

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



TESIS

**ELABORACIÓN DE UNA LIBRERÍA EN PYTHON PARA LA
SIMULACIÓN DE LA DINÁMICA DEL BILLAR
MAGNÉTICO DOBLE EN UNA REGIÓN CUADRADA**

PRESENTADO POR:

Br. RUBEN ALFREDO TUPAYACHI LATORRE

**PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL
DE FÍSICO**

ASESOR:

Mgt. MARCO ANTONIO ZAMALLOA JARA

CUSCO-PERÚ
2025



Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco

INFORME DE SIMILITUD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-321-2025-UNSAAC)

El que suscribe, el Asesor Marco Antonio Zamalloa Jara
..... quien aplica el software de detección de similitud al
trabajo de investigación/tesis titulada: Elaboración de una librería en
Python para la simulación de la dinámica del billar magnético
doble en una región cuadrada.

Presentado por: Ruben Alfredo Tupayachi Latorre DNI N° 47691311 ;
presentado por: DNI N°:
Para optar el título Profesional/Grado Académico de Física

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 1 veces, mediante el
Software de Similitud, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso del Sistema Detección de
Similitud en la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 5 %.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No sobrepasa el porcentaje aceptado de similitud.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las subsanaciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, conforme al reglamento, quien a su vez eleva el informe al Vicerrectorado de Investigación para que tome las acciones correspondientes; Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de Asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto las primeras páginas del reporte del Sistema de Detección de Similitud.

Cusco, 27 de Abril de 2026

Firma

Post firma Marco A. Zamalloa Jara

Nro. de DNI 06445847

ORCID del Asesor 0000-0002-7216-4659

Se adjunta:

- Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
- Enlace del Reporte Generado por el Sistema de Detección de Similitud: **oid:** 27259:581383691

ruben_tupayachi.pdf

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid::27259:581383691

132 páginas

Fecha de entrega

21 abr 2026, 11:43 a.m. GMT-5

25.153 palabras

Fecha de descarga

21 abr 2026, 11:50 a.m. GMT-5

130.946 caracteres

Nombre del archivo

ruben_tupayachi.pdf

Tamaño del archivo

8.1 MB




5% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para cá...

Filtrado desde el informe


- Bibliografía
- Coincidencias menores (menos de 10 palabras)

Fuentes principales

- 4%  Fuentes de Internet
- 1%  Publicaciones
- 3%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
63 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

Dedicado a mi familia

Índice general

1. Aspectos generales	13
1.1. Planteamiento del problema	13
1.2. Formulación del problema	14
1.2.1. Problema general	14
1.2.2. Problemas específicos	14
1.3. Formulación de objetivos	14
1.3.1. Objetivo general	14
1.3.2. Objetivos específicos	15
1.4. Formulación de hipótesis	15
1.4.1. Hipótesis general	15
1.4.2. Hipotesis específica	15
1.5. Justificación	15
1.6. Métodos y materiales	16
1.6.1. Computadora	16
1.6.2. Lenguaje de programación Python	16
1.6.3. Software para gráficos Gnuplot	18
1.6.4. Software multimedia FFMPEG	18
2. Metodología	19
2.1. Tipo de investigación	19
2.2. Enfoque de la investigación	19
2.3. Nivel de la investigación	20
2.4. Diseño de la investigación	20
2.5. Método de la investigación	20
2.6. Técnicas	20

2.6.1. Descripción de la librería	20
2.6.2. Uso de la librería	25
3. Marco teórico	35
3.1. Marco conceptual	35
3.2. Antecedentes	38
3.3. Sistemas dinámicos	40
3.4. Caos	42
3.5. ¿Qué es un billar?	44
3.5.1. Ejemplos de billares	46
3.5.2. Billar magnético	53
3.5.3. Billar magnético inverso	56
3.5.4. Billar magnético doble	59
4. Resultados	67
4.1. Campo magnético B_{out} mucho mayor que B_{in}	68
4.2. Campos magnéticos paralelos	69
4.2.1. El caso : $B_{in} > B_{out}$	69
4.2.2. El caso: $B_{in} < B_{out}$	73
4.3. Campos magnéticos antiparalelos	77
4.3.1. El caso $B_{in} > B_{out}$	78
4.3.2. El caso $B_{in} < B_{out}$	82
5. Conclusiones	87
A. Libreria magnetic	89
B. Código Paralelo	113
C. Código Antiparalelo	117
D. Ejemplo 1: Diferentes trayectorias	121
E. Ejemplo 2: Generar video	125

Índice de figuras

2.1. Configuración inicial del billar magnético doble	22
2.2. Trayectoria circular correspondiente a la partícula cargada	23
2.3. Detección del punto válido de impacto de la partícula con la pared del billar	24
2.4. Trayectoria de la partícula cargada al salir del billar y reingresar al billar.	25
2.5. Determinación de la ubicación y velocidad de la partícula al reingresar.	26
2.6. Captura de pantalla del código	27
2.7. Resultados de la simulación	28
2.8. Datos del espacio de fases	29
2.9. Pantalla de gnuplot	30
2.10. Resultado de gnuplot	30
2.11. Captura del código diferentesTrayectorias.py	31
2.12. Captura del resultado de diferentesTrayectorias.py	32
2.13. Trayectorias con la misma posición inicial pero diferentes velocidad	33
2.14. Captura del video generado por el código generarvideo.py	33
3.1. Billar rectangular	47
3.2. Trayectorias posibles en un billar elíptico	48
3.3. Esquema del estadio de Bunimovich	49
3.4. Billar de hongo: El sombrero corresponde al semicírculo y el tronco corresponde al rectángulo inferior.	50
3.5. Billar de Sinaí	50
3.6. Billar de microorganismo: Dos casos posibles	51
3.7. Trayectoria de una partícula en un billar magnético	56

3.8. Configuración para un billar magnético inverso doble en un cuadrado.	
El campo magnético exterior B_{out} ingresa al plano de la superficie, y	
el campo magnético interior B_{in} sale de la superficie.	60
3.9. Trayectorias posibles en un billar magnético doble	62
3.10. Coordenadas s y θ	63
3.11. Trayectoria caótica con su espacio de fases	64
3.12. Trayectoria regular con su espacio de fases	65
4.1. Campos magnéticos paralelos con B_o =grande	68
4.2. Espacio de fases para un B_{out} mucho mas grande que B_{int}	68
4.3. Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$	70
4.4. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con	
$B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$	70
4.5. Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$	71
4.6. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con	
$B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$	71
4.7. Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$	72
4.8. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con	
$B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$	72
4.9. Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$	73
4.10. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con	
$B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$	73
4.11. Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$	74
4.12. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con	
$B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$	74
4.13. Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$	75
4.14. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con	
$B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$	75
4.15. Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$	76
4.16. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con	
$B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$	76
4.17. Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$	77

4.18. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con	
$B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$	77
4.19. Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$	78
4.20. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos	
con $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$	79
4.21. Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$	79
4.22. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos	
con $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$	80
4.23. Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$	80
4.24. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos	
con $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$	81
4.25. Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$	81
4.26. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos	
con $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$	82
4.27. Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$	83
4.28. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos	
con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$	83
4.29. Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$	84
4.30. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos	
con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$	84
4.31. Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$	85
4.32. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos	
con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$	85
4.33. Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$	86
4.34. Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos	
con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$	86

Resumen

Un billar dinámico es un sistema físico que consiste en una partícula puntual que realiza reflexiones especulares en el interior de una región cerrada. Para la presente tesis se considera a una partícula puntual encerrada en una región cuadrada. Con el fin de enriquecer la dinámica del sistema se considera que la partícula está cargada y está sometida a campos magnéticos, a esta configuración se le denomina billar magnético. Considerando modificaciones a este sistema se permite que la partícula penetre la frontera cuadrada y reingrese debido a la presencia de los campos magnéticos, lo cuál se denomina billar magnético doble. Para estudiar la dinámica de la partícula en este sistema se ha elaborado una librería en el lenguaje de programación Python que permite simular la trayectoria de la partícula bajo diferentes condiciones iniciales y obtener su correspondiente espacio de fases. La librería elaborada permite obtener los datos de la simulación así como los gráficos correspondientes.

Palabras clave: Billares dinámicos, Billares magnéticos, Caos, Python.

Capítulo 1

Aspectos generales

1.1. Planteamiento del problema

Los billares dinámicos son sistemas físicos en el que se considera una partícula que realiza reflexiones en el interior de una región cerrada. En el caso más sencillo se considera una partícula que se mueve en línea recta y realiza reflexiones especulares en el interior de una frontera cerrada al incidir en esta. Una modificación es la de los billares magnéticos, en esta se considera una partícula cargada expuesta a un campo magnético perpendicular al plano del movimiento y la trayectoria de la partícula consiste en arcos de circunferencia y realiza reflexiones al incidir con el interior de la frontera. Los billares magnéticos son modelos teóricos ampliamente usados en física del estado sólido, física molecular y mecánica cuántica. Sin embargo, una extensión de este sistema es la del **billar magnético inverso**, en el cual se aplica un campo magnético al exterior de la frontera y en el interior no se aplica ningún campo magnético, la partícula tiene permitido penetrar la frontera. Este sistema ha sido propuesto para modelar fenómenos en física molecular, física del estado sólido, espintrónica entre otras áreas. Debido a que resulta de interés obtener información de la trayectoria de la partícula bajo diversas condiciones.

Considerando esta última modificación, se propone extender el modelo del billar magnético inverso y considerar campos magnéticos tanto al interior como al exterior de la frontera a considerar. Este sistema será denominado de ahora en adelante **billar magnético doble**. De este sistema se estudiará la trayectoria de la partícula bajo diferentes condiciones (campos magnético paralelos, antiparalelos, de diferentes

intensidades) para identificar si la trayectoria es regular o caótica se recurre a las simulaciones computacionales, las cuales muestran la intersección de los modelos teóricos y los resultados esperados en los experimentos.

