden obtenido anteriormente para 64 experimentos. De esta forma, se obtiene una ordenación que produce un sesgo máximo de 16 (para 64 el sesgo era de 8).

Utilizando un procedimiento idéntico al planteando anteriormente para los diseños de 64 experimentos, se ha ejecutado el programa de búsqueda con una disposición de los sucesores de cada fila que hace que se encuentre inmediatamente el mejor orden disponible hasta el momento. De esta forma, al igual que en el caso anterior, se empiezan a buscar nuevas ordenaciones en torno a una que ya proporciona un buen resultado. Se hallaron 2 órdenes con un sesgo mínimo de 15.0625, la primera ordenación se presenta en la Tabla N° 68 y la segunda en la Tabla N° 69.

Tabla N° 68:

Uno de los órdenes que proporciona el mínimo sesgo máximo con el mínimo número de cambios para un diseño con 128 experimentos hallado con el algoritmo de Dickinson con alimentación forzada

| Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden |
|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 1 | 1 | 33 | 25 | 65 | 73 | 97 | 44 |
| 2 | 2 | 34 | 26 | 66 | 74 | 98 | 12 |
| 3 | 4 | 35 | 18 | 67 | 90 | 99 | 76 |
| 4 | 3 | 36 | 17 | 68 | 89 | 100 | 92 |
| 5 | 67 | 37 | 49 | 69 | 93 | 101 | 91 |
| 6 | 68 | 38 | 50 | 70 | 94 | 102 | 83 |
| 7 | 72 | 39 | 52 | 71 | 30 | 103 | 84 |
| 8 | 71 | 40 | 51 | 72 | 29 | 104 | 82 |
| 9 | 7 | 41 | 115 | 73 | 61 | 105 | 81 |
| 10 | 8 | 42 | 116 | 74 | 62 | 106 | 65 |
| 11 | 40 | 43 | 124 | 75 | 58 | 107 | 66 |
| 12 | 39 | 44 | 123 | 76 | 57 | 108 | 70 |
| 13 | 47 | 45 | 107 | 77 | 121 | 109 | 69 |
| 14 | 48 | 46 | 108 | 78 | 122 | 110 | 101 |
| 15 | 16 | 47 | 106 | 79 | 126 | 111 | 102 |
| 16 | 15 | 48 | 105 | 80 | 125 | 112 | 104 |
| 17 | 31 | 49 | 97 | 81 | 127 | 113 | 100 |
| 18 | 32 | 50 | 98 | 82 | 128 | 114 | 99 |
| 19 | 24 | 51 | 114 | 83 | 120 | 115 | 35 |
| 20 | 23 | 52 | 113 | 84 | 119 | 116 | 43 |
| 21 | 21 | 53 | 117 | 85 | 103 | 117 | 59 |
| 22 | 22 | 54 | 118 | 86 | 111 | 118 | 63 |
| 23 | 54 | 55 | 86 | 87 | 112 | 119 | 55 |
| 24 | 53 | 56 | 85 | 88 | 110 | 120 | 56 |
| 25 | 37 | 57 | 87 | 89 | 109 | 121 | 64 |
| 26 | 38 | 58 | 88 | 90 | 45 | 122 | 60 |
| 27 | 6 | 59 | 96 | 91 | 46 | 123 | 28 |
| 28 | 5 | 60 | 95 | 92 | 42 | 124 | 20 |
| 29 | 13 | 61 | 79 | 93 | 41 | 125 | 19 |
| 30 | 14 | 62 | 80 | 94 | 33 | 126 | 27 |
| 31 | 10 | 63 | 78 | 95 | 34 | 127 | 11 |
| 32 | 9 | 64 | 77 | 96 | 36 | 128 | 75 |

Tabla N° 69:

Uno de los órdenes que proporciona el mínimo sesgo máximo con el mínimo número de cambios para un diseño con 128 experimentos hallado con el algoritmo de Dickinson con alimentación forzada

| Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden | Posición | # Orden |
|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 1 | 1 | 33 | 25 | 65 | 73 | 97 | 103 |
| 2 | 2 | 34 | 26 | 66 | 74 | 98 | 101 |
| 3 | 4 | 35 | 18 | 67 | 90 | 99 | 69 |
| 4 | 3 | 36 | 17 | 68 | 89 | 100 | 65 |
| 5 | 67 | 37 | 49 | 69 | 93 | 101 | 81 |
| 6 | 68 | 38 | 50 | 70 | 94 | 102 | 83 |
| 7 | 72 | 39 | 52 | 71 | 30 | 103 | 91 |
| 8 | 71 | 40 | 51 | 72 | 29 | 104 | 75 |
| 9 | 7 | 41 | 115 | 73 | 61 | 105 | 76 |
| 10 | 8 | 42 | 116 | 74 | 62 | 106 | 92 |
| 11 | 40 | 43 | 124 | 75 | 58 | 107 | 84 |
| 12 | 39 | 44 | 123 | 76 | 57 | 108 | 82 |
| 13 | 47 | 45 | 107 | 77 | 121 | 109 | 66 |
| 14 | 48 | 46 | 108 | 78 | 122 | 110 | 70 |
| 15 | 16 | 47 | 106 | 79 | 126 | 111 | 102 |
| 16 | 15 | 48 | 105 | 80 | 125 | 112 | 104 |
| 17 | 31 | 49 | 97 | 81 | 127 | 113 | 100 |
| 18 | 32 | 50 | 98 | 82 | 119 | 114 | 99 |
| 19 | 24 | 51 | 114 | 83 | 120 | 115 | 35 |
| 20 | 23 | 52 | 113 | 84 | 128 | 116 | 43 |
| 21 | 21 | 53 | 117 | 85 | 112 | 117 | 11 |
| 22 | 22 | 54 | 118 | 86 | 110 | 118 | 12 |
| 23 | 54 | 55 | 86 | 87 | 46 | 119 | 28 |
| 24 | 53 | 56 | 85 | 88 | 42 | 120 | 60 |
| 25 | 37 | 57 | 87 | 89 | 44 | 121 | 64 |
| 26 | 38 | 58 | 88 | 90 | 36 | 122 | 56 |
| 27 | 6 | 59 | 96 | 91 | 34 | 123 | 55 |
| 28 | 5 | 60 | 95 | 92 | 33 | 124 | 63 |
| 29 | 13 | 61 | 79 | 93 | 41 | 125 | 59 |
| 30 | 14 | 62 | 80 | 94 | 45 | 126 | 27 |
| 31 | 10 | 63 | 78 | 95 | 109 | 127 | 19 |
| 32 | 9 | 64 | 77 | 96 | 111 | 128 | 20 |

3.6 RESUMEN. MEJORES SESGOS ENCONTRADOS

Tabla N° 70:

Mejores órdenes hallados para cada tipo de diseño y procedimiento por el que han sido encontrados

| Número de experimentos | Conocido | Expansión del mejor orden del diseño anterior (Método de Duplicación) | SESGOS | | |
|------------------------|----------|---|--------------------------------------|----------------------|--|
| | | | Búsqueda aleatoria sin restricciones | Búsqueda Exhaustiva | Búsqueda exhaustiva con alimentación forzada |
| 8 | 2 | - | - | Expansión | - |
| 16 | 4 | 4 | - | - | - |
| 32 | - | 8 | 5.25 | 4.75 | - |
| 64 | - | 9.5 | 8.25 | Alimentación forzada | 8 |
| 128 | - | 16 | 17.625 | - | 15.0625 |

Para diseños con 32 experimentos se ha obtenido el mínimo sesgo posible realizando una búsqueda exhaustiva con el algoritmo de Dickinson. Para diseños con mayor número de experimentos esta estrategia no es viable porque las posibles ordenaciones crecen de forma exponencial y el tiempo de computación se hace demasiado grande. Para encontrar buenos órdenes a pesar de esa limitación, se ha forzado que el algoritmo genere en primer lugar el mejor orden de los que se habían obtenido hasta el momento, para que explorando en torno a ese orden se puedan encontrar otros mejores.

En el caso de diseños con 64 experimentos el orden de alimentación es el que se ha obtenido utilizando la estrategia de búsqueda aleatoria con restricciones, logrando pasar del sesgo 8.25 del orden de alimentación a 8.0 para el mejor orden obtenido.

Para diseños con 128 experimentos la mejor ordenación se obtiene al expandir el mejor orden obtenido para diseños con 64 experimentos. Así se consigue una ordenación que da un sesgo de 16, que tras pasar por el algoritmo de Dickinson con alimentación forzada se ha transformado en un orden con el sesgo de 15.0625.

3.7 OBTENCIÓN DE NUEVOS ÓRDENES A PARTIR DE LOS ÓRDENES SEMILLA

Una vez obtenido un orden, al que llamamos “orden semilla”, que cumple las propiedades de mínimo número de cambios en los factores y mínimo sesgo máximo en valor absoluto, es posible deducir a partir de éste nuevos órdenes que cumplan igualmente con esas propiedades. Para diseños con 4, 8, 16, 32, 64 y 128 experimentos se han deducido los órdenes semilla. La Tabla N° 71 muestra la situación en que nos encontramos.

Tabla N° 71:
Órdenes semilla obtenidos

| # Exp. | # Órdenes semilla | Comentarios |
|--------|-------------------|--|
| 4 | 1 | Fácil de deducir. Solo existen un total de 24 órdenes. |
| 8 | 1 | En el trabajo de de León (2004) aparecen todos los órdenes que se pueden deducir de esta semilla. Estos órdenes son todos, y a la vez los únicos, que tienen las propiedades deseadas. |
| 16 | 16 | En el trabajo de de León (2004) aparecen estos 16 órdenes semilla. A partir de estos se pueden deducir todos los órdenes que tienen las propiedades deseadas. |
| 32 | 2 | Obtenidos utilizando el algoritmo de Dickinson para la búsqueda exhaustiva. |
| 64 | 2 | Obtenidos utilizando el algoritmo de Dickinson con alimentación forzada. El orden de alimentación ha sido obtenido por el método de la búsqueda aleatoria con restricciones. |
| 128 | 2 | Obtenidos utilizando el algoritmo de Dickinson con alimentación forzada. El orden de alimentación ha sido obtenido por duplicación de uno de los mejores órdenes obtenidos para 64 experimentos. |

Tal como se justifica más adelante, si para un diseño 2^k se tiene un orden que cumpla con las propiedades deseadas, a partir de este se pueden deducir otros $k!2^k$ con las mismas propiedades. Esta posibilidad de deducir nuevos órdenes a partir de uno dado permite que la selección del orden en que finalmente se realizará la experimentación no se realice sólo entre los pocos órdenes que se hayan encontrado con las propiedades deseadas, sino que se podrá seleccionar uno al azar de entre un gran conjunto.

En esta segunda parte se presenta cómo deducir los nuevos órdenes a través de un método que tiene ciertas peculiaridades, y se detalla también la forma de implementar este procedimiento en el paquete de software estadístico Minitab.

3.7.1 Método de la columna de expansión

Entre un orden con las propiedades deseadas (mínimo número de cambios y mínimo sesgo máximo en valor absoluto) en un diseño 2^k y otro orden con las mismas propiedades en un diseño 2^{k+1} puede definirse lo que hemos denominado “columna de expansión” que sirve para pasar de uno a otro. En este apartado veremos su construcción, las propiedades en que se basa y las posibilidades que presenta.

3.7.1.1 Paso de un diseño 2^2 a otro 2^3

Los diseños 2^2 son muy sencillos y todos los órdenes en que se pueden presentar (4!) pueden estudiarse rápidamente de forma exhaustiva. Se puede comprobar que los únicos órdenes que presentan el mínimo número de cambios son los que aparecen en la Tabla N° 72. En este caso no tiene sentido hablar de mínimo sesgo máximo en valor absoluto (msma), ya que para todos los órdenes se tiene el mismo valor.

Tabla N° 72:

Órdenes de experimentación en el diseño 2^2 que presentan el mínimo número de cambios (todos los órdenes de este diseño tienen el mismo msma).

| Orden 1 | Orden 2 | Orden 3 | Orden 4 | Orden 5 | Orden 6 | Orden 7 | Orden 8 |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 1 | 4 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 4 | 1 | 1 | 4 | 3 | 2 |

Tomemos un diseño 2^3 en el orden que aparece en primer lugar en la tabla de de León (2004), ver Anexo A. Este diseño se puede considerar como un diseño 2^2 replicado para los 2 primeros factores, tal como se muestra en la Tabla N° 73.

Tabla N° 73:

Diseño 2^3 que cumple con las propiedades deseadas visto como un 2^2 replicado

| | Orden | Factores | | | |
|------------------------|-------------------------|----------|----|----|----|
| | Estándar | A | B | C | |
| Primer diseño 2^2 | 1 | -1 | -1 | -1 | |
| | 2 | 1 | -1 | -1 | |
| | 6 | 1 | -1 | 1 | |
| | 8 | 1 | 1 | 1 | |
| | Segundo diseño 2^2 | 4 | 1 | 1 | -1 |
| | | 3 | -1 | 1 | -1 |
| | | 7 | -1 | 1 | 1 |
| | | 5 | -1 | -1 | 1 |
| | Cambios | 2 | 2 | 3 | |

Sobre este sencillo ejemplo se pueden hacer las siguientes consideraciones, fácilmente generalizables.

- 1 El primer diseño corresponde a las filas que tienen signo – en el tercer factor, y el segundo diseño corresponde a las filas que tienen signo + en ese último factor. Evidentemente esto siempre es así. Un diseño 2^k se puede ver como un diseño 2^{k-1} replicado, sea cual fuere el factor que se elimina. Esto es un caso particular de la propiedad proyectiva de los diseños factoriales.
- 2 Uno de los diseños 2^2 contiene las 4 primeras filas (en el orden estándar de matriz de diseño) del diseño 2^3 , y el otro diseño 2^2 contiene las otras 4. En general, pensemos en el orden estándar de la matriz de un diseño 2^k . Las 2^{k-1} primeras filas corresponden a los signos – del último factor. Por tanto, siempre tendremos un diseño 2^{k-1} completo en las 2^{k-1} primeras filas para los $k-1$ primeros factores.
- 3 Las réplicas están alejadas 4 unidades en la escala de orden de la matriz de diseño. Efectivamente, la matriz de un diseño 2^3 está constituida por 2 matrices idénticas para los 2 primeros factores, de forma que para esos 2 primeros factores la fila 1 (primera fila con signo – en el tercer factor) es idéntica a la fila 5 (primera fila con signo + en el tercer factor) y así sucesivamente. En general, considerando solo los

$k-1$ primeros factores de un diseño 2^k , y siendo i una de las primeras filas de la $\frac{2^k}{2}$ filas de la matriz de diseño en orden estándar, tendremos que para esos $k-1$ primeros factores, la fila i coincidirá con la fila $\frac{2^k}{2} + i$.

En la Tabla N° 73 el primer diseño 2^2 presenta un orden que tiene las propiedades deseadas (es el primero que aparece en la Tabla N° 72) y a la vista de las propiedades comentadas puede definirse un procedimiento para pasar de ese diseño 2^2 al diseño 2^3 de la siguiente forma:

- En el diseño de partida (en nuestro ejemplo 2^2) definimos O_1, O_2, O_3 y O_4 como los números de fila de la matriz de diseño en orden estándar que corresponden a las filas 1, 2, 3, y 4 del orden de ejecución planteado. Es decir, O_1 es el número de orden (en la matriz de diseño en orden estándar) de la fila que aparece en primer lugar, O_2 es el de la segunda fila, etc. En nuestro ejemplo, $O_1 = 1, O_2 = 2, O_3 = 4$ y $O_4 = 3$.
- Partiendo de los órdenes del diseño 2^2 definimos una columna de expansión tal como se indica en la Tabla N° 74 para pasar a los órdenes del diseño 2^3 .

Tabla N° 74:

Columna de expansión para pasar del diseño 2^2 al diseño 2^3

| Orden de partida Diseño 2^2 | Columna de expansión | Nuevo orden Diseño 2^3 |
|----------------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| | O_1 | 1 |
| | O_2 | 2 |
| 1 | O_2+4 | 6 |
| 2 | O_3+4 | 8 |
| 4 | O_3 | 4 |
| 3 | O_4 | 3 |
| | O_4+4 | 7 |
| | O_1+4 | 5 |

Puede observarse que en la columna de expansión, el cambio de un número de orden de la primera mitad a otro de la segunda mitad que viene correlativo en el orden de ejecución siempre es del tipo O_i y $O_i + 4$ ya que si una fila está en la primera mitad de la matriz de diseño en orden estándar, y la otra fila está en la segunda mitad, seguro que cambia el signo del tercer factor, y como solo puede cambiar un signo entre dos filas consecutivas, los demás signos deberán ser iguales.

La lista de asignación de órdenes de la Tabla N° 74 puede aplicarse a todos los órdenes de diseños 2^2 que cumplan con las propiedades deseadas, tal como se indica en la Tabla N° 75.

Tabla N° 75:

Aplicación de una columna de expansión a todos los órdenes elegidos del diseño 2^2

| Orden de partida Diseño 2^2 | Columna de expansión | Nuevo orden Diseño 2^3 |
|----------------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| | O_1 | 1 1 2 2 3 3 4 4 |
| | O_2 | 2 3 1 4 4 1 2 3 |
| 1 1 2 2 3 3 4 4 | O_2+4 | 6 7 5 8 8 5 6 7 |
| 2 3 1 4 4 1 2 3 | O_3+4 | 8 8 7 7 6 6 5 5 |
| 4 4 3 3 2 2 1 1 | O_3 | 4 4 3 3 2 2 1 1 |
| 3 2 4 1 1 4 3 2 | O_4 | 3 2 4 1 1 4 3 2 |
| | O_4+4 | 7 6 8 5 5 8 7 6 |
| | O_1+4 | 5 5 6 6 7 7 8 8 |

De forma totalmente análoga a la que hemos visto, en vez de colocar los números de orden del diseño 2^2 en las filas correspondientes a los signos - del tercer factor, los podemos colocar en los signos +, obteniéndose una columna de expansión complementaria a la anterior, y que aplicada a los órdenes de partida permite obtener otros 8 órdenes para un diseño 2^3 , todos ellos con las propiedades deseadas.

Tabla N° 76:

Columna de expansión complementaria a la que aparece en la Tabla N° 74

| Orden de partida Diseño 2^2 | Columna de expansión | Nuevo orden Diseño 2^3 |
|----------------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| | O_1+4 | 5 5 6 6 7 7 8 8 |
| | O_4+4 | 7 6 8 5 5 8 7 6 |
| 3 2 4 1 1 4 3 2 | O_4 | 3 2 4 1 1 4 3 2 |
| 4 4 3 3 2 2 1 1 | O_3 | 4 4 3 3 2 2 1 1 |
| 2 3 1 4 4 1 2 3 | O_3+4 | 8 8 7 7 6 6 5 5 |
| 1 1 2 2 3 3 4 4 | O_2+4 | 6 7 5 8 8 5 6 7 |
| | O_2 | 2 3 1 4 4 1 2 3 |
| | O_1 | 1 1 2 2 3 3 4 4 |

Si en vez de colocar en último lugar el factor C, colocamos el factor A o el B, de forma análoga podemos obtener nuevas columnas de expansión. En total se pueden obtener las 6 que figuran en la Tabla N° 77.

Tabla N° 77:

Columnas de expansión para pasar de diseños 2^2 a diseños 2^3 . El encabezado de cada columna indica que factor se coloca en último lugar, y si los órdenes del diseño 2^2 se asignan a los signos positivos o negativos de este último factor

| A- | A+ | B- | B+ | C- | C+ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| O_1 | O_1+4 | O_1 | O_1+4 | O_1 | O_1+4 |
| O_1+4 | O_1 | O_2 | O_2+4 | O_2 | O_4+4 |
| O_4+4 | O_2 | O_3 | O_3+4 | O_2+4 | O_4 |
| O_3+4 | O_3 | O_3+4 | O_1 | O_3+4 | O_3 |
| O_2+4 | O_4 | O_2+4 | O_2 | O_3 | O_3+4 |
| O_2 | O_4+4 | O_1+4 | O_3 | O_4 | O_2+4 |
| O_3 | O_3+4 | O_4+4 | O_4 | O_4+4 | O_2 |
| O_4 | O_2+4 | O_4 | O_4+4 | O_1+4 | O_1 |

Aplicando cada una de estas columnas de expansión (6 en total) a cada uno de los órdenes del diseño 2^2 con las propiedades deseadas (son 8), se tienen los 48 órdenes de un diseño 2^3 que igualmente presentan las propiedades deseadas, y que son los que aparecen en la tabla de de León (2004), ver Anexo A.

Tabla N° 78:

Órdenes de experimentación en un diseño 2^3 con las propiedades deseadas generados a partir de los 8 órdenes que reúnen esas propiedades en un diseño 2^2 y las 6 columnas de expansión

| A- | Órdenes | A+ | Órdenes |
|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
| O_1 | 1 1 2 2 3 3 4 4 | O_{1+4} | 5 5 6 6 7 7 8 8 |
| O_{1+4} | 5 5 6 6 7 7 8 8 | O_1 | 1 1 2 2 3 3 4 4 |
| O_{4+4} | 7 6 8 5 5 8 7 6 | O_2 | 2 3 1 4 4 1 2 3 |
| O_{3+4} | 8 8 7 7 6 6 5 5 | O_3 | 4 4 3 3 2 2 1 1 |
| O_{2+4} | 6 7 5 8 8 5 6 7 | O_4 | 3 2 4 1 1 4 3 2 |
| O_2 | 2 3 1 4 4 1 2 3 | O_{4+4} | 7 6 8 5 5 8 7 6 |
| O_3 | 4 4 3 3 2 2 1 1 | O_{3+4} | 8 8 7 7 6 6 5 5 |
| O_4 | 3 2 4 1 1 4 3 2 | O_{2+4} | 6 7 5 8 8 5 6 7 |

| B- | Órdenes | B+ | Órdenes |
|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
| O_1 | 1 1 2 2 3 3 4 4 | O_{1+4} | 5 5 6 6 7 7 8 8 |
| O_2 | 2 3 1 4 4 1 2 3 | O_{2+4} | 6 7 5 8 8 5 6 7 |
| O_3 | 4 4 3 3 2 2 1 1 | O_{3+4} | 8 8 7 7 6 6 5 5 |
| O_{3+4} | 8 8 7 7 6 6 5 5 | O_1 | 4 4 3 3 2 2 1 1 |
| O_{2+4} | 6 7 5 8 8 5 6 7 | O_2 | 2 3 1 4 4 1 2 3 |
| O_{1+4} | 5 5 6 6 7 7 8 8 | O_3 | 1 1 2 2 3 3 4 4 |
| O_{4+4} | 7 6 8 5 5 8 7 6 | O_4 | 3 2 4 1 1 4 3 2 |
| O_4 | 3 2 4 1 1 4 3 2 | O_{4+4} | 7 6 8 5 5 8 7 6 |

| C- | Órdenes | C+ | Órdenes |
|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
| O_1 | 1 1 2 2 3 3 4 4 | O_{1+4} | 5 5 6 6 7 7 8 8 |
| O_2 | 2 3 1 4 4 1 2 3 | O_{4+4} | 7 6 8 5 5 8 7 6 |
| O_{2+4} | 6 7 5 8 8 5 6 7 | O_4 | 3 2 4 1 1 4 3 2 |
| O_{3+4} | 8 8 7 7 6 6 5 5 | O_3 | 4 4 3 3 2 2 1 1 |
| O_3 | 4 4 3 3 2 2 1 1 | O_{3+4} | 8 8 7 7 6 6 5 5 |
| O_4 | 3 2 4 1 1 4 3 2 | O_{2+4} | 6 7 5 8 8 5 6 7 |
| O_{4+4} | 7 6 8 5 5 8 7 6 | O_2 | 2 3 1 4 4 1 2 3 |
| O_{1+4} | 5 5 6 6 7 7 8 8 | O_1 | 1 1 2 2 3 3 4 4 |

3.7.1.2 Generalización del procedimiento descrito

De forma análoga a la planteada al pasar de un diseño 2^2 a otro 2^3 , se verá como pasar de este último diseño a un 2^4 siguiendo los pasos que a continuación se indican.

- 1 Tomar el orden del diseño 2^3 elegido. En este caso será: 1, 2, 6, 8, 4, 3, 7 y 5 (ver Tabla N° 72).

- 2 Elegir un orden semilla para el diseño 2^4 que cumpla con las propiedades deseadas. Por ejemplo, elegiremos el: 1, 2, 10, 14, 16, 15, 7, 3, 11, 12, 4, 8, 6, 5, 13, 9. La matriz de diseño que corresponde a este orden es la que se indica en la Tabla N° 78.

Tabla N° 78:

Matriz de un diseño 2^4 en un orden que cumple con las propiedades deseadas

| Orden de ejecución | Orden estándar | Factores | | | |
|--------------------|----------------|----------|----|----|----|
| | | A | B | C | D |
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | 2 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 3 | 10 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 4 | 14 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 5 | 16 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 15 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | 7 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| 8 | 3 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| 9 | 11 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| 10 | 12 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 11 | 4 | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 12 | 8 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| 13 | 6 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 14 | 5 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| 15 | 13 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| 16 | 9 | -1 | 1 | -1 | 1 |

- 3 Deducir la columna de expansión entre los órdenes de uno y otro diseño.

Al igual que en el ejemplo anterior al pasar del diseño 2^2 al 2^3 , asignamos primero los órdenes correspondientes a los 8 primeros experimentos (en orden estándar) y a continuación asignamos el resto. Para la primera mitad de filas basta con identificar en qué posición se presentan esos órdenes en el diseño de partida. Por ejemplo, el orden 3 se presenta en la fila 6 del diseño de partida, por tanto, junto al orden 3 en el diseño final colocaremos O_6 . El 4 se presenta en 5ª posición, luego junto a ese 4 colocaremos O_5 , y así sucesivamente. Para la segunda mitad hay que identificar a cual de la primera mitad hay que sumarle 8 posiciones. Así, por ejemplo, en la tercera fila, el orden 10 es el correspondiente al de O_2 (en O_2 el orden es igual a 2) más 8. En la cuarta fila será el orden que da la posición 6, que es O_5 , situado en la fila 13, y así sucesivamente.

Tabla N° 79:

Columna de expansión para pasar de un diseño 2^3 a otro 2^4

| Orden de ejecución Diseño 2^3 | Orden de partida Diseño 2^3 | Columna de expansión | Nuevo orden Diseño 2^4 |
|------------------------------------|----------------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| | | O_1 | 1 |
| | | O_2 | 2 |
| | | O_2+8 | 10 |
| 1 | 1 | O_3+8 | 14 |
| 2 | 2 | O_4+8 | 16 |
| 3 | 6 | O_7+8 | 15 |
| 4 | 8 | O_7 | 7 |
| 5 | 4 | O_6 | 3 |
| 6 | 3 | O_6+8 | 11 |
| 7 | 7 | O_5+8 | 12 |
| 8 | 5 | O_5 | 4 |
| | | O_4 | 8 |
| | | O_3 | 6 |
| | | O_8 | 5 |
| | | O_8+8 | 13 |
| | | O_1+8 | 9 |

- 4 Aplicar la columna de expansión a cualquier orden que tenga las propiedades deseadas en un diseño 2^3 . Por ejemplo, si lo aplicamos al segundo que aparece en la tabla de de León (2004), tendremos:

Tabla N° 80:

Columna de expansión para pasar de un diseño 2^3 a otro 2^4

| Orden de partida Diseño 2^3 | Columna de expansión | Nuevo orden Diseño 2^4 |
|----------------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| | O_1 | 5 |
| | O_2 | 7 |
| | O_2+8 | 15 |
| 5 | O_3+8 | 11 |
| 7 | O_4+8 | 12 |
| 3 | O_7+8 | 10 |
| 4 | O_7 | 2 |
| 8 | O_6 | 6 |
| 6 | O_6+8 | 14 |
| 2 | O_5+8 | 16 |
| 1 | O_5 | 8 |
| | O_4 | 4 |
| | O_3 | 3 |
| | O_8 | 1 |
| | O_8+8 | 9 |
| | O_1+8 | 13 |

Aplicando la columna de expansión a cualquier ordenación de un diseño 2^3 que tenga las propiedades deseadas, conduce a un orden del diseño 2^4 con las mismas propiedades. El procedimiento es el mismo y se puede generalizar para pasar de diseños 2^k a diseños 2^{k+1} .

Obsérvese que hemos ubicado la primera mitad de las filas atendiendo a los signos – en el último factor de la matriz del diseño final. También la podríamos haber asignado a los signos + de esta última columna, o a los – o los + de cualquiera de las otras 3, obteniéndose las columnas de expansión que se indican en la Tabla N° 81.

Tabla N° 81:

Columnas de expansión deducidas a partir de la matriz de la Tabla 4.12. El título de la columna indica el factor y el signo al que se asignan a primera mitad de los experimentos

| A- | A+ | B- | B+ | C- | C+ | D- | D+ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| O_1 | O_1+8 | O_1 | O_1+8 | O_1 | O_1+8 | O_1 | O_1+8 |
| O_1+8 | O_1 | O_2 | O_2+8 | O_2 | O_2+8 | O_2 | O_2+8 |
| O_6+8 | O_6 | O_3 | O_3+8 | O_5 | O_5+8 | O_2+8 | O_2 |
| O_7+8 | O_7 | O_4 | O_4+8 | O_5+8 | O_5 | O_5+8 | O_5 |
| O_4+8 | O_4 | O_4+8 | O_4 | O_4+8 | O_4 | O_4+8 | O_4 |
| O_4 | O_4+8 | O_7+8 | O_7 | O_7+8 | O_7 | O_7+8 | O_7 |
| O_3 | O_3+8 | O_6+8 | O_6 | O_8+8 | O_8 | O_7 | O_7+8 |
| O_2 | O_2+8 | O_1+8 | O_1 | O_8 | O_8+8 | O_8 | O_8+8 |
| O_5 | O_5+8 | O_8+8 | O_8 | O_7 | O_7+8 | O_8+8 | O_8 |
| O_5+8 | O_5 | O_3+8 | O_3 | O_4 | O_4+8 | O_3+8 | O_3 |
| O_2+8 | O_2 | O_2+8 | O_2 | O_3 | O_3+8 | O_3 | O_3+8 |
| O_3+8 | O_3 | O_5+8 | O_5 | O_3+8 | O_3 | O_4 | O_4+8 |
| O_8+8 | O_8 | O_5 | O_5+8 | O_2+8 | O_2 | O_5 | O_5+8 |
| O_8 | O_8+8 | O_6 | O_6+8 | O_1+8 | O_1 | O_6 | O_6+8 |
| O_7 | O_7+8 | O_7 | O_7+8 | O_6+8 | O_6 | O_6+8 | O_6 |
| O_6 | O_6+8 | O_8 | O_8+8 | O_6 | O_6+8 | O_1+8 | O_1 |

De cada uno de los órdenes del diseño 2^4 se pueden deducir 8 columnas de expansión, y a cada una estas se le pueden aplicar los 48 órdenes del diseño 2^3 que cumplen con las propiedades deseadas, de forma que a partir de cada orden de un diseño 2^4 se pueden deducir otros $384 = (8 \cdot 48)$. Este es también el valor que se obtendría con el método de las permutaciones y cambios de signo presentado en el apartado anterior ($4! \cdot 2^4 = 384$).

3.7.1.3 Ventajas del método de la columna de expansión

Este método también permite pasar de diseños 2^k a diseños 2^{k+1} aunque de estos últimos no se conozca ninguna ordenación que cumpla con las propiedades deseadas.

En la primera parte de este capítulo se presentó una forma de “ampliar” un diseño 2^k con las propiedades deseadas para obtener otro 2^{k+1} que también presenta mínimo número de cambios en los niveles de los factores y un sesgo que es el doble del que tenía el diseño de partida.

Sea por ejemplo el diseño 2^3 con el orden 1, 2, 6, 8, 4, 3, 7 y 5, que cumple con las propiedades deseadas. Aplicando el método propuesto se llega al diseño 2^4 con orden: 1, 9, 10, 2, 6, 14, 16, 8, 4, 12, 11, 3, 7, 15, 13 y 5, que tiene mínimo número de cambios y sesgo máximo doble que en el diseño anterior, el cual en este caso es también el mínimo posible.

Tabla N° 82:

Diseño de partida y diseño obtenido al aplicar el método descrito en el capítulo 3 (primera parte)

| Orden | Factores | | | Orden | Factores | | | |
|----------------|----------|----------|----------|----------------|----------|----------|----------|----------|
| | A | B | C | | A | B | C | D |
| 1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | 9 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 | 10 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 | 6 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 | 14 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 | 16 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 | 8 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| Cambios | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| | | | | 12 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| | | | | 11 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| | | | | 3 | -1 | 1 | -1 | -1 |
| | | | | 7 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | 15 | -1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | 13 | -1 | -1 | 1 | 1 |
| | | | | 5 | -1 | -1 | 1 | -1 |
| | | | | Cambios | 2 | 2 | 3 | 8 |

Esta “duplicación” de la matriz de partida, equivale a aplicar un tipo concreto de columna de expansión, que siempre conduce a órdenes con mínimo número de cambios y sesgo bajo, y es el único método que es posible aplicar cuando el número de factores es mayor de 7.

La Tabla N° 83 muestra la columna de expansión que hace crecer el diseño aplicando el método descrito. El patrón que sigue está muy claro y es inmediato generalizarlo a cualquier número de factores.

Tabla N° 83:

Columna de expansión que aplica el método descrito en el capítulo 3 (primera parte)

| Orden de partida Diseño 2^3 | Columna de expansión | Nuevo orden Diseño 2^4 |
|----------------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| | O_1 | 1 |
| | O_1+8 | 9 |
| | O_2+8 | 10 |
| 1 | O_2 | 2 |
| 2 | O_3 | 6 |
| 6 | O_3+8 | 14 |
| 8 | O_4+8 | 16 |
| 4 | O_4 | 8 |
| 3 | O_5 | 4 |
| 7 | O_5+8 | 12 |
| 5 | O_6+8 | 11 |
| | O_6 | 3 |
| | O_7 | 7 |
| | O_7+8 | 15 |
| | O_8+8 | 13 |
| | O_8 | 5 |

Además, este procedimiento permite una fácil implementación en un programa informático y permite también forzar determinados caminos en la selección de la ordenación deseada.

Una vez que se conozcan órdenes que cumplan con las propiedades deseadas, pueden seleccionarse, de entre todas las posibles columnas de expansión, aquellas que conducen a diseños que tienen los efectos principales libres del sesgo máximo. La forma de

implantación informática que se utiliza para aplicar este procedimiento permite conseguir esto fácilmente, dejando que la selección aleatoria transcurra solo por los caminos (columnas de expansión) que conducen a los órdenes con las propiedades que interesen.

3.7.2 Implementación en minitab del método propuesto

Minitab es un paquete de software estadístico de uso extendido en los ambientes industriales y de control de calidad. Aunque no es un paquete especializado en diseño de experimentos constituye una excelente ayuda tanto para elegir y plantear el diseño más adecuado como para su posterior análisis. Además es, seguramente, uno de los más utilizados.

Permite seleccionar un diseño para entre 2 y 15 factores con entre 4 y 128 experimentos. Estos diseños están resumidos en el cuadro de la Figura N° 14.

Figura N° 14:
Diseños factoriales disponibles en Minitab

Crear diseño factorial - Mostrar diseños disponibles

Diseños factoriales disponibles (con resolución)

| | Factores | | | | | | | | | | | | | | |
|------|----------|--------|---------|---------|---------|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| Corr | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | |
| 4 | Com III | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | Com IV | III-III | III-III | III-III | | | | | | | | | | |
| 16 | | | Com V | IV | IV | IV | III | III | III | III | III | III | III | III | |
| 32 | | | | Com VI | IV | IV | IV | IV | IV | IV | IV | IV | IV | IV | |
| 64 | | | | | Com VII | V | IV | IV | IV | IV | IV | IV | IV | IV | |
| 128 | | | | | | Com VIII | VI | V | V | IV | IV | IV | IV | IV | |

Diseños de Plackett-Burman de resolución III disponibles

| Factores | Corridas | Factores | Corridas | Factores | Corridas |
|----------|--------------------|----------|--------------------|----------|----------|
| 2-7 | 12,20,24,28,...,48 | 20-23 | 24,28,32,36,...,48 | 36-39 | 40,44,48 |
| 8-11 | 12,20,24,28,...,48 | 24-27 | 28,32,36,40,44,48 | 40-43 | 44,48 |
| 12-15 | 20,24,28,36,...,48 | 28-31 | 32,36,40,44,48 | 44-47 | 48 |
| 16-19 | 20,24,28,32,...,48 | 32-35 | 36,40,44,48 | | |

Ayuda

Aceptar

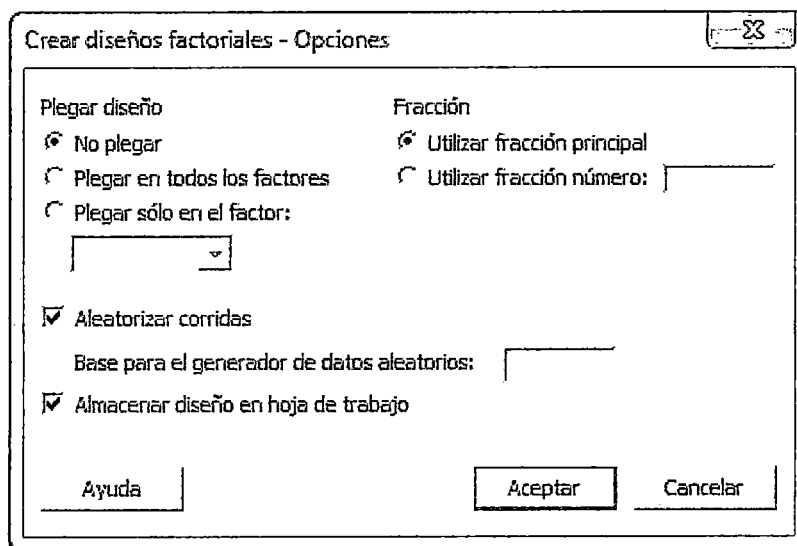
En el proceso de selección del diseño existe un botón de “Opciones” que conduce a la ventana de diálogo de la Figura N° 15. En esta ventana está marcada por defecto la opción de presentar los experimentos en orden aleatorio. Si se quita esta opción se presentan en orden estándar.

Vimos en el capítulo I que el orden aleatorio no garantiza las propiedades deseadas, y puede encarecer notablemente el desarrollo del plan experimental al requerir muchos cambios de nivel. Si se elimina esta opción, el diseño se presenta en orden estándar, el cual es bien sabido que presenta inconvenientes importantes.

La opción más razonable es plantear un orden aleatorio pero restringido entre aquellos órdenes conocidos que cumplen las propiedades deseadas. Esto es lo que hace la macro que se ha desarrollado, utilizando el método descrito.

Figura N° 15:

Ventana de diálogo del botón “Opciones”



3.7.2.1 Procedimiento

En primer lugar hay que seleccionar el diseño deseado, con todas las opciones por defecto, excepto la de aleatorizar, que la quitaremos para que la matriz de diseño aparezca en orden estándar. Por ejemplo, si deseamos realizar un diseño factorial 2^3 obtendremos la matriz de diseño tal como se presenta en la siguiente figura.

Figura N° 16:

Hoja de datos con la matriz de diseño tal como la presenta Minitab, sin aleatorizar

Minitab - Sin título - [Hoja de trabajo 1 ***]

Archivo Editar Datos Calc Estadísticas Gráfica Editor Herramientas Ventana Ayuda Asistente

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 | C10 |
|----|----------|--------------|-----------|---------|----|----|----|----|----|-----|
| | OrdenEst | OrdenCorrida | PtCentral | Bloques | A | B | C | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | | | |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | | | |
| 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | | | |
| 4 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | | | |
| 5 | 5 | 5 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | | | |
| 6 | 6 | 6 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | | | |
| 7 | 7 | 7 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | | | |
| 8 | 8 | 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |

Para obtener un orden con las propiedades deseadas basta con ejecutar la macro tecleando su nombre en la ventana de Sesión, tal como se indica en la Figura N° 17. A continuación se obtiene un orden con las propiedades deseadas tal como el de la Figura N° 18.

Figura N° 17:

Lanzamiento de la macro para obtener un orden de experimentación con las propiedades deseadas

Minitab - Sin título - [Sesión]

Archivo Editar Datos Calc Estadísticas Gráfica Editor Herramientas Ventana Ayuda Asistente

```

Bienvenido a Minitab, presione F1 para obtener ayuda.
MTB > Name C1 "OrdenEst" C2 "OrdenCorrida" C3 "PtCentral" C4 "Bloques" C5 "A" C6 "B" a
CONTI> C7 "C"
MTB > FFDesign 3 8;
SUBC> C1P1 'PtCentral';
SUBC> SOrder 'OrdenEst' 'OrdenCorrida';
SUBC> Brief 1;
SUBC> Alias 3;
SUBC> XMatrix 'A' 'B' 'C'.

Diseño factorial completo

Factores: 3 Diseño de la base: 3, 8
Corridos: 8 Réplicas: 1
Bloques: 1 Puntos centrales (total): 0

MTB > !COLUMNNA
    
```

Figura N° 18:

Orden de experimentación con las propiedades deseadas

Minitab - Sin título - [Hoja de trabajo 1 ***]

Archivo Editar Datos Calc Estadísticas Gráfica Editor Herramientas Ventana Ayuda Asistente

| + | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 | C10 |
|----|----------|--------------|-----------|---------|----|----|----|----|----|-----|
| | OrdenEst | OrdenCorrida | PtCentral | Bloques | A | B | C | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | | | |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | | | |
| 3 | 6 | 3 | 1 | 1 | 1 | -1 | 1 | | | |
| 4 | 8 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 5 | 5 | 5 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 | | | |
| 6 | 4 | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | | | |
| 7 | 3 | 7 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | | | |
| 8 | 7 | 8 | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |

3.7.2.2 Esquema de la macro

- 1 Determina el número de experimentos y el número de columnas a ordenar.

Igual que en la macro anterior, este paso evita que se tenga que introducir el tipo de diseño de que se trata.

- 2 Se elige un orden al azar de entre los 8 disponibles en un diseño 2^2 .

Se leen los 8 órdenes con el mínimo número de cambios de nivel en los diseños 2^2 (ver, Tabla N° 72) y se elige uno al azar. A partir de aquí, si se trata de un diseño con 4 experimentos, ya se puede ir al paso 5.

- 3 Se elige al azar una columna de expansión, de entre las disponibles, para llegar al diseño 2^3 .

Se leen 6 columnas de expansión (ver, Tabla N° 77) que permiten generar un orden para diseños factoriales a dos niveles con 8 experimentos que presentan el mínimo número de cambios de nivel y mínimo sesgo máximo a partir del orden elegido del diseño 2^2 en el paso 2. Se elige al azar una de las columnas y se genera el orden en que deben ser realizados los experimentos. A partir de aquí, si se trata de un diseño con 8 experimentos, ya se puede ir al paso 5.

- 4 Igual que el paso anterior hasta llegar al diseño deseado.

De acuerdo al número de experimentos (2^k , con $k=4, \dots, 7$) determinado en el paso 1, Se leen las columnas de expansión disponibles para los diseños con igual número de experimentos y se selecciona aleatoriamente una de ellas. Estas columnas fueron obtenidas del orden de experimentación que presenta el mínimo número de cambios de nivel y el mínimo sesgo máximo en cada diseño. El número de columnas de expansión utilizadas para construir los órdenes fueron: 8 columnas para el diseño 2^4 , 2 columnas para los diseños 2^5 , 2^6 y 2^7 . Aunque para estos tres últimos diseños el total de columnas de expansión serían: 10, 12 y 14 respectivamente, pero el número de órdenes que pueden ser obtenidos con dos columnas de expansión es lo suficientemente grande para los fines de aplicación práctica. A partir de la columna de expansión elegida se obtiene el orden en que deben ser realizados los experimentos en el diseño determinado y se va al paso 5.

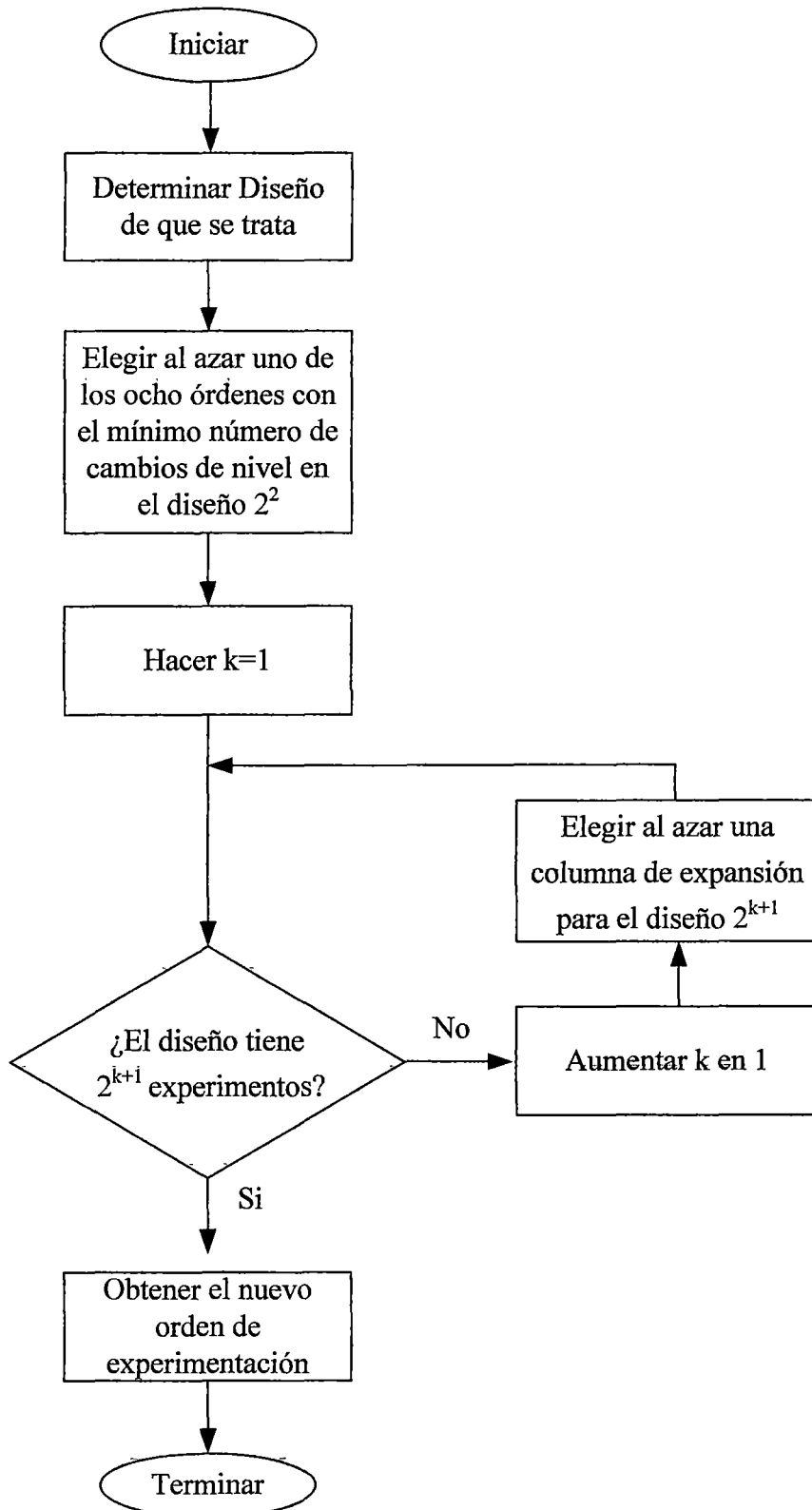
- 5 Ordenar la matriz de diseño de acuerdo con el orden obtenido en el último paso.

Con base el orden obtenido el paso anterior se construye la matriz de diseño que presenta el mínimo número de cambios de nivel y el mínimo sesgo máximo en valor absoluto y se termina la búsqueda.

En la Figura N° 19 se presenta el diagrama de flujo correspondiente a este método y en el Anexo B se encuentra el código completo de esta macro.

Figura N° 19:

Diagrama de flujo del método de la Columna de Expansión



CAPÍTULO IV

APLICACIÓN

4.1 INTRODUCCIÓN

La Tensión Arterial es muy variable de unas personas a otras, pero además es muy variable en todas y cada una de las personas individualmente consideradas. De una parte, hay una notable variabilidad interpersonal; o sea, que la tensión arterial de una persona no es igual que la de cualquier vecino o pariente.

Los valores que toma la Tensión Arterial dependen de la edad (se incrementan con el envejecimiento) y del sexo (son menores en las mujeres). También hay que señalar que estos valores no son constantes a lo largo del día, sino que presenta una gran variabilidad. Los valores más bajos se registran durante el sueño.

El tabaquismo es uno de los factores de riesgo cardiovascular más importante y modificable. Es decir aumenta la presión arterial de una persona, ya sea de la sistólica o de la diastólica.

Muchos otros factores influyen en que la tensión arterial cambie de unos momentos a otros, a veces en forma muy acusada: cambios en la postura corporal, variaciones en la temperatura y humedad ambiente, toma de ciertas sustancias, etc.

Tensión Arterial¹⁸

La Tensión Arterial (TA) es la presión que ejerce la sangre contra la pared de las arterias. Esta presión es imprescindible para que circule la sangre por los vasos sanguíneos y aporte el oxígeno y los nutrientes a todos los órganos del cuerpo para que puedan funcionar. Es un tipo de presión sanguínea.

Si la Tensión Arterial fuese CERO la sangre quedaría estancada en las arterias, y el organismo no recibiría los suministros necesarios para su supervivencia, muriendo. La tensión arterial es una fuerza motriz imprescindible para la vida.

La Tensión Arterial tiene dos componentes:

- **Tensión arterial sistólica**

Corresponde al valor máximo de la tensión arterial en sístole (cuando el corazón se contrae). Se refiere al efecto de presión que ejerce la sangre eyectada del corazón sobre la pared de los vasos.

- **Tensión arterial diastólica**

Corresponde al valor mínimo de la tensión arterial cuando el corazón está en diástole o entre latidos cardíacos. Depende fundamentalmente de la resistencia vascular periférica.

Medida de la Tensión Arterial

La medición de la Tensión Arterial se ha llevado a cabo mediante la utilización conjunta de un fonendoscopio y un esfigmomanómetro. Para realizar su medida el sujeto permaneció relajado, en una habitación tranquila y con temperatura confortable. El punto habitual de su medida es el brazo.

¹⁸ Tortora GJ y Grabowski SR. 1998. El aparato cardiovascular: el corazón. *Principios de anatomía y fisiología*.

La Tensión Arterial se expresa normalmente en milímetros de mercurio (mmHg) sobre la presión atmosférica. Cuando se expresa la tensión arterial, se escriben dos números separados por un guion, donde el primero es la presión sistólica y el segundo la presión diastólica.

Los valores normales de la Tensión Arterial varían entre 90/60 y 130/80 mmHg. Valores por encima de 140/90 mmHg son indicativos de hipertensión o presión arterial alta y por debajo de 90/60 son indicativos de hipotensión o presión arterial baja.

Trastornos de la Tensión Arterial

- **Hipertensión arterial**

Es el aumento de la presión arterial, ya sea de la sistólica o de la diastólica

- **Hipotensión arterial**

Es el descenso de la presión arterial por debajo de los límites normales.

4.2 ESTUDIO DEL EFECTO DE TRES FACTORES EN LA TENSIÓN ARTERIAL

En la unidad de Bioestadística del Hospital Universitario Ramón y Cajal de España se llevó a cabo un experimento para investigar cómo influyen tres factores en la tensión arterial de un grupo de personas. Los factores fueron:

A: Nicotina (fuma, no fuma)

B: Edad (menor de 40 años, mayor de 40 años)

C: Sexo (hombre, mujer)

Para conocer el efecto de estos tres factores en la Tensión Arterial del grupo de personas se realizó un Diseño Factorial Completo 2^3 , ya que se analizan tres factores y cada uno tiene dos niveles (alto y bajo). Es decir:

Para el factor A, el nivel bajo es Fuma y el alto es No fuma.

Para el factor B, el nivel bajo es Menor de 40 y el alto es Mayor de 40 años.

Para el factor C, el nivel bajo es Hombre y el alto es Mujer.

El experimento se realizó en el orden estándar y en el orden obtenido que cumple con las especificaciones estudiadas (mínimo número de cambios en los niveles y mínimo sesgo máximo), cada uno con dos réplicas.

Los datos obtenidos del experimento y la tabla de combinación de tratamientos para el Diseño Factorial 2^3 realizado en el Orden Estándar se presentan en las siguientes tablas¹⁹:

Tabla N° 84:

Datos del experimento realizado en el Orden Estándar

| Factores (Factor A) | Edad (Factor B) | | | |
|------------------------|------------------|-------|------------------|-------|
| | Menor de 40 años | | Mayor de 40 años | |
| | Sexo (Factor C) | | Sexo (Factor C) | |
| | Hombre | Mujer | Hombre | Mujer |
| Fuma | 110 | 120 | 145 | 120 |
| | 110 | 120 | 150 | 120 |
| No fuma | 110 | 90 | 130 | 130 |
| | 115 | 95 | 140 | 130 |

Tabla N° 85:

Tabla de combinación de tratamientos realizado en el Orden Estándar

| Orden Estándar | Orden de Ejecución | Combinación de Tratamiento | Réplicas | | Simbología |
|----------------|--------------------|----------------------------|----------|-----|------------|
| | | | I | II | |
| 1 | 1 | A bajo, B bajo, C bajo | 110 | 110 | (1) |
| 2 | 2 | A alto, B bajo, C bajo | 110 | 115 | <i>a</i> |
| 3 | 3 | A bajo, B alto, C bajo | 145 | 150 | <i>b</i> |
| 4 | 4 | A alto, B alto, C bajo | 130 | 140 | <i>ab</i> |
| 5 | 5 | A bajo, B bajo, C alto | 120 | 120 | <i>c</i> |
| 6 | 6 | A alto, B bajo, C alto | 90 | 95 | <i>ac</i> |
| 7 | 7 | A bajo, B alto, C alto | 120 | 120 | <i>bc</i> |
| 8 | 8 | A alto, B alto, C alto | 130 | 130 | <i>abc</i> |

¹⁹ http://www.madrid.org/cs/Satellite?pagename=HospitalRamonCajal/Page/HRYC_home

Los datos obtenidos del experimento y la tabla de combinación de tratamientos para el Diseño Factorial 2^3 realizado en el orden obtenido con las especificaciones estudiadas (mínimo número de cambios y mínimo sesgo máximo) se muestran a continuación²⁰ :

Tabla N° 86:

Datos del experimento realizado en el Orden con el mínimo número de cambios y sesgo

| Factores (Factor A) | Edad (Factor B) | | | |
|------------------------|------------------|-------|------------------|-------|
| | Menor de 40 años | | Mayor de 40 años | |
| | Sexo (Factor C) | | Sexo (Factor C) | |
| | Hombre | Mujer | Hombre | Mujer |
| Fuma | 120 | 125 | 150 | 120 |
| | 110 | 130 | 145 | 125 |
| No fuma | 115 | 95 | 130 | 125 |
| | 110 | 100 | 135 | 130 |

Tabla N° 87:

Tabla de combinación de tratamientos realizado en el Orden con el mínimo número de cambios y sesgo

| Orden Estándar | Orden de Ejecución | Combinación de Tratamiento | Réplicas | | Simbología |
|----------------|--------------------|----------------------------|----------|-----|------------|
| | | | I | II | |
| 1 | 1 | A bajo, B bajo, C bajo | 120 | 110 | (1) |
| 2 | 2 | A alto, B bajo, C bajo | 115 | 110 | <i>a</i> |
| 6 | 3 | A alto, B bajo, C alto | 95 | 100 | <i>ac</i> |
| 8 | 4 | A alto, B alto, C alto | 125 | 130 | <i>abc</i> |
| 4 | 5 | A alto, B alto, C bajo | 130 | 135 | <i>ab</i> |
| 3 | 6 | A bajo, B alto, C bajo | 150 | 145 | <i>b</i> |
| 7 | 7 | A bajo, B alto, C alto | 120 | 125 | <i>bc</i> |
| 5 | 8 | A bajo, B bajo, C alto | 125 | 130 | <i>c</i> |

El análisis de los datos obtenidos de la unidad de Bioestadística del Hospital Universitario Ramón y Cajal de España se realizó en el Programa Estadístico Statgraphics.

²⁰ http://www.madrid.org/cs/Satellite?pagename=HospitalRamonCajal/Page/HRYC_home

4.3 ANÁLISIS DEL DISEÑO FACTORIAL 2^3 EN ORDEN ESTÁNDAR

Análisis de Varianza

En la siguiente tabla se muestra el Análisis de Varianza para investigar si los factores influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.

Tabla N° 88:

Análisis de Varianza para Tensión Arterial

| Fuente | Suma de Cuadrados | Gl | Cuadrado Medio | Razón-F | Valor-P |
|--------------------|-------------------|----|----------------|---------|---------|
| A:Nicotina | 189.063 | 1 | 189.063 | 17.29 | 0.0032 |
| B:Edad | 2376.560 | 1 | 2376.560 | 217.29 | 0.0000 |
| C:Sexo | 451.563 | 1 | 451.563 | 41.29 | 0.0002 |
| AB | 126.563 | 1 | 126.563 | 11.57 | 0.0093 |
| AC | 14.063 | 1 | 14.063 | 1.29 | 0.2897 |
| BC | 126.563 | 1 | 126.563 | 11.57 | 0.0093 |
| ABC | 689.063 | 1 | 689.063 | 63.00 | 0.0000 |
| Error total | 87.500 | 8 | 10.938 | | |
| Total | 4060.940 | 15 | | | |

- Para el caso del factor A (Nicotina) el nivel de significancia $P=0.0032$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la nicotina influye significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso del factor B (Edad) el nivel de significancia $P=0.0000$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la Edad influye significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso del factor C (Sexo) el nivel de significancia $P=0.0002$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que el Sexo influye significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso de la interacción del Factor A y el factor B (Nicotina×Edad) el nivel de significancia $P=0.0093$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la Nicotina y la Edad influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.

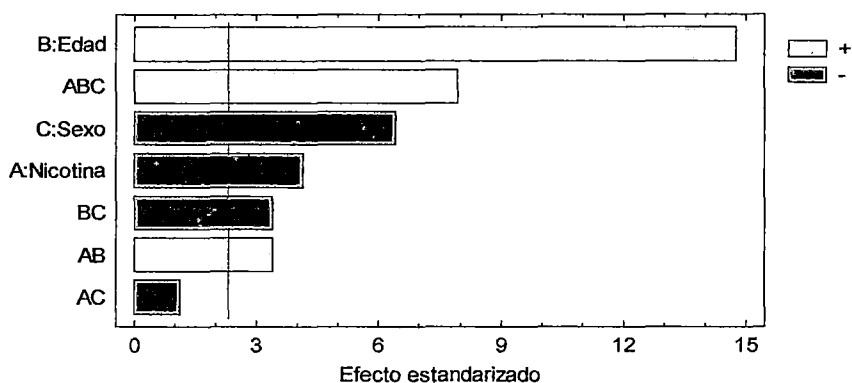
- Para el caso de la interacción del Factor A y el factor C (Nicotina×Sexo) el nivel de significancia $P=0.2897$ ($P>0.05$); por lo tanto, no se rechaza H_0 ; es decir, que la Nicotina y el Sexo no influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso de la interacción del Factor B y el factor C (Edad×Sexo) el nivel de significancia $P=0.0093$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la Edad y el Sexo influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso de la interacción del Factor A, factor B y el factor C (Nicotina×Edad×Sexo) el nivel de significancia $P=0.0000$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza y se acepta H_1 ; es decir, que la Nicotina, la Edad y el Sexo influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.

Diagrama de Pareto

El Diagrama de Pareto Estandarizado muestra los efectos en orden de significancia decreciente, con una línea para determinar qué efectos son estadísticamente significativos. Este Diagrama puede usarse para fácilmente determinar qué efectos son los más importantes.

Figura N° 20:

Diagrama de Pareto Estandarizada para Tensión Arterial



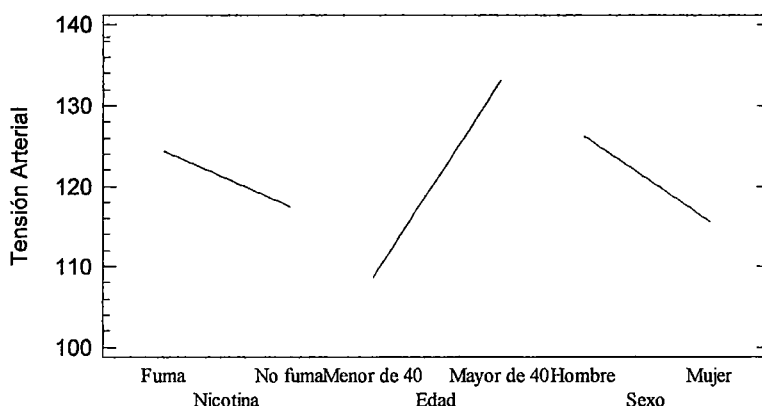
Cualquier barra más allá de la línea vertical es estadísticamente significativa en el nivel de significancia al 5%. En nuestro caso, los 3 efectos principales son significativos: Edad, Nicotina y Sexo. También hay dos interacciones dobles y la interacción triple que son significativas. De este gráfico concluimos que el único efecto candidato a ser eliminado es la interacción AC.

Gráfica de Efectos Principales

El Gráfico de Efectos Principales, grafica el cambio estimado en la respuesta cuando cada uno de los factores es movido desde su nivel inferior hasta su nivel superior. El Gráfico de Efectos Principales muestra cómo cada factor afecta en la tensión arterial de las personas.

Figura N° 21:

Gráfica de Efectos Principales para Tensión Arterial



Las líneas indican el cambio estimado en la tensión arterial conforme cada factor es movido de su nivel inferior a su nivel superior, manteniendo constante todos los demás factores con un valor a la mitad de sus respectivos niveles. Note que el factor Edad tiene un mayor impacto en la respuesta con un efecto principal significativo.

Por ejemplo, la tensión arterial de una persona menor de 40 años (baja) es aproximadamente 109.625, mientras la tensión arterial de una persona mayor de 40 años

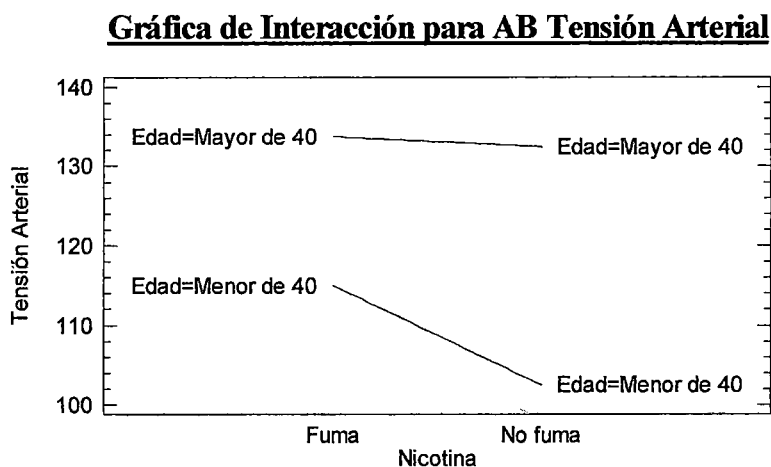
(alta) es aproximadamente 133.375. La diferencia de 24.375 es llamada “efecto principal” de la Nicotina.

- El efecto de la Nicotina es negativo (-6.875); significa que se espera que la tensión arterial de las personas que no fuman sea menor en 6.875 a comparación de las personas que fuman.
- El efecto de la Edad es positivo e igual a 24.375; significa que se espera un aumento de 24.375 en la tensión de las personas al tener una edad de más de 40 años.
- El efecto del Sexo es negativo (-10.625); significa que la tensión arterial de las personas mujeres es menor en 10.625 que la tensión arterial de los hombres.

Gráfica de Interacción para AB

El gráfico resultante muestra la tensión arterial promedio conforme los niveles de la Nicotina es cambiada, para cada nivel de la Edad. Note que a una mayor edad (mayor de 40 años), la Nicotina tiene poco o nulo efecto. A menor edad (menor de 40 años), la Nicotina es un factor muy importante.

Figura N 22°:

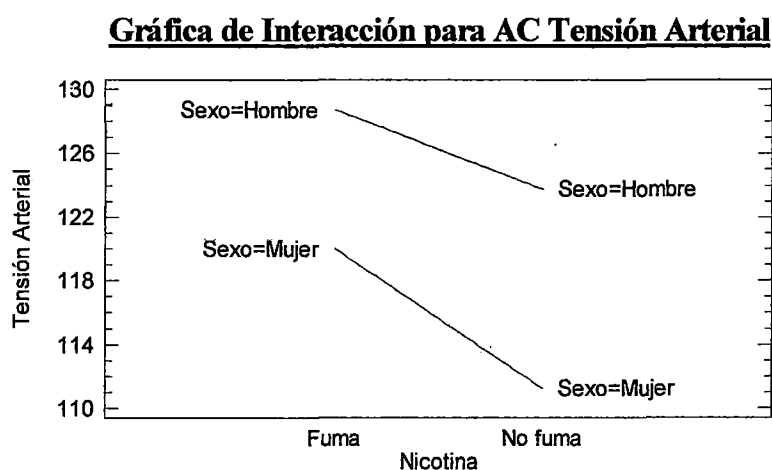


El efecto de la Nicotina y Edad es positivo e igual a 5.625; significa que se espera que la combinación de ambos, produzca un aumento de 5.625 en la tensión arterial de las personas.

Gráfica de Interacción para AC

El gráfico resultante muestra la tensión arterial promedio conforme los niveles de la Nicotina es cambiada, para cada nivel del Sexo. Note que ya sea hombre o mujer, la Nicotina es un factor muy importante.

Figura N° 23:

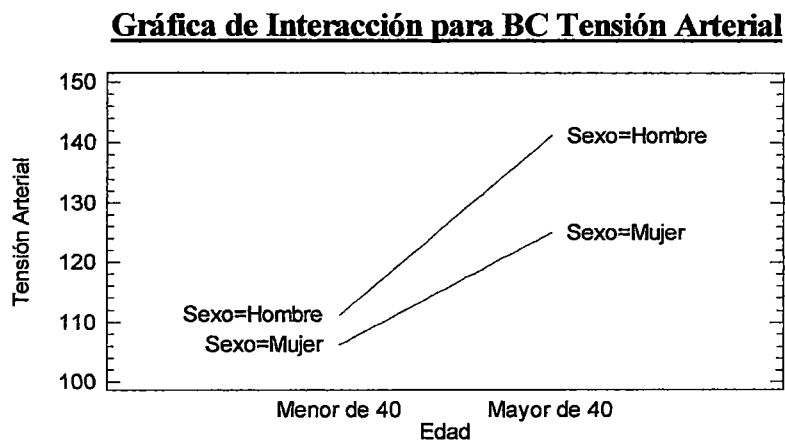


El efecto de la Nicotina y el Sexo es negativo (-1.875); significa que se espera que la combinación de ambos, produzca una disminución de 1.875 en la tensión arterial de las personas.

Gráfica de Interacción para BC

El gráfico resultante muestra la tensión arterial promedio conforme los niveles de la Edad es cambiada, para cada nivel del Sexo. Note que ya sea hombre o mujer, la Edad es un factor muy importante.

Figura N° 24:



El efecto de la Edad y el Sexo es negativo (-5.625); significa que se espera que la combinación de ambos, produzca una disminución de 5.625 en la tensión arterial de las personas.

Interacción para ABC

El efecto de la Nicotina, Edad y el Sexo es positivo e igual a 13.125; significa que se espera que la combinación de los tres factores, produzca un aumento en la tensión arterial de las personas en 13.125.

4.4 ANÁLISIS DEL DISEÑO FACTORIAL 2^3 EN EL ORDEN CON EL MÍNIMO NÚMERO DE CAMBIOS Y SESGO

Análisis de Varianza

En la siguiente tabla se muestra el Análisis de Varianza para investigar si los factores influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.

Tabla N° 89:

Análisis de Varianza para Tensión Arterial

| Fuente | Suma de Cuadrados | Gl | Cuadrado Medio | Razón-F | Valor-P |
|--------------------|-------------------|----|----------------|---------|---------|
| A:Nicotina | 451.563 | 1 | 451.563 | 26.27 | 0.0009 |
| B:Edad | 1501.560 | 1 | 1501.560 | 87.36 | 0.0000 |
| C:Sexo | 264.063 | 1 | 264.063 | 15.36 | 0.0044 |
| AB | 126.563 | 1 | 126.563 | 7.36 | 0.0265 |
| AC | 14.063 | 1 | 14.063 | 0.82 | 0.3921 |
| BC | 189.063 | 1 | 189.063 | 11.00 | 0.0106 |
| ABC | 564.063 | 1 | 564.063 | 32.82 | 0.0004 |
| Error total | 137.500 | 8 | 17.188 | | |
| Total | 3248.440 | 15 | | | |

- Para el caso del factor A (Nicotina) el nivel de significancia $P=0.0009$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la nicotina influye significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso del factor B (Edad) el nivel de significancia $P=0.0000$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la Edad influye significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso del factor C (Sexo) el nivel de significancia $P=0.0044$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que el Sexo influye significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso de la interacción del Factor A y el factor B (Nicotina×Edad) el nivel de significancia $P=0.0265$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la Nicotina y la Edad influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso de la interacción del Factor A y el factor C (Nicotina×Sexo) el nivel de significancia $P=0.3921$ ($P>0.05$); por lo tanto, no se rechaza H_0 ; es decir, que la Nicotina y el Sexo no influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.

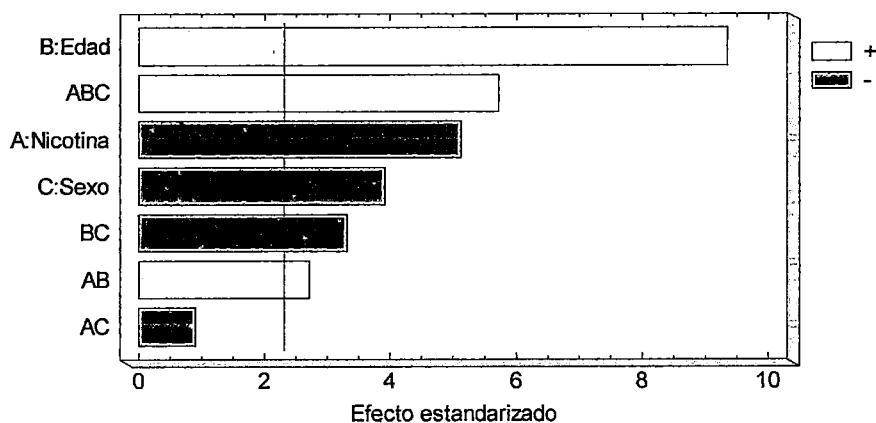
- Para el caso de la interacción del Factor B y el factor C (Edad×Sexo) el nivel de significancia $P=0.0106$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la Edad y el Sexo influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.
- Para el caso de la interacción del Factor A, factor B y el factor C (Nicotina×Edad × Sexo) el nivel de significancia $P=0.0004$ ($P<0.05$); por lo tanto, se rechaza H_0 y se acepta H_1 ; es decir, que la Nicotina, la Edad y el Sexo influyen significativamente en la tensión arterial de las personas.

Diagrama de Pareto

El Diagrama de Pareto Estandarizado muestra los efectos en orden de significancia decreciente, con una línea para determinar qué efectos son estadísticamente significativos. Este Diagrama puede usarse para fácilmente determinar qué efectos son los más importantes.

Figura N° 25:

Diagrama de Pareto Estandarizada para Tensión Arterial

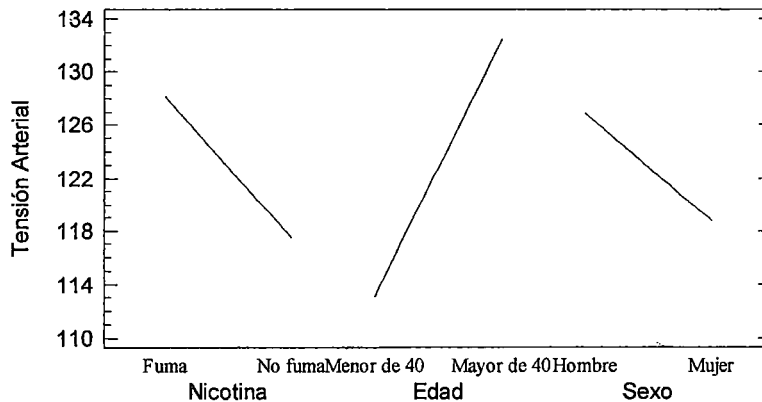


Observamos que los 3 efectos principales son estadísticamente significativos: Edad, Nicotina y Sexo. También hay dos interacciones dobles y la interacción triple que son significativas. De este gráfico concluimos que el único efecto candidato a ser eliminado es la interacción AC.

Gráfica de Efectos Principales

Figura N° 26:

Gráfica de Efectos Principales para Tensión Arterial



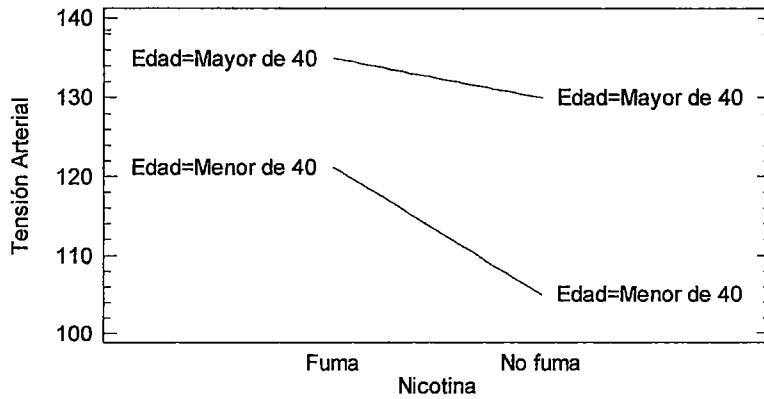
- El efecto de la Nicotina es negativo (-10.625); significa que se espera que la tensión arterial de las personas que no fuman sea menor en 10.625 a comparación de las personas que fuman.
- El efecto de la Edad es positivo e igual a 19.375; significa que se espera un aumento de 19.375 en la tensión de las personas al tener una edad de más de 40 años.
- El efecto del Sexo es negativo (-8.125); significa que la tensión arterial de las personas mujeres es menor en 8.125 que la tensión arterial de los hombres.

Gráfica de Interacción para AB

El gráfico resultante muestra la tensión arterial promedio conforme los niveles de la Nicotina es cambiada, para cada nivel de la Edad. Note que a una mayor edad (mayor de 40 años), la Nicotina tiene un efecto menor. A menor edad (menor de 40 años), la Nicotina tiene un efecto mayor, es decir es un factor muy importante.

Figura N° 27:

Gráfica de Interacción AB para Tensión Arterial



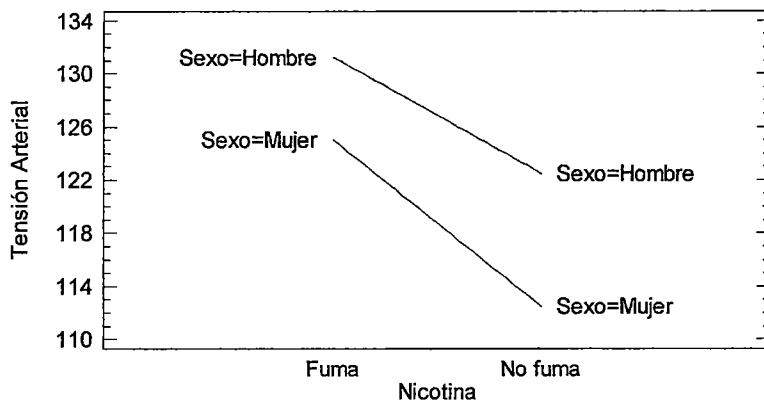
El efecto de la Nicotina y Edad es positivo e igual a 5.625; significa que se espera que la combinación de ambos, produzca un aumento de 5.625 en la tensión arterial de las personas.

Gráfica de Interacción para AC

El gráfico resultante muestra la tensión arterial promedio conforme los niveles de la Nicotina es cambiada, para cada nivel del Sexo. Note que ya sea hombre o mujer, la Nicotina es un factor muy importante.

Figura N° 28:

Gráfica de Interacción AC para Tensión Arterial

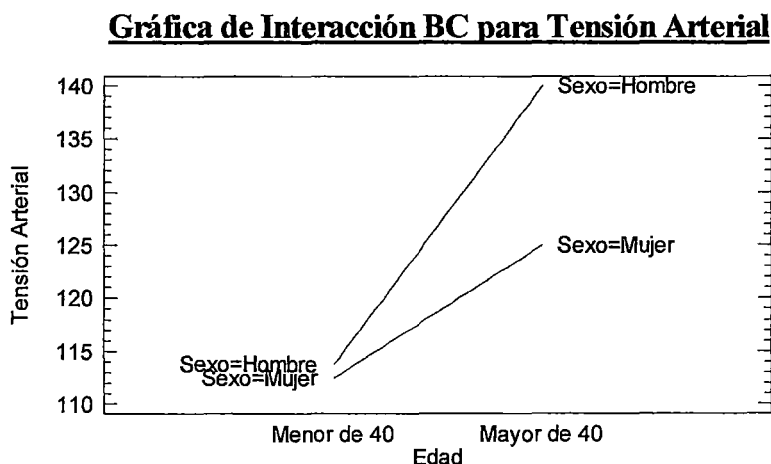


El efecto de la Nicotina y el Sexo es negativo (-1.875); significa que se espera que la combinación de ambos, produzca una disminución de 1.875 en la tensión arterial de las personas.

Gráfica de Interacción para BC

El gráfico resultante muestra la tensión arterial promedio conforme los niveles de la Edad es cambiada, para cada nivel del Sexo. Note que ya sea hombre o mujer, la Edad es un factor muy importante.

Figura N° 29:



El efecto de la Edad y el Sexo es negativo (-6.875); significa que se espera que la combinación de ambos, produzca una disminución de 6.875 en la tensión arterial de las personas.

Interacción para ABC

El efecto de la Nicotina, Edad y el Sexo es positivo e igual a 11.875; significa que se espera que la combinación de los tres factores, produzca un aumento en la tensión arterial de las personas en 11.875.

4.5 COMPARACIÓN ESTADÍSTICA

La comparación estadística se realiza para ver cuál de los órdenes de experimentación es el más eficiente, entre el orden estándar (O.E) y el orden obtenido con el mínimo número de cambios en los niveles y mínimo sesgo máximo (O.O) en el diseño factorial 2^3 . La eficiencia se calcula de la siguiente manera:

$$Eficiencia = \frac{C.M.E.(O.E)}{C.M.E.(O.O)} \times 100$$

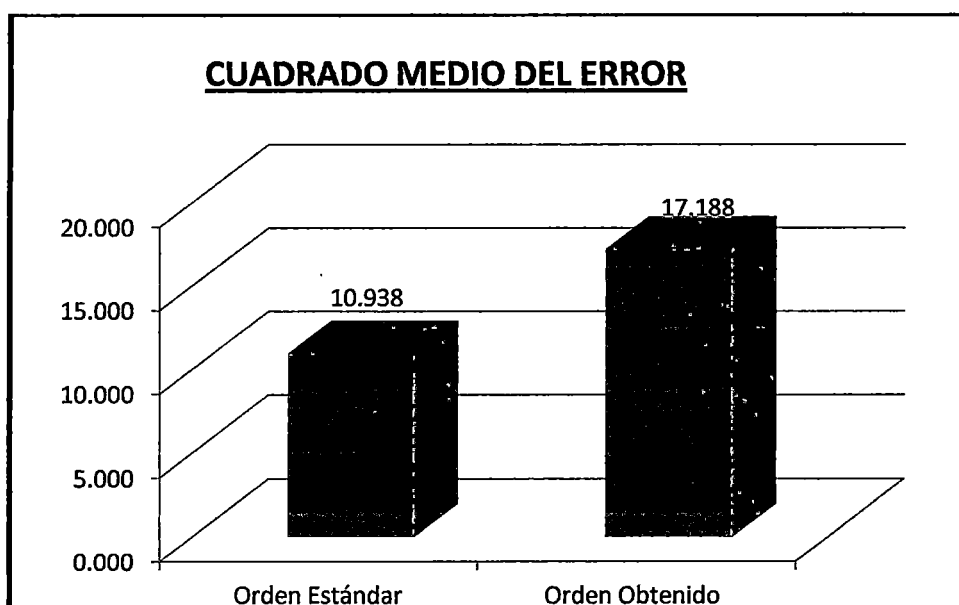
A continuación se tiene el Cuadrado Medio del Error (C.M.E) obtenido para cada orden de experimentación.

Tabla N° 90:

Cuadrado Medio del Error

| Orden Estándar | Orden Obtenido |
|----------------|----------------|
| 10.938 | 17.188 |

Figura N° 30:



Reemplazando los valores del Cuadrado Medio del Error de cada orden de experimentación en la fórmula anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Eficiencia} &= \frac{10.938}{17.188} \times 100 \\ \text{Eficiencia} &= 63.637\% \end{aligned}$$

El experimento llevado a cabo en el orden estándar es más eficiente que el experimento llevado a cabo en el orden con el mínimo número de cambios en los niveles y mínimo sesgo máximo en aproximadamente 64%.

CONCLUSIONES

- Al realizar la comparación del diseño factorial 2^K con orden estándar y orden con el mínimo número de cambios de nivel y mínimo sesgo máximo, utilizando el cuadrado medio del error, para estos órdenes dentro de la experimentación se encuentra una eficiencia del 63.637% que es aceptable el orden estándar.
- Usando diferentes métodos de búsqueda tales como: el método de duplicación, aleatoria restringida, el algoritmo de Dickinson, algoritmo de Dickinson con alimentación forzada y el método de duplicación, se hallaron órdenes con el mínimo número de cambios de nivel y mínimo sesgo máximo para los diseños factoriales a dos niveles con 8, 16, 32, 64 y 128 experimentos.
- Se ha implementado el método de las columnas de expansión en el programa estadístico Minitab, que permite generar automáticamente y de forma aleatoria, órdenes que presentan el mínimo número de cambios de nivel y que protegen de la influencia lineal de los factores ajenos a la experimentación, lo que permite la utilización de estos órdenes hallados por parte de usuarios no expertos.

RECOMENDACIONES

- Se recomienda permitir que estos desarrollos investigativos trasciendan del campo teórico al aplicado y puedan ser utilizados en las experimentaciones industriales cotidianas sin requerir grandes conocimientos estadístico para que sean aprovechadas las ventajas que estos diseños factoriales 2^K pueden ofrecer.
- Se recomienda a los experimentadores que en la práctica industrial y agropecuaria utilicen el procedimiento (método de las columnas de expansión) que se ha implementado en el programa de software estadístico Minitab, para poder economizar durante la ejecución del experimento.
- Se recomienda realizar los experimentos en orden totalmente aleatorio, puesto que al restringir la aleatorización en el orden de experimentación causa mayor error en la obtención de los resultados y es menos eficiente que el diseño factorial 2^K con orden estándar.

BIBLIOGRAFÍA

1. Box, G., Hunter, W. y Hunter, J (1993) “Estadística para Investigadores, Introducción al Diseño de Experimentos, Análisis de Datos y Construcción de Modelos”, *Editorial Reverté*
2. Cheng, Ch. y Jacroux, M. (1988) “The Construction of Trend-Free Run Orders of Two-Level Factorial Designs”. *Journal of the American Statistical Association*
3. Cochran, W y Cox G. M. (1997) “Diseños Experimentales” *Editorial Trillas, México*
4. Coster, D. D. y Cheng, Ch (1988) “Minimum Cost Trend-free Run Orders of Fractional Factorial Designs”. *The Annals of Statistics*
5. Daniel, C. y Wilcoxon, F. (1966) “Factorial 2^{p-q} Plans Robust Against Linear and Quadratic trends”. *Technometrics*
6. Dean, A. y Voss, D. (1999) “Design and Analysis of Experiments” *Editorial Springer, USA*
7. De León, G. (2004) “Análisis y Propuestas Sobre Algunos Aspectos de la Aplicación del Diseño de Experimentos en la Industria” *Tesis doctoral Universidad Politécnica de Cataluña.*
8. Dickinson, A. W. (1974) “Some Run Orders Requiring a Minimum Number of Factor Level Changes for the 2^4 and 2^5 Main Effect Plans”. *Technometrics*

9. Draper, N. y Stoneman, D. (1968) "Factor Changes and Linear Trends in Eight-Run Two-Level Factorial Designs". *Technometrics*
10. Ferrer, A. y Romero V., R. (1994) "Sensibilidad frente a datos anómalos de tres estimadores de efectos de dispersión con datos no necesariamente replicados". *Estadística Española*.
11. Ferrer, A. (2002) "Estudio de Efectos de Dispersión en Ausencia de Replicaciones: Revisión del Estado del Arte y Perspectivas de Futuro". *Estadística Española*.
12. Grima, P. (1993) "Aportaciones Metodológicas al Diseño de Productos Robustos". *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya*
13. Grima, P. (2000) "Método Taguchi". *Universidad Politécnica de Catalunya*.
14. Grima, P.; Marco Ll. y Tort-Martorell X. (2004) "Estadística Práctica con Minitab". *Pearson-Prentice Hall*. Madrid.
15. Gutiérrez P. H. (2004) "Análisis y Diseños de Experimentos" *Editorial Mc Graw Hill*, Mexico
16. Hernandez R., Fernandez C. y Baptista P. (2006) "Metodología de la Investigación" Cuarta Edición. *Editorial Mc. Graw Hill*
17. Joiner, B. y Campbell, C. (1976) "Designing Experiments when Run Order is Important". *Technometrics*
18. Kuehl, R. (2001) "Diseño de Experimentos" 2da edición *Editorial Internacional Thomson*, Mexico
19. Lucas Disel (1992) "Método Taguchi". *Documento Departamento de Calidad*.
20. Martínez, G. A. (1996) "Diseños Experimentales, Métodos y Elementos de Teoría" *Editorial Trillas, Universidad Autónoma de Chapingo*.
21. Montgomery D. C. (1998) "Probabilidad y Estadística Aplicados a la Ingeniería" *Editorial Wiley*, USA

22. Montgomery D. C. (2004) “Diseño y Análisis de Experimentos” Segunda Edición, *Universidad Estatal de Arizona*.
23. Pozueta, M. L. (2001) “Errores en la Búsqueda de Condiciones Robustas, Metodología Para Evitarlos”, *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya*.
24. Prat, A., Tort-Martorell, X., Grima, P. Y Pozueta, L (1997) “Métodos Estadísticos; Control y Mejora de la Calidad”, *Edición UPC*. Barcelona
25. Romero Zunica, R. (2002) “Planes Experimentales Ds-Óptimos en Diseño Robusto de Parámetros”. *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia*.
26. Tamayo M. y Tamayo “El proceso de la Investigación Científica”
27. Tiahrt, K.J. y Weeks, P.L. (1970). “A Method of Constrained Randomization for 2^k Factorial”. *Technometrics*. Vol. 12.
28. Tortora GJ y Grabowski SR. 1998. El aparato cardiovascular: el corazón. En: *Principios de anatomía y fisiología*. Editorial Harcourt Brace de España, S.A. Madrid
29. Zunica, L.R., y Romero, R. (1988) “Un Modelo Para el Estudio de Efectos Sobre la Dispersión en Ausencia de Replicaciones”. *Estadística Española*.

ANEXOS

Anexo A

Órdenes de experimentación para diseños con 8 y 16 experimentos propuestos por de León (2004)

De León (2004) obtuvo a través de una búsqueda exhaustiva de todas las posibles ordenaciones de un diseño factorial con 8 experimentos los únicos 48 órdenes que presentan mínimo sesgo y a la vez mínimo número de cambios en los niveles de los factores.

Asimismo, mediante un programa basado en el algoritmo de Dickinson encontró los únicos 16 órdenes semilla para diseños con 16 experimentos que presentan el mínimo número de cambios y el menor sesgo posible entre estos.

A continuación se reproducen las tablas con estos órdenes, que se citan en varias ocasiones a lo largo de la tesis.

Tabla A.1:

Únicos 48 órdenes para diseños 2^{k-p} , con 8 experimentos, que presentan el valor mínimo para el sesgo máximo (SMA=2) y mínimo número de cambios en los niveles de los factores en la matriz completa. Las filas A, B y C indican el número de cambios para cada factor.

| Órdenes | |
|---------|---|
| 1 | 5 1 1 6 6 1 7 8 4 4 8 1 5 1 7 7 8 4 3 5 3 4 6 |
| 2 | 7 2 5 2 8 5 8 7 2 8 7 3 6 3 8 3 6 3 7 7 7 2 2 |
| 6 | 3 4 7 4 4 6 6 3 6 6 5 7 2 4 4 4 2 7 5 8 8 1 1 |
| 8 | 4 8 8 8 3 3 8 2 1 5 5 1 8 4 8 2 2 1 5 6 4 6 5 3 |
| 4 | 8 6 6 1 7 7 4 5 1 7 3 4 8 7 6 1 5 1 8 3 5 6 4 |
| 3 | 6 5 2 5 5 3 3 6 3 3 4 2 7 5 5 5 7 2 4 1 1 8 8 |
| 7 | 2 7 4 7 1 4 1 2 7 1 2 6 3 6 1 6 3 6 2 2 2 7 7 |
| 5 | 1 3 3 8 2 2 5 4 8 2 6 5 1 2 3 8 4 8 1 6 4 3 5 |
| A | 2 2 2 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 3 2 3 2 2 2 3 3 3 3 |
| B | 2 2 3 3 3 2 2 3 2 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 3 2 2 2 2 |
| C | 3 3 2 2 2 3 2 2 3 3 2 2 3 3 2 3 2 3 3 2 2 2 2 2 |
| Total | 7 |

| Órdenes | |
|---------|---|
| 2 | 2 5 5 2 6 2 8 7 2 2 6 6 4 4 7 7 3 3 5 3 3 8 8 |
| 1 | 1 1 6 6 5 4 4 5 4 6 5 8 3 8 5 3 1 1 1 4 4 6 4 |
| 3 | 5 3 8 8 7 3 3 6 8 5 1 7 1 7 1 1 2 5 2 2 8 5 2 |
| 7 | 7 4 4 7 3 7 1 2 7 7 3 3 5 5 2 2 6 6 4 6 6 1 1 |
| 5 | 3 2 2 5 1 8 2 1 3 8 7 4 7 6 6 4 5 2 3 8 2 2 3 |
| 6 | 4 6 1 1 2 6 6 3 1 4 8 2 8 2 8 8 7 4 7 7 1 4 7 |
| 8 | 8 8 3 3 4 5 5 4 5 3 4 1 6 1 4 6 8 8 8 5 5 3 5 |
| 4 | 6 7 7 4 8 1 7 8 6 1 2 5 2 3 3 5 4 7 6 1 7 7 6 |
| A | 2 2 2 2 2 2 3 3 3 2 3 2 3 2 3 2 2 3 2 3 2 2 3 2 |
| B | 3 2 3 3 3 3 2 2 2 2 2 2 3 2 2 3 2 2 2 3 2 2 3 |
| C | 2 3 2 2 2 2 2 2 2 3 2 3 2 2 2 3 2 2 3 2 2 3 2 2 |
| Total | 7 |

Tabla A.2:

Únicos órdenes semilla para diseños 2^{k-p} , con 16 experimentos, que producen el mínimo número de cambios en los niveles de los factores en la matriz completa y un valor de SMA=4 (el mínimo posible con el mínimo número de cambios). Las filas A, B, C y D indican el número de cambios para cada factor.

| | | Órdenes | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| | 3 | 3 | 3 | 8 | 8 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 14 | 14 | 14 | 14 |
| | 11 | 11 | 11 | 16 | 16 | 11 | 11 | 11 | 11 | 16 | 4 | 4 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| | 12 | 12 | 15 | 12 | 15 | 3 | 3 | 3 | 3 | 8 | 3 | 3 | 12 | 12 | 15 | 15 |
| | 16 | 16 | 7 | 11 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 4 | 11 | 7 | 11 |
| | 8 | 15 | 8 | 3 | 3 | 5 | 8 | 15 | 15 | 3 | 5 | 8 | 3 | 15 | 3 | 12 |
| | 7 | 7 | 16 | 7 | 11 | 13 | 16 | 13 | 16 | 11 | 13 | 16 | 11 | 7 | 11 | 4 |
| | 15 | 8 | 12 | 15 | 12 | 15 | 15 | 5 | 8 | 15 | 14 | 14 | 15 | 3 | 12 | 3 |
| | 13 | 6 | 10 | 13 | 10 | 16 | 13 | 6 | 6 | 13 | 6 | 6 | 7 | 4 | 4 | 7 |
| | 5 | 5 | 14 | 5 | 14 | 8 | 5 | 8 | 5 | 5 | 8 | 5 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| | 6 | 13 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 16 | 13 | 6 | 16 | 13 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| | 14 | 14 | 5 | 14 | 5 | 14 | 14 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| | 10 | 10 | 13 | 10 | 13 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| A | 6 | 8 | 4 | 4 | 4 | 4 | 6 | 4 | 6 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 6 |
| B | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| C | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 6 | 4 | 4 |
| D | 5 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 3 | 5 | 3 |
| Total | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |

Anexo B

Macro en el lenguaje de Minitab para obtener órdenes con las propiedades deseadas usando el método de las columnas de expansión

Esta macro, integrada en el entorno del paquete de software estadístico Minitab, convierte el orden estándar en un nuevo orden de experimentación que tiene las propiedades deseadas para cualquiera de los diseños que se pueden plantear con este software.

La macro ya tiene incorporados los órdenes semilla obtenidos para cada uno de los diseños y a partir de estos se generan los órdenes de experimentación utilizando el método de la columna de expansión que puede aprovecharse para orientar la búsqueda solo hacia aquellos órdenes que reúnan unas propiedades especiales (como concentrar el sesgo máximo fuera de los efectos principales).

Dado un orden de un diseño 2^k con las propiedades deseadas, de él se pueden deducir $2k$ columnas de expansión para llegar a un orden con las mismas propiedades que este a partir del orden de un diseño 2^{k-1} con esas propiedades. Por tanto, los vectores de expansión que se pueden deducir de cada diseño son los que figuran en la Tabla B1.

Tabla B1:

Columnas de expansión que se pueden deducir de cada diseño

| Diseño | Columnas de Expansión | Nro. de órdenes a que se llega (por orden semilla) |
|--------|-----------------------|--|
| 2^3 | 6 | $8 \times 6 = 48$ ⁽¹⁾ |
| 2^4 | 8 | $8 \times 6 \times 8 = 384$ |
| 2^5 | 10 | $8 \times 6 \times 8 \times 10 = 3840$ |
| 2^6 | 12 | $8 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 = 46080$ |
| 2^7 | 14 | $8 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 = 645120$ |

⁽¹⁾ 8 son los órdenes de un diseño 2^2 a los que se aplican las columnas de expansión.

La macro que aquí se presenta está simplificada de forma que se aplica a un solo orden semilla por tipo de diseño, y en los diseños 2^5 , 2^6 y 2^7 sólo se utilizan 2 columnas de expansión, de entre las disponibles. Así pues, esta macro genera al azar un orden con las propiedades deseadas de entre los que se indican en la Tabla B2. A efectos prácticos esta selección nos parece suficiente aunque, naturalmente, se puede completar la macro para poder considerar todas las posibilidades existentes.

Tabla B2:

Número total de órdenes de entre los que la macro elige uno al azar

| Nro. de Experimentos | Nro. de órdenes de entre los que esta macro selecciona uno al azar |
|----------------------|--|
| 4 | 8 |
| 8 | 48 |
| 16 | 384 |
| 32 | 768 |
| 64 | 1536 |
| 128 | 3072 |

```
#####
# COLUMNA.mac #
# # #
# ¿QUE HACE? #
# A partir de 8 órdenes con el mínimo número de cambios de nivel #
# de los factores para un diseño  $2^2$  y las columnas de expansión #
# para los diseños  $2^k$  con  $k=3,4,5,6,7$  se obtienen aleatoriamente #
# órdenes con las siguientes propiedades: #
# - Mínimo sesgo máximo absoluto #
# - Mínimo número de cambios de nivel en los factores #
# de la matriz completa #
# # #
# ¿CÓMO UTILIZARLO? #
# Generar con Minitab cualquier diseño factorial completo o #
# o fraccional de entre todos los disponibles, con todas las #
# opciones por defecto excepto la de aleatorización, que debe #
# quitarse para que el diseño se presente en orden estándar. #
# Ejecutar la macro. El diseño queda en el orden adecuado para #
# introducir las respuestas y ser analizado #
# # #
# Preparado para Minitab versión 16 #
# # #
#####
```

```

GMACRO
COLUM
brief 0 # Para que no salgan resultados intermedios por la pantalla
#
# K1: Número de experimentos
# k2: Número de columnas a ordenar
# K3 a K6: Contadores y auxiliares
#
# K12 Núm. aleatorio para el  $2^2$ 
# K13 Núm. aleatorio para el  $2^3$ 
# K14 Núm. aleatorio para el  $2^4$ 
# k15 Núm. aleatorio para el  $2^5$ 
# k16 Núm. aleatorio para el  $2^6$ 
# k17 Núm. aleatorio para el  $2^7$ 

# C101: Órdenes para el diseño  $2^2$ 
# C102: columna expansión para diseño  $2^3$ 
# c103: Sumas a la columna de expansión para el diseño  $2^3$ 
# c104: columna expansión para diseño  $2^4$ 
# c105: Sumas a la columna de expansión para el diseño  $2^4$ 
# c106: columna expansión para diseño  $2^5$ 
# c107: Sumas a la columna de expansión para el diseño  $2^5$ 
# c108: columna expansión para diseño  $2^6$ 
# c109: Sumas a la columna de expansión para el diseño  $2^6$ 
# c110: columna expansión para diseño  $2^7$ 
# c111: Sumas a la columna de expansión para el diseño  $2^7$ 
#
# c112: Lugar donde se depositan los números aleatorios
#
# c122: Valores de la columna seleccionada para diseño  $2^2$ 
# c123: ...  $2^3$ 
# c124: ...  $2^4$ 
# c125: ...  $2^5$ 
# c126: ...  $2^6$ 
# c127: ...  $2^7$ 
#
# c142: Posiciones para el diseño  $2^3$ 
# C143: ...  $2^4$ 
# C144: ...  $2^5$ 
# C145: ...  $2^6$ 
# C146: ...  $2^7$ 

# c152: Columna donde se colocan antes de la presentación final

# Cuenta el número de experimentos
count c1 k1

# Cuenta el número de columnas a ordenar
let k4=0

DO K5=7:19
    COUNT CK5 K3
    LET K4=K4+K3
ENDDO

LET K2=6+K4/K1
    
```

```

# *****2^2*****
SET C101      # Para 2^2 (Total: 8),sesgo 2
1 2 4 3
1 3 4 2
2 1 3 4
2 4 3 1
3 4 2 1
3 1 2 4
4 2 1 3
4 3 1 2
END

RANDOM 1 C112;
      INTEGER 1 8.
LET K12=C112(1)

do k5=1:4      # Valores seleccionados para el 2^2
  let c122(k5)=c101(4*(k12-1)+k5)
enddo

if k1=4
  let c152=c122      # Para la presentación final
  goto 10
endif

# *****2^3*****

SET C102      # Para 2^3 (Total: 6), sesgo 2
1 1 4 3 2 2 3 4      # columna de expansión del factor A
1 1 4 3 2 2 3 4      # columna de expansión del factor A-
1 2 3 3 2 1 4 4      # columna de expansión del factor B
1 2 3 3 2 1 4 4      # columna de expansión del factor B-
1 2 2 3 3 4 4 1      # columna de expansión del factor C
1 2 2 3 3 4 4 1      # columna de expansión del factor C-
END

SET C103
0 4 4 4 4 0 0 0      # sumas columna A
4 0 0 0 0 4 4 4      # sumas columna A-
0 0 0 4 4 4 4 0      # sumas columna B
4 4 4 0 0 0 0 4      # sumas columna B-
0 0 4 4 0 0 4 4      # sumas columna C
4 4 0 0 4 4 0 0      # sumas columna C-
END

RANDOM 1 C112;
      INTEGER 1 6.
LET K13=C112(1)

DO K5=1:8      # Valores seleccionados para el 2^3
  LET C123(K5)=C102(8*(K13-1)+K5)
ENDDO

DO K5=1:8      # Coloca en c142 las posiciones de acuerdo
  LET k6=c123(K5)      # con la columna de expansión
  LET c142(k5)=c122(K6)
ENDDO

```

```

DO k5=1:8      # Suma 4 donde corresponde
  LET c142(K5)=c142(K5)+c103(8*(K13-1)+K5)
ENDDO

IF K1=8
  LET c152=c142      # Para la presentación final
  GOTO 10
ENDIF

# *****2^4*****

SET C104      # Para 2^4 (Total 8: 4 col + sus inversas), sesgo 4
1 1 6 7 4 4 3 2 5 5 2 3 8 8 7 6 #columna de expansión del factor A
1 1 6 7 4 4 3 2 5 5 2 3 8 8 7 6 #columna de expansión del factor A-
1 2 3 4 4 7 6 1 8 3 2 5 5 6 7 8 #columna de expansión del factor B
1 2 3 4 4 7 6 1 8 3 2 5 5 6 7 8 #columna de expansión del factor B-
1 2 5 5 4 7 8 8 7 4 3 3 2 1 6 6 #columna de expansión del factor C
1 2 5 5 4 7 8 8 7 4 3 3 2 1 6 6 #columna de expansión del factor C-
1 2 2 5 4 7 7 8 8 3 3 4 5 6 6 1 #columna de expansión del factor D
1 2 2 5 4 7 7 8 8 3 3 4 5 6 6 1 #columna de expansión del factor D-
END

SET C105
0 8 8 8 8 0 0 0 0 8 8 8 8 0 0 0 # sumas columna A
8 0 0 0 0 8 8 8 8 0 0 0 0 8 8 8 # sumas columna A-
0 0 0 0 8 8 8 8 8 8 8 8 0 0 0 0 # sumas columna B
8 8 8 8 0 0 0 0 0 0 0 0 8 8 8 8 # sumas columna B-
0 0 0 8 8 8 8 8 0 0 0 0 8 8 8 8 # sumas columna C
8 8 8 0 0 0 0 8 8 8 8 0 0 0 0 8 # sumas columna C-
0 0 8 8 8 8 0 0 8 8 0 0 0 0 8 8 # sumas columna D
8 8 0 0 0 0 8 8 0 0 8 8 8 8 0 0 # sumas columna D-
END

RANDOM 1 C112;
INTEGER 1 8.
LET K14=C112(1)

do K5=1:16      # Valores seleccionados para el 2^4
  LET C124(K5)=C104(16*(K14-1)+K5)
ENDDO

DO K5=1:16      # Coloca en c143 las posiciones de acuerdo
  LET K6=c124(K5) # con el columna de expansión
  LET C143(K5)=C142(K6)
ENDDO

do K5=1:16      # Suma 8 donde corresponde
  LET C143(K5)=C143(K5)+C105(16*(K14-1)+K5)
ENDDO

IF K1=16
  LET C152=C143      # Para la presentación final
  GOTO 10
ENDIF

# *****2^5*****

```

```

SET C106          # Para 2^5 (Total 2: 1 + inverso), sesgo 4.75
1 2 11 12 5 10 9 6 15 15 14 13 2 11 12 5      # columna E
4 3 10 9 6 7 8 8 7 14 13 4 3 16 16 1         # sigue
1 2 11 12 5 10 9 6 15 15 14 13 2 11 12 5      # columna E-
4 3 10 9 6 7 8 8 7 14 13 4 3 16 16 1         # sigue
END

SET C107
0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 16 16 16 16 16 16      # sumas columna E
16 16 16 16 16 16 16 0 0 0 0 0 0 0 16 16     # sigue
16 16 16 16 16 16 16 16 16 0 0 0 0 0 0 0     # sumas columna E-
0 0 0 0 0 0 0 16 16 16 16 16 16 16 0 0      # sigue
END

RANDOM 1 C112;
  INTEGER 1 2.
LET K15=C112(1)

DO K5=1:32      # Valores seleccionados para el 2^5
  LET C125(K5)=C106(32*(K15-1)+K5)
ENDDO

DO K5=1:32      # Coloca en c144 las posiciones de acuerdo
  LET K6=C125(K5) # con la columna de expansión
  LET C144(K5)=C143(K6)
ENDDO

DO K5=1:32      # Suma 16 donde corresponde
  LET C144(K5)=C144(K5)+C107(32*(K15-1)+K5)
ENDDO

IF K1=32
  LET C152=c144 # Para la presentación final
  GOTO 10
ENDIF

# *****2^6*****

SET C108          # Para 2^6 (Total: 1 + el inverso), sesgo 8
1 2 2 3 3 14 15 4 5 6 7 20 23 24 25 26      #columna F
9 30 31 18 18 17 12 11 32 31 20 7 6 5 4 25 #sigue
26 9 8 8 21 10 10 21 16 15 22 22 11 32 13 13 #sigue
14 23 24 1 30 29 29 28 28 27 27 12 17 16 19 19
1 2 2 3 3 14 15 4 5 6 7 20 23 24 25 26      #columna F-
9 30 31 18 18 17 12 11 32 31 20 7 6 5 4 25 #sigue
26 9 8 8 21 10 10 21 16 15 22 22 11 32 13 13 #sigue
14 23 24 1 30 29 29 28 28 27 27 12 17 16 19 19
END

SET C109
0 0 32 32 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      # sumas columna F
0 0 0 0 32 32 32 32 32 32 32 32 32 32 32 32 # sigue
32 32 32 0 0 0 32 32 32 32 32 0 0 0 0 32     # sigue
32 32 32 32 32 32 0 0 32 32 0 0 0 0 0 32
32 32 0 0 32 32 32 32 32 32 32 32 32 32 32 32 # sumas columna F-
32 32 32 32 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0     # sigue
0 0 0 32 32 32 0 0 0 0 0 32 32 32 32 0 0     # sigue
0 0 0 0 0 0 32 32 0 0 32 32 32 32 32 0
END

```

```

RANDOM 1 C112;
  INTEGER 1 2.
let K16=C112(1)

DO k5=1:64          # Valores seleccionados para el 2^6
  LET C126(K5)=C108(64*(K15-1)+K5)
ENDDO

DO K5=1:64          # Coloca en c144 las posiciones de acuerdo
  LET K6=C126(K5)   # con la columna de expansión
  LET C145(K5)=C144(K6)
ENDDO

DO K5=1:64          # Suma 32 donde corresponde
  LET C145(K5)=C145(K5)+C109(64*(K15-1)+K5)
ENDDO

IF K1=64
  LET C152=C145     # Para la presentación final
  GOTÓ i0
ENDIF

# *****2^7*****

SET C110          # Para 2^7 (Total: 1 + el inverso), sesgo 15.0625
1 2 5 14 14 5 8 15 15 8 31 32 35 30 9 36          #columna G
37 62 7 44 45 60 23 24 33 58 59 16 17 56 55 18    #sigue
19 20 47 46 25 48 49 50 50 49 64 27 28 29 54 53    #sigue
52 3 48 25 24 23 60 45 44 7 62 37 36 9 56 17      #sigue
18 55 20 19 38 61 61 38 39 22 21 26 26 21 22 39    #sigue
40 41 42 43 32 35 30 57 34 34 57 54 53 52 3 4      #sigue
29 10 10 63 12 13 6 47 46 1 2 59 16 33 58 31      #sigue
4 51 51 28 27 40 43 42 41 64 63 6 13 12 11 11
1 2 5 14 14 5 8 15 15 8 31 32 35 30 9 36          #columna G-
37 62 7 44 45 60 23 24 33 58 59 16 17 56 55 18    #sigue
19 20 47 46 25 48 49 50 50 49 64 27 28 29 54 53    #sigue
52 3 48 25 24 23 60 45 44 7 62 37 36 9 56 17      #sigue
18 55 20 19 38 61 61 38 39 22 21 26 26 21 22 39    #sigue
40 41 42 43 32 35 30 57 34 34 57 54 53 52 3 4      #sigue
29 10 10 63 12 13 6 47 46 1 2 59 16 33 58 31      #sigue
4 51 51 28 27 40 43 42 41 64 63 6 13 12 11 11
END

SET C111
0 0 0 0 64 64 64 64 0 0 0 0 0 0 0 0             # sumas columna G
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0             #sigue
0 0 0 0 0 0 0 0 64 64 64 64 64 64 64 64       #sigue
64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 #sigue
64 64 64 64 64 64 0 0 0 0 0 0 64 64 64 64     #sigue
64 64 64 64 64 64 64 64 64 0 0 0 0 0 0 0 0     #sigue
0 0 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 #sigue
64 64 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 64
64 64 64 64 0 0 0 0 64 64 64 64 64 64 64 64    # sumas columna G-
64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 #sigue
64 64 64 64 64 64 64 64 0 0 0 0 0 0 0 0       #sigue
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0             #sigue
0 0 0 0 0 0 64 64 64 64 64 64 0 0 0 0         #sigue
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 64 64 64 64 64 64         #sigue

```



```
64 64 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 #sigue
0 0 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 64 0
END

RANDOM 1 C112;
  INTEGER 1 2.
LET K17=C112(1)

DO K5=1:128      # Valores seleccionados para el 2^7
  LET C127(K5)=C110(128*(K17-1)+K5)
ENDDO

DO K5=1:128      # Coloca en c146 las posiciones de acuerdo
  LET K6=C127(K5) # con la columna de expansión
  LET C146(K5)=C145(K6)
ENDDO

DO K5=1:128      # Suma 64 donde corresponde
  LET C146(K5)=C146(K5)+C111(128*(K17-1)+K5)
ENDDO

LET C152=C146      # Para la presentación final

# *****

MLABEL 10
DO K5=1:K1      # Presenta la secuencia para ordenar
  LET K6=C152(K5)
  LET C160(K6)=K5
ENDDO

SORT C1 C3-Ck2 C1 C3-CK2; # Ordenación
BY C160.

BRIEF 2
  ENDMACRO
```