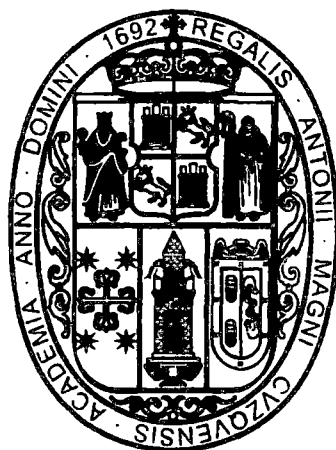


UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CARRERA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS

**"SOLUCIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA DE ECUACIONES INTEGRALES
LINEALES DE FREDHOLM NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDA ESPECIE"**

Presentado por:

Br. NÉSTOR RODRIGO LOAYZA ROJAS

**Para optar al título profesional de
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

ASESOR:

Mgt. Alejandro Ttito Ttica

AUSPICIO: CONSEJO DE INVESTIGACIÓN - UNSAAC

**CUSCO - PERÚ
2012**

PRESENTACIÓN

SEÑOR : Decano de la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas.

SEÑOR : Coordinador de la Carrera Profesional de Matemática

SEÑORES : Miembros del Jurado.

En cumplimiento al reglamento vigente para optar al título profesional de Licenciado en Matemática; pongo a vuestra consideración el trabajo de tesis intitulado **“SOLUCIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA DE ECUACIONES INTEGRALES LINEALES DE FREDHOLM NO HOMOGÉNEAS DE SEGUNDA ESPECIE”**.

El presente trabajo de investigación se desarrolla con el fin de contribuir con el desarrollo del área de investigación de la Teoría de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, en particular con los métodos de solución de estas ecuaciones, y también con el análisis numérico, puesto que en este trabajo se implementan los métodos de solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, usando el sistema algebraico computacional *Mathematica 6.0*.

El desarrollo del presente trabajo, tiene por objetivo principal comparar y determinar un método de solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, que sea el eficiente, para tal propósito se consideran los capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo se desarrolla la parte preliminar del proyecto de investigación, en el que se resume; el planteamiento del problema, la formulación del problema, los objetivos, las hipótesis, los antecedentes, la metodología, la justificación, y las limitaciones.

En el segundo capítulo se presentan algunos conceptos básicos del análisis funcional; espacios normados, espacios de Hilbert, y sus principales propiedades, concluyendo con el desarrollo de operadores lineales y algunos teoremas de existencia y unicidad de operadores lineales.

En el tercer capítulo se considera principalmente la clasificación de las ecuaciones integrales lineales de Fredholm, también teoremas de existencia y unicidad para las ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie.

En el cuarto capítulo se presenta la comparación de los métodos de solución de las ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie, Método de las Aproximaciones Sucesivas, el Método del Núcleo Separable y el Método de la Cuadratura de Gauss, para la determinación del método de solución más eficiente de este tipo de ecuaciones; todo esto con ayuda de la implementación de los métodos de solución, realizada en el programa *Mathematica* 6.0.

Expreso mi agradecimiento a los profesores de la Carrera Profesional de Matemáticas, quienes participaron en mi formación académica e hicieron posible que culmine mis estudios universitarios, y finalmente expreso mi especial agradecimiento al Mgt. Alejandro Tito Ttica, asesor del presente trabajo, quien en todo momento me brindó su colaboración y orientación.

Cusco, Diciembre de 2011.

Néstor Rodrigo Loayza Rojas

DEDICATORIA

A mis queridos padres, Sussy y Leo; por todo su amor, apoyo, comprensión y sacrificios por darme siempre lo mejor.

A mis hermanos, Raúl, María y Lisbet; quienes han sido mi inspiración para ser mejor cada día.

A mis cariñosos abuelos, Fortunato y Raquel; por sus palabras de aliento en todo momento.

A mi novia y amiga, Julie; por ser muy especial en mi vida y por demostrarme que en todo momento cuento con ella.

Y a todas las personas que desinteresadamente me ayudaron a culminar mi carrera profesional.

AGRADECIMIENTOS

“Agradezco de todo corazón a mis Padres, Sussy y Leo; por todo su amor incondicional, cariño, comprensión, y por entender mis ausencias y mis malos momentos.”

“Agradezco a mis hermanos Raúl, María y Lisbet; por la compañía, el apoyo que me brindan, y porque sé que se esforzarán por ser cada vez más grandes.”

“A mi novia Julie, por apoyarme en todo momento y permitirme entrar en su vida”

“Agradezco a mis abuelos, Fortunato y Raquel; por su apoyo sincero, Dios los bendiga siempre.

Gracias a todos los que me apoyaron.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN	ii
DEDICATORIA	iv
AGRADECIMIENTOS	v
INTRODUCCIÓN	ix
PRELIMINARES	1
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	1
1.1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	2
1.2. OBJETIVOS	2
1.2.1. OBJETIVO GENERAL.....	2
1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	2
1.3. HIPÓTESIS	2
1.4. MARCO TEÓRICO	3
1.4.1. ANTECEDENTES	3
1.5. METODOLOGÍA	4
1.5.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN:	4
1.6. JUSTIFICACION	4
1.7. LIMITACIONES	5

CAPITULO I.....	6
1.1 ESPACIOS NORMADOS.....	6
1.2 ESPACIOS DE HILBERT.....	14
1.3 OPERADORES LINEALES.....	19
1.4 TEOREMAS DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DE OPERADORES	21
 CAPITULO II.....	 28
2.1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES INTEGRALES	29
2.1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES INTEGRALES LINEALES	29
2.1.2 TIPOS ESPECIALES DE NÚCLEOS	33
2.2. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE NO HOMOGENEA.	34
2.3. TEOREMA DE LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM	41
 CAPITULO III	 42
3.1. MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS.....	43
3.2. MÉTODO DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES CON NÚCLEO SEPARABLE	54
3.3. MÉTODO DE SUMAS FINITAS	63
3.3.1. CUADRATURA DE GAUSS	63

3.3.2 CUADRATURA DE GAUSS SOBRE INTERVALOS ARBITRARIOS.	
.....	73
3.4. COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN.....	81
CONCLUSIONES.....	89
RECOMENDACIONES	91
BIBLIOGRAFÍA	92
LINKOGRAFÍA	93
ANEXO A.....	94
ANEXO B.....	100
ANEXO C.....	108
ANEXO D.....	115

INTRODUCCIÓN

El Análisis Funcional fue desarrollado a finales del siglo XIX y durante las primeras décadas del siglo XX. Su desarrollo fue, en gran parte, en respuesta a las interrogantes que se generaban en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales e Integrales. Estas ecuaciones fueron de gran interés en el tiempo debido al gran esfuerzo realizado para entender fenómenos físicos. El estudio del Análisis Funcional es fundamental para tratar funciones como puntos en un determinado espacio vectorial abstracto, para estudiar las ecuaciones diferenciales e integrales relacionando estos puntos en términos de transformaciones lineales sobre estos espacios.

Muchos nombres son asociados con el origen y desarrollo del Análisis Funcional, entre ellos se tienen a Stefan Banach y David Hilbert que tienen probablemente la mayor influencia.

El ejemplo más representativo y probablemente, más influyente en el desarrollo del Análisis Funcional, es el de las ecuaciones Integrales. A lo largo del siglo XIX se plantearon algunas ecuaciones Integrales especiales, habitualmente en relación con cuestiones de la física. Los primeros resultados generales sobre el estudio de estas ecuaciones, fueron obtenidos por J.M. Le Roux, V. Volterra e Ivar Fredholm. Fue 1888 cuando P. du Bois-Raymond sugirió el nombre de Ecuaciones Integrales y propuso desarrollar una teoría general de tales ecuaciones como método alternativo para resolver problemas de ecuaciones

diferenciales. Motivo por el cual desde entonces se viene trabajando con métodos de soluciones que proveen en su mayoría, soluciones analíticas.

En la matemática aplicada, las soluciones analíticas son particularmente deseadas, tales soluciones pueden proveer una representación completa de un determinado rango de información y permitir un entendimiento cualitativo de cómo la solución varia con la información, pero este tipo de solución es raramente posible, consecuentemente se debe de buscar métodos alternativos para obtener soluciones numéricas.

PRELIMINARES

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Los fundadores principales de la teoría de ecuaciones integrales son Vito Volterra y Erick Ivar Fredholm, junto con David Hilbert y Erhard Schmidt. Actualmente las Ecuaciones Integrales de Fredholm, particularmente las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie se encuentran en diversas áreas de la Matemática aplicada y de la Física, estas ecuaciones ofrecen una técnica poderosa para resolver una gran variedad de problemas prácticos, motivo por el cual nace el interés de realizar una comparación de los métodos clásicos de solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, considerando los métodos analíticos y numéricos, para determinar así un método conveniente y fácil de usar.

1.1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Será posible determinar un método de solución, eficiente para resolver ecuaciones integrales lineales de Fredholm no homogéneas de segunda especie?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GENERAL

Determinar un método eficiente para resolver ecuaciones integrales lineales de Fredholm no homogéneas de segunda especie.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Desarrollar el estudio teórico de los métodos de solución de ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie.
2. Implementar los métodos de solución de ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie, usando un sistema algebraico computacional.
3. Comparar los métodos de solución de ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie

1.3. HIPÓTESIS

El método eficiente para resolver ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie es el Método de Sumas finitas.

1.4. MARCO TEÓRICO

1.4.1. ANTECEDENTES

- a. KOSAKU YOSIDA, 1960. Lectures on differential and integral equations. Inter science Publishers 230 páginas.

El trabajo muestra que la ecuación integral $\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$, donde f es una función continua de valor complejo definida sobre el intervalo $a \leq x \leq b$, en particular el valor de $\lambda = 1$ y K es una función continua de valor complejo definida sobre un dominio $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$, admite una y solo una solución φ bajo la consideración de que $\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < 1$.

- b. DAVID R. STOUTEMYER, 1977. Analytically solving integral equations by using computer algebra. ACM transactions on mathematical software, Vol. 3, No 2, Junio 1977, Páginas 128-146.

Este artículo describe cómo un sistema algebraico computacional tal como REDUCE puede ser usado para construir soluciones analíticas de las ecuaciones integrales uni dimensionales (ecuaciones integrales de Fredholm y Volterra), para la construcción de las soluciones analíticas, se hace uso de una gran variedad de métodos de solución.

- c. PAUL ABBOTT, 2002. Tricks of trade. The *Mathematica*® Journal 8:4 (2002), Páginas 4-7.

Este artículo describe cómo un sistema algebraico computacional tal como *Mathematica* puede ser usado para construir la solución numérica de la

ecuación integral de Fredholm unidimensional (ecuación de Love), para la construcción de la solución numérica, se hace uso de las series de Chebyshev como método de solución.

1.5. METODOLOGÍA

1.5.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN:

Este Trabajo pertenece al tipo de investigación Descriptiva puesto que se describen definiciones básicas, importantes y necesarias para un buen desarrollo de los temas considerados y explicativo porque se trabaja con los métodos de solución de ecuaciones integrales de Fredholm en los que se busca explicar las ventajas y desventajas que ofrecen estos métodos en la solución de ecuaciones integrales de Fredholm.

1.6. JUSTIFICACION

El presente trabajo de investigación se desarrolla con el fin de contribuir con el desarrollo de este área de investigación en la teoría de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, en particular con los métodos de solución de estas ecuaciones, además en la actualidad se sabe que los sistemas algebraicos computacionales han revolucionado los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas permitiendo investigar computacionalmente problemas complicados para hallar soluciones exactas o soluciones numéricas, en este sentido también este trabajo pretende implementar los métodos de

solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, usando el sistema algebraico computacional *Mathematica* 6.0.

1.7. LIMITACIONES

La limitación que se presenta en el desarrollo de este trabajo de investigación es la falta de bibliografía adecuada para el tratamiento de la implementación de los métodos de solución de ecuaciones integrales considerados.

CAPITULO I

OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT

En este capítulo se presentan resultados básicos del análisis funcional los cuales permiten entender la teoría de ecuaciones integrales de Fredholm. Se presentan los aspectos más importantes sobre los espacios de Banach, Hilbert.

1.1 ESPACIOS NORMADOS

Definición 1.1.1.

Un espacio vectorial definido sobre un campo¹ \mathbb{F} , es un conjunto no vacío X provisto de dos operaciones, una definida de $X \times X$ en X y la otra de $\mathbb{F} \times X$ en X , talque se cumplen las siguientes propiedades:

$$(V_1) \quad x + y = y + x, \text{ para todo } x, y \in X;$$

$$(V_2) \quad (x + y) + z = x + (y + z), \text{ para todo } x, y, z \in X;$$

$$(V_3) \quad \text{existe un elemento } 0 \in X \text{ tal que } x + 0 = x \text{ para cada } x \in X;$$

¹ Ver anexo A, página 98

(V₄) para cada $x \in X$ existe $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$;

(V₅) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{F}$;

(V₆) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, para todo $x \in X$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(V₇) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, para todo $x \in X$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

(V₈) $1x = x$, para todo $x \in V$.

El conjunto \mathbb{F} se llama campo algebraico. Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) entonces X es un espacio vectorial real (o espacio vectorial complejo). Los elementos de \mathbb{F} se llaman escalares y los elementos de X se llaman vectores.

La operación de adición de vectores se denota por "+" y la operación de multiplicación escalar por ".".

Definición 1.1.2. Sea X un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{F} . Una norma sobre X es una función $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, se cumple las siguientes condiciones:

(a) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espacio vectorial normado o simplemente espacio normado es un par $(X, \| \cdot \|)$ donde X es un espacio vectorial y $\| \cdot \|$ es una norma en X .

De ahora en adelante se denotará a un espacio normado $(X, \| \cdot \|)$, simplemente por X .

Teorema 1.1.1. Sea X un espacio normado. Si $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por $d(x, y) = \|x - y\|$ entonces (X, d) es un espacio métrico².

Prueba

Sean $x, y, z \in X$. Usando las propiedades de la norma se prueba que d es una métrica.

(a) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

(c) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$

(d) $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|(x - y)\| + \|(y - z)\|$

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z).$$

Por lo tanto, d es una métrica.

□

Definición 1.1.3. Sea X un espacio normado, $a \in X$, $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ se define:

La bola abierta de centro a y radio r

$$B(a, r) = \{x \in X: d(x, a) < r\} = \{x \in X: \|x - a\| < r\};$$

la bola cerrada de centro a y radio r

$$B[a, r] = \{x \in X: d(x, a) \leq r\} = \{x \in X: \|x - a\| \leq r\};$$

la esfera de centro a y radio r

$$S(a, r) = \{x \in X: d(x, a) = r\} = \{x \in X: \|x - a\| = r\}.$$

Definición 1.1.4. Sea X un espacio normado y S subconjunto de X . Se dice que S es un conjunto abierto de X sí y sólo si, para todo $x \in S$, existe una bola abierta $B(x, r)$ tal que $B(x, r) \subset S$.

² Ver anexo A, página 98

Definición 1.1.5. Sea X un espacio normado, se dice que $F \subset X$ es un conjunto cerrado de X sí y sólo si, su complemento $F' = X - F$ es un conjunto abierto.

Definición 1.1.6. Sean X un espacio normado, $x \in X$ y $S \subset X$. Se dice que x es un punto de acumulación de S y se escribe $x = p.a(S)$ sí y sólo si, toda bola abierta $B(x, r)$ contiene por lo menos un punto de S diferente de x , es decir:

$$x = p.a(S) \Leftrightarrow \{B(x, r) - \{x\}\} \cap S \neq \emptyset \text{ para todo } B(x, r), r > 0.$$

Definición 1.1.7. Sea X un espacio normado. Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X converge a un elemento $x \in X$, se denota por $x_n \rightarrow x$ (o por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$), sí y sólo si, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Equivalentemente:

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X converge a un elemento $x \in X$, sí y sólo si, la sucesión de números reales $\{\|x_n - x\|\}$ converge a cero, es decir:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

Definición 1.1.8. Sea X un espacio normado. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X es fundamental o de Cauchy, sí y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que si $m, n \geq n_0$ entonces $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Teorema 1.1.2. Sea X un espacio normado. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones de elementos de X las cuales convergen a x, y en X respectivamente y sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión en \mathbb{F} , la cual converge a α en \mathbb{F} . Entonces:

- (a) $|||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.

Prueba

(a) Por la desigualdad triangular, se tiene que

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

y por tanto $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Intercambiando x por y se obtiene $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Sin embargo, como

$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\|$ se tiene

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Por lo tanto, $|||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|$.

(b) Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

luego usando la desigualdad

$$|||x|| - ||x_n||| \leq \|x - x_n\| < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$.

(c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Además

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

luego

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

(d) Como $\{\alpha_n\}$ es una sucesión convergente es acotada, por tanto existe $K > 0$ tal que $|\alpha_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} \|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \\ &\leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \\ &\leq K \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \alpha x \quad \square$$

Teorema 1.1.3. Sea X un espacio vectorial sobre el campo F . La función norma $\|\cdot\|$ definida en X es continua.

Prueba

Se debe verificar que si $x_n \rightarrow x$, entonces

$$\|x_n\| \rightarrow \|x\|.$$

Sea x_n una sucesión convergente a $x \in X$, esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \text{ tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

luego usando la desigualdad

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$. □

Teorema 1.1.4. Un conjunto S de un espacio normado X es cerrado sí sólo si, toda sucesión de elementos de S convergente en X , tiene su límite en S .

Prueba

(\Rightarrow) Supongamos que S es un conjunto cerrado de X , $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in S$, $x_n \rightarrow x$ y $x \notin S$. Como S es cerrado, entonces $S' = X - S$ es abierto, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset S' = X - S$.

Por otra parte, como $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ entonces $\|x_n - x\| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Por tanto $x_n \in B(x, \varepsilon)$, esto es: $x_n \in X - S$, lo que contradice a suponer que $x_n \in S$.

Esta contradicción demuestra que $x \notin S$ es imposible, por tanto $x \in S$.

(\Leftarrow) Supongamos que el conjunto S no es cerrado, esto es: el conjunto $S' = X - S$ no es abierto, luego existe $x \in X - S$ tal que cada bola $B(x, \varepsilon)$ contiene elementos de S . Por tanto se elige $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, tal que $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, $x_n \in S$ para todo n , se tiene que: $\|x_n - x\| < \frac{1}{n} \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

de acuerdo a nuestra suposición $x \in S$. Esto contradice la suposición $x \in X - S$.

Por lo tanto, S es un conjunto cerrado. □

Definición 1.1.9. Sea X un espacio Normado. X es un espacio Normado completo sí y sólo si, toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X .

Un espacio normado completo se llama espacio de Banach.

Definición 1.1.10. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se llama convergente si la sucesión de sumas parciales converge en X , esto es, existe $x \in X$ tal que

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n - x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i - x\| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

En ese caso se denota $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se llama absolutamente convergente.

Teorema 1.1.5. Sea X un espacio de Banach. Cada serie absolutamente convergente en X es convergente.

Prueba

Sea X un espacio de Banach. Considérese $x_n \in X$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Se define $s_n = x_1 + \dots + x_n$.

Se debe demostrar que $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$, y k un número entero positivo tal que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon.$$

Luego, para cada $m > n > k$, se tiene

$$\begin{aligned} \|s_m - s_n\| &= \|x_{n+1} + \dots + x_m\| \\ &= \left\| \sum_{n=k+1}^m x_n \right\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n\| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\|s_m - s_n\| < \varepsilon$$

Esto prueba que la sucesión $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X .

Como X es un espacio normado completo, $\{s_n\}$ converge en X , lo que significa que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Definición 1.1.11. Sean E y F espacios normados y $f: E \rightarrow F$ una aplicación. f es lineal si $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ para todo $x, y \in E$ y todos los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Definición 1.1.12. Sean E y F espacios normados y $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Se dice que f es continua en E sí y sólo si, f es continua en todo $x_0 \in E$.

Definición 1.1.13. Sean E y F espacios normados. Una aplicación lineal $f: E \rightarrow F$ se llama acotada, si existe un número real $k > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in E$.

1.2 ESPACIOS DE HILBERT

Definición 1.2.1. Sea E un espacio vectorial complejo. Una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ se llama producto interno en E si para cualquier $x, y, z \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (b) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (la barra denota el complejo conjugado)

$$(d) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

Un espacio producto interno o espacio pre Hilbert es un par $(E, \langle \dots \rangle)$ donde $\langle \dots \rangle$ es un producto interno en E .

Lema 1.2.1. Sea E un espacio producto interno, $x, y, z \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces

$$(a) \langle \mathbf{0}, y \rangle = \langle x, \mathbf{0} \rangle = 0;$$

$$(b) \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle;$$

$$(c) \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \beta \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle.$$

Prueba

$$(a) \langle \mathbf{0}, y \rangle = \langle \mathbf{0} \cdot \mathbf{0}, y \rangle = 0 \langle \mathbf{0}, y \rangle = 0 \text{ y } \langle \mathbf{0}, x \rangle = \overline{\langle \mathbf{0}, x \rangle} = \bar{0} = 0 \text{ (para distinguir el vector cero de } E \text{ del cero escalar, temporalmente denotamos al vector cero por } 0).$$

$$(b) \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle + \beta \langle z, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle \text{ (Usando las propiedades del producto interno de la definición 1.2.1).}$$

$$(c) \begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle &= \bar{\alpha} \langle \alpha x + \beta y, x \rangle + \bar{\beta} \langle \alpha x + \beta y, y \rangle \\ &= \bar{\alpha} \alpha \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \beta \langle y, x \rangle + \bar{\beta} \alpha \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \beta \langle y, y \rangle \\ &= |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \beta \langle y, x \rangle + \bar{\beta} \alpha \langle x, y \rangle + |\beta|^2 \langle y, y \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

De la definición 1.2.1 y la parte (b) del lema 1.2.1, podemos afirmar que el producto interno $\langle \dots \rangle$ sobre un espacio complejo es lineal con respecto a su primera variable y es lineal conjugado con respecto a su segunda variable (un espacio producto interno real es lineal con respecto a las dos variables).

Un producto interno en E define una norma en E dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

y una métrica E en dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

Teorema 1.2.1. (Desigualdad de Schwarz) Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio producto interno entonces

- (a) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$;
- (b) $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x$ e y son linealmente dependientes.

Prueba

(a) Si $y = 0$, entonces se cumple la desigualdad, es decir, $|\langle x, 0 \rangle| \leq \|x\| \|0\|$.

Supóngase que $y \neq 0$, luego $\langle y, y \rangle = |\langle y, y \rangle| = \|y\|^2 \neq 0$

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle. \quad (1)$$

Considerando $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ y multiplicando (1) por $\langle y, y \rangle$, se tiene

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle \langle y, y \rangle + \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right|^2 \langle y, y \rangle \langle y, y \rangle$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 + |\langle x, y \rangle|^2$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2$$

Así $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

(b) (\Leftarrow) Supongamos que x e y son linealmente dependientes, es decir, $y = \alpha x$

para algún $\alpha \in \mathbb{C}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= |\langle x, \alpha x \rangle| = |\bar{\alpha} \langle x, x \rangle| = |\bar{\alpha}| |\langle x, x \rangle| = |\alpha| |\langle x, x \rangle| \\ &= |\alpha| \|x\| \|x\| = \|x\| \|\alpha x\| = \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Supongamos que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$, equivalentemente,

$$\langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Se debe probar que $\langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y = 0$, lo que indica x e y son linealmente dependientes.

En efecto,

$$\begin{aligned} & \langle \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y, \langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y \rangle = \\ & = \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \overline{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \langle y, y \rangle \\ & = \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \langle y, y \rangle \\ & = \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle = 0 \end{aligned}$$

luego, $\langle y, y \rangle x - \langle x, y \rangle y = 0$, por tanto x e y son linealmente dependientes. \square

Corolario 1.2.1. (Desigualdad triangular) Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio producto interno. Si $x, y \in E$ son elementos cualesquiera entonces

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Prueba

Del teorema anterior se tiene

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle.$$

Si $\alpha = 1$ entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
&\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Por tanto $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Definición 1.2.2. Sean $(E, \langle \dots \rangle)$ un espacio producto interno, $x, y \in E$, x es ortogonal a y , si $\langle x, y \rangle = 0$; y se denota por $x \perp y$.

Definición 1.2.3. (Espacio de Hilbert) Sea $(H, \langle \dots \rangle)$ un espacio producto interno. Si H provisto de la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ es completo entonces $(H, \langle \dots \rangle)$ se llama espacio de Hilbert. Es decir, un espacio de Hilbert es un espacio producto interno completo.

Ejemplo

El espacio $L^2([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$, es un espacio de Hilbert, con el producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt$$

y la norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

1.3 OPERADORES LINEALES

Definición 1.3.1. Sean E y F dos espacios normados definidos sobre el mismo campo \mathbb{F} ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). La aplicación $T: E \rightarrow F$ se llama operador lineal sí y sólo si, verifica las propiedades siguientes:

(a) $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in E.$

(b) $T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{F}.$

Definición 1.3.2. Sea H un espacio de Hilbert. Una Operador lineal $T: H \rightarrow H$ se llama acotado, si existe un número real $k \geq 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq k\|x\| \quad \forall x \in H$$

La norma de T se define como el número:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \quad \text{o} \quad \|T\| = \sup_{x \in H} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Notación

$$B = \{T: H \rightarrow H : T \text{ es lineal y acotado}\}$$

Denota el espacio normado de las aplicaciones lineales acotadas.

Operador Integral

Un operador importante para el presente trabajo es el operador integral.

Sean $H = L^2([a, b])$ el espacio de funciones cuadrado integrables y $T: H \rightarrow H$, se define el operador integral de la forma:

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s, t)x(t) dt$$

donde $a < b < \infty$, y $K: (a, b) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función llamada núcleo del operador integral T .

En particular, si :

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds < \infty,$$

entonces T es un operador integral acotado en $L^2([a, b])$ y

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds}.$$

En efecto, para cualquier $x \in L^2([a, b])$, se tiene

$$\|Tx\|^2 = \int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)x(t) dt \right|^2 ds$$

Por la desigualdad de Schwarz, se tiene:

$$\|Tx\|^2 \leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(s, t)|^2 dt \int_a^b |x(t)|^2 dt \right) ds$$

$$\|Tx\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds \int_a^b |x(t)|^2 dt$$

$$\|Tx\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds \int_a^b |x(t)|^2 dt$$

Por lo tanto:

$$\|Tx\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds} \|x\|$$

$$\|T\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 dt ds}$$

1.4 TEOREMAS DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DE OPERADORES

Sea E un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|_E$, y S un subconjunto de E .

Las ecuaciones en matemática aplicada a menudo son representadas como ecuaciones de operadores de la forma

$$Tu = (u), \quad u \in S. \quad (1.4.1)$$

donde $T: S \rightarrow E$ es un operador, S es un subconjunto del espacio de Banach E

Definición 1.4.1. Sea $T : S \subset E \rightarrow E$ un operador. Se dice que T es contractivo si existe un número positivo $\alpha < 1$ tal que

$$\|T(u) - T(v)\|_E \leq \alpha \|u - v\|_E \quad \forall u, v \in S.$$

El Teorema del punto fijo de Banach representa un teorema de convergencia fundamental para una gran clase de métodos de iteración.

Teorema 1.4.1. (Teorema del punto fijo de Banach). Sean S un subconjunto no vacío de un espacio de Banach E , y $T : S \rightarrow S$ un operador contractivo con la constante de contractividad α , $0 \leq \alpha < 1$. Entonces se verifican los siguientes resultados.

(1) Existencia y unicidad: Existe un único $u \in S$ tal que

$$u = T(u).$$

(2) Convergencia y estimación del error de la iteración: Para cualquier $u_0 \in S$, la sucesión $\{u_n\} \subset S$ definido por $u_{n+1} = T(u_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, converge a u ; esto es:

$$\|u_n - u\|_E \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

Para el error, las siguientes cotas son válidas:

Para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ se tiene estimación del error a priori

$$\|u_n - u\|_E \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|u_0 - u_1\|_E,$$

y la estimación del error a posteriori

$$\|u_{n+1} - u\|_E \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|u_{n+1} - u_n\|_E.$$

Prueba.

Por hipótesis se tiene que $T : S \rightarrow S$, entonces la sucesión $\{u_n\}$ está bien definida.

(i) Se debe mostrar que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $n = 0, 1, 2, \dots$. Usando la condición de que T es un operador contractivo, se tiene

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_E &= \|T(u_n) - T(u_{n-1})\|_E \leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\|_E \\ &= \alpha \|T(u_{n-1}) - T(u_{n-2})\|_E \leq \alpha^2 \|u_{n-1} - u_{n-2}\|_E \\ &\leq \dots \leq \alpha^n \|u_1 - u_0\|_E. \end{aligned}$$

Ahora sea $n = 0, 1, 2, \dots$ y $m = 1, 2, \dots$. Usando la desigualdad triangular y la convergencia de las series geométricas, se tiene

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n+m}\|_E &= \|(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \dots + (u_{n+m-1} - u_{n+m})\|_E \\ &\leq \|u_n - u_{n+1}\|_E + \|u_{n+1} - u_{n+2}\|_E + \dots + \|u_{n+m-1} - u_{n+m}\|_E \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+m-1}) \|u_1 - u_0\|_E \end{aligned}$$

$$\leq \alpha^n(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots)\|u_1 - u_0\|_E$$

$$= \alpha^n(1 - \alpha)^{-1}\|u_1 - u_0\|_E$$

$$\|u_n - u_{n+m}\|_E \leq \alpha^n(1 - \alpha)^{-1}\|u_1 - u_0\|_E$$

Desde que $0 \leq \alpha < 1$, se tiene que $\alpha^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, por tanto $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy y desde que S es un conjunto cerrado en el espacio de Banach V , la sucesión de Cauchy $\{u_n\}$ converge, esto es:

$$u_n \rightarrow u, \quad u \in S, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

(ii) Se debe mostrar que u es una solución de la ecuación (1.4.1). De $u_0 \in S$ y

$$u_1 = T(u_0) \text{ junto con que } T(S) \subset S, \text{ se obtiene que } u_1 \in S.$$

Similarmente, por inducción se tiene $u_n \in S$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$

Como el conjunto S cerrado, se obtiene $u \in S$, y por tanto $T(u) \in S$.

Dado que T es un operador contractivo, entonces:

$$\|T(u_n) - T(u)\|_E \leq \alpha \|u_n - u\|_E \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ se sigue de $u_{n+1} = T(u_n)$ que $u = T(u)$.

(iii) Ahora se debe mostrar la unicidad de la solución u de (1.4.1).

Se sigue de $u = T(u)$ y $v = T(v)$ con $u, v \in S$ que

$$\|u - v\|_E = \|T(u) - T(v)\|_E \leq \alpha \|u - v\|_E$$

Desde que $0 \leq \alpha < 1$, esto implica que $\|u - v\|_E = 0$, por tanto $u = v$.

(iv) Cuando $m \rightarrow \infty$ se sigue de

$$\|u_n - u_{n+m}\|_E \leq \alpha^n(1 - \alpha)^{-1}\|u_1 - u_0\|_E$$

que

$$\|u_n - u\|_E \leq \alpha^n(1 - \alpha)^{-1}\|u_1 - u_0\|_E, \quad \text{para todo } n = 0, 1, \dots$$

$$\|u_n - u\|_E \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|u_0 - u_1\|_E. \quad (\text{estimación del error a priori})$$

Sea $n = 0, 1, 2, \dots$ y $m = 1, 2, \dots$. Para probar la estimación del error a posteriori, obsérvese que

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_{n+m+1}\|_E &\leq \|u_{n+1} - u_{n+2}\|_E + \|u_{n+2} - u_{n+3}\|_E \\ &\quad + \dots + \|u_{n+m} - u_{n+m+1}\|_E \\ &\leq (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^m) \|u_n - u_{n+1}\|_E. \end{aligned}$$

Cuando $m \rightarrow \infty$ se obtiene que

$$\|u_{n+1} - u\|_E \leq \alpha(1 - \alpha)^{-1} \|u_n - u_{n+1}\|_E.$$

Observe que

$$\|u_{n+1} - u\|_E = \|T(u_n) - T(u)\|_E \leq \alpha \|u_n - u\|_E.$$

□

Teorema 1.4.2. Sea E un espacio de Banach, y $T: E \rightarrow E$ un operador, tal que la m -ésima potencia de T , es decir T^m es una contracción para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces T tiene un único punto fijo $u_0 \in E$.

Prueba

Por el teorema anterior, T^m tiene un único punto fijo $u_0 \in E$, entonces

$$T^m(u_0) = u_0$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} T^m(T(u_0)) &= T^{m-1}(T(T(u_0))) \\ &= T^{m-1}(T^2(u_0)) \\ &= \quad \vdots \\ &= T(T^m(u_0)) \\ T^m(T(u_0)) &= T(T^m(u_0)) \end{aligned}$$

Por la unicidad del punto fijo de T^m se tiene que:

$$T(u_0) = u_0.$$

Para mostrar la unicidad del punto fijo de T , supóngase que:

$$T(u_0) = u_0 \text{ y } T(v_0) = v_0.$$

También se tiene:

$$T^m(T(u_0)) = T^m(u_0) = u_0$$

y

$$T^m(T(v_0)) = T^m(v_0) = v_0$$

Puesto que T^m es un operador contracción, con un único punto fijo, se tiene que:

$$u_0 = v_0.$$

□

Teorema 1.4.3. Sean E un espacio de Banach, $T: E \rightarrow E$ un operador lineal acotado, y f un elemento arbitrario de E , entonces el operador $A: E \rightarrow E$ definido por:

$$A\varphi = \lambda T\varphi + f$$

tiene un único punto fijo para cualquier $|\lambda|$ suficientemente pequeño.

Equivalentemente

Si k es una constante positiva tal que

$$\|T\varphi\| \leq k\|\varphi\| \text{ para todo } \varphi \in E,$$

entonces $A\varphi = \varphi$ tiene una única solución siempre que $|\lambda|k < 1$.

Prueba

Como T es un operador lineal acotado, existe una constante k tal que :

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| = \|T(\varphi_1 - \varphi_2)\| \leq k\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \text{ para todo } \varphi_1, \varphi_2 \in E.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| &= \|(\lambda T\varphi_1 + f) - (\lambda T\varphi_2 + f)\| \\ &= \|\lambda T\varphi_1 + f - \lambda T\varphi_2 - f\| \\ &= \|\lambda T\varphi_1 - \lambda T\varphi_2\| \\ &= |\lambda|\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \\ &= |\lambda|\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq |\lambda|k\|\varphi_1 - \varphi_2\| \\ \|A\varphi_1 - A\varphi_2\| &\leq |\lambda|k\|\varphi_1 - \varphi_2\|\end{aligned}$$

En consecuencia A es una contracción siempre que $|\lambda|k < 1$.

Por tanto A tiene un único punto fijo, por el teorema 1.4.1. □

Cuando el proceso iterativo se aplica en el caso descrito en el teorema previo, se obtiene la siguiente sucesión aproximada a la solución:

φ_0 es un elemento arbitrario de E ,

$$\varphi_1 = A\varphi_0 = \lambda T\varphi_0 + f,$$

$$\varphi_2 = A\varphi_1 = A(\lambda T\varphi_0 + f) = \lambda T(\lambda T\varphi_0 + f) + f = \lambda^2 T^2\varphi_0 + \lambda Tf + f,$$

$$\varphi_3 = A\varphi_2 = A(\lambda^2 T^2\varphi_0 + \lambda Tf + f) = \lambda T(\lambda^2 T^2\varphi_0 + \lambda Tf + f) + f$$

$$\varphi_3 = \lambda^3 T^3\varphi_0 + \lambda^2 T^2\varphi + \lambda T\varphi + \varphi,$$

...

$$\varphi_n = \lambda^n T^n\varphi_0 + \lambda^{n-1} T^{n-1}f + \dots + \lambda^2 T^2f + \lambda Tf + f.$$

...

Por lo tanto, la solución φ se escribe como:

$$\varphi = f + \lambda T f + \lambda^2 T^2 f + \dots + \lambda^n T^n f + \dots.$$

Nótese que la elección de φ_0 es irrelevante para la solución. Sin embargo algunas elecciones de φ_0 aseguran la rápida convergencia de la serie, en las aplicaciones es importante para hacer una buena primera aproximación.

CAPITULO II

ECUACIONES INTEGRALES LINEALES DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE

La teoría de las ecuaciones integrales está relacionada con muchas áreas de las matemáticas, entre estas las ecuaciones diferenciales y la teoría de operadores.

Los matemáticos del siglo *XIX* se encontraban con este tipo de ecuaciones, probablemente el primer ejemplo fue el problema de la inversión de la integral

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y) dy$$

un problema muy importante de ciertas ramas de la física matemática, el cual fue resuelto en 1811 por JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER en la forma

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(x) dx$$

En 1823 NIELS HENRIK ABEL fue guiado por su investigación sobre una generalización del problema de la “tautocrona” a la ecuación :

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha}} dy \quad (0 < \alpha < 1, g(\alpha) = 0)$$

Para la cual encontró la solución

$$f(x) = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_{\alpha}^x \frac{g'(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy$$

Sin embargo la teoría general de las ecuaciones integrales lineales fue elaborada en el límite de los siglos XIX y XX en las obras fundamentalmente de VITO VOLTERRA, ERIK IVAR FREDHOLM y de DAVID HILBERT.

2.1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

Definición 2.1.1. Sea f una función definida en $L^2([a, b])$, denominada término libre, y k es una función continua definida sobre $[a, b] \times [a, b]$ con valores reales, denominada núcleo. Una ecuación integral lineal es una relación de la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \quad (2.1.1)$$

donde:

$\varphi \in L^2([a, b])$ y es la función que debemos encontrar.

2.1.1 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES INTEGRALES LINEALES

Las ecuaciones integrales se dividen en dos grandes grupos: ecuaciones integrales lineales de Fredholm y ecuaciones integrales lineales de Volterra.

a. ECUACIONES INTEGRALES LINEALES DE FREDHOLM

Definición 2.1.2. Sea f una función definida en $L^2([a, b])$, denominada término libre, y k es una función continua definida sobre $[a, b] \times [a, b]$ con valores reales, denominada núcleo. Se llama ecuación integral lineal de Fredholm de primera especie, a una relación de la forma

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.1.2)$$

donde:

$\varphi \in L^2([a, b])$ y es la función que debemos encontrar.

Definición 2.1.3. Sea f una función definida en $L^2([a, b])$, denominada término libre, y k es una función continua definida sobre $[a, b] \times [a, b]$ con valores reales, denominada núcleo. Se llama ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie, a una relación de la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.1.3)$$

donde:

$\varphi \in L^2([a, b])$ y es la función que debemos encontrar.

El valor que aparece en la ecuación (2.1.2), λ es un parámetro numérico,

La ecuación (2.1.3) es la forma estándar de una ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie, pero una versión alternativa la cual es a veces más conveniente para tratar es

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.1.4)$$

Definición 2.1.4. Sean f, ψ funciones definidas en $L^2([a,b])$, denominadas términos libres, y k es una función continua definida sobre $[a,b] \times [a,b]$ con valores reales, denominada núcleo. Se llama ecuación integral lineal de Fredholm de tercera especie, a una relación de la forma

$$\psi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.1.5)$$

donde:

$\varphi \in L^2([a,b])$ y es la función que debemos encontrar.

b. ECUACIONES INTEGRALES LINEALES DE VOLTERRA

Definición 2.1.5. Sea f una función definida en $L^2([a,b])$, denominada término libre, y k es una función continua definida sobre $[a,b] \times [a,b]$ con valores reales, denominada núcleo. Se llama ecuación integral lineal de Volterra de primera especie, a una relación de la forma

$$f(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t) dt \quad (2.1.6)$$

donde:

$$k(x, t) = 0 \text{ para } t > x$$

$\varphi \in L^2([a, b])$ y es la función que debemos encontrar.

Definición 2.1.6. Sea f una función definida en $L^2([a, b])$, denominada término libre, y k es una función continua definida sobre $[a, b] \times [a, b]$ con valores reales, denominada núcleo. Se llama ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie, a una relación de la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t) dt \quad (2.1.7)$$

donde:

$$k(x, t) = 0 \text{ para } t > x$$

$\varphi \in L^2([a, b])$ y es la función que debemos encontrar.

Definición 2.1.7. Sean f, ψ funciones definidas en $L^2([a, b])$, denominadas términos libres, y k es una función continua definida sobre $[a, b] \times [a, b]$ con valores reales, denominada núcleo. Se llama ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie, a una relación de la forma

$$\psi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t) dt \quad (2.1.8)$$

donde:

$$k(x, t) = 0 \text{ para } t > x$$

$\varphi \in L^2([a, b])$ y es la función que debemos encontrar.

Definición 2.1.8. Una ecuación integral (de Volterra o de Fredholm) es homogénea si f , término libre, es $f = 0$, esto es:

$$f(x) = 0 \text{ para todo } x \in [a, b],$$

caso contrario se dice que la ecuación integral es no homogénea.

2.1.2 TIPOS ESPECIALES DE NÚCLEOS

a. El núcleo K se llama separable si este es de la forma

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n M_k(x) N_k(t),$$

donde las funciones M_1, M_2, \dots, M_k y N_1, N_2, \dots, N_k son dos conjuntos linealmente independientes y elementos de $L^2([a, b])$ por tanto el núcleo es cuadrado integrable.

b. Un núcleo K , donde K es una función de valor complejo, se llama simétrico (o Hermitiano) si

$$k(x, t) = \overline{k(t, x)},$$

donde

$\overline{k(t, x)}$ es el conjugado complejo de $k(x, t)$.

Para un núcleo real, $\overline{k(t, x)}$ es igual a $k(t, x)$.

2.2. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INTEGRAL DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE NO HOMOGÉNEA.

Este trabajo se basa fundamentalmente en el estudio de las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, definidas en un espacio de Hilbert.

Por lo que consideraremos el Espacio de Hilbert $L^2([a, b])$, donde

$$L^2([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\},$$

Las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie en el espacio de Hilbert $L^2([a, b])$, están definidas por:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.2.1)$$

donde $k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se llama núcleo tal que $\int_a^b \int_a^b |k(x, t)| dx dt < \infty$ y $\varphi, f \in L^2([a, b])$.

Consideramos el operador K , en $L^2([a, b])$, definido por:

$$K: L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$$

$$\varphi \mapsto K\varphi$$

$$(K\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt$$

Por otra parte, si $f \in L^2([a, b])$, entonces la ecuación (2.2.1) toma la forma:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda(K\varphi)(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.2.2)$$

$$\varphi(x) - \lambda(K\varphi)(x) = f(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

$$(\varphi - \lambda K\varphi)(x) = f(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

$$\varphi = \lambda K\varphi + f, \quad (2.2.3)$$

Luego la ecuación (2.2.3) es una ecuación integral de Fredholm de segunda especie en el espacio de Hilbert $L^2([a, b])$.

Se verifica que el operador $K \in L^2([a, b])$ es un operador lineal, acotado.

Probemos que $K\varphi \in L^2([a, b])$.

En efecto,

Por la desigualdad de Schwartz, se tiene:

$$|(K\varphi)(x)| = \left| \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \right|$$

$$|(K\varphi)(x)| \leq \int_a^b |k(x, t)\varphi(t)| dt$$

$$\int_a^b |k(x, t)\varphi(t)| dt \leq \left[\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|(K\varphi)(x)| \leq \left[\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|(K\varphi)(x)|^2 \leq \left[\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right] \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]$$

Integrando ambos miembros con respecto a x , $x \in [a, b]$, se tiene:

$$\int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx \leq \int_a^b \left(\left[\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right] \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right] \right) dx$$

$$\int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) dx$$

$$\int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx \leq \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

Como

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx < \infty, \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt < \infty$$

entonces

$$\int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx < \infty$$

es decir,

$$K\varphi \in L^2([a, b]).$$

Probemos que K es un operador lineal

En efecto,

Sean $\psi, \varphi \in L^2([a, b])$

$$(K(\psi + \varphi))(x) = \int_a^b k(x, t)[\psi(t) + \varphi(t)]dt$$

$$(K(\psi + \varphi))(x) = \int_a^b k(x, t)\psi(t) dt + \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

$$(K(\psi + \varphi))(x) = (K\psi)(x) + (K\varphi)(x)$$

$$(K(\psi + \varphi))(x) = (K\psi)(x) + (K\varphi)(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

$$K(\psi + \varphi) = (K\psi) + (K\varphi)$$

$$(K(\alpha\varphi))(x) = \int_a^b k(x, t)(\alpha\varphi)(t)dt$$

$$(K(\alpha\varphi))(x) = \int_a^b k(x, t)(\alpha\varphi(t))dt$$

$$(K(\alpha\varphi))(x) = \alpha \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

$$(K(\alpha\varphi))(x) = \alpha(K\varphi)(x), \quad \forall x \in [a, b], \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$(K(\alpha\varphi)) = \alpha(K\varphi), \quad \forall x \in [a, b], \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Por tanto K es un operador lineal.

Probemos que K es un operador acotado

En efecto,

$$\|K\varphi\| = \sqrt{\int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx}$$

$$\|K\varphi\|^2 = \int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx$$

$$\|K\varphi\|^2 = \int_a^b |(K\varphi)(x)|^2 dx \leq \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

$$\|K\varphi\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx} \sqrt{\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt}$$

$$\|K\varphi\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx} \sqrt{\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt}$$

$$\|K\varphi\| \leq \delta \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in L^2([a, b])$$

donde

$$\delta = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx}$$

Por tanto K es un operador acotado.

Teorema 2.3.2 La ecuación

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

tiene una única solución $\varphi \in L^2([a, b])$, dado que el núcleo k es continuo en $[a, b] \times [a, b]$, $f \in L^2([a, b])$ y $|\lambda|\delta < 1$ donde

$$\delta = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx}$$

Prueba

Este resultado se denomina teorema de existencia y unicidad de las soluciones de la Ecuación Integral de Fredholm de segunda especie no homogénea.

Consideremos el operador

$$K: L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$$

definido por:

$$(K\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

Como $f \in L^2([a, b])$ entonces

$$K\varphi \in L^2([a, b]) \text{ si } \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \in L^2([a, b])$$

Por la desigualdad de Schwartz, se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \right| &\leq \int_a^b |k(x, t)\varphi(t)| dt \\ &\leq \left[\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left| \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \right|^2 \leq \left[\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right] \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right]$$

Integramos ambos miembros con respecto a x

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \right|^2 dx &\leq \int_a^b \left(\left[\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right] \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right] \right) dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) \end{aligned}$$

Desde que:

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt < \infty$$

De esta manera se prueba que:

$$K\varphi \in L^2([a, b])$$

Además nótese también que el operador definido por:

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \in L^2([a, b])$$

es acotado, esto es:

$$\|A\varphi\| = \sqrt{\int_a^b |(A\varphi)(x)|^2 dx}$$

$$\|A\varphi\|^2 = \int_a^b |(A\varphi)(x)|^2 dx$$

$$\|A\varphi\|^2 = \int_a^b |(A\varphi)(x)|^2 dx \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dt dx \right) \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right)$$

$$\|A\varphi\| \leq \sqrt{\left(\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx\right) \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt\right)}$$

$$\|A\varphi\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx} \sqrt{\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt}$$

$$\|A\varphi\| \leq \delta \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in L^2([a, b])$$

Donde

$$\delta = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx}$$

Por lo tanto por el Teorema 1.4.3., la ecuación

$$T\varphi = \varphi$$

tiene una única solución siempre que $|\alpha|\delta < 1$.

□

2.3. TEOREMA DE LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM

A principios de 1900, IVAR FREDHOLM encontró condiciones necesarias y suficientes para la solución de un gran número de ecuaciones integrales de segunda especie, con estos resultados, Fredholm fue capaz de establecer teoremas de existencia generales para la solución de este tipo de ecuaciones.

En esta sección se considera el teorema de la Alternativa de Fredholm, que es una herramienta fundamental en la búsqueda de decisiones con respecto a la solución de cierto tipo de ecuaciones integrales.

Teorema 2.3.1 (Alternativa de Fredholm) Sea A un operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H . Entonces la ecuación de operador no homogénea

$$\varphi = A\varphi + f$$

tiene una única solución para cada $\varphi \in H$ sí y sólo si la ecuación homogénea

$$g = Ag$$

tiene solamente la solución trivial $g = 0$.

Prueba

Ver Lokenath Debnath – Piotr Mikusinski [7], página 222.

CAPITULO III

MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES LINEALES DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE NO HOMOGÉNEAS

En este capítulo, se desarrollan los métodos de solución de Ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie no homogéneas, tales como:

El método de aproximaciones sucesivas, método de solución de ecuaciones integrales con núcleo separable, método de sumas finitas, y en la sección 3.4, se realiza la comparación de los métodos de solución de ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie no homogéneas, haciendo uso del sistema de algebra computacional, *Mathematica 6.0*.

3.1. MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Consideremos la ecuación de operadores.

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \quad (3.1.1)$$

donde:

$$f \in L^2([a, b])$$

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

φ es la función que se debe de encontrar.

Si K es un operador integral con un núcleo k , esto es,

$$K\varphi(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt$$

entonces (3.1.1) se puede representar como una ecuación integral de Fredholm de segunda especie:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt \quad (3.1.2)$$

donde f y K son funciones de $L^2([a, b])$.

Como primera aproximación de orden cero a la función φ se tiene

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

Luego esta aproximación es sustituida en el lado derecho de la ecuación (3.1.2)

para obtener la aproximación de primer orden

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi_0(t) dt \\ \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)f(t) dt \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Esta función, cuando es sustituida en (3.1.2), se obtiene la aproximación de segundo orden, esto es

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t) dt$$

Este proceso es repetido, la aproximación del $(n + 1)$ orden es obtenida sustituyendo la aproximación de orden n en el lado derecho de la ecuación (3.1.2).

resultando la relación recursiva

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_n(t) dt \quad (3.1.4)$$

Si $\varphi_n(x)$ tiende uniformemente a un límite cuando $n \rightarrow \infty$, entonces este límite es la solución requerida.

Para estudiar tal límite, se debe examinar el proceso iterativo (3.1.4) en detalle.

Las aproximaciones de primer y segundo orden son

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t) dt \quad (3.1.5)$$

y

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left(f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)f(s) ds \right) dt \\ \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \left(\int_a^b K(t,s)f(s) ds \right) dt. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Considérese que

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s)K(s,t) ds$$

por tanto resulta que:

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt. \quad (3.1.7)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \\ + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt + \lambda^3 \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

donde

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, s) K_2(s, t) ds$$

Continuando este proceso, y denotando

$$K_m(x, t) = \int_a^b K(x, s) K_{m-1}(s, t) ds \quad (3.1.9)$$

Se obtiene la solución aproximada de orden $(n + 1)$ de la ecuación integral (3.1.2) como

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \quad (3.1.10)$$

La expresión $K_m(x, t)$ se llama iteración de orden m , donde $K_1(x, t) = K(x, t)$.

Pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$, se obtienen las series de Neumann

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \quad (3.1.11)$$

Queda por determinar las condiciones bajo las cuales esta convergencia es lograda. Para este propósito, se recurre a la suma parcial (3.1.10) y aplicando la

desigualdad de Schwarz (Teorema 1.2.1) al término general de esta suma, y se obtiene

$$\left| \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \quad (3.1.12)$$

Sean $D = \|f\| = \int_a^b |f(t)|^2 dt$, luego se tiene:

$$D^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt,$$

y C_m^2 la cota superior de la integral

$$\int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt,$$

esto es

$$\int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt \leq C_m^2$$

Por esta razón, la desigualdad (3.1.12), usando la desigualdad de Schwarz se transforma en:

$$\left| \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \right|^2 \leq C_m^2 D^2 \quad (3.1.13)$$

El siguiente paso es relacionar la estimación C_m^2 con la estimación C_1^2 .

Esta relación se logra aplicando la desigualdad de Schwarz a la relación (3.1.9)

$$K_m(x, t) = \int_a^b K(x, s) K_{m-1}(s, t) ds$$

$$|K_m(x, t)|^2 \leq \int_a^b |K(x, s)|^2 ds \int_a^b |K_{m-1}(s, t)|^2 ds, \quad (3.1.14)$$

La cual, integrando con respecto a t , se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x, s)|^2 ds \int_a^b |K_{m-1}(s, t)|^2 ds \right) dt \\ \int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt &\leq \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 ds dt \int_a^b |K_{m-1}(s, t)|^2 ds \\ \int_a^b |K_m(x, t)|^2 dt &\leq B^2 C_{m-1}^2 \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$C_m^2 \leq B^2 C_{m-1}^2$$

donde

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt$$

Luego

$$|K_{m-1}(x, t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-2}(x, s)|^2 ds \int_a^b |K(s, t)|^2 ds,$$

La cual, integrando con respecto a t , se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 dt &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K_{m-2}(x, s)|^2 ds \int_a^b |K(s, t)|^2 ds \right) dt \\ \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 dt &\leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \int_a^b |K_{m-2}(x, s)|^2 ds \\ \int_a^b |K_{m-1}(x, t)|^2 dt &\leq B^2 C_{m-2}^2 \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

$$C_{m-1}^2 \leq B^2 C_{m-2}^2$$

Relacionando (4.1.15) con (4.1.16), se tiene:

$$C_m^2 \leq B^4 C_{m-2}^2$$

....

La desigualdad (3.1.15) establece la relación

$$C_m^2 \leq B^{2m-2} C_1^2. \quad (3.1.17)$$

De (3.1.13) y (3.1.17), se tiene la siguiente desigualdad

$$\left| \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \right|^2 \leq C_1^2 D^2 B^{2m-2}. \quad (3.1.18)$$

Por lo tanto, el término general de la suma parcial (3.1.10) tiene una magnitud menor que la cantidad $DC_1|\lambda|^m B^{m-1}$, y sigue que la serie infinita (3.1.11) converge mas rápido que la serie geométrica con radio $|\lambda|B$.

Por tanto, si

$$|\lambda|B < 1, \quad (3.1.19)$$

la convergencia uniforme de esta serie es segura.

Ahora se probará que para cualquier λ , la ecuación (3.1.2) tiene una única solución. Supóngase lo contrario, que φ_1 y φ_2 son dos soluciones de la ecuación (3.1.2), esto es:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_1(t) dt \quad (3.1.20)$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_2(t) dt \quad (3.1.21)$$

Restando estas ecuaciones y considerando $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \psi(x)$, resulta:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) - \varphi_2(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_1(t) dt - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_2(t) dt \\ \psi(x) &= \lambda \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz a esta ecuación:

$$|\psi(x)| \leq |\lambda|^2 \int_a^b |K(x,t)|^2 dt \int_a^b |\psi(t)|^2 dt \quad (3.1.23)$$

Integrando respecto a x , se tiene:

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx \leq |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt \int_a^b |\psi(x)|^2 dx$$

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \int_a^b |\psi(x)|^2 dx \leq 0. \quad (3.1.24)$$

Por la desigualdad (3.1.19) y como $\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ se concluye que $\psi(x) = 0$, esto es:

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \forall x \in [a, b].$$

En lo que sigue se mostrará la aplicación del método de Aproximaciones Sucesivas para ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie no homogéneas.

1. Dada la ecuación integral de Fredholm de segunda especie no homogénea,

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t) dt$$

Se determinará la solución de esta ecuación integral.

Identificando la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie no homogénea, se tiene que:

$$f(x) = x,$$

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

$$K(x,t) = t - x,$$

$$a = -1 \text{ y } b = 1.$$

La solución exacta de la ecuación integral, como se puede comprobar por sustitución directa, es

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x = 0.25 + 0.75x$$

Vamos hallar una solución aproximada haciendo uso del método de Aproximaciones Sucesivas, puesto que:

$$B^2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |K(x, t)|^2 dx dt = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |t - x|^2 dx dt = \frac{8}{3}$$

$$B = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1.63299$$

$$\frac{1}{B} = 0.612372$$

entonces intervalo de convergencia de la solución es $|\lambda| < \frac{1}{B}$, esto es:

$$-0.612372 < \lambda < \frac{1}{2} < 0.612372$$

lo que garantiza la existencia de la solución.

Primero consideramos como primera aproximación a $\varphi_0(x) = x$, entonces tenemos

$$\varphi_1(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x)\varphi_0(t) dt = x + \frac{1}{3}$$

Sustituyendo φ_1 en la ecuación original, tenemos

$$\varphi_2(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x) \left(t + \frac{1}{3} \right) dt = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x$$

Continuando este proceso, obtenemos

$$\varphi_3(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x) \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \right) dt = \frac{2}{9} + \frac{2}{3}x$$

$$\varphi_4(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x) \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3}t \right) dt = \frac{2}{9} + \frac{7}{9}x$$

$$\varphi_5(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x) \left(\frac{2}{9} + \frac{7}{9}t \right) dt = \frac{7}{27} + \frac{7}{9}x$$

$$\varphi_6(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x) \left(\frac{7}{27} + \frac{7}{9}t \right) dt = \frac{7}{27} + \frac{20}{27}x$$

$$\varphi_7(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x) \left(\frac{7}{27} + \frac{20}{27}t \right) dt = \frac{20}{81} + \frac{20}{27}x$$

$$\varphi_8(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x) \left(\frac{20}{81} + \frac{20}{27}t \right) dt = \frac{20}{81} + \frac{60}{81}x = 0.247 + 0.753x$$

$$\varphi_9(x) = \dots$$

Vemos que la solución aproximada $\varphi_n(x)$ mejora a medida que n aumenta y tras ocho iteraciones la aproximación $\varphi_8(x)$ es una buena estimación de la solución exacta.

2. Dada la ecuación integral de Fredholm de segunda especie no homogénea,

$$\varphi(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t)\varphi(t) dt$$

Se determinará la solución de esta ecuación integral.

Identificando la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie no homogénea, se tiene que:

$$f(x) = x,$$

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

$$K(x, t) = x + t,$$

$$a = 0 \text{ y } b = 1.$$

La solución exacta, como se puede comprobar por sustitución directa, es:

$$\varphi(x) = \frac{16}{23} + \frac{72x}{23} = 0.6956521739130435 + 3.130434782608696 x$$

Vamos hallar una solución aproximada haciendo uso del método de Aproximaciones Sucesivas, esto es:

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt = \int_0^1 \int_0^1 |x + t|^2 dx dt = \frac{7}{6}$$

$$B = \sqrt{\frac{7}{6}} = 1.1667$$

$$\frac{1}{B} = 0.85714$$

entonces el intervalo de convergencia de la solución es $|\lambda| < 1/B$, esto es:

$$-0.85714 < \lambda = \frac{1}{2} < 0.85714$$

lo que garantiza la existencia de la solución.

Ahora consideramos como primera aproximación a $\varphi_0(x) = 1$, entonces tenemos:

$$\varphi_1(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x + t) \varphi_0(t) dt$$

$$\varphi_1(x) = 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{5x}{2}$$

Sustituyendo φ_1 en la ecuación original, tenemos

$$\varphi_2(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t) \left(\frac{1}{4} + \frac{5t}{2} \right) dt$$

$$\varphi_2(x) = \frac{23}{48} + \frac{11x}{4}$$

Continuando este proceso, obtenemos:

$$\varphi_3(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t) \left(\frac{23}{48} + \frac{11t}{4} \right) dt = \frac{37}{64} + \frac{281x}{96}$$

$$\varphi_4(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t) \left(\frac{37}{64} + \frac{281t}{96} \right) dt = \frac{1457}{2304} + \frac{145x}{48}$$

$$\varphi_5(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t) \left(\frac{1457}{2304} + \frac{145t}{48} \right) dt = \frac{6097}{9216} + \frac{14153x}{4608}$$

$$\varphi_6(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t) \left(\frac{6097}{9216} + \frac{14153t}{4608} \right) dt = \frac{74903}{110592} + \frac{3173x}{1024}$$

$$\varphi_7(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t) \left(\frac{74903}{110592} + \frac{3173t}{1024} \right) dt = \frac{303359}{442368} + \frac{688613x}{221184}$$

$$\varphi_8(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t) \left(\frac{303359}{442368} + \frac{688613t}{221184} \right) dt = \frac{3664529}{5308416} + \frac{690361x}{221184}$$

$$\varphi_9(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t) \left(\frac{3664529}{5308416} + \frac{690361t}{221184} \right) dt = \frac{4903435}{7077888} + \frac{33182525x}{10616832}$$

$$\varphi_9(x) = \frac{4903435}{7077888} + \frac{33182525x}{10616832} = 0.6927822254322193 + 3.125463886025511x$$

Vemos que la solución aproximada $\varphi_n(x)$ mejora a medida que n aumenta y tras ocho iteraciones la aproximación es una buena estimación de la solución exacta.

3.2. MÉTODO DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES CON NÚCLEO SEPARABLE

Definición 3.2.1. El núcleo K se llama separable o núcleo de Pincherle-Goursat (núcleo PG) si este es de la forma

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n M_k(x) N_k(t), \quad (3.2.1)$$

donde las funciones M_1, M_2, \dots, M_n y N_1, N_2, \dots, N_n son dos conjuntos linealmente independientes y elementos de $L^2([a, b])$ por tanto el núcleo es cuadrado integrable.

Tales núcleos se llaman degenerados, este tipo de núcleos incluyen todos los polinomios y muchas funciones trascendentales, por ejemplo

$$\cos(x + t) = \cos x \cos t - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t, \quad x t, \quad x^2 t + x t^2.$$

Considérese la ecuación integral de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.2.2)$$

con núcleo separable

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^n M_k(x) N_k(t) \quad (3.2.3)$$

por tanto, se tiene:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n M_k(x) N_k(t) \right) \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b (M_1(x)N_1(t) + M_2(x)N_2(t) + \dots + M_n(x)N_n(t)) \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b (M_1(x)N_1(t)\varphi(t) + M_2(x)N_2(t)\varphi(t) + \dots + M_n(x)N_n(t)\varphi(t)) dt$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b M_1(x)N_1(t)\varphi(t) dt + \lambda \int_a^b M_2(x)N_2(t)\varphi(t) dt + \dots \\ + \lambda \int_a^b M_n(x)N_n(t)\varphi(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) + \lambda M_1(x) \int_a^b N_1(t)\varphi(t) dt + \lambda M_2(x) \int_a^b N_2(t)\varphi(t) dt + \dots \\ + \lambda M_n(x) \int_a^b N_n(t)\varphi(t) dt \end{aligned}$$

Donde

$$C_k = \int_a^b N_k(t)\varphi(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Se tiene:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda M_1(x)C_k + \lambda M_2(x)C_k + \dots + \lambda M_n(x)C_k$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda C_k M_1(x) + \lambda C_k M_2(x) + \dots + \lambda C_k M_n(x)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k M_k(x), \quad (3.2.4)$$

Así se tiene que la diferencia $\varphi(x) - f(x) = \lambda \sum_{k=1}^n C_k M_k(x)$ necesariamente debe coincidir con una combinación lineal de funciones M_k , esto es:

$$\varphi(x) - f(x) = \lambda \sum_{k=1}^n C_k M_k(x)$$

Además al multiplicar (4.2.3) por $N_h(x)$ ($h = 1, 2, \dots, n$)

$$N_h(x)\varphi(x) = N_h(x) \left(f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k M_k(x) \right)$$

y luego integrando con respecto a x , se obtiene:

$$\int_a^b N_h(x)\varphi(x) dx = \int_a^b \left(N_h(x) \left(f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k M_k(x) \right) \right) dx$$

$$\int_a^b N_h(x)\varphi(x) dx = \int_a^b N_h(x)f(x) dx + \int_a^b \left(\lambda \sum_{k=1}^n C_k M_k(x) N_h(x) \right) dx$$

$$C_h = \int_a^b N_h(x)f(x) dx + \int_a^b \left(\lambda \sum_{k=1}^n C_k M_k(x) N_h(x) \right) dx$$

esto es,

$$C_h - \lambda \sum_{k=1}^n \mathcal{A}_{hk} C_k = \mathcal{B}_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

donde

$$\mathcal{A}_{hk} = \int_a^b M_k(x)N_h(x) dx, \quad \mathcal{B}_h = \int_a^b N_h(x)f(x) dx. \tag{3.2.5}$$

Se muestra que las n incógnitas C_1, C_2, \dots, C_n deben satisfacer el siguiente sistema algebraico de n ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 - \lambda\mathcal{A}_{11}C_1 - \lambda\mathcal{A}_{12}C_2 - \dots - \lambda\mathcal{A}_{1n}C_n = \mathcal{B}_1 \\ C_2 - \lambda\mathcal{A}_{21}C_1 - \lambda\mathcal{A}_{22}C_2 - \dots - \lambda\mathcal{A}_{2n}C_n = \mathcal{B}_2 \\ \dots \\ C_n - \lambda\mathcal{A}_{n1}C_1 - \lambda\mathcal{A}_{n2}C_2 - \dots - \lambda\mathcal{A}_{nn}C_n = \mathcal{B}_n \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} (1 - \lambda \mathcal{A}_{11})C_1 - \lambda \mathcal{A}_{12}C_2 - \dots - \lambda \mathcal{A}_{1n}C_n = B_1 \\ -\lambda \mathcal{A}_{21}C_1 + (1 - \lambda \mathcal{A}_{22})C_2 - \dots - \lambda \mathcal{A}_{2n}C_n = B_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -\lambda \mathcal{A}_{n1}C_1 - \lambda \mathcal{A}_{n2}C_2 - \dots + (1 - \lambda \mathcal{A}_{nn})C_n = B_n \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Para cada solución $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ de este sistema le corresponde una solución de ecuación (3.2.3) dada por (3.2.4); recíprocamente, para cada solución de la ecuación integral, la cual necesariamente debe ser de la forma (3.2.4), le corresponde una solución del sistema de ecuaciones (3.2.6).

Consecuentemente, el objetivo de estudio de este método de solución es investigar el determinante de los coeficientes del sistema (3.2.6):

$$\mathfrak{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \mathcal{A}_{11} & -\lambda \mathcal{A}_{12} & \dots & -\lambda \mathcal{A}_{1n} \\ -\lambda \mathcal{A}_{21} & 1 - \lambda \mathcal{A}_{22} & \dots & -\lambda \mathcal{A}_{2n} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ -\lambda \mathcal{A}_{n1} & -\lambda \mathcal{A}_{n2} & \dots & 1 - \lambda \mathcal{A}_{nn} \end{vmatrix}, \quad (3.2.7)$$

el cual es un polinomio de grado n en λ .

Si $\mathfrak{D}(\lambda) \neq 0$, entonces el sistema (3.2.6) tiene una y solo una solución dada por la fórmula de Cramer

$$C_k = \frac{1}{\mathfrak{D}(\lambda)} (\mathfrak{D}_{1k} B_1 + \mathfrak{D}_{2k} B_2 + \dots + \mathfrak{D}_{nk} B_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

donde

\mathfrak{D}_{hk} denota el cofactor del elemento (h, k) del determinante $\mathfrak{D}(\lambda)$; la ecuación (3.2.3) tiene la única solución

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)} \sum_{k=1}^n (\mathfrak{D}_{1k}\mathcal{B}_1 + \mathfrak{D}_{2k}\mathcal{B}_2 + \dots + \mathfrak{D}_{nk}\mathcal{B}_n)M_k(x) \quad (3.2.8)$$

mientras que la ecuación homogénea correspondiente:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt = 0$$

tiene solamente la solución trivial $\varphi(x) = 0$.

Es más, considerando la expresión de \mathcal{B}_k en (3.2.5), la solución (3.2.8) también puede ser expresada como

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)} \sum_{k=1}^n \left(\mathfrak{D}_{1k} \int_a^b N_1(t)\varphi(t) dt + \mathfrak{D}_{2k} \int_a^b N_2(t)\varphi(t) dt + \dots \right. \\ \left. + \mathfrak{D}_{nk} \int_a^b N_n(t)\varphi(t) dt \right) M_k(x) \\ \varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n [\mathfrak{D}_{1k}N_1(t) + \mathfrak{D}_{2k}N_2(t) + \dots + \mathfrak{D}_{nk}N_n(t)] M_k(x) \right\} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

En los ejemplos siguientes se mostrará la aplicación del método de solución de ecuaciones integrales con núcleo separable, esto es:

1. Dada otra ecuación integral de Fredholm de segunda especie no homogénea,

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t) dt \quad (3.2.15)$$

Se determinará su solución.

De la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie no homogénea, se tiene que:

$$f(x) = x,$$

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

$$K(x, t) = t - x = 1 \cdot t - x \cdot 1, \text{ con } M_1(x) = 1, N_1(t) = t \text{ y } M_2(x) = -x, N_2(t) = 1$$

$$a = -1 \text{ y } b = 1.$$

Donde,

$K(x, t)$ es un nucleo separable, ver **definición 3.2.1**.

Por tanto la ecuación (3.2.15) se puede expresar como:

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt - \frac{x}{2} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt$$

considerando:

$$c_1 = \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt \tag{3.2.16}$$

$$c_2 = \int_{-1}^1 \varphi(t) dt \tag{3.17}$$

La ecuación (3.2.15) se reduce a:

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} c_1 - \frac{x}{2} c_2 \tag{3.2.18}$$

Por tanto para determinar la solución de la ecuación debemos determinar c_1

y c_2 .

Para hallar el valor de c_1 y c_2 , sustituimos (3.2.18) en las ecuaciones (3.2.16)

y (3.2.17), así obtenemos un sistema algebraico:

$$c_1 = \int_{-1}^1 t \left(t + \frac{1}{2}c_1 - \frac{t}{2}c_2 \right) dt = \frac{2}{3} - \frac{c_2}{3}$$

$$c_2 = \int_0^1 \left(t + \frac{1}{2}c_1 - \frac{t}{2}c_2 \right) dt = c_1$$

Simplificando obtenemos:

$$\begin{cases} c_1 + \frac{c_2}{3} = \frac{2}{3} \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo mediante la regla de Cramer, se obtiene:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores en (3.2.18) obtenemos la solución de la ecuación integral (3.2.15):

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{3x}{4}$$

2. Dada la ecuación integral de Fredholm de segunda especie no homogénea,

$$\varphi(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 (x+t)\varphi(t) dt \quad (3.2.11)$$

Se determinará su solución.

De la ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie no homogénea, se tiene que:

$$f(x) = x,$$

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

$$K(x, t) = x + t = x \cdot 1 + 1 \cdot t,$$

$$\text{con } M_1(x) = x, N_1(t) = 1 \text{ y } M_2(x) = 1, N_2(t) = t$$

$$a = 0 \text{ y } b = 1.$$

Donde,

$K(x, t)$ es un nucleo separable, ver definición 3.2.1.

Por tanto la ecuación (4.3.11) se puede expresar como:

$$\varphi(x) = 2x + \frac{1}{2} \int_0^1 x\varphi(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t\varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = 2x + \frac{1}{2} x \int_0^1 \varphi(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t \varphi(t) dt$$

considerando:

$$c_1 = \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (3.2.12)$$

$$c_2 = \int_0^1 t \varphi(t) dt \quad (3.2.13)$$

La ecuación (3.3.11) se reduce a:

$$\varphi(x) = 2x + \frac{1}{2}xc_1 + \frac{1}{2}c_2 \quad (3.2.14)$$

Por tanto para determinar la solución de la ecuación debemos determinar c_1 y c_2 .

Para hallar el valor de las constantes, sustituimos (3.2.14) en las ecuaciones (3.2.12) y (3.2.13), así obtenemos un sistema algebraico:

$$c_1 = \int_0^1 \left(2t + \frac{1}{2}t c_1 + \frac{1}{2}c_2 \right) dt = 1 + \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{2}$$

$$c_2 = \int_0^1 t \left(2t + \frac{1}{2}t c_1 + \frac{1}{2}c_2 \right) dt = \frac{2}{3} + \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{4}$$

Simplificando obtenemos:

$$\begin{cases} c_1 - \frac{2c_2}{3} = \frac{4}{3} \\ -\frac{2c_1}{9} + c_2 = \frac{8}{9} \end{cases}$$

Resolviendo mediante la regla de Cramer, se obtiene:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{9} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{52}{23} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{32}{23}$$

Sustituyendo estos valores en (3.2.14) obtenemos la solución de la ecuación integral (3.2.11):

$$\varphi(x) = 2x + \frac{1}{2}x \left(\frac{52}{23} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{32}{23} \right)$$

$$\varphi(x) = \frac{16}{23} + \frac{72x}{23}$$

3.3. MÉTODO DE SUMAS FINITAS

El método de sumas finitas para ecuaciones integrales lineales de Fredholm se basa fundamentalmente en el cálculo de forma aproximada de integrales definidas. Para este trabajo, se ha considerado la Cuadratura de Gauss, como método de aproximación de evaluación de una integral definida.

3.3.1. CUADRATURA DE GAUSS

La integración numérica es usada para obtener respuestas aproximadas para integrales definidas que no pueden ser resueltas analíticamente.

La integración numérica es un proceso de hallar el valor numérico de una integral definida:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

La regla de cuadratura es un nombre genérico dado a cualquier método numérico para la evaluación de una aproximación a una integral de If de una función f :

$$If = \int_a^b w(x)f(x)dx,$$

donde $w(x)$ es una función de ponderación.

Definición 3.3.1. Considérese que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Una fórmula de la forma

$$Q(f) = \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n) \quad (3.3.1)$$

que cumple

$$\int_a^b f(x) dx = Q(f) + E[f] \quad (3.3.2)$$

se llama integración numérica o fórmula de cuadratura.

El término $E[f]$ se llama error de truncamiento para la integración, los valores $\{x_j\}$, $j = 0, 1, \dots, n$ se llaman nodos de la cuadratura, y los $\{w_j\}$, $j = 0, 1, \dots, n$ se llaman ponderaciones.

Definición 3.3.2. El grado de precisión de una fórmula de cuadratura es el número entero positivo n tal que $E[p_i] = 0$ para todos los polinomios $p_i(x)$ de grado $i \leq n$.

Los métodos de integración numérica usuales están basados en la elección de puntos de evaluación para la función f . Estos métodos usuales son adecuados para información tabulada regularmente, la cual puede ser obtenida en un laboratorio, o de un programa de computadora diseñado para producir datos tabulados. Si se tiene la libertad de elegir los puntos en los cuales evaluar f ,

una elección cuidadosa puede lograr más precisión en evaluar la integral en cuestión.

En la evaluación de una integral sobre el intervalo desde a hasta b , no es necesario evaluar f en los extremos, esto es en a o en b , del intervalo.

Para este trabajo, se ha considerado la Cuadratura de Gauss, como método de aproximación de evaluación de una integral sobre el intervalo desde a hasta b .

La cuadratura de Gauss elige los puntos para la evaluación de una manera óptima, antes que elegirlos en lugares equidistantes.

Los nodos x_1, x_2, \dots, x_n en el intervalo $[a, b]$ y los coeficientes w_1, w_2, \dots, w_n , son elegidos para obtener la aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Para medir esta precisión, se asume que la mejor elección de estos valores produce el resultado exacto para la clase más grande de polinomios, esto es, la elección que retorna el grado más alto de precisión.

Los coeficientes w_1, w_2, \dots, w_n en la fórmula de aproximación son arbitrarios, y los nodos x_1, x_2, \dots, x_n son restringidos solamente por hecho que ellos deben estar en el $[a, b]$, intervalo de integración.

Resultando $2n$ parámetros para elegir, si los coeficientes de un polinomio son considerados parámetros, la clase de polinomios de grado como máximo $2n - 1$ también contiene $2n$ parámetros.

Esto, entonces, es la clase más grande de los polinomios para los cuales es razonable esperar que una fórmula sea exacta.

Con la elección adecuada de los valores y constantes, la exactitud en este conjunto puede ser obtenido.

Para ilustrar el procedimiento de la elección de los parámetros apropiados, se mostrará como seleccionar los coeficientes y nodos cuando $n = 2$ y el intervalo de integración es $[-1,1]$.

Luego se discutirá el caso más general para una elección arbitraria de nodos y coeficientes y se mostrará cómo la técnica es modificada cuando se integra sobre un intervalo arbitrario.

Para determinar los coeficientes y nodos cuando $n = 2$, es decir, w_1, w_2, x_1 y x_2 talque la fórmula de integración

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

de un resultado exacto siempre que $f(x)$ es un polinomio de grado $2(2) - 1 = 3$ o menos, esto es:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

para algunas constantes, a_0, a_1, a_2 y a_3 .

Reemplazando f en la integral se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) dx \\ &= a_0 \int_{-1}^1 1 dx + a_1 \int_{-1}^1 x dx + a_2 \int_{-1}^1 x^2 dx + a_3 \int_{-1}^1 x^3 dx\end{aligned}$$

Esto es equivalente a mostrar que la formula retorna resultados exactos cuando $f(x)$ es $1, x, x^2$ y x^3 .

Bajo esta consideración podemos obtener los valores de: w_1, w_2, x_1 y x_2 , tal que

$$w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos la solución:

$$w_1 = 1, w_2 = 1, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lo cual resulta en la formula aproximada:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Esta fórmula tiene un grado de precisión 3, esto es, esta fórmula produce el resultado exacto para cada polinomio de grado 3 o menos.

Teorema 3.3.1. (Cuadratura de Gauss para dos puntos) Si f es una función de valor real continua sobre el intervalo $[-1,1]$, entonces

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (3.3.3)$$

La cuadratura de Gauss para dos Puntos $G_2(f)$ tiene grado de precisión $n = 3$.

El método descrito anteriormente puede ser usado para determinar los nodos y coeficientes para fórmulas que retornen resultados exactos para polinomios de grado superior, pero una forma alternativa los obtiene más fácilmente.

El conjunto que es considerado para este problema es el de los Polinomios de Legendre, una colección $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots\}$ con las siguientes propiedades:

1. Para cada n , $p_n(x)$ es un polinomio de grado n .
2. $\int_{-1}^1 p(x) p_n(x) dx = 0$, siempre que $P(x)$ es un polinomio de grado menor que n .

Los primeros 5 polinomios de Legendre son.

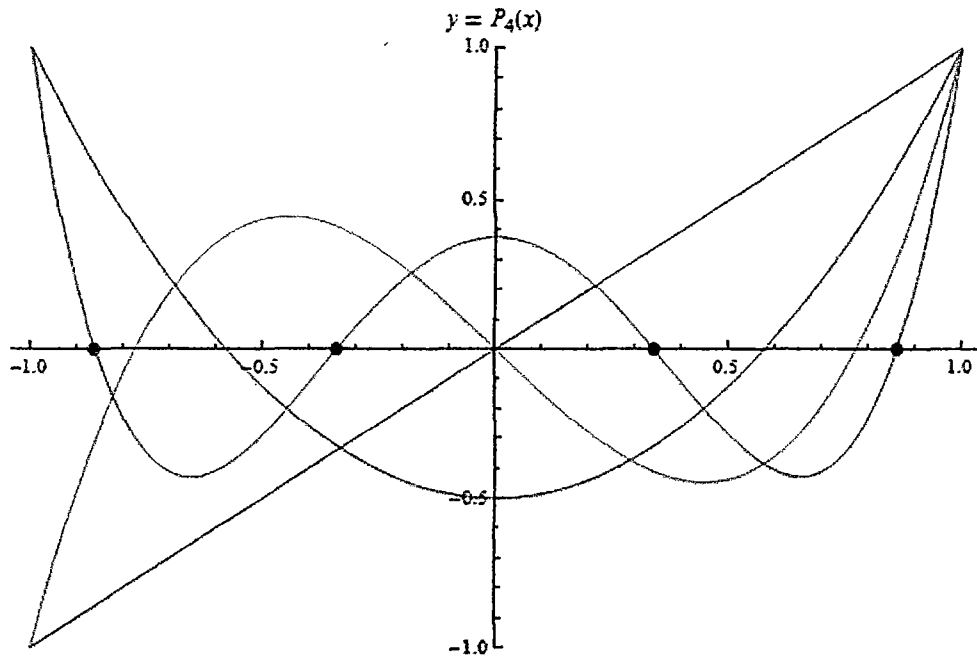
$$p_0(x) = 1,$$

$$p_1(x) = x,$$

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$p_3(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$p_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8},$$



Figural

Las raíces de estos polinomios son distintas y están en el intervalo $[-1,1]$, los polinomios tienen simetría con respecto al origen de coordenadas y al eje de las ordenadas, y lo más importante, son la elección correcta para determinar los parámetros que son los nodos y los coeficientes para de la Cuadratura de Gauss.

Los polinomios de Legendre pueden ser generados por la siguiente relación de recurrencia:

$$p_n(x) = \left(\frac{2n-1}{n}\right)xp_{n-1}(x) - \left(\frac{2n-1}{n}\right)p_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

Los nodos x_1, x_2, \dots, x_n , necesarios para obtener la fórmula de aproximación de la integral que retorna el valor exacto para cualquier polinomio de grado menor que $2n$, son las raíces del polinomio de Legendre de grado n .

Teorema 3.3.2. (Cuadratura de Gauss para n puntos) Si f es una función de valor real y continua, sobre el intervalo $[-1,1]$, entonces

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (3.3.4)$$

La cuadratura de Gauss para n Puntos $G_n(f)$ tiene grado de precisión $2n - 1$, donde cada x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ es la raíz del polinomio de Legendre y w_i , $i = 1, 2, \dots, n$ es el coeficiente para la cuadratura de Gauss.

Prueba.

Ver JohnH. Mathews y Kurtis D. [10], página 392.

Teorema 3.3.2. Sean x_1, x_2, \dots, x_n las raíces del polinomio de Legendre de grado n , $p_n(x)$ y para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$, los números w_i son definidos por

$$w_i = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \quad (3.3.5)$$

Prueba.

Primero considérese que el polinomio $p(x)$ de grado menor que n , definiendo a $p(x)$ como un polinomio de Lagrange de con nodos de interpolación en la raíces del polinomio de Legendre $p_n(x)$.

Por el Teorema A.1.3 (Interpolación de Lagrange) y Definición A .1.8.

La representación de $p(x)$ es única, por tanto

$$p(x) = \sum_{k=1}^n L_k(x)p(x_k)$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) p(x_i)$$

Integrando ambos miembros, se tiene:

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) p(x_i) \right] dx$$

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=1}^n \left[\int_{-1}^1 \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx \right] p(x_i)$$

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i p(x_k)$$

donde:

$$w_i = \int_{-1}^1 \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx$$

La tabla 1 muestra los valores de las Raíces x_n , y de los Coeficientes w_n con $n = 2,3,4$, y 5.

Tabla 1

n	Raíces $x_{n,i}$	Coeficientes $w_{n,i}$
2	0.5773502692 -0.5773502692	1.0000000000 1.0000000000
3	0.7745966692 0.0000000000 -0.7745966692	0.5555555556 0.8888888889 0.5555555556

4	0.8611363116 0.3399810436 -0.3399810436 -0.8611363116	0.3478548451 0.6521451549 0.6521451549 0.3478548451
5	0.9061798459 0.5384693101 0.0000000000 -0.5384693101 -0.9061798459	0.2369268850 0.4786286705 0.5688888889 0.4786286705 0.2369268850

En lo que sigue se mostrará dos ejemplos de la aplicación de la cuadratura de Gauss a ecuaciones reales de variables real, así tenemos:

1. Aproximar $\int_{-1}^1 e^x \cos(x) dx$ usando la cuadratura de Gauss con $n = 3$.

Se tiene:

Si $n = 3$, entonces $x_1 = 0.7745966692$, $x_2 = 0.0000000000$, $x_3 = -0.7745966692$ y $w_1 = 0.5555555556$, $w_2 = 0.8888888889$, $w_3 = 0.5555555556$

$$\int_{-1}^1 e^x \cos(x) dx = \sum_{i=1}^3 w_i e^{x_i} \cos(x_i)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^x \cos(x) dx &= 0.5 e^{0.7745966692} \cos(0.7745966692) \\ &+ 0.8 e^{0.0000000000} \cos(0.0000000000) \\ &+ 0.5 e^{-0.7745966692} \cos(-0.7745966692) \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 e^x \cos(x) dx = 1.9333904$$

La integración por partes puede ser usada para mostrar que el valor verdadero de la integral es 1.9334214962, por tanto el error absoluto es menor que 3.10962×10^{-5} .

3.3.2 CUADRATURA DE GAUSS SOBRE INTERVALOS ARBITRARIOS.

La integral $\int_a^b f(x) dx$ sobre un intervalo arbitrario $[a, b]$ puede ser transformado en una integral sobre el intervalo $[-1, 1]$ mediante el uso del cambio de variables (ver la Figura 1):

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}[(b - a)t + a + b]$$

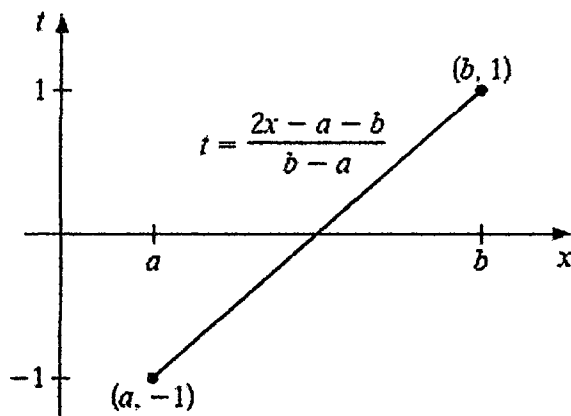


Figura 1

Lo que permite aplicar la cuadratura de Gauss a cualquier intervalo $[a, b]$, puesto que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b - a)t + (a + b)}{2}\right) \frac{(b - a)}{2} dt \quad (3.3.6)$$

Teorema 3.3.4. Sean x_1, x_2, \dots, x_n los nodos y w_1, w_2, \dots, w_n los coeficientes para la cuadratura de Gauss de n puntos sobre el intervalo $[-1,1]$. Para aplicar la cuadratura de Gauss el intervalo $[a, b]$, se usa el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)t + a + b] \quad y \quad dx = \frac{b-a}{2} dt$$

Entonces la relación

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt$$

se usa para obtener la fórmula de la cuadratura sobre el intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{(b-a)x_k + (a+b)}{2}\right). \quad (3.3.7)$$

Prueba

Ver JohnH. Mathews y Kurtis D. [10], página 394.

2. Aproximar $\int_1^3 (x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x)) dx$ usando la cuadratura de Gauss con $n = 3$.

Solución.

Para aplicar la cuadratura de Gauss a este problema se requiere que la integral sea transformada en un problema cuyo intervalo de integración sea $[-1,1]$.

Usando la ecuación (3.4.1), se tiene:

La integración se realiza sobre el intervalo $[1,3]$, donde $f(x) = x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x)$ y $a = 1$ y $b = 3$, por tanto la ecuación (3.4.1) se reduce a:

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 f\left(\frac{(3-1)t + (1+3)}{2}\right) \frac{(3-1)}{2} dt \\
&= \int_{-1}^1 f\left(\frac{2t+4}{2}\right) \frac{(2)}{2} dt \\
&= \int_{-1}^1 f(t+2) dt
\end{aligned}$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \sum_{k=1}^3 w_k f(x_j + 2)$$

Luego la transformación de la integral definida sobre el intervalo [1,3] en la integral definida sobre el intervalo [-1,1] es:

$$\int_1^3 (x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x)) dx = \int_{-1}^1 ((t+2)^6 - (t+2)^2 \operatorname{sen}(2(t+2))) dt$$

Ahora se aplica la cuadratura de Gauss con $n = 3$:

$$\int_1^3 (x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x)) dx = \int_{-1}^1 ((t+2)^6 - (t+2)^2 \operatorname{sen}(2(t+2))) dt$$

$$\begin{aligned}
\int_1^3 (x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x)) dx &= \\
&= 0.5 \bar{f}(0.7745966692 + 2) + 0.8 \bar{f}(0.0000000000 + 2) \\
&+ 0.5 \bar{f}(-0.7745966692 + 2)
\end{aligned}$$

$$\int_1^3 (x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x)) dx \approx 317.264$$

Ahora consideremos una ecuación integral de Fredholm de segunda especie:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.3.8)$$

donde:

f es una función continua dada y se llama término libre, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

K también es una función continua dada y se llama núcleo, $K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

φ es la función continua que debemos encontrar, $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Las variables x, t recorren el intervalo $[a, b]$.

Una vez estudiada la Cuadratura de Gauss, esta nos garantiza poder expresar:

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt$$

como una suma finita de términos dependientes del núcleo y de la función incógnita, esto es:

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt &= \int_{-1}^1 K\left(x, \frac{(b-a)s + (a+b)}{2}\right) \varphi\left(\frac{(b-a)s + (a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} ds \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} w_j K\left(x, \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2}\right) \varphi\left(\frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2}\right) \frac{(b-a)}{2} \end{aligned}$$

donde

los x_1, \dots, x_n, x_{n+1} son las raíces del polinomio de Legendre de grado n y

w_1, \dots, w_n, w_{n+1} las ponderaciones correspondientes. Se debe tener en cuenta que

las raíces x_1, \dots, x_n, x_{n+1} son elementos del intervalo $[-1, 1]$.

La ecuación integral de Fredholm (3.3.8) considerada, se transforma en:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n+1} w_j K \left(x, \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \right) \varphi \left(\frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \right) \frac{(b-a)}{2}$$

donde

$$x \in [a, b], \text{ y } \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \in [a, b].$$

Se considera el siguiente cambio de variables:

$$x = \frac{(b-a)s + (a+b)}{2}$$

donde $s \in [-1, 1]$

por tanto la ecuación integral queda definida de la siguiente manera:

$$\varphi \left(\frac{(b-a)s + (a+b)}{2} \right) = f \left(\frac{(b-a)s + (a+b)}{2} \right)$$

$$+ \lambda \sum_{j=1}^{n+1} w_j K \left(\frac{(b-a)s + (a+b)}{2}, \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \right) \varphi \left(\frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2} \right) \frac{(b-a)}{2}$$

para $s \in [-1, 1]$.

Ahora se elijen $x_i \in [-1, 1]$ (cada x_i , $i = 1, 2, \dots, n, n+1$ es una raíz del polinomio de Legendre) y se consideran las siguientes expresiones:

$$\varphi \left(\frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2} \right) = \varphi_i$$

$$f \left(\frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2} \right) = f_i$$

$$K\left(\frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2}, \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2}\right) = K_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, n+1)$$

Por tanto se obtiene que la ecuación integral lineal de Fredholm (3.3.8) se expresa de manera equivalente por:

$$\varphi_i = f_i + \lambda \frac{(b-a)}{2} \sum_{j=1}^{n+1} w_j K_{ij} \varphi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1) \quad (3.3.9)$$

De esta última ecuación se obtienen, valores φ_i de la solución φ en los puntos de interpolación $s_i = \frac{(b-a)x_j + (a+b)}{2}, i = 1, 2, \dots, n, n+1$, el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\varphi_i = f_i + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{i1} \varphi_1 + \dots + w_{n+1} K_{i,n+1} \varphi_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n, n+1)$$

es decir

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= f_1 + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{11} \varphi_1 + w_2 K_{12} \varphi_2 + \dots + w_n K_{1n} \varphi_n + w_{n+1} K_{1,n+1} \varphi_{n+1}) \\ \varphi_2 &= f_2 + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{21} \varphi_1 + w_2 K_{22} \varphi_2 + \dots + w_n K_{2n} \varphi_n + w_{n+1} K_{2,n+1} \varphi_{n+1}) \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_n &= f_n + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{n1} \varphi_1 + w_2 K_{n2} \varphi_2 + \dots + w_n K_{nn} \varphi_n + w_{n+1} K_{n,n+1} \varphi_{n+1}) \\ \varphi_{n+1} &= f_{n+1} + \lambda \frac{(b-a)}{2} (w_1 K_{n+1,1} \varphi_1 + w_2 K_{n+1,2} \varphi_2 + \dots + w_n K_{n+1,n} \varphi_n + w_{n+1} K_{n+1,n+1} \varphi_{n+1}) \end{aligned} \right. \quad (3.3.10)$$

Este sistema de ecuaciones se puede se puede representar de otra manera más simple, considerando

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

y que:

Lagrange, pero se debe tener en cuenta que este método de interpolación no es el único método con el que podemos encontrar la solución φ .

Si φ una función real de valor real, definida y continua sobre un intervalo real cerrado $[a, b]$, y los distintos puntos de interpolación $s_i = \frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2} \in [a, b]$, $x_i \in [-1, 1], i = 0, 1, \dots, n$ el polinomio p_n definido por

$$\begin{aligned}
 p_n(s) &= \sum_{k=0}^n L_k(s) \varphi(s_k) \\
 p_n(s) &= \sum_{k=0}^n \left(\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^n \frac{(s - s_l)}{(s_k - s_l)} \right) \varphi(s_k)
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

es el polinomio de interpolación de Lagrange de grado n (con puntos de interpolación $s_i, i = 0, 1, \dots, n$) para la función φ .

3.4. COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN

En esta sección se realizará la comparación de los métodos de solución de ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, es decir la identificación de ventajas o desventajas que posee cada método de solución, para realizar la comparación se hará uso del sistema de algebra computacional *Mathematica 6*, en el que se han implementado los tres métodos de solución considerados.

Para realizar la comparación de los métodos, se consideraron las siguientes ecuaciones integrales:

$$1. \varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t) dt$$

$$2. \varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2)\varphi(t) dt$$

$$3. \varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t) dt$$

$$4. \varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t) dt$$

$$5. \varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(x-t)^2} \right) \varphi(t) dt$$

1. La ecuación integral $\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi(t) dt$, tiene por solución exacta:

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x, \text{ donde:}$$

$$f(x) = x, \lambda = \frac{1}{2}, K(x,t) = t-x, a = -1 \text{ y } b = 1.$$

a. Utilizando el método de Aproximaciones Sucesivas, implementado en *Mathematica 6.0.*, se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3.4.1.1:

n	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
10	2.0576131×10^{-3}
20	8.4675437×10^{-6}
30	3.4845859×10^{-8}
40	$1.4339874 \times 10^{-10}$
50	5.900280×10^{-13}

De los resultados se observa que, a medida que incrementamos el número de iteraciones, el error de aproximación de $\varphi_n(x)$ con respecto a la solución exacta $\varphi(x)$, cada vez es menor.

b. Utilizando el Método de solución de ecuaciones integrales con núcleo separable, implementado en *Mathematica* 6.0., se obtuvo el siguiente resultado:

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{3x}{4}$$

que es la misma que la solución exacta.

c. Utilizando el método de Sumas finitas, implementado en *Mathematica* 6.0., se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3.4.1.2:

n	<i>Error máximo:</i> $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
10	1.0663437×10^{-6}
20	$8.8817842 \times 10^{-16}$
30	$8.8817842 \times 10^{-16}$
40	$8.8817842 \times 10^{-16}$
50	$8.8817842 \times 10^{-16}$

De los resultados se observa que, a medida que incrementamos el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución $\varphi_n(x)$, cada vez en menor.

2. La ecuación integral $\varphi(x) = x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2)\varphi(t) dt$, tiene por solución

exacta: $\varphi(x) = \frac{9}{11} + \frac{30x^2}{11}$, donde:

$$f(x) = x^2, \lambda = 1, K(x, t) = x^2 + t^2, a = 0 \text{ y } b = 1.$$

a. Utilizando el método de Aproximaciones Sucesivas, implementado en Mathematica 6.0., se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3.4.2.1:

n	<i>Error máximo:</i> $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
10	1.9437729×10^{-1}
20	1.6316828×10^{-2}
30	1.3697015×10^{-3}
40	1.1497836×10^{-4}
50	9.6517553×10^{-6}

De los resultados se observa que, a medida que incrementamos el número de iteraciones, el error de aproximación de $\varphi_n(x)$ con respecto a la solución exacta $\varphi(x)$, no disminuye rápidamente, esto debido al núcleo que involucra términos cuadráticos, también se debe mencionar que las aproximaciones $\varphi_n(x)$ son expresiones algebraicas muy grandes.

b. Utilizando el Método de solución de ecuaciones integrales con núcleo separable, implementado en *Mathematica* 6.0., se obtuvo el siguiente resultado:

$$\varphi(x) = \frac{9}{11} + \frac{30x^2}{11}$$

que es la misma que la solución exacta.

c. Utilizando el método de la Sumas finitas, implementado en *Mathematica* 6.0., se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3.4.2.2:

n	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
10	1.1905383×10^{-9}
20	$4.4408921 \times 10^{-15}$
30	$4.4408921 \times 10^{-15}$
40	$4.4408921 \times 10^{-15}$
50	$4.4408921 \times 10^{-15}$

De los resultados se observa que, a medida que incrementamos el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución $\varphi_n(x)$, cada vez en menor.

3. La ecuación integral $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi(t) dt$, tiene por solución exacta: $\varphi(x) = 1 + \frac{4 \cos(x) \operatorname{sen}(1)}{-2+2\pi-\operatorname{sen}(2)}$, donde:

$$f(x) = 1, \lambda = \frac{1}{\pi}, K(x, t) = \cos(t-x), a = -1 \text{ y } b = 1.$$

a. Utilizando el método de las Aproximaciones Sucesivas, implementado en Mathematica 6.0., en este ejemplo surge un problema, que las aproximaciones que se encuentran son expresiones complejas y muy grandes para simplificarlas, esto debido al núcleo que está en términos de una función trigonométrica, pero algo que el método garantiza es que la convergencia de la solución aproximada.

b. Utilizando el Método de solución de ecuaciones integrales con núcleo separable, implementado en Mathematica 6.0.: en este ejemplo se debe tener cuidado puesto que a simple vista el núcleo de la ecuación integral no es separable, pero usando Teoremas de la diferencia de ángulos se tiene que :

$$\cos(t-x) = \cos(t)\cos(x) + \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(x)$$

Luego el núcleo si es separable, por tanto se puede aplicar el método del Núcleo separable, obteniéndose:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{4 \cos(x) \operatorname{sen}(1)}{-2 + 2\pi - \operatorname{sen}(2)}$$

que es la misma que la solución exacta.

c. Utilizando el método de la sumas finitas, implementado en *Mathematica* 6.0., se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3.4.3.1:

n	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
10	6.9847354×10^{-5}
20	$1.4750423 \times 10^{-12}$
30	$1.2500001 \times 10^{-12}$
40	$1.1702861 \times 10^{-12}$
50	$1.1287637 \times 10^{-12}$

De los resultados se observa que, a medida que incrementamos el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución $\varphi_n(x)$, cada vez en menor.

4. La ecuación integral $\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \text{sen}(xt)\varphi(t) dt$, donde:

$$f(x) = x, \lambda = \frac{\pi}{2}, K(x, t) = \text{sen}(xt), a = 0 \text{ y } b = 1.$$

a. Utilizando el método de las aproximaciones sucesivas, implementado en *Mathematica* 6.0., en este ejemplo surge un problema, que las aproximaciones que se encuentran son expresiones complejas y muy complejas para simplificarlas, esto debido al núcleo que está en términos de una función trigonométrica, pero algo que el método garantiza es que la convergencia de la solución aproximada.

- b. El Método de solución de ecuaciones integrales con núcleo separable, implementado en *Mathematica* 6.0. no es aplicable a esta ecuación integral puesto que su núcleo no es separable.
- c. Utilizando el método de Sumas finitas, implementado en *Mathematica* 6.0., se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3.4.4.1:

n	Error máximo: $\left\ \varphi_n(x) - \left(x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sin(xt) \varphi_n(t) dt \right) \right\ $
10	$1.3621760 \times 10^{-10}$
20	$4.1078252 \times 10^{-15}$
30	$3.6637360 \times 10^{-15}$
40	$3.7747583 \times 10^{-15}$
50	$3.6637360 \times 10^{-15}$

De los resultados se observa que, a medida que incrementamos el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución $\varphi_n(x)$, cada vez es menor.

5. La ecuación integral $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(x-t)^2} \right) \varphi(t) dt$,

donde:

$$f(x) = 1, \lambda = \frac{1}{\pi}, K(x, t) = \frac{1}{1+(x-t)^2}, a = 0 \text{ y } b = 1.$$

- a. Utilizando el método de las aproximaciones sucesivas, implementado en *Mathematica* 6.0., en este ejemplo surge un problema, que las

aproximaciones que se encuentran son expresiones complejas y muy grandes para simplificarlas, esto debido al núcleo que está en términos de una función trigonométrica, pero lo que garantiza el método es la convergencia de la solución aproximada.

- b. El Método de solución de ecuaciones integrales con núcleo separable, implementado en *Mathematica* 6.0. no es aplicable a esta ecuación integral puesto que su núcleo no es separable.
- c. Utilizando el método de sumas finitas, implementado en *Mathematica* 6.0., se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3.4.5.1:

n	Error máximo: $\left\ \varphi_n(x) - \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + (x-t)^2} \right) \varphi_n(t) dt \right) \right\ $
10	1.0690093×10^{-5}
20	7.1825654×10^{-7}
30	6.0921370×10^{-7}
40	5.7031736×10^{-7}
50	5.5022141×10^{-7}

De los resultados se observa que, a medida que incrementamos el número de iteraciones, el error de aproximación de la solución $\varphi_n(x)$, cada vez es menor pero no tan rápidamente como en los ejemplos anteriores.

CONCLUSIONES

Las conclusiones a las cuales se arribaron en el presente trabajo de investigación son las siguientes:

1. El método de aproximaciones sucesivas provee soluciones con mínimo error de aproximación cuando el núcleo de la ecuación integral y la primera aproximación de orden cero, están definidos en términos de polinomios, pero no es así cuando se consideran funciones trigonométricas, racionales o exponenciales, puesto que al evaluar varias veces la integral se generan gran cantidad de cálculos.
2. El método de solución de ecuaciones integrales con núcleo separable provee de soluciones exactas incluso cuando el núcleo está definido en términos de funciones trigonométricas, racionales o exponenciales, pero solo si se considera un núcleo separable, caso contrario el método no es aplicable para otro tipo de núcleo.
3. El método de sumas finitas provee soluciones aproximadas con mínimo error de aproximación a la solución de la ecuación integral, incluso cuando el núcleo está definido en términos de funciones trigonométricas, racionales o exponenciales.

4. Como conclusión final del presente trabajo se puede señalar a partir de la comparación de los métodos de solución considerados, que el método eficiente para resolver ecuaciones integrales lineales de Fredholm no homogéneas de segunda especie, es el método de sumas finitas puesto que logra una buena aproximación de la solución con menos iteraciones que el resto de métodos y no presenta problemas o limitaciones al considerar núcleos que dependan de funciones trigonométricas, racionales o exponenciales.

RECOMENDACIONES

1. Extender los métodos estudiados, para la solución de ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segunda especie definidas en regiones más generales.
2. Aplicar el método de sumas finitas, para la solución de ecuaciones integrales lineales de Fredholm de primera especie.
3. Incluir en la currícula de estudios de la carrera profesional de Matemática cursos sobre el manejo de herramientas de simulación numérica, es decir cursos sobre el manejo adecuado de un sistema de álgebra computacional.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Burden, R. y Faires J. D.: "Numerical Analysis" (Brooks/Cole, Cengage Learning-2010)
- [2] Hassani, Sadri.: "Mathematical methods using Mathematica® for students of physics and related fields" – (Springer Verlag · 2003)
- [3] Kanwal, Ram.: "Linear Integral Equations theory and thechnique" – (Academic Press-1971)
- [4] Kolmogorov A.N. y Fomin S.V. : "Elementos de la Teoría de funciones y del Análisis Funcional " – (Editorial MIR· Moscu · 1978)
- [5] Kreyszig, Erwin : "Introductory Functional Análisis with Applications" – (Wiley · 1978)
- [6] Lebedev L.P. y Vorovich I.I. : "Functional Analysis in Mechanics" (Springer monographs in mathematics · 1946)
- [7] Lokenath Debnath y Piotr Mikusinski : "Introduction to Hilbert Spaces with Applications" – (Academic Press · 1990)
- [8] Lima, Elon Lages : "Espacios Métricos " – (Colección Proyecto Euclides – IMPA · 1977)
- [9] Masujima, Michio.: "Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics"-(WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA-2005)
- [10] Mathews, John H. y Kurtis D. Fink: "Numerical Methods using Matlab"- (Prentice Hall · 1999)

- [11] Rynne, Bryan P. y Martin A. Youngson.: “Linear Functional Analysis 2nd edition” – (Springer-Verlag London Limited 2008).
- [12] Salazar N.M. y Ttito A. : “Introducción al Análisis Funcional” –.....
- [13] Stephen Wolfram.: “The Mathematica Book, 5th ed.”- (Wolfram Media, 2003).
- [14] Tricomi,F. G.: “Integral equations ” – (Interscience publishers - 1957)

LINKOGRAFÍA

- [15] <http://mathworld.wolfram.com/FredholmIntegralEquationoftheSecondKind.html>
- [16] <http://mathworld.wolfram.com/IntegralEquation.html>
- [17] <http://homepage.cem.itesm.mx/lgomez/createMathematica6AddOn/createMathematica6AddOn.html>
- [18] http://mathematica.co.kr/mathcomm/20_definitionviz/
- [19] <http://mathworld.wolfram.com/Legendre-GaussQuadrature.html>
- [20] <http://math.fullerton.edu/mathews/>

ANEXO A

Definición A 1.1. Sea \mathbb{K} un subconjunto de los números reales \mathbb{R} . Se dice que \mathbb{K} es un campo, si verifica las siguientes condiciones:

- a. Si $x, y \in \mathbb{K}$, entonces $x + y, xy \in \mathbb{K}$.
- b. Si $x \in \mathbb{K}$, entonces $-x \in \mathbb{K}$.
- c. Si $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, entonces $x^{-1} \in \mathbb{K}$.
- d. Los elementos $0, 1 \in \mathbb{K}$.

Definición A 1.2. Una métrica sobre un conjunto M es una función $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades.

Para todo $x, y, z \in M$,

- a) $d(x, y) \geq 0$;
- b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- c) $d(x, y) = d(y, x)$;
- d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*Desigualdad Triangular*).

Si d es una métrica sobre M , entonces el par (M, d) se llama Espacio Métrico.

Definición A 1.3. Una sucesión $\{x_n\}$ en un Espacio Métrico (M, d) converge a $x \in M$ (o la sucesión $\{x_n\}$ es convergente) si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, x_n) < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Usualmente se usa la notación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{o} \quad x_n \rightarrow x$$

Una sucesión $\{x_n\}$ en (M, d) es una sucesión de Cauchy si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \text{para todo } m, n \geq N.$$

Teorema A 1.1.³ Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente en un Espacio Métrico (M, d) . Entonces:

- a) El límite $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ es único;
- b) Cualquier subsucesión de $\{x_n\}$ también converge a x .
- c) $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Definición A 1.4. Sean (M, d_M) y (N, d_N) Espacios Métricos y sea $f: M \rightarrow N$ una función.

- a) f es continua en un punto $x \in M$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para $y \in M$,

$$d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- b) f es continua en M si ésta es continua en cada punto de M .
- c) f es uniformemente continuo en M si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo un $x, y \in M$,

$$d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Es decir, el número $\delta > 0$ puede ser elegido independientemente de $x, y \in M$.

Teorema A 1.2⁴ Sean (M, d_M) y (N, d_N) Espacios Métricos y sea $f: M \rightarrow N$ una función. Entonces f es continua en $x \in M$ si y solo si, para cada sucesión $\{x_n\}$ en (M, d_M) con $x_n \rightarrow x$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ en (N, d_N) satisface $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

³ Ver [9] página 13.

⁴ Ver [9] página 15.

Definición A 1.5. Una combinación lineal de un conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de V es un vector de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se llama *span* de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, denotado por $\text{span}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. En otras palabras,

$$\text{span}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}.$$

Definición A 1.6. Un conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de vectores de V es linealmente dependiente si hay escalares $\alpha_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq n$, con por lo menos un α_i no nulo tal que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0. \tag{1}$$

Un conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de vectores de V es linealmente independiente si este conjunto linealmente dependiente, en otras palabras, si (1) implica que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

INTERPOLACIÓN POLINÓMICA

En esta sección se considera el problema de la interpolación polinómica, que consiste en encontrar un polinomio que coincide exactamente con alguna información que tenemos acerca de una función f con valores reales de una sola variable real x . Esta información podría en la forma de valores $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ de la función sobre un conjunto finito de puntos

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de la recta real, y el polinomio correspondiente asociado a esta información se llama polinomio de interpolación de Lagrange.

INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Sea \mathcal{P}_n el conjunto de todos los polinomios (de valor real) de grado menor o igual a n , donde n es un entero positivo, definidos sobre el conjunto de los números reales \mathbb{R} .

El problema de interpolación se establece como:

Sea $n \geq 1$, y considérese que $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, son números reales distintos (esto es, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$) y que $y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, son números reales, el objetivo es hallar $p_n \in \mathcal{P}_n$, tal que $p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Para probar que este problema tiene una única solución, se considera el siguiente lema.

Lema A.1.1. Sea $n \geq 1$. Existen polinomios $L_k \in \mathcal{P}_n, k = 0, 1, 2, \dots, n$ tal que

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

para todo $i, k = 0, 1, 2, \dots, n$. Además

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)y_k$$

satisface las condiciones de interpolación $p_n \in \mathcal{P}_n$, tal que $p_n(x_i) = y_i$,

$i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Teorema A.1.3 (Teorema de la interpolación de Lagrange). Sean x_i números reales distintos con $i = 0, 1, \dots, n$, e y_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, son números reales con $n \geq 0$, entonces existe un único polinomio $p_n \in \mathcal{P}_n$ tal que

$$p_n(x_i) = y_i, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Definición A.1.7 Sean x_i números reales distintos con $i = 0, 1, \dots, n$, e y_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, son números reales con $n \geq 0$. El polinomio p_n definido por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)y_k$$

con $L_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, definido en Lema 4, cuando $n \geq 1$, y $L_0(x) \equiv 1$ cuando $n = 0$, se llama polinomio de interpolación de Lagrange de grado n para el conjunto de puntos $\{(x_i, y_i): i = 0, 1, \dots, n\}$. Los números x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ son llamados puntos de interpolación.

Definición A.1.8. Sea f una función real de valor real, definida y continua sobre un intervalo real cerrado $[a, b]$, y los distintos puntos de interpolación $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$, el polinomio p_n definido por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)f(x_k)$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \right) \varphi(x_k)$$

es el polinomio de interpolación de Lagrange de grado n (con puntos de interpolación x_i , $i = 0, 1, \dots, n$) para la función f .

Ejemplo. Determinar el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 2 para la función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$, con los puntos de interpolación $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

Como $n = 2$, se tiene

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}x(x - 1),$$

Similarmente;

$$L_1(x) = 1 - x^2,$$

y

$$L_2(x) = \frac{1}{2}x(x + 1),$$

Por tanto

$$p_2(x) = \frac{1}{2}x(x - 1)e^{-1} + (1 - x^2)e^0 + \frac{1}{2}x(x + 1)e^1$$

ANEXO B

Introducción a Mathematica

Mathematica es un paquete computacional para la realización de matemáticas en una computadora. Es soportado por diversos sistemas de hardware: PC's, Macintosh, Sistemas Unix. Su desarrollo parte de los setentas y desarrollado por Stephen Wolfram y lanzado comercialmente en 1988 como Mathematica.

Además con el uso de Mathematica, se pueden realizar cálculos numéricos y simbólicos, simplificar expresiones matemáticas complicadas, graficar funciones en dos y tres dimensiones, crear animaciones y escribir programas para representar cualquier algoritmo.

Estructura de Mathematica

Mathematica es un gran sistema computacional, la instalación ocupa aproximadamente 1.3 gigabytes (Gb) de espacio en el disco duro. Los siguientes elementos son partes esenciales de Mathematica:

a) El kernel

El componente principal de Mathematica es el kernel; este interpreta los ingresos del usuario y realiza todos los cálculos, el kernel está escrito principalmente con el lenguaje de programación C y es uno de los sistemas matemáticos más grandes alguna vez escrito. El número total de líneas de código en el kernel es aproximadamente 2.5 millones.

b) El Front end

Es la interface entre el usuario y el kernel y es usado para mostrar los ingresos y resultados generados por el kernel. El medio del Front end es el notebook de Mathematica.

Las celdas

El FRONT-END tiene una característica importante a su derecha: las barras limitadoras de celda. Estas barras limitan las acciones al interactuar con el KERNEL. La única forma en que el FRONT-END interactúa con el KERNEL, es mediante las teclas <Shift><Enter>. En Mathematica se tienen las siguientes convenciones con respecto a los comandos que el usuario escribe:

- a. Se distingue entre minúsculas y mayúsculas. Toda función predefinida inicia con mayúsculas.
- b. Mathematica considera los espacios. Un espacio entre variables algebraicas representa un signo de multiplicación.
- c. Los corchetes [] se reservan para limitar el argumento de funciones. Las llaves { } para limitar listas y los paréntesis (), para indicar prioridad en las operaciones. Todo aquello limitado por (* y *), será omitido por el KERNEL.

Los Notebooks

El Notebook es el conjunto de todas las celdas que tienen los cálculos de una sesión. Los Notebooks pueden ser salvados como archivos con extensión "nb". Pueden tenerse abiertos al mismo tiempo varios Notebooks, y se les puede cambiar el tipo de letra, así como copiar y pegar con otros programas como Word.

Lista de funciones

En el desarrollo del presente trabajo se usaron las siguientes funciones que están implementadas en Mathematica (consúltase el Menu Help para más información):

A

Abs

Abs[z]

retorna el valor absoluto de un número real o complejo z.

Apply (@@)

Apply[f, expr]

o f@@expr reemplaza el encabezamiento de la expresión expr por f.

C

Cancel

Cancel[expr]

cancela los factores comunes en el numerador y denominador de la expresión expr.

D

DifferentialD

DifferentialD[x]

retorna como dx .

Do

Do[expr, {i_{max}}]

evalua expr i_{\max} veces.

Do[expr, {i, i_{max}}]

evalua expr con la variable i sucesivamente tomando los valores desde 1 hasta i_{\max} (en incremento de 1).

Do[expr, {i, i_{min}, i_{max}}]

evalua expr con la variable i sucesivamente tomando los valores desde i_{\min} hasta i_{\max} (en incremento de 1).

Do[expr, {i, i_{min}, i_{max}, d_i}]

evalua expr con la variable i sucesivamente tomando los valores desde i_{\min} hasta i_{\max} (en incremento de d_i).

Dot(.)

Dot[a, b, c] o a.b.c

retorna el producto punto de vectores, matrices y tensores.

E

Expand

Expand[expr]

desarrolla productos y potencias de enteros positivos en expr.

I

If

If[condición, t, f]

retorna t si la condición es verdadera, y f si la condición es falsa.

If[condición, t, f, u]

retorna u si la condición no es verdadera ni falsa.

Integrate

Integrate[f, x]

retorna la integral indefinida $\int f dx$.

Integrate[f, {x, x_{min}, x_{max}}]

retorna la integral definida $\int_{x_{min}}^{x_{max}} f dx$.

L

Length

Length[expr]

retorna el número de elementos de expr.

M

Module

Module[{x, y, ...}, expr]

especifica que las ocurrencias de los símbolos x, y, ... en expr deben ser tratados como locales.

Module[{x=x₀, ...}, expr]

define valores iniciales para x,

N

N

`N[expr]`

retorna el valor numérico de la expresión `expr`.

`N[expr, n]`

retorna un resultado con `n` dígitos de precisión

P

Position

`Position[expr, pattern]`

retorna una lista de las posiciones de los objetos que coinciden con el patrón `pattern` que aparece en la `expr`.

Print

`Print[expr]`

imprime la expresión `expr` como resultado.

S

Set(=)

`lhs=rhs`

evalúa el `rhs` y asigna el resultado como valor de `lhs`. A partir de entonces, `lhs` se sustituye por `rhs`, siempre que aparezca.

`{l1, l2, ...} = {r1, r2, ...}`

evalúa `ri`, y asigna los resultados como valores de los correspondientes `li`.

Sqrt

`Sqrt[z]`

o \sqrt{z} retorna la raíz cuadrada de `z`.

Subscript

Subscript[x, y]

es un objeto que da formato de subíndice, por ejemplo x_y .

Subscript[x, y, z, ...]

es un objeto que da formato de subíndice, por ejemplo $x_{y,z,\dots}$.

SubsuperscriptBox

SubsuperscriptBox[x, y, z]

es la representación de cuadro para x_y^z en las expresiones de un notebook.

Sum

Sum[f, {i, i_{max}}]

evalúa la suma $\sum_{i_{\min}}^{i_{\max}} f$.

Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}}]

evalúa la suma $\sum_{i_{\min}}^{i_{\max}} f$.

Sum[f, {i, i_{min}, i_{max}, d_i}]

evalúa la suma $\sum_{i_{\min}}^{i_{\max}} f$, usando incrementos d_i .

T

Table

Table[expr, {i_{max}}]

genera una lista de i_{\max} copias de expr.

Table[expr, {i, i_{max}}]

genera una lista de los valores de expr cuando i recorre desde 1 hasta i_{\max} .

Table [expr, {i, i_{min}, i_{max}}]

genera una lista de los valores de expr cuando i recorre desde i_{min} hasta i_{max}.

TrigExpand

TrigExpand [expr]

desarrolla las funciones trigonométricas en expr.

W

While

while [test, body]

evalúa la prueba test, después el cuerpo body, repetidamente, hasta que la prueba no sea verdadera.

ANEXO C

CÓDIGO MATHEMATICA

En este anexo se muestra el código, implementado en Mathematica, de los diferentes métodos de solución expuestos para resolver ecuaciones integrales lineales de segunda especie no homogénea.

MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

```
(**MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES LINEALES DE
  FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE NO HOMOGÉNEAS**)
(**OBJETIVO: MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS**)
(**DICcionario DE VARIABLES: **)
(**VARIABLES DE ENTRADA:f, kernel, λ, a, b, n, f0**)
(**VARIABLES DE SALIDA:φ **)
(**REALIZACIÓN: **)
(**BR. NÉSTOR RODRIGO LOAYZA ROJAS*****
(**CARRERA PROFESIONAL DE MATEMATICAS**)
(**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO**)
(**NOVIEMBRE DE 2011**)
```

```
AproximacionSucesiva[f_, kernel_, λ_, a_, b_, n_, f0_] :=
```

```
Module[{B},
```

```
Subscript[\[CurlyPhi], 0][x_] := f0;
```

```
k = 0;
```

```
B=1/Sqrt[!\[
```

```
\*SubsuperscriptBox[\[Integral], \{a\}, \{b\}][
```

```
\*SubsuperscriptBox[\[Integral], \{a\}, \{b\}]
```

```
\*SuperscriptBox[\(Abs[kernel]\), \{2\}] \[DifferentialD]x
\[DifferentialD]t\)\)\]/N;
```

```
If[Abs[\[Lambda]]<B,
```

```

Print["|\[Lambda]=",\[Lambda],"| < ",B];

Print[Subscript["\[CurlyPhi]", k],"(x) = ",Subscript["\[CurlyPhi],
0][x]];

While[k<n,

Module[{},

gg=Subscript["\[CurlyPhi], 0][x]/.x->t;

Subscript["\[CurlyPhi], 1][x_] = f+ \[Lambda] \!\(
\*SubsuperscriptBox[\(\[Integral]\), \ (a\), \ (b\)]\ \ (\((kernel)\)
gg \[DifferentialD]t)\)\);

k = k+1;

Print[Subscript["\[CurlyPhi]", k],"(x) = ",Subscript["\[CurlyPhi],
1][x] //Expand];

Subscript["\[CurlyPhi], 0][x_] = Subscript["\[CurlyPhi], 1][x]; ]; ];

Print[" "];

Print["La Ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie
no homogéneas es:"];

Print["\[CurlyPhi] (x) = ", f, " +
",\[Lambda], "Subsuperscript[\[Integral], a,
b](", kernel, ")\[CurlyPhi] (t)\[DifferentialD]t"];

Print["Después de ",k," iterations, Tenemos la aproximación"];

{Print["\[CurlyPhi] (x) = ",Subscript["\[CurlyPhi],
0][x]//Expand],Print["\[CurlyPhi] (x) \[TildeTilde]
",Subscript["\[CurlyPhi], 0][x]//Expand//N]; }

,{Print["No converge la solución"],Print["|\[Lambda]=",\[Lambda],"|
> ",B]}}];

];

```

MÉTODO DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES CON NÚCLEO SEPARABLE

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

(*****MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES LINEALES DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE NO HOMOGÉNEAS*****)
(*OBJETIVO: MÉTODO DE SOLUCIÓN PARA UN NÚCLEO SEPARABLE***)**
(*DICcionario DE VARIABLES: *****)
(*VARIABLES DE ENTRADA: f, kernel, λ, a, b***)**
(*VARIABLES DE SALIDA: φ ***)**
(*REALIZACIÓN: *******)
(*BR. NÉSTOR RODRIGO LOAYZA ROJAS***)**
(*CARRERA PROFESIONAL DE MATEMATICAS***)**
(*UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO***)**
(*NOVIEMBRE DE 2011***)**

NucleoSeparable[f_, kernel_, λ_, a_, b_] :=

Module[

{Sep, A, Ex, l, T, SS, f1, f2, k, CA={}, CC={}, c, x1, Eq11, Eq1, Fo, Ff, F, sy
s={}, Sol},

Sep[A_] := If[Length[A] == 2, {A[[Position[A, x] [[1, 1]]]], A[[
Position[A, t] [[1, 1]]]]}, If[Length[A] == 3, {A[[1]] A[[
Position[A, x] [[1, 1]]]], A[[Position[A, t] [[1, 1]]]]}];

Ex[A_] := If[Length[A] == 0 && Position[A
, t] == {}, {A, 1}, If[Length[A] == 2 && Position[A
, t] == {}, {A, 1}, If[(Length[A] == 0 | Length[A] == 2) && Position[A
, t] == {}, {1, A}, If[Position[A , t] == {} && Position[A
, x] != {}, {A, 1}, If[Position[A , x] == {} && Position[A
, t] != {}, {1, A}, Sep[A]]]]];

k = kernel // TrigExpand;

l = Length[k];

T = Table[k[[i]], {i, 1, l}];

SS = Table[Ex[T[[i]]], {i, 1, l}];

f1 = Table[SS[[i, 1]], {i, 1, l}];

f2 = Table[SS[[i, 2]], {i, 1, l}];

f1.f2;


```

If[f1.f2==k,
{CA=Array[c,1,1],CC=Array[x1,1,1]};

Eq11≡F[x]-
Sum[\[Lambda]*f1[[i]]*Integrate[f2[[i]]*F[t],{t,a,b}],{i,1,1}
]==f;

ClearAttributes[{Times,Plus},Orderless];

Eq1=F[x]-
Sum[\[Lambda]*f1[[i]]*Integrate[f2[[i]]*F[t],{t,a,b}],{i,1,1}
]==f;

Table[CC[[i]]≡Integrate[f2[[i]]*F[t],{t,a,b}],{i,1,1,1}];
Fo=Table[\[Lambda]*f1[[i]]*CA[[i]],{i,1,1,1}];
Ff=Apply[Plus,Fo]+f;
F[X_]:=Ff/.{x->X};
S[x];
Do[CC[[i]];sys=Union[sys,{CA[[i]]==CC[[i]]}],{i,1,1}];
{sys,S=Solve[sys,CA]};
Sol[X_]:=Cancel[(F[x]/.S[[1]])/.{x->X}];
Print[" "];

Print["La Ecuación integral lineal de Fredholm de segunda
especie no homogéneas es:"];

Print["\[CurlyPhi](x) = ",f," +
",\[Lambda],"Subsuperscript[\[Integral], a,
b](",kernel,")\[CurlyPhi](t)\[DifferentialD]t"];

Print["Tiene por solución:  \[CurlyPhi](x) = ",Sol[x];];];

```

MÉTODO DE SUMAS FINITAS

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$$

(**MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES INTEGRALES LINEALES DE FREDHOLM DE SEGUNDA ESPECIE NO HOMOGÉNEAS**)
 (**OBJETIVO: MÉTODO DE SUMAS FINITAS**)
 (**DICcionario DE VARIABLES: ***)
 (**VARIABLES DE ENTRADA: f, kernel, λ, a, b, n***)
 (**VARIABLES DE SALIDA: φ ***)
 (**REALIZACIÓN:*****)
 (**BR. NÉSTOR RODRIGO LOAYZA ROJAS***)
 (**CARRERA PROFESIONAL DE MATEMATICAS***)
 (**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO***)
 (**NOVIEMBRE DE 2011***)

<<NumericalDifferentialEquationAnalysis`

Sumasfinitas[f_, kernel_, \[Lambda]_, a_, b_, n_] :=

Module[{i, F, integral, raices, ecuaciones, Vr, solusistema, imaganes, Puntos, soluaprox},

z=Table[GaussianQuadratureWeights[n, a, b, 22][[i, 1]], {i, 1, n, 1}]

;

w=Table[GaussianQuadratureWeights[n, a, b, 22][[i, 2]], {i, 1, n, 1}]

;

(*---- Reemplazo de Raíces y Coeficientes en kernel[x, t]\[CurlyPhi][t]:

\!\(\(*

SubsuperscriptBox[

StyleBox["\[Integral]",

SpanMinSize->1.,

SpanMaxSize->1.], "b", "b"]\((kernel[x, t] \[CurlyPhi][t] \[DifferentialD]t)\)\[TildeTilde]\!\(\

*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \((i \equiv 1)\), \((n)\)]\(\

*SubscriptBox[\((c)\), \((n, i)\)] kernel[x, *

```

TagBox[
SubscriptBox["r",
RowBox[{"n", ",", "i"}]],
"MathMLPresentationTag",
AutoDelete->True]] \[CurlyPhi][\[*
TagBox[
SubscriptBox["r",
RowBox[{"n", ",", "i"}]],
"MathMLPresentationTag",
AutoDelete->True]]\)\)----*)
integral=\!\(
\[*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \((j = 1\), \((n\))\)\(w[[j]]
Evaluatē[kernel /. t -> z[[j]]] \[CurlyPhi][z[[j]]]\)\);
(*---- Raíces Subscript[r, n,i] ----*)
raices=Table[GaussianQuadratureWeights[n,a,b,22][[i,1]],{i,1,
n,1}];
(*----Sistema de ecuaciones ----*)
ecuaciones=Table[\[CurlyPhi][x]==f+\[Lambda] integral/.x->
raices[[i]],{i,1,n,1}];
(*----\[CurlyPhi][Subscript[r, n,i]]----*)
Vr=Map[\[CurlyPhi],raices];
(*----Soluccion del sistema de ecuaciones ----*)
solusistema=Solve[ecuaciones,Vr];
(*Imaganes:\[CurlyPhi][Subscript[r, n,i]]=Subscript[t, i]
coord*)
imaganes=Table[solusistema[[1,i,2]],{i,1,n,1}];
(*Soluciones: (x,t) coord*)
Puntos=Table[{raices[[i]],imaganes[[i]]},{i,n}];
(*Solucion aproximada*)

```

```

soluaprox=Fit[Puntos,{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^7,x^8,x^9,x^10},x];

Print[" "];

Print["La Ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie no homogéneas es:"];

Print["\[CurlyPhi](x) = ",f," +",\[Lambda], "Subsuperscript\[Integral], a, b(",kernel,")\[CurlyPhi](t)\[DifferentialD]t"];

Print["Después de ",n," iteraciones, Tenemos la aproximación"];

Print["\[CurlyPhi](x) \[TildeTilde] ",soluaprox//Expand//N];

```

ANEXO D

TABLAS DE RESULTADOS NUMÉRICOS

Tabla 3.4.1.1:

n	<i>Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$</i>	<i>Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\$</i>
10	$\varphi_{10}(x) = \frac{61}{243} + \frac{182x}{243}$	2.0576131×10^{-3}
20	$\varphi_{20}(x) = \frac{14762}{59049} + \frac{44287x}{59049}$	8.4675437×10^{-6}
30	$\varphi_{30}(x) = \frac{3587227}{14348907} + \frac{10761680x}{14348907}$	3.4845859×10^{-8}
40	$\varphi_{40}(x) = \frac{871696100}{3486784401} + \frac{2615088301x}{3486784401}$	$1.4339874 \times 10^{-10}$
50	$\varphi_{50}(x) = \frac{211822152361}{847288609443} + \frac{635466457082x}{847288609443}$	5.900280×10^{-13}

Tabla 3.4.1.2:

n	<i>Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$</i>	<i>Error máximo:</i> $\left\ \varphi_n(x) - \left(1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)\varphi_n(t) dt \right) \right\ $
10	$\varphi_{10}(x) = 0.2499997 + 0.75x + 0.00001443316x^2 + 0. \times 10^{-14}x^3$ $- 0.0001250874x^4 +$ $0 \times 10^{-14}x^5 + 0.0003752622x^6 + 0. \times 10^{-14}x^7 - 0.0004556755x^8 +$ $0. \times 10^{-14}x^9 + 0.0001923963x^{10}$	1.0663437×10^{-6}
20	$\varphi_{20}(x) = 0.25 + 0.75x + 0. \times 10^{-13}x^2 + 0. \times 10^{-13}x^3 + 0. \times 10^{-13}x^4 + 0.$ $\times 10^{-13}x^5 + 0. \times 10^{-12}x^6 + 0. \times 10^{-13}x^7 + 0. \times 10^{-12}x^8 + 0.$ $\times 10^{-13}x^9 + 0. \times 10^{-13}x^{10}$	$8.8817842 \times 10^{-16}$
30	$\varphi_{30}(x) = 0.25 + 0.75x + 0. \times 10^{-13}x^2 + 0. \times 10^{-12}x^3 + 0. \times 10^{-12}x^4 + 0.$ $\times 10^{-12}x^5 + 0. \times 10^{-12}x^6 + 0. \times 10^{-12}x^7 + 0. \times 10^{-12}x^8 + 0.$ $\times 10^{-12}x^9 + 0. \times 10^{-12}x^{10}$	$8.8817842 \times 10^{-16}$
40	$\varphi_{40}(x) = 0.25 + 0.75x + 0. \times 10^{-12}x^2 + 0. \times 10^{-12}x^3 + 0. \times 10^{-11}x^4 + 0. \times 10^{-11}x^5 + 0.$ $\times 10^{-11}x^6 + 0. \times 10^{-11}x^7 + 0. \times 10^{-11}x^8 + 0. \times 10^{-11}x^9 + 0. \times 10^{-11}x^{10}$	$8.8817842 \times 10^{-16}$
50	$\varphi_{50}(x) = 0.25 + 0.75x + 0. \times 10^{-12}x^2 + 0. \times 10^{-11}x^3 + 0. \times 10^{-11}x^4 + 0.$ $\times 10^{-11}x^5 + 0. \times 10^{-10}x^6 + 0. \times 10^{-11}x^7 + 0. \times 10^{-10}x^8 + 0.$ $\times 10^{-11}x^9 + 0. \times 10^{-11}x^{10}$	$8.8817842 \times 10^{-16}$

Tabla 3.4.2.1:

n	Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$	Error máximo: $\ \varphi(x) - \varphi_n(x)\ $
10	$\varphi_{10}(x) = \frac{46631237}{61509375} + \frac{393806x^2}{151875}$	1.9437729×10^{-1}
20	$\varphi_{20}(x) = \frac{9229305391217713}{11350209638671875} + \frac{2055143169698258x^2}{756680642578125}$	1.6316828×10^{-2}
30	$\varphi_{30}(x) = \frac{1712740428776097715529837}{2094432902981048583984375} + \frac{380673831958431782595722x^2}{139628860198736572265625}$	1.3697015×10^{-3}
40	$\varphi_{40}(x) = \frac{316198630810523815601922900701113}{386481776525399805736541748046875} + \frac{23422455632550512383206213691766x^2}{8588483922786662349700927734375}$	1.1497836×10^{-4}
50	$\varphi_{50}(x) = \frac{58349861668297124486608388775141905364437}{71316757568901041027928292751312255859375} + \frac{12966651485968794661620793498004455998682x^2}{4754450504593402735195219516754150390625}$	9.6517553×10^{-6}

Tabla 3.4.2.2:

n	<i>Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$</i>	<i>Error máximo:</i> $\left\ \varphi_n(x) - \left(x^2 + 1 \int_0^1 (x^2 + t^2) \varphi_n(t) dt \right) \right\ $
10	$\varphi_{10}(x) = 0.8181818 + 1.309589 \times 10^{-7}x + 2.727269x^2 + 0.0000408592x^3$ $- 0.0002502626x^4 + 0.0009009455x^5 - 0.002002101x^6$ $+ 0.002778426x^7 - 0.002344296x^8 + 0.001099793x^9 - 0.0002199587x^{10}$	1.1905383×10^{-9}
20	$\varphi_{20}(x) = 0.8181818 + 0. \times 10^{-14}x + 2.727272x^2 + 0. \times 10^{-11}x^3 + 0. \times 10^{-11}x^4 +$ $0. \times 10^{-10}x^5 + 0. \times 10^{-10}x^6 + 0. \times 10^{-10}x^7 + 0. \times 10^{-10}x^8 + 0. \times 10^{-10}x^9 + 0. \times 10^{-11}x^{10}$	$4.4408921 \times 10^{-15}$
30	$\varphi_{30}(x) = 0.8181818 + 0. \times 10^{-13}x + 2.727272x^2 + 0. \times 10^{-11}x^3 + 0. \times 10^{-10}x^4 +$ $0. \times 10^{-10}x^5 + 0. \times 10^{-10}x^6 + 0. \times 10^{-9}x^7 + 0. \times 10^{-9}x^8 + 0. \times 10^{-10}x^9 + 0. \times 10^{-10}x^{10}$	$4.4408921 \times 10^{-15}$
40	$\varphi_{40}(x) = 0.8181818 + 0. \times 10^{-13}x + 2.727272x^2 + 0. \times 10^{-11}x^3 + 0. \times 10^{-10}x^4 + 0. \times 10^{-10}x^5 +$ $0. \times 10^{-9}x^6 + 0. \times 10^{-9}x^7 + 0. \times 10^{-9}x^8 + 0. \times 10^{-10}x^9 + 0. \times 10^{-10}x^{10}$	$4.4408921 \times 10^{-15}$
50	$\varphi_{50}(x) = 0.8181818 + 0. \times 10^{-13}x + 2.727272x^2 + 0. \times 10^{-11}x^3 + 0. \times 10^{-10}x^4 +$ $0. \times 10^{-9}x^5 + 0. \times 10^{-9}x^6 + 0. \times 10^{-9}x^7 + 0. \times 10^{-9}x^8 + 0. \times 10^{-9}x^9 + 0. \times 10^{-10}x^{10}$	$4.4408921 \times 10^{-15}$

Tabla 3.4.3.1:

n	<i>Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$</i>	<i>Error máximo:</i> $\left\ \varphi_n(x) - \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(t-x)\varphi_n(t) dt \right) \right\ $
10	$\varphi_{10}(x) = 1.99761 + 0. \times 10^{-14}x - 0.4978684x^2 + 0. \times 10^{-13}x^3 + 0.03337438x^4 + 0. \times 10^{-13}x^5 + 0.02319473x^6 + 0. \times 10^{-13}x^7 - 0.0298228x^8 + 0. \times 10^{-13}x^9 + 0.01260202x^{10}$	6.9847354×10^{-5}
20	$\varphi_{20}(x) = 1.997627 + 0. \times 10^{-13}x - 0.4988138x^2 + 0. \times 10^{-12}x^3 + 0.04156782x^4 + 0. \times 10^{-12}x^5 - 0.00138559x^6 + 0. \times 10^{-12}x^7 + 0.00002473593x^8 + 0. \times 10^{-12}x^9 - 2.6878 \times 10^{-7}x^{10}$	$1.4750423 \times 10^{-12}$
30	$\varphi_{30}(x) = 1.997627 + 0. \times 10^{-13}x - 0.4988138x^2 + 0. \times 10^{-12}x^3 + 0.04156782x^4 + 0. \times 10^{-11}x^5 - 0.00138559x^6 + 0. \times 10^{-11}x^7 + 0.0000247358x^8 + 0. \times 10^{-12}x^9 - 2.687 \times 10^{-7}x^{10}$	$1.2500001 \times 10^{-12}$
40	$\varphi_{40}(x) = 1.997627 + 0. \times 10^{-11}x - 0.4988138x^2 + 0. \times 10^{-10}x^3 + 0.04156782x^4 + 0. \times 10^{-10}x^5 - 0.00138559x^6 + 0. \times 10^{-10}x^7 + 0.00002473x^8 + 0. \times 10^{-10}x^9 - 2.69 \times 10^{-7}x^{10}$	$1.1702861 \times 10^{-12}$
50	$\varphi_{50}(x) = 1.997627 + 0. \times 10^{-12}x - 0.4988138x^2 + 0. \times 10^{-11}x^3 + 0.04156782x^4 + 0. \times 10^{-10}x^5 - 0.00138559x^6 + 0. \times 10^{-10}x^7 + 0.000024736x^8 + 0. \times 10^{-11}x^9 - 2.68 \times 10^{-7}x^{10}$	$1.1287637 \times 10^{-12}$

Tabla 3.4.4.1:

n	<i>Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$</i>	<i>Error máximo:</i> $\left\ \varphi_n(x) - \left(x + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sin(xt) \varphi_n(t) dt \right) \right\ $
10	$\varphi_{10}(x) = -1.362179 \times 10^{-10} + 2.033035x - 4.045704 \times 10^{-7}x^2 - 0.1027081x^3$ $- 0.00002863537x^4 + 0.003759752x^5 - 0.0002290973x^6$ $+ 0.0002503707x^7 - 0.0002682979x^8 + 0.0001266618x^9$ $- 0.00002519553x^{10}$	$1.3621760 \times 10^{-10}$
20	$\varphi_{20}(x) = -3. \times 10^{-15} + 2.033035x - 2.6 \times 10^{-11}x^2 - 0.1027128x^3 - 3.1 \times 10^{-9}x^4$ $+ 0.003656676x^5 - 4.2 \times 10^{-8}x^6 - 0.000067499x^7 - 9.6 \times 10^{-8}x^8 +$ $8.392 \times 10^{-7}x^9 - 3.11 \times 10^{-8}x^{10}$	$4.1078252 \times 10^{-15}$
30	$\varphi_{30}(x) = -3. \times 10^{-15} + 2.033035x - 2.5 \times 10^{-11}x^2 - 0.1027128x^3 - 3.1 \times 10^{-9}x^4$ $+ 0.003656676x^5 - 4.2 \times 10^{-8}x^6 - 0.0000675x^7 - 9.6 \times 10^{-8}x^8 +$ $8.39 \times 10^{-7}x^9 - 3.11 \times 10^{-8}x^{10}$	$3.6637360 \times 10^{-15}$
40	$\varphi_{40}(x) = 2.033035x - 2. \times 10^{-11}x^2 - 0.1027128x^3 - 3.1 \times 10^{-9}x^4 + 0.003656676x^5 - 4.2$ $\times 10^{-8}x^6 - 0.0000675x^7 - 9.6 \times 10^{-8}x^8 + 8.39 \times 10^{-7}x^9 - 3.11 \times 10^{-8}x^{10}$	$3.7747583 \times 10^{-15}$
50	$\varphi_{50}(x) = 2.033035x - 2. \times 10^{-11}x^2 - 0.1027128x^3 - 3. \times 10^{-9}x^4 + 0.003656676x^5 - 4.2$ $\times 10^{-8}x^6 - 0.0000675x^7 - 9.6 \times 10^{-8}x^8 + 8.39 \times 10^{-7}x^9 - 3.1 \times 10^{-8}x^{10}$	$3.6637360 \times 10^{-15}$

Tabla 3.4.5.1:

n	<i>Solución Aproximada: $\varphi_n(x)$</i>	<i>Error máximo:</i> $\left\ \varphi_n(x) - \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+(x-t)^2} \right) \varphi_n(t) dt \right) \right\ $
10	$\varphi_{10}(x) = 1.919028 + 0. \times 10^{-15}x - 0.3115063x^2 + 0. \times 10^{-15}x^3 + 0.01372526x^4 + 0. \times 10^{-14}x^5 + 0.02601825x^6 + 0. \times 10^{-14}x^7 - 0.009024961x^8 + 0. \times 10^{-14}x^9 + 0.001465686x^{10}$	1.0690093×10^{-5}
20	$\varphi_{20}(x) = 1.919031 + 0. \times 10^{-15}x - 0.3116932x^2 + 0. \times 10^{-14}x^3 + 0.01530559x^4 + 0. \times 10^{-13}x^5 + 0.02136732x^6 + 0. \times 10^{-13}x^7 - 0.003462886x^8 + 0. \times 10^{-13}x^9 - 0.0008538199x^{10}$	7.1825654×10^{-7}
30	$\varphi_{30}(x) = 1.919031 + 0. \times 10^{-14}x - 0.3116925x^2 + 0. \times 10^{-13}x^3 + 0.0152994x^4 + 0. \times 10^{-13}x^5 + 0.02138699x^6 + 0. \times 10^{-13}x^7 - 0.00348802x^8 + 0. \times 10^{-13}x^9 - 0.0008427148x^{10}$	6.0921370×10^{-7}
40	$\varphi_{40}(x) = 1.919031 + 0. \times 10^{-14}x - 0.3116923x^2 + 0. \times 10^{-13}x^3 + 0.01529733x^4 + 0. \times 10^{-12}x^5 + 0.02139361x^6 + 0. \times 10^{-12}x^7 - 0.003496517x^8 + 0. \times 10^{-13}x^9 - 0.0008389476x^{10}$	5.7031736×10^{-7}
50	$\varphi_{50}(x) = 0.8181818 + 0. \times 10^{-13}x + 2.727272x^2 + 0. \times 10^{-11}x^3 + 0. \times 10^{-10}x^4 + 0. \times 10^{-9}x^5 + 0. \times 10^{-9}x^6 + 0. \times 10^{-9}x^7 + 0. \times 10^{-9}x^8 + 0. \times 10^{-9}x^9 + 0. \times 10^{-10}x^{10}$	5.5022141×10^{-7}