La presente tesis ofrece como producto una librería en el lenguaje de programación Python para la simulación del billar magnético inverso doble. La librería en Python es una herramienta computacional en la cual un usuario puede ingresar parámetros de entrada y obtener la trayectoria de la partícula y el correspondiente espacio de fases, de esta información se puede deducir si la trayectoria es caótica o regular. Adicionalmente, se muestran ejemplos de uso.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

- ¿Es posible desarrollar una librería en el lenguaje de programación Python para simular la dinámica del billar magnético doble en una región cuadrada?

1.2.2. Problemas específicos

- ¿Es posible obtener la trayectoria de una partícula en un billar magnético doble?
- ¿Es posible obtener el espacio de fases del billar magnético doble?
- ¿Bajo qué condiciones son regulares o caóticas las trayectorias en un billar magnético doble en una región cuadrada?

1.3. Formulación de objetivos

1.3.1. Objetivo general

Elaborar una librería en el lenguaje de programación Python para simular la dinámica del billar magnético doble en una región cuadrada para estudiar y visualizar el comportamiento de la partícula.

1.3.2. Objetivos específicos

- Desarrollar las funciones en el lenguaje de programación Python para simular la trayectoria de la partícula en un billar magnético doble.
- Desarrollar las funciones en el lenguaje de programación Python para obtener y visualizar el espacio de fases del sistema.
- Identificar si una trayectoria es regular o caótica en base a los datos proporcionados por la librería programada en Python.

1.4. Formulación de hipótesis

1.4.1. Hipótesis general

El desarrollo de una librería en Python es capaz de simular la dinámica de un billar magnético doble en una región cuadrada y permite visualizar los resultados.

1.4.2. Hipotesis específica

- La elaboración una librería en el lenguaje de programación Python permite simular la trayectoria de una partícula en un billar magnético doble .
- La elaboración una librería en el lenguaje de programación Python permite graficar el espacio de fases de un billar magnético doble .
- El espacio de fases del sistema identifica si una trayectoria es regular o caótica.

1.5. Justificación

Dentro del área de sistemas dinámicos, los billares dinámicos resultan de gran interés debido a la variedad de resultados puramente matemáticos que tienen para ofrecer, además que la puesta experimental de estos sistemas físicos han sido exitosamente aplicados en áreas como la acústica, óptica, física molecular y física del estado sólido. De esto, diversas aplicaciones tecnológicas han sido desarrolladas y aplicados a la elaboración de materiales, al área de la espintrónica o el desarrollo de trampas magnéticas.

En particular, los billares magnéticos se aplican al estudio de la dinámica de partículas expuestas a campos magnéticos confinadas en regiones cerradas. Esto es frecuente en diversas ramas de la física. De modo que surge la necesidad de tener una herramienta para realizar las simulaciones computacionales de billares magnéticos, en particular billares magnéticos dobles. En este sistema se considera una región cerrada que sirve de frontera y se aplican campos magnéticos al interior y exterior de la frontera, de modo que una partícula cargada se mueve en el interior y exterior de esta región. Esta situación física aparece en experimentos de física molecular y del estado sólido (como en experimentos con trampas magnéticas y plasma). Debido a la presencia de billares magnéticos inversos en diversas áreas de la física, surge la necesidad de desarrollar una herramienta computacional para simular el comportamiento de las partículas en este sistema para cotejar los resultados teóricos y experimentales.

1.6. Métodos y materiales

1.6.1. Computadora

La computadora utilizada fue una HP14 de 4gb de memoria RAM, con el sistema operativo GNU/LINUX con la distribución Ubuntu. Esta es una distribución de GNU/Linux, un sistema operativo libre, tiene la ventaja de tener preinstalada los programas de uso frecuente en computación científica y una eficiente gestión de recursos computacionales.

1.6.2. Lenguaje de programación Python

Un lenguaje de programación es un conjunto de instrucciones bien definidas que no admite ambigüedades. Del mismo modo que cualquier lenguaje (como español o quechua) posee una sintaxis, esta es bien comprendida por un ordenador para ejecutar instrucciones que el usuario proporcione. Existe una amplia variedad de lenguajes de programación como los son Fortran, C, Visual Basic, Javascript, etc. Cada uno de estos está diseñado para diferentes tareas. Por ejemplo, el lenguaje de programación C es frecuentemente utilizado en la programación de circuitos electrónicos, el lengua-

je de programación Fortran se utiliza frecuentemente en computación científica, y Javascript se utiliza para programar aplicaciones web. En la presente tesis se utilizó el lenguaje de programación Python por las razones que se expondrán a continuación. Python es un lenguaje con una sintaxis amigable con el usuario principiante, haciendo legible el código que se escribe. Adicionalmente, posee una amplia comunidad de usuarios y extensa documentación que permite resolver problemas de manera rápida. Python posee herramientas diseñadas para realizar simulaciones computacionales en diferentes áreas del conocimiento como en física, química, bioinformática, economía, etc. Ante la variedad de tópicos en los que Python puede ser utilizado, surge la necesidad de agrupar herramientas específicas para tareas puntuales en códigos independientes. Estas agrupaciones de funciones de código en Python que realizan tareas puntuales reciben el nombre de librerías. Por ejemplo la librería llamada NumPy (Numerical Python) corresponde a un conjunto de funciones diseñadas para operaciones vectoriales y matriciales, otra biblioteca llamada Pandas se encarga de la lectura y manipulación de datos en forma tabular (por ejemplo datos almacenados en hojas de cálculo), o Matplotlib que es una librería diseñada exclusivamente para realizar gráficos de datos estadísticos o científicos.

Para este trabajo se utilizaron dos librerías de Python: Numpy y Matplotlib. Numpy es una librería de Python que permite operar vectores y matrices, además que posee numerosas funciones del álgebra lineal (producto de matrices, autovectores, autovalores, descomposición espectral , etc.). Mientras que para una parte de la visualización de datos se utilizó Matplotlib, esta es una librería diseñada para la elaboración de gráficos. Permite una alta personalización de los gráficos y tiene una gran variedad de formatos de gráficos (de dispersión, barras, de calor, etc.) Además que es posible exportar el gráfico en diversos formatos (.jpg, .eps, .png, etc.). Durante la elaboración de la presente tesis, se vio en la necesidad de reutilizar constantemente muchas funciones por lo que se vio por conveniente agruparlas en un solo código mayor. Esto es una librería a la cual se le denominará **magnetic.py** que contiene las funciones utilizadas para las simulaciones presentes. El código desarrollado se encuentra en el Apéndice [A](#).

1.6.3. Software para gráficos Gnuplot

Si bien Matplotlib es la biblioteca estándar para realizar gráficos en Python (cabe mencionar que existen otras alternativas que se centran en la estética del gráfico o proporcionar gráficos muy específicos para áreas muy puntuales), un problema que enfrenta es que no logra generar el gráfico cuando el conjunto de datos es muy grande. Debido a este problema se optó por utilizar de modo complementario **Gnuplot**. Este es un software de elaboración de gráficos, fue lanzado en 1986 y desde entonces se ha mantenido en funcionamiento. Existe numerosa y extensa documentación sobre su uso, es una herramienta poderosa para la generación de gráficos debido a que funciona exclusivamente en la línea de comandos (solo se se proporciona instrucciones escribiéndolas, no hay interfaces gráficas como botones o ventanas que permitan dar instrucciones) lo que permite gestionar de manera eficiente los recursos del ordenador. Además, posee su propio lenguaje de programación que permite automatizar tareas vinculadas con la generación de gráficos. Este software fue utilizado exclusivamente para la elaboración de los espacios de fases mostrado en la sección de resultados.

1.6.4. Software multimedia FFMPEG

FFMPEG es un software libre para la manipulación de videos, imágenes y audio, que permite la manipulación de estos mediante el uso de comandos. Algunas de las tareas que puede realizar es convertir videos en diferentes formatos, aplicar sonido a videos, convertir imágenes en animaciones. FFMPEG es utilizado en la presente tesis para realizar videos de los cambios que tienen las trayectorias al cambiar los parámetros del sistema.

Capítulo 2

Metodología

En esta sección se explica la metodología de la presente tesis. Se describe el mecanismo de funcionamiento de la librería para realizar las simulaciones, así como su uso con ejemplos.

2.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo básico debido a que el producto de la investigación es una herramienta computacional con el fin de explorar la dinámica de un sistema físico propuesto y es la extensión de otros trabajos teóricos. Este servirá de precursor para la investigación aplicada. [28]

2.2. Enfoque de la investigación

El enfoque del presente trabajo de tesis es de tipo cuantitativo. Esto debido a que la elaboración de una herramienta computacional para simular la dinámica de las partículas en un billar magnético permite hacer mediciones del fenómeno como de las trayectorias de estas. Todo esto, siguiendo un proceso secuencial que permite la réplica y predicción, por esto, el enfoque de la investigación es de tipo cuantitativo.

[28]

2.3. Nivel de la investigación

El nivel de la investigación es descriptiva, puesto que al proporcionar datos de entrada a la librería, esta mostrará los resultados (como las trayectorias de las partículas y el espacio de fases del sistema) y proporciona información sobre el sistema. Esto es compatible con el nivel de investigación descriptiva que menciona Carrasco Díaz [20] en la que se describen procesos y cualidades del fenómeno a estudiar.

2.4. Diseño de la investigación

El diseño de la investigación es no experimental. Hernandez-Sampieri y Mendoza [28] señalan que dentro de esta existen dos tipos: longitudinales y transversales. La presente investigación es del tipo transversal pues es de carácter descriptivo.

2.5. Método de la investigación

El presente trabajo de investigación plantea hipótesis con el objetivo de hacer comprobaciones para determinar si deben ser aceptadas o rechazadas. Es por esto que el método utilizado es el método hipotético-deductivo. [28]

2.6. Técnicas

Para explorar la dinámica de este sistema se realizó simulaciones computacionales utilizando la librería en Python desarrollada en la presente tesis. Los detalles se muestran a continuación.

2.6.1. Descripción de la librería

En programación, una función es un bloque de código que recibe parámetros de entrada para realizar una operación y devuelve un resultado de salida. Una librería de Python es una colección de funciones agrupadas en un solo archivo. El objetivo de elaborar una librería es el de organizar las funciones que se utilizarán, reutilizar estas mismas funciones y editarlas en caso se detecte un error o extender sus funcionalidades. La librería diseñada para esta tesis recibe el nombre de **magnetic.py**

y posee las funciones necesarias para la simulación del billar magnético doble, el código se encuentra en el apéndice [A](#). Dentro de este archivo se encuentran diversas funciones, en cada una de estas hay un comentario que indica los parámetros de entrada que necesita, la descripción y el resultado que proporciona. Esta librería permite simular dos casos, el caso en que los campos magnéticos aplicados son paralelos (que se encuentra en el archivo `paralelo.py` y el código se encuentra en el apéndice [B](#)) y el caso en que los campos magnéticos aplicados son antiparalelos (que se encuentra en el archivo `antiparalelo.py` y el código se encuentra en el apéndice [C](#)).

Para iniciar la simulación se establece por defecto la geometría de la región del billar, en este caso se trata de un cuadrado de 1 unidad de lado, cuya esquina inferior izquierda coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesianas. Tanto en el interior, como en el exterior de la región cuadrada se aplican campos magnéticos perpendiculares al plano del cuadrado. Los parámetros de entrada al programa son la posición de la partícula, el vector velocidad y las intensidades de los campos magnéticos (interior y exterior). La posición inicial de la partícula $\vec{P} = (x_i, y_i)$ debe ser un punto que pertenece al perímetro del cuadrado. El vector velocidad \vec{v} es un vector unitario y apunta hacia el interior del cuadrado, además forma un ángulo θ con el lado del cuadrado. Las intensidades de los campos magnéticos interior \vec{B}_{in} y exterior \vec{B}_{out} toman valores mayores de 0. Un gráfico de la configuración inicial del sistema se muestra en la figura [2.1](#). Una vez establecidas las condiciones iniciales se procede a iniciar el primer movimiento.

Una partícula cargada expuesta a un campo magnético tiene una trayectoria circular al iniciar su movimiento. Para el propósito de las simulaciones sólo es de interés la intensidad del campo magnético. Las trayectorias en el interior y exterior del billar son arcos de circunferencia por lo que es necesario identificar el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia en cuestión. El sentido de giro de la partícula dependerá del sentido del campo magnético, con el fin de explicar el mecanismo de funcionamiento de la librería se considerará para esta sección los campos que son perpendiculares al plano del billar y antiparalelos entre ellos (el caso de campos magnéticos paralelos se expone en la sección de Resultados). El campo interior se denota por B_{in} y el exterior por B_{out} . Para encontrar el centro y el radio de la circunferencia se debe tener en consideración lo siguiente. El radio de la

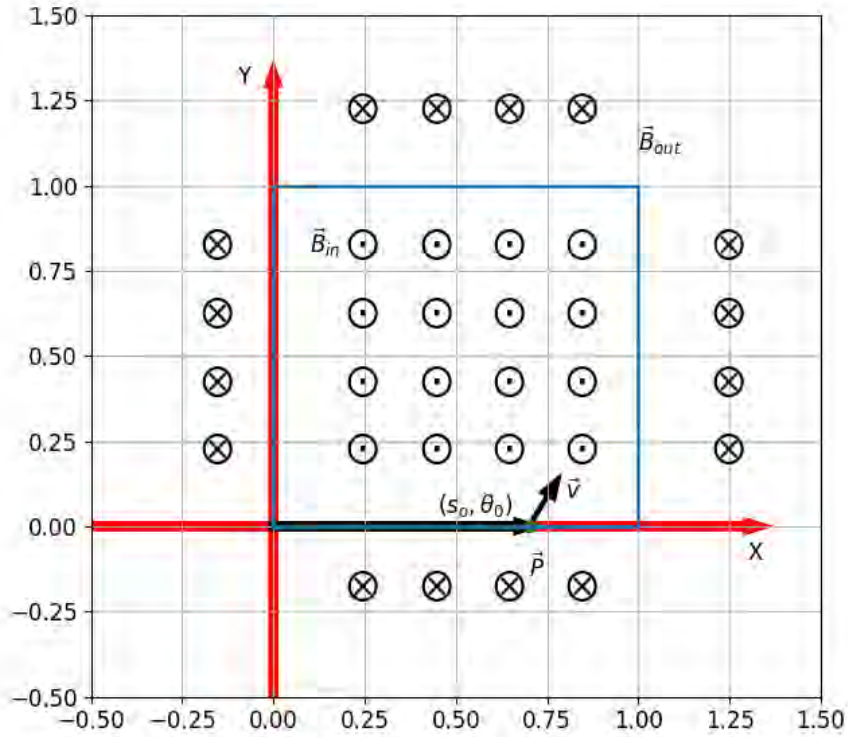


Figura 2.1: Configuración inicial del billar magnético doble

circunferencia durante el movimiento al interior del cuadrado es siempre el mismo $R_{in} = \frac{1}{B_{in}}$ y en el exterior del cuadrado el radio exterior de la trayectoria $R_{out} = \frac{1}{B_{out}}$ también es siempre igual. El centro de la trayectoria circular en el interior del billar C_1 tiene una posición \vec{C} , el vector \vec{R} une el centro C_1 a la posición de la partícula, según muestra la figura 2.2 se cumple:

$$\vec{C} = \vec{P} + \vec{R} \quad (2.1)$$

La partícula realiza su movimiento a lo largo de la trayectoria circular y eventualmente colisionará con una pared del cuadrado en un punto determinado. Este punto corresponde a la intersección entre la circunferencia y el cuadrado. El problema es que es posible que haya más de un punto de intersección entre el cuadrado y la circunferencia, esto se observa en la figura 2.3. Para resolver el problema se procede a calcular la intersección de la circunferencia primero con los lados horizontales del cuadrado y luego con los verticales.

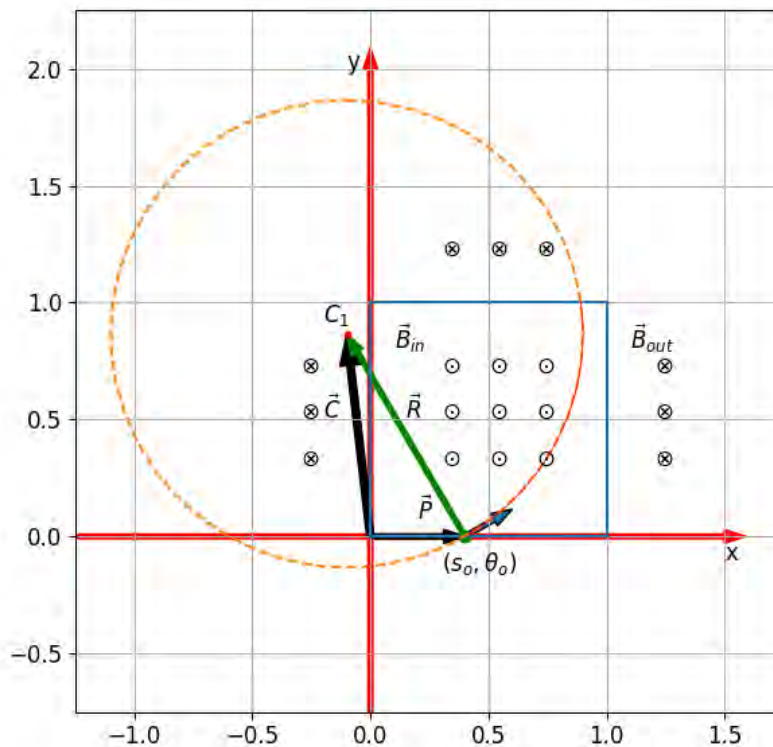


Figura 2.2: Trayectoria circular correspondiente a la partícula cargada

Para calcular la intersección de una recta horizontal $y = c$ (que corresponde a los lados horizontales del cuadrado) con una circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$ se debe resolver la ecuación [2.2](#)

$$x^2 - 2hx + (h^2 + (y - k)^2 - R^2) = 0 \quad (2.2)$$

Lo cual da como resultado las coordenadas x de los dos puntos de intersección. Y para el caso de la intersección de una recta vertical $x = c$ (que corresponde a los lados verticales del cuadrado) y se debe resolver la ecuación:

$$y^2 - 2ky + ((x - h)^2 + k^2 - R^2) = 0 \quad (2.3)$$

Lo que da como resultado las dos coordenadas en el eje vertical Y para la intersección de la circunferencia con la recta vertical. Se considera la posibilidad de que la trayectoria circular no se interseque en un punto válido del cuadrado o que haya más de un punto que se interseque con el cuadrado. Es por esto que se selecciona solo al punto de intersección que pertenezca al cuadrado. Una vez identificado este

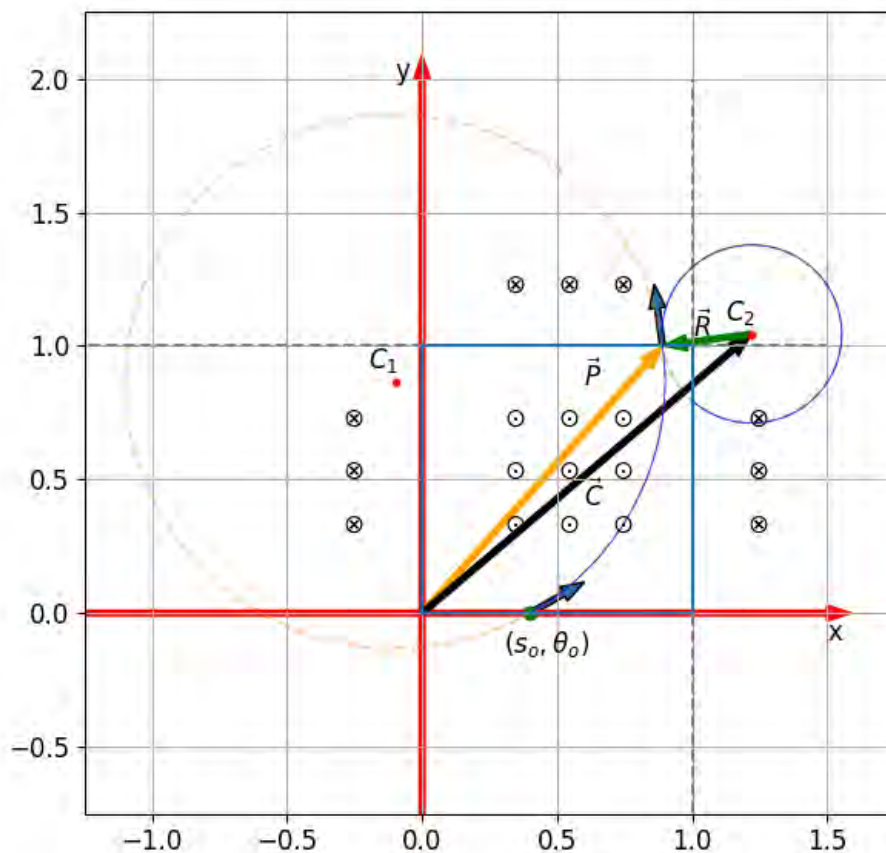


Figura 2.4: Trayectoria de la partícula cargada al salir del billar y reingresar al billar.

2.6.2. Uso de la librería

En esta sección se explica el uso de la librería denominada **magnetic.py**. Para ejecutar el código se han creado dos carpetas diferentes, una denominada **antiparalelo** (donde se simula el caso en que los campos magnéticos exterior e interior son antiparalelos) y otro **paralelo** (donde se simula el caso en que los campos magnéticos son paralelos). En la carpeta **antiparalelo** deben estar incluidos dos archivos, estos archivos son **magnetic.py** y **antiparaleloejemplo.py**. De modo similar para la carpeta **paralelo**, deben estar incluidos dos archivos **magnetic.py** y **paraleloejemplo.py**. En ambos casos, el archivo **magnetic.py** es la librería en Python desarrollada para el presente trabajo de tesis que permite simular este sistema. Esta librería hace uso de dos librerías adicionales que son Numpy y Matplotlib, por lo que es requerido que se encuentren instaladas en la computadora donde se ejecuta el

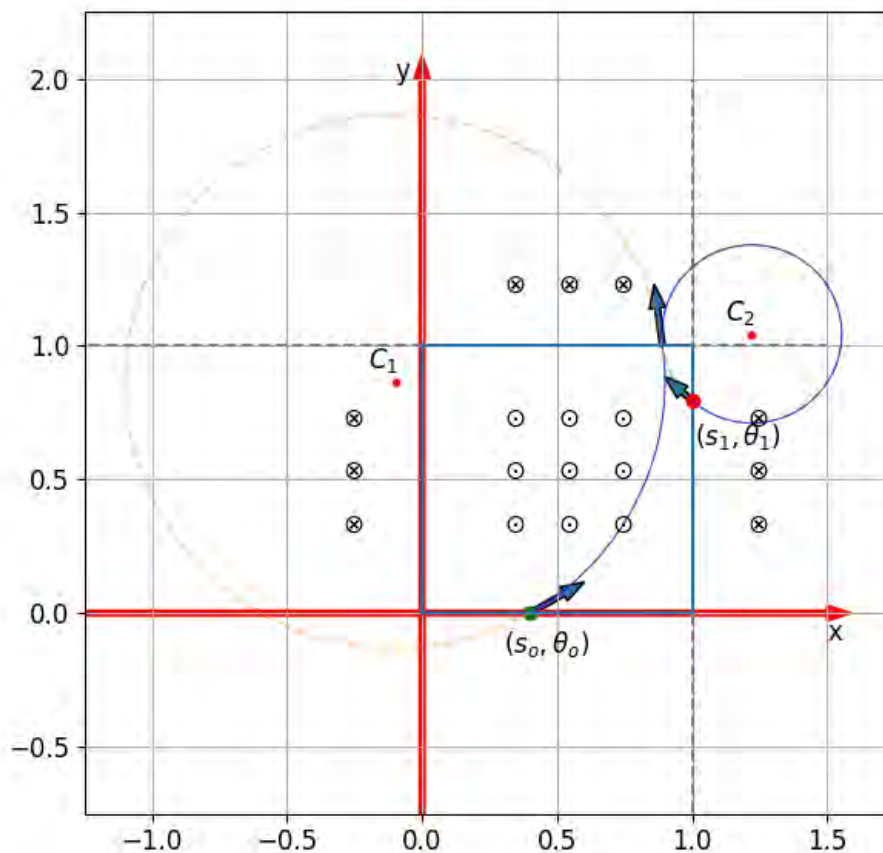
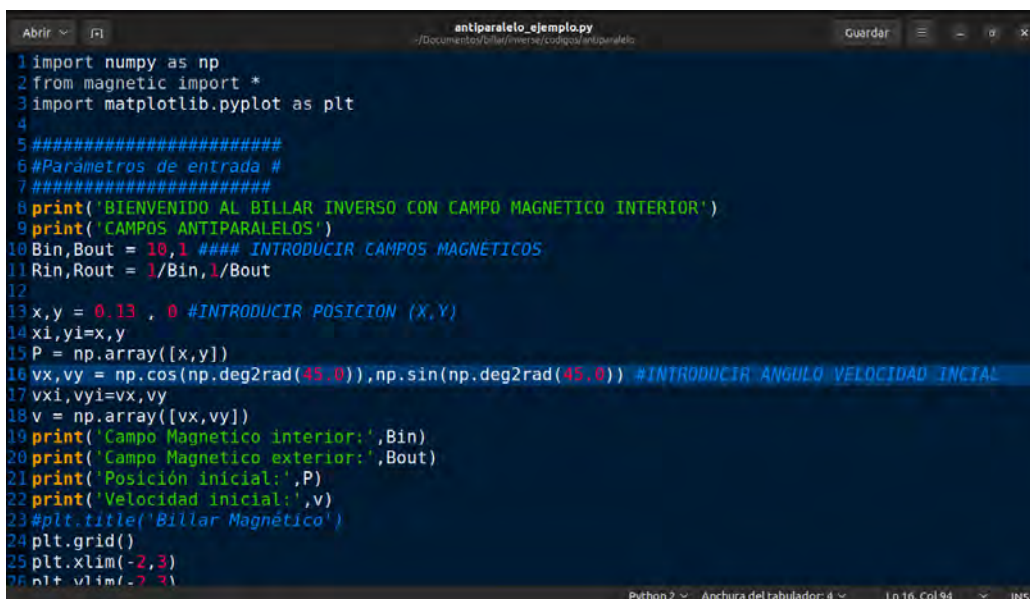


Figura 2.5: Determinación de la ubicación y velocidad de la partícula al reingresar.

código. Estas dos librerías son muy usadas en la programación científica en Python por lo que vienen instaladas por defecto en cualquier editor de texto de Python ^[1]. El otro archivo presente en ambas carpetas es `antiparaleloejemplo.py` o `paraleloejemplo.py`, según sea el caso, este un código que permite realizar la simulación que hace uso de las herramientas de la librería `magnetic.py`, por lo que deben estar en la misma carpeta para la correcta ejecución. Del mismo modo, hace uso de las librerías `Numpy` y `Matplotlib`. Para iniciar la simulación se debe abrir el archivo `antiparalelo.py` (o `paralelo.py` si es el otro caso) en cualquier editor de texto, como

¹En caso de tener dificultades en ejecutar el código debido a un mensaje que indique que la librería no ha sido instalada debe referirse a la documentación de `Numpy` que se encuentra en <https://numpy.org/install/> y para `Matplotlib` se encuentra en <https://matplotlib.org/stable/>

se ve en la figura 2.6² e introducir los valores de la intensidad del campo magnético interior y exterior en la línea 10 del código, las coordenadas de la posición inicial en la línea 13 del código y ángulo θ de velocidad inicial en la línea 16. La figura 2.6 muestra el código y la numeración de las líneas correspondientes a modificar. Por defecto, la simulación se realiza para 100 iteraciones, pero este valor puede cambiarse en la línea 33 de código, simplemente cambiando el número 100 por el número de iteraciones deseadas, dependiendo del propósito con el que se ejecute el código el número de iteraciones será modificado. Si uno solo desea hacer un ejemplo de la trayectoria puede realizarse 10 iteraciones, pero si se desea producir datos para la exploración del espacio de fases las iteraciones pueden ir desde 1000 a valores como 50000, valores superiores pueden tomar bastante tiempo y estará limitado a las especificaciones técnicas del hardware del computador en uso. Una vez realizadas estas modificaciones se guarda los cambios realizados en el archivo.



```

1 import numpy as np
2 from magnetic import *
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 #####
6 #Parámetros de entrada #
7 #####
8 print('BIENVENIDO AL BILLAR INVERSO CON CAMPO MAGNETICO INTERIOR')
9 print('CAMPOS ANTIPARALELOS')
10 Bin,Bout = 10,1 ### INTRODUCIR CAMPOS MAGNETICOS
11 Rin,Rout = 1/Bin,1/Bout
12
13 x,y = 0.13 , 0 #INTRODUCIR POSICION (X,Y)
14 xi,yi=x,y
15 P = np.array([x,y])
16 vx,vy = np.cos(np.deg2rad(45.0)),np.sin(np.deg2rad(45.0)) #INTRODUCIR ANGULO VELOCIDAD INICIAL
17 vxi,vyi=vx,vy
18 v = np.array([vx,vy])
19 print('Campo Magnetico interior:',Bin)
20 print('Campo Magnetico exterior:',Bout)
21 print('Posición inicial:',P)
22 print('Velocidad inicial:',v)
23 #plt.title('Billar Magnético')
24 plt.grid()
25 plt.xlim(-2,3)
26 plt.ylim(-2,2)

```

Figura 2.6: Captura de pantalla del código

Una vez realizado este proceso es momento de iniciar la simulación, para esto se debe abrir una terminal en la ruta que contenga los archivos³ y se debe ejecutar el

²Este puede ser desde el block de notas, en este caso se usa el editor de texto por defecto en el sistema operativo Ubuntu que es Gedit. También se puede usar otros editores de código diseñados para Python como son Anaconda, Spyder, IDLE, etc.

³En el caso del usuarios en el sistema operativo Windows deberá abrir la línea de comandos de Windows. Si está editando el código en algún software como Anaconda, Spyder u otro similar deberá seguir las indicaciones del editor usado.

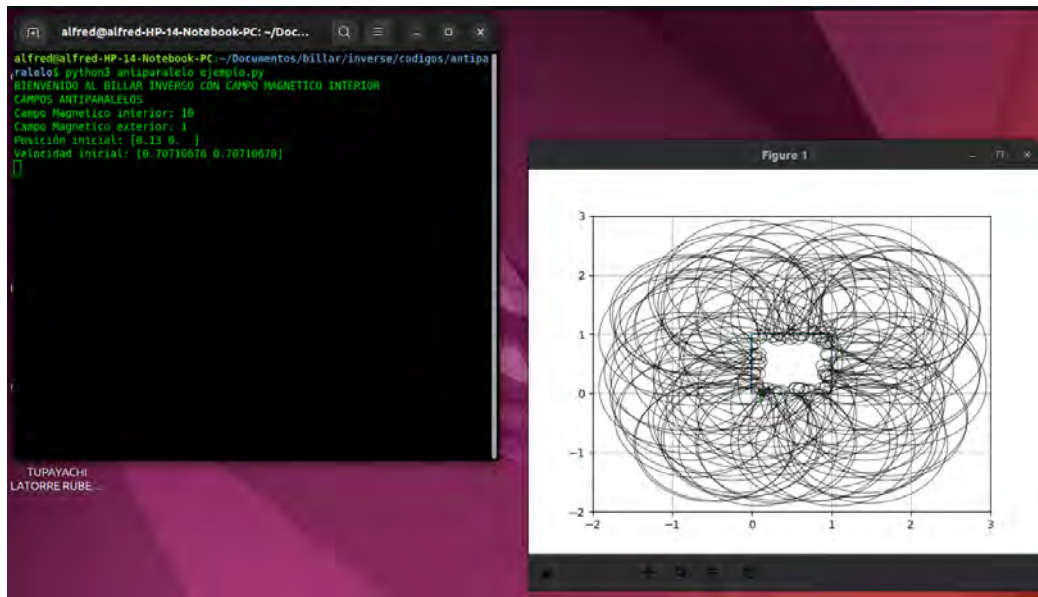


Figura 2.7: Resultados de la simulación

comando:

```
1 python3 antiparalelo_ejemplo.py
```

Luego de ejecutar el código, se muestra en la pantalla un mensaje que indica que se realizó la simulación con los detalles del campo magnético interior y exterior, de la posición inicial y velocidad inicial. También se muestra una imagen de la trayectoria de la partícula. Si se desea se puede guardar la imagen haciendo click en el botón de disquette de la mencionada ventana, además de hacer zoom en la misma ventana.

Adicionalmente, se crea automáticamente un archivo llamado `sdata.dat` que se encuentra en la misma carpeta del código ejecutado. El archivo generado se muestra en la figura [2.8](#), este contiene dos columnas de modo que la primera columna muestra la coordenada s y la segunda la coordenada θ , estos datos serán usados para graficar el espacio de fases. Este archivo puede ser abierto en cualquier editor de texto (como el block de notas). El número de líneas del archivo es igual al número de iteraciones.

La tarea de graficar el espacio de fases puede realizarse en Python, sin embargo se aplicará el software Gnuplot debido a su efectividad al momento de graficar grandes cantidades de datos. Gnuplot viene instalado por defecto en los sistemas operativos de GNU/Linux, en caso de usar otro sistema operativo deberá referirse a la página oficial de Gnuplot [4](#). Para acceder al software se debe iniciar la terminal en la misma

⁴Las instrucciones de la página oficial para la instalación de gnuplot se encuentra en

Line	Column 1	Column 2
1	2.5938389266219097	92.49201326609597
2	1.1603143312092647	52.769271041639165
3	3.8498497120571677	106.84581877444093
4	1.5946587459333377	135.2514130585835
5	3.2930498491429616	106.84581877444087
6	2.192326939143247	31.189871858850033
7	1.9522102392774219	64.58801892753289
8	0.4378323349767824	82.43305859933959
9	3.4721994141922603	41.26061092098808
10	2.0040244634520946	71.38649866550139
11	1.3763290804795227	70.53643205328191
12	0.677592226667456	40.966312465263975
13	3.761069454315688	83.73391220423719
14	2.2071581409306718	64.4206035108704
15	1.9480495054236566	28.928115155824987
16	0.9452413786389169	111.56738356929152
17	2.396103602913735	129.22776766322917
18	0.6034762131634097	111.56738356929158
19	2.737868768389241	129.2277676632291
20	0.26171104768790165	111.56738356929148
21	3.1125785701133455	31.320595750226715
22	1.6067410020997375	92.26536236169154
23	0.15477031641527295	53.67810118627
24	2.76289084108478	101.73172644518012
25	0.8076277567029746	142.81332544125058
26	1.3993244851842217	156.58762984000035
27	3.0808857155768274	94.72257238423308
28	1.4800000000000000	111.56738356929152

Figura 2.8: Datos del espacio de fases

carpeta e introducir el siguiente comando, el resultado se ve en la figura [2.9](#).

```
1 gnuplot
```

Una vez que se ingresó a Gnuplot se introduce el siguiente comando para graficar los resultados del archivo `sdata.dat`.

```
1 plot "sdata.dat" u 1:2
```

El comando previo permite graficar el archivo `sdata.dat` utilizando la primera columna de datos versus la segunda columna de datos [5](#). El código ejecutado y el resultado se encuentra en la figura [2.10](#).

El gráfico que se muestra en la figura [2.10](#) puede ser guardado utilizando los botones de la ventana emergente.

Dado que una librería de Python se compone por una variedad de funciones que pueden ser reutilizadas en diferentes proyectos que involucre simular el billar magnético doble. Se incluye a continuación dos ejemplos de aplicación adicional:

1. **diferentesTrayectorias.py** : En este código se aplica la librería elaborada para comparar la trayectoria de dos partículas que inician su movimiento en la misma posición, pero con diferentes ángulos de velocidad iniciales. El resultado

<http://www.gnuplot.info/download.html>

⁵Gnuplot es un poderoso software para realizar gráficos, su documentación oficial se encuentra en el sitio web <http://www.gnuplot.info/documentation.html>

```
alfred@alfred-HP-14-Notebook-PC: ~/Doc...
alfred@alfred-HP-14-Notebook-PC:~/Documentos/billar/inverse/codigos/antiparalelo$ gnuplot

  G N U P L O T
  Version 5.4 patchlevel 2   last modified 2021-06-01

  Copyright (C) 1986-1993, 1998, 2004, 2007-2021
  Thomas Williams, Colin Kelley and many others

  gnuplot home:      http://www.gnuplot.info
  faq, bugs, etc:   type "help FAQ"
  immediate help:   type "help" (plot window: hit 'h')

Terminal type is now 'qt'
gnuplot>
```

Figura 2.9: Pantalla de gnuplot

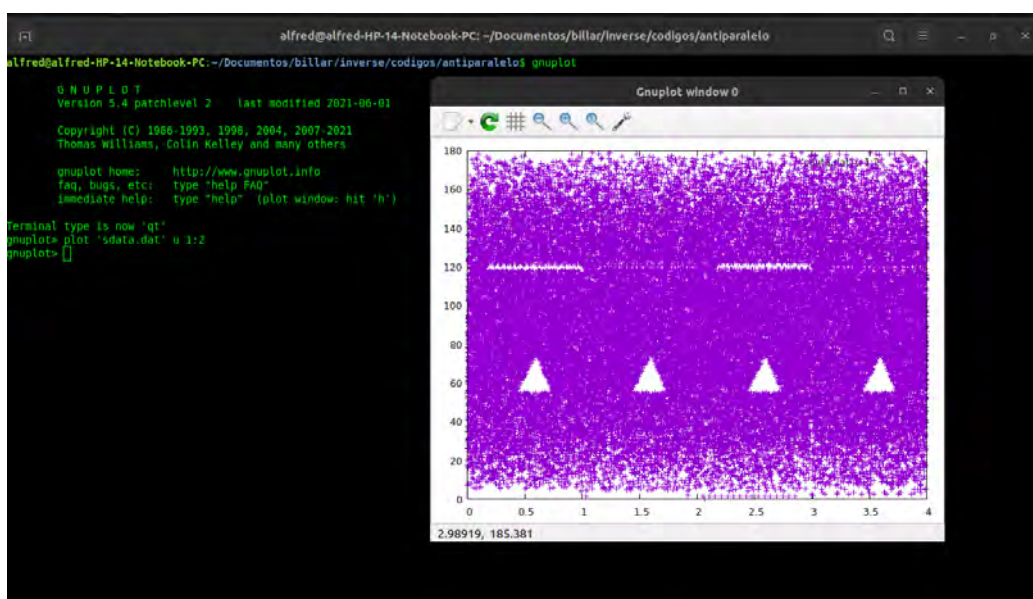
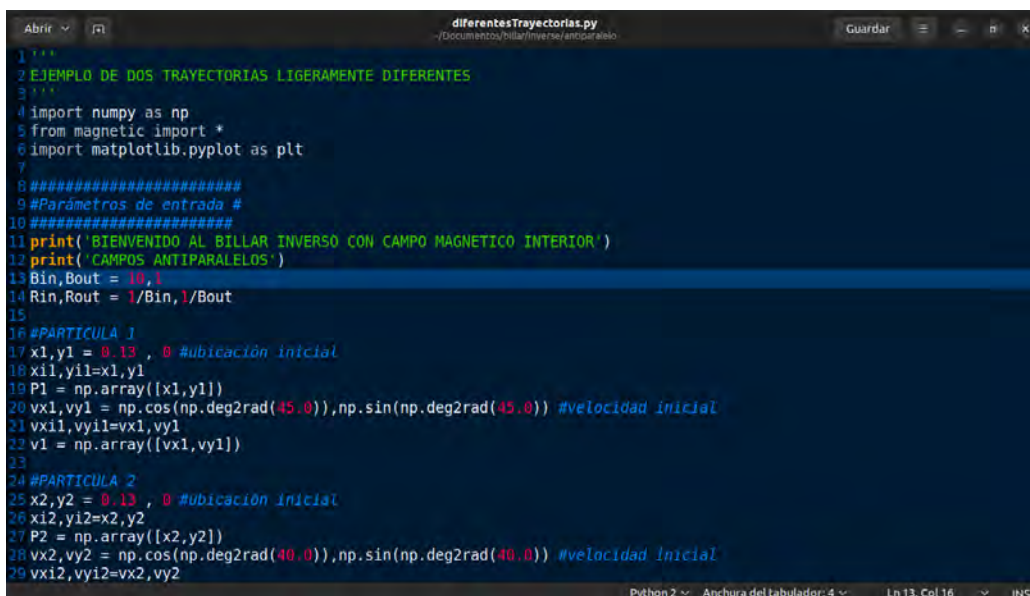


Figura 2.10: Resultado de gnuplot



```

1 '''
2 EJEMPLO DE DOS TRAYECTORIAS LIGERAMENTE DIFERENTES
3 '''
4 import numpy as np
5 from magnetic import *
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 #####
9 #Parámetros de entrada #
10 #####
11 print('BIENVENIDO AL BILLAR INVERSO CON CAMPO MAGNETICO INTERIOR')
12 print('CAMPOS ANTIPARALELOS')
13 Bin,Bout = 10,1
14 Rin,Rout = 1/Bin,1/Bout
15
16 #PARTICULA 1
17 x1,y1 = 0.13 , 0 #ubicación inicial
18 xi1,yi1=x1,y1
19 P1 = np.array([x1,y1])
20 vx1,vy1 = np.cos(np.deg2rad(45.0)),np.sin(np.deg2rad(45.0)) #velocidad inicial
21 vxi1,vyi1=vx1,vy1
22 v1 = np.array([vx1,vy1])
23
24 #PARTICULA 2
25 x2,y2 = 0.13 , 0 #ubicación inicial
26 xi2,yi2=x2,y2
27 P2 = np.array([x2,y2])
28 vx2,vy2 = np.cos(np.deg2rad(40.0)),np.sin(np.deg2rad(40.0)) #velocidad inicial
29 vxi2,vyi2=vx2,vy2

```

Figura 2.11: Captura del código diferentesTrayectorias.py

del código es un gráfico de las diferentes trayectorias. Una captura del código se muestra en la figura 2.11. El programa inicializa una región cuadrada de lado uno con un campo magnético exterior e interior a la región, ambos perpendiculares al plano del cuadrado. Los valores de los campos magnéticos interior y exterior se establece en la línea 13. La posición inicial de las dos partícula es $(0.13, 0)$, se puede modificar esta posición realizando el cambio en la línea 17(para la partícula 1) y 25 (para la partícula 2). La velocidad inicial debe ser diferente, el ángulo θ para la primera y segunda partícula se modifica en la línea 20 y 28 , respectivamente. Una vez introducidos estos datos, el código se ejecuta con la siguiente instrucción:

```
1 python3 diferentesTrayectorias.py
```

Una vez ejecutado el código, este muestra en la pantalla un resumen de los datos ingresados y la imagen generada de las trayectorias de dos partículas diferentes, como se ve en la figura 2.12. Se observa en la figura la región cuadrada y dos trayectorias de distintos colores de las dos partículas con la misma posición pero diferente velocidad inicial.

La figura 2.13 muestra dos resultados diferentes obtenidos con el mismo ejemplo. La figura 2.13a muestra dos trayectorias que inician ligeramente diferente pero que luego de algunas iteraciones las trayectorias son diferentes. Mientras,

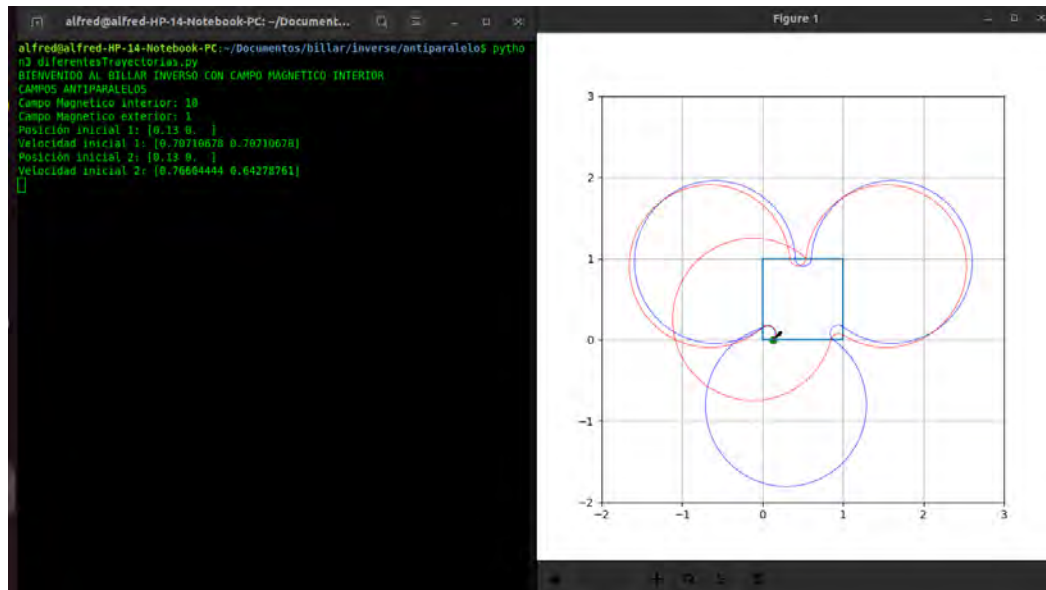


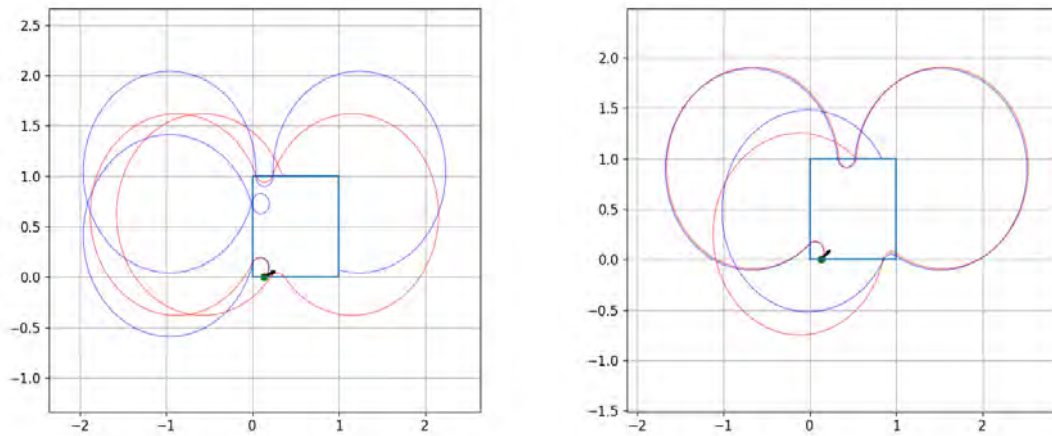
Figura 2.12: Captura del resultado de diferentesTrayectorias.py

que en la figura [2.13b](#) se tienen dos trayectorias ligeramente diferente que se asemejan luego de algunas iteraciones.

2. **generarVideo.py** : En este ejemplo se aplica la librería para hacer un video que muestre la trayectoria de la partícula y su respectivo espacio de fases. En la parte izquierda se muestra la trayectoria de la partícula en el billar magnético doble para una posición y velocidad dada. En la parte derecha los correspondientes puntos para el espacio de fases. El video se compone de imágenes que muestra la trayectoria y el espacio de fases para distintos ángulos, que empieza en 2° y termina en 178° , de dos en dos, es implica que se generan 89 imágenes. El código se encarga de unir todas las imágenes en un solo video en formato .mp4 que puede ser reproducido en cualquier reproductor multimedia [6](#). Este ejemplo requiere del software para producción del video llamado FFMPEG [7](#). Una observación importante es que no debe haber ninguna imagen previa en la carpeta que se ejecuta el código.

⁶En caso aparezca un mensaje de error puede referirse a la documentación oficial : <https://www.ffmpeg.org/documentation.html>

⁷Los detalles de la instalación de este programa se encuentran en <https://www.ffmpeg.org/download.html>



(a) Las trayectorias son muy diferentes a pesar de tener la misma posición inicial (b) Las trayectorias son similares a pesar de tener la misma posición inicial

Figura 2.13: Trayectorias con la misma posición inicial pero diferentes velocidad

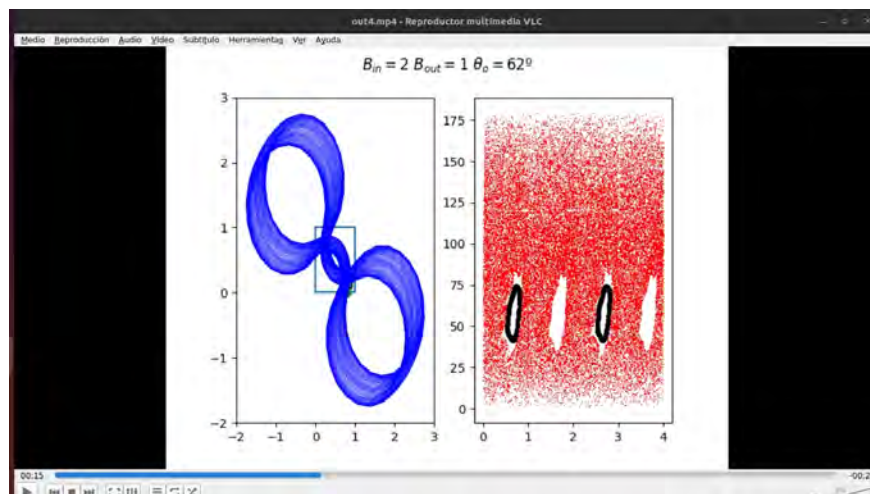


Figura 2.14: Captura del video generado por el código generarvideo.py

Capítulo 3

Marco teórico

3.1. Marco conceptual

- **Billar dinámico:** Es un sistema dinámico en el que se considera una región bidimensional plana cerrada en cuyo interior hay una partícula puntual que se mueve en línea recta en el interior de dicha región, de modo que al incidir con las paredes interiores esta realiza reflexiones especulares. No se consideran pérdidas de energía. Tiene aplicaciones en física atómica, física molecular o física del estado sólido. Diversas modificaciones pueden ser aplicadas a este sistema.
- **Coordenadas de Birkhoff:** Consituye un par ordenado (s, θ) que permite identificar el punto en que una partícula puntual colisiona con la región de un billar dinámico. La primera componente s del par ordenado identifica la ubicación en el perímetro de la frontera del billar en que la partícula colisiona y esta coordenada toma valores desde 0 hasta valor del perímetro de la frontera, por ejemplo si se trata de un cuadrado de una unidad de lado entonces la coordenada s toma valores entre 0 y 4. Por otro lado, la coordenada θ representa el ángulo que forma la frontera con el vector velocidad luego de la reflexión en el punto de la colisión, esta coordenada toma valores entre 0 rad a π rad. Estas coordenadas garantizan identificar de manera única el estado de una partícula al colisionar con la región del billar.
- **Espacio de fases:** En mecánica clásica, es la representación de todos los estados

posibles que puede tener un sistema. Esta representación se realiza mediante un gráfico que contenga a variables conjugadas, es decir, de variables que describan completamente el estado del sistema. Usualmente, en el gráfico, se representa en el eje horizontal la posición y en el eje vertical la velocidad. Sin embargo, para el caso de los billares dinámicos se utiliza las coordenadas de Birkhoff. El gráfico del espacio de fases para un billar dinámico se coloca la coordenada s en el eje horizontal (que se relaciona con la posición) y la coordenada θ en el eje vertical (que se relaciona con la velocidad). El espacio de fases permite identificar si hay puntos de equilibrio u oscilaciones. Para el caso de los billares dinámicos, el espacio de fases permite identificar si una trayectoria es regular o caótica. Si una partícula inicia su movimiento en un billar dinámico y gráfico en el espacio de fases forma una curva cerrada entonces la trayectoria es regular, caso contrario, es una trayectoria caótica.

- **Campo magnético:** Campo físico de naturaleza vectorial originado por cargas eléctricas en movimiento o por el espín intrínseco de partículas elementales. Su unidad en el Sistema Internacional es el Tesla (T). Se caracteriza por su naturaleza dipolar (existencia obligatoria de polos norte y sur) y puede ser generado por corrientes eléctricas o materiales ferromagnéticos. Sus aplicaciones son fundamentales en el diseño de motores eléctricos, la geofísica, la física atómica y molecular, entre otras disciplinas.
- **Fuerza magnética:** Es la interacción entre un campo magnético y carga eléctrica en movimiento o un conductor por el que circula corriente eléctrica. Para el caso de una carga puntual en el interior de un campo magnético, la fuerza magnética \vec{F} está dada por:

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.1)$$

Donde Q es la carga eléctrica de la partícula, \vec{v} es el vector velocidad de la partícula y \vec{B} es el vector campo magnético. El vector fuerza magnética siempre es perpendicular al plano formado por la velocidad y el campo magnético. La dirección de la fuerza se determina mediante la regla de la mano derecha.

- **Radio de Larmor:** Si una partícula con velocidad \vec{v} se mueve en un campo magnético uniforme y homogéneo \vec{B} , esta experimenta una fuerza magnética

\vec{F} que es perpendicular al plano formado por \vec{v} y \vec{B} . Por lo tanto, la partícula realiza una trayectoria circular. El radio de esta trayectoria se le denomina radio de Larmor y dado por:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{|Q|B} \quad (3.2)$$

Donde m es la masa de la partícula, B es la intensidad del campo magnético, v_{\perp} es la componente de la velocidad perpendicular al campo magnético y Q la carga de la partícula.

- **Billar magnético:** Es un billar dinámico en el que se considera que la partícula puntual está cargada eléctricamente y está expuesta a un campo magnético, de modo que la trayectoria de la partícula está constituida por arcos de circunferencia. Se sigue cumpliendo que al colisionar con la región del billar la partícula se refleja especularmente. El billar magnético se aplica en áreas como la física molecular, física del estado sólido o física del plasma.
- **Billar magnético inverso:** Es una extensión del billar magnético. No hay campo magnético aplicado en el interior de la región del billar, mientras que en el exterior se aplica un campo magnético. La frontera del billar es permeable de modo que la partícula puede pasar de la región interior a la exterior. La partícula inicia su movimiento en el interior y su trayectoria es una línea recta, al colisionar con la frontera la partícula pasa al exterior del billar por lo que su trayectoria es de un arco de circunferencia, la partícula retorna al interior del billar y nuevamente traza una línea recta en su trayectoria. Esta modificación enriquece la dinámica del billar.
- **Billar magnético doble:** Es una extensión del billar magnético inverso. En este sistema se considera que se aplica un campo magnético en el interior y otro en el exterior de la frontera del billar. De este modo, la partícula realiza una trayectoria en forma de arco de circunferencia con cierto radio de curvatura en el interior, mientras que en el exterior realiza la trayectoria con otro radio de curvatura. El sentido de giro de la trayectoria dependerá de los campos magnéticos aplicados.
- **Sistema caótico:** Es cualquier sistema (físico, químico, biológico, económico, social, etc.) el cual presenta un comportamiento aperiódico a largo plazo, queda

descrito por ecuaciones no lineales y es sensible a condiciones iniciales. Algunos ejemplos son el péndulo doble o los mercados financieros.

- Librería de Python: En el contexto de la programación en el lenguaje de programación en Python, una librería es una colección de algoritmos agrupados en funciones que tiene el objetivo que cumplir una o más tareas específicas de cierto área de interés. Por ejemplo, la librería Numpy es una colección de funciones que se encarga de realizar operaciones con vectores y matrices. Otro ejemplo es la librería Matplotlib que permite realizar gráficos para la visualización de datos.

3.2. Antecedentes

El trabajo pionero sobre billares dinámicos tiene su origen en la propuesta de G.D. Birkhoff que se encuentra publicado en su libro *Dynamical Systems* de 1927 [12]. El objetivo de este libro fue el de sistematizar el conocimiento sobre la mecánica de los sistemas dinámicos hasta aquel tiempo. Birkhoff propuso el billar dinámico como un sistema que permite conectar de la geometría diferencial con la mecánica del movimiento de una partícula en un billar dinámico. Adicionalmente, propuso las coordenadas de Birkhoff que son las utilizadas para describir la trayectoria de la partícula. A raíz de esta propuesta, diversas geometrías han sido estudiadas con el fin de explorar la dinámica del sistema, como el billar rectangular [49] o el billar elíptico [11]. Hugo Steinhaus publicó el libro *Mathematical Snapshots* en 1950 [49], este es un libro de divulgación matemática. H. Steinhaus presentó el concepto de billar dinámico en una región rectangular por ser un caso de estudio sencillo y concluyó que solo se identifican trayectorias regulares. Otra frontera que se estudió fue el de la elipse, propuesta por M. Berry es su artículo *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard* en el año 1981 [11]. Berry resolvió analíticamente las ecuaciones para la trayectoria de una partícula confinada en una circunferencia y una elipse. El resultado principal de este artículo es que todas las trayectorias son regulares y que para el caso de la elipse, se identifican dos tipos de trayectorias que dependen de las condiciones iniciales. En la búsqueda de billares que presenten un comportamiento caótico, L.A. Bunimovich publicó el

artículo On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards en 1974 [13]. En este artículo se propuso un sistema denominado el **estadio de Bunimovich**. Este consiste en un rectángulo que tiene dos semicircunferencias en dos lados opuestos. El sistema mostró que la partícula puede realizar trayectorias caóticas y también regulares, este comportamiento llamó la atención debido a que se desconocía bajo que condiciones surgen cada una de estas trayectorias. El aporte de L.A. Bunimovich al encontrar un billar dinámico en que se encuentran trayectorias caóticas y regulares impulsó la investigación en billares dinámicos que repliquen este comportamiento. En la búsqueda de este tipo de comportamiento, en 1985 Robnick y Berry publicaron el artículo Classical billiards in magnetic fields [44]. En este artículo propusieron el **billar magnético**, en este sistema se considera una partícula puntual y expuesta a un campo magnético perpendicular al plano del billar, de modo que la partícula no tiene una trayectoria recta, en cambio, traza arcos de circunferencia, cuyo radio, denominado radio de Larmor, está dado por:

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (3.3)$$

Donde m es la masa de la partícula, v la velocidad, q la carga, B el campo magnético y R el radio de curvatura que experimenta la partícula. Además, realiza reflexiones especulares al incidir sobre las paredes. Es entonces cuando nuevas posibilidades de estudiar los billares dinámicos se abre paso, y la inclusión del campo magnético afecta al dinámica del sistema. Este aporte acerca a los billares dinámicos al electromagnetismo, de modo que se estudia a una partícula cargada confinada en una región cerrada, esto se extiende a problemas en física atómica, molecular o física del estado sólido. En el año 2003 Voros et. al. introdujeron el **billar magnético inverso** en su artículo Tunable Lyapunov exponent in inverse magnetic billiards [56] el cuál es una modificación del billar magnético previamente explicado. En este sistema se considera una región cerrada (Voros et. al. consideraron inicialmente el estadio de Bunimovich) de modo que el interior no hay campos magnético y en el exterior hay un campo magnético perpendicular al plano el billar. La partícula cargada inicia su movimiento en la región interior (como no hay campo magnético la trayectoria es una recta) y al llegar a la pared de la frontera, la partícula tiene permitido penetrar la frontera y cambia su trayectoria al de un arco de circunferencia (debido a la presencia del campo magnético), eventualmente retorna a la región y

reingresa, nuevamente trazando una recta en el interior. Este modelo fue estudiado analíticamente en 2021 por S. Gasiorek en su artículo *On the dynamics of inverse magnetic billiards* [23], realizando demostraciones matemáticas encontró que el campo magnético aplicado afecta directamente la dinámica de la partícula. Mientras que en una línea mas computacional, la tesis doctoral *Dynamics of Inverse Magnetic Billiards on Polygons*. de Andres Perico [42] del 2022 se centra en estudiar un billar magnético inverso cuya región es un cuadrado. Haciendo hincapie en que se trata de una región cuadrada en cuyo interior no hay campo magnético y en el exterior hay un campo magnético perpendicular al plano del cuadrado, utilizando simulaciones computacionales A. Perico encontró que hay tanto trayectorias regulares como caóticas. Tomando como punto de partida el trabajo de Perico [42], el presente trabajo de tesis consiste en extender el billar magnético inverso a un sistema que se denominará **billar magnético doble**, este consiste en incluir un campo magnético en el interior y otro en el exterior de la región cuadrada. Estos campos magnéticos son perpendiculares al plano de la región del cuadrado en consideración, adicionalmente, los campos magnéticos puede ser de diferentes intensidades y orientaciones distintas (paralelas o antiparalelas al plano de la región cuadrada). Con el fin de estudiar este sistema propuesto se elabora una librería en Python para estudiar la dinámica del sistema.

3.3. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico consiste en un elemento o conjunto de elementos que evolucionan en el tiempo siguiendo reglas definidas. Galileo Galilei e Isaac Newton establecieron la idea fundamental de que la naturaleza obedece leyes que las matemáticas pueden describir, además que los fenómenos físicos pueden ser predichos y diseñados con certeza matemática [26]. Algunos ejemplos de sistemas dinámicos son el péndulo, un oscilador armónico, la difusión de un gas, etc. De modo que los fenómenos quedan descritos mediante ecuaciones diferenciales de magnitudes que cambian en el tiempo. El estudio de sistemas dinámicos tiene diversas aplicaciones en la física y fuera de esta. Como se menciona a continuación

- Física: El estudio de los sistemas dinámicos en el campo de la física es ex-

tenso, pues permite conocer la evolución temporal de alguna magnitud física en el tiempo, por ejemplo la posición, velocidad, concentración, temperatura, intensidad de corriente eléctrica, etc. en cualquier instante de tiempo. La capacidad de conocer el comportamiento de cualquier magnitud permite tener una comprensión completa del fenómeno a estudiar en cualquier rama de la física como en mecánica clásica, termodinámica, mecánica estadística, mecánica de fluidos, electromagnetismo, astrofísica, etc.

- Química: Dentro de la química, la rama de la cinética química se encarga de estudiar la velocidad de las reacciones químicas, estas quedan modeladas mediante ecuaciones diferenciales de las concentraciones y su evolución en el tiempo. Diversas situaciones pueden ocurrir como ejemplos sencillos en que la concentración disminuye o aumenta monotonamente, u otras situaciones más complejas fuera del equilibrio en que se presentan oscilaciones (denominadas reacciones químicas oscilantes) de las cuales se cuentan diversos ejemplos como la reacción de Belousov-Zhabotinsky, la reacción de Briggs-Rauscher o la reacción de Bray-Liebhafsky. De manera experimental, se puede medir la concentración presente de las sustancias involucradas, y además se manifiesta de otra manera como cambios de color en la mezcla.
- Biología: El modelamiento matemático de fenómenos biológicos implica estudiar la evolución en el tiempo de diferentes magnitudes mensurables que describan el fenómeno en cuestión. Entre los ejemplos en el campo de las ciencias biológicas se puede mencionar los siguientes [39]: La dinámica de poblaciones, donde se modela el número de individuos de una especie en el tiempo (considerando los recursos disponibles, la proporción de grupos de edades, interacción con otras especies, etc.) y su distribución espacial. La quimiotaxis, que es el movimiento de organismos en función a la concentración química del medio que lo rodea en la búsqueda de alimentos u otras necesidades, de modo que la evolución en el tiempo de estos movimientos depende del medio que lo rodea y las condiciones de frontera. La formación de patrones de Turing, estos son las manchas que aparecen en la piel o tejidos como los que tienen las zebras o vacas, las cuales son modeladas mediante ecuaciones diferenciales. El mecanismo de cicatrización y su correspondiente evolución temporal. El crecimiento

de tumores en diversas partes del cuerpo.

- Ciencias sociales : Diversos fenómenos sociales (humanos o animales) se pueden modelar matemáticamente, esta tendencia ha prosperado en los últimos años debido al acceso de datos de interacciones sociales en redes sociales. Muchas de estos modelamientos son paralelos a fenómenos físicos que ya son conocidos. Entre los ejemplos que se puede mencionar son los siguiente [45]: La formación de opiniones en un grupo social, que cambia en el tiempo y posee protagonistas que influyen mas que otros sobre el grupo. La popularidad de algún producto. La difusión espacial de individuos en un edificio o ambiente abierto. La formación de bandadas, cardúmenes o aglomeraciones de personas al transportarse. Esta nueva ciencia que modela fenómenos sociales utilizando métodos matemáticos de la física recibe el nombre de sociofísica.

3.4. Caos

En ocasiones, el modelamiento matemático de fenómenos físicos requiere realizar suposiciones que permitan simplificar el modelo para obtener una ecuación diferencial lineal cuya solución analítica se aproxime al comportamiento real, como puede ser el modelamiento de un péndulo simple para ángulos pequeños. Sin embargo, la naturaleza presenta fenómenos no lineales como puede ser un péndulo simple para ángulos grandes. A pesar de que las soluciones analíticas requieran técnicas sofisticadas para su resolución, se tiene disponible una ecuación que permita estudiar la evolución en el tiempo del sistema. Esto llevó al matemático Pierre Simon de Laplace a concluir que si uno conoce la posición y la velocidad de todas las partículas del universo, entonces uno podría conocer el futuro en su totalidad [36]. Sin embargo, esta forma determinista de percibir a la naturaleza ha sido desafiada ante la observación de fenómenos no lineales que presentan un comportamiento caótico. Aclarando que caótico no es sinónimo de aleatorio. Strogatz [50] indica que no hay un definición universal de caos, pero este autor considera que hay tres puntos importantes en no deben faltan al momento de definir el caos:

- Comportamiento aperiódico a largo plazo: A medida que pasa el tiempo, el sistema no desemboca en un punto fijo o trayectorias regulares.

- **Determinista:** El comportamiento irregular no surge del azar, si no de la naturaleza no lineal de las ecuaciones con las que se puede modelar el sistema en cuestión.
- **Sensible a las condiciones iniciales:** Dadas dos condiciones iniciales cercanas, estas se separan cada vez mas a medida que pasa el tiempo.

El caos está presente en diversas áreas de las ciencias, gracias al avance de las computadoras es posible estudiar los sistemas caóticos. Originalmente fue E. Lorenz en 1963 que en sus estudios de modelos meteorológicos diseño un programa de computadora para resolver las ecuaciones diferenciales de sus modelos donde se dio cuenta de la gran sensibilidad a las condiciones iniciales de sus ecuaciones. Esto generó una avalancha de investigaciones en el área de los sistemas dinámicos utilizando computadores. De modo que se extendió a otras áreas como los circuitos eléctricos, astrofísica, epidemiología, economía, entre otros.

Formalmente, el caos fue identificado por E. Lorenz mientras realizaba estudios de meteorología, por lo que el conocimiento del caos es importante en esta área de la ciencia para modelar fenómenos atmosféricos. A lo cual existe una gran cantidad de evidencia matemática y observacional. Sin embargo, el caos no es propio a la meteorología, si no que también se extiende a otras áreas. En criptografía, el objetivo es enviar mensajes privados de modo que solo el emisor y el receptor del mensaje puedan comunicarse sin la intrusión de agentes externos. Para esto la teoría del caos ha sido satisfactoriamente aplicada en la generación de números pseudo-aleatorios, algoritmos de encriptación, estenografía (cifrar mensajes en objetos físicos como imágenes o archivos de audio) y dispositivos electrónicos. En química, usualmente las reacciones químicas tienen una sola dirección de modo que de un conjunto de sustancias llamadas reactantes, interaccionan y forman una nueva sustancia llamada producto. La concentración de reactantes y productos están descritas por la cinética química, sin embargo, el comportamiento de los reactantes puede dar lugar a comportamientos oscilatorios o irregulares (en ocasiones caóticos) como se ve experimentalmente en reacciones químicas como la reacción de Belousov Zhabotinsky. En ciencias de la vida, algunos fenómenos presentan comportamientos caóticos como pueden ser el ritmo cardiaco en pacientes con afecciones cardiacas o en la dinámica de la población biológica de diversos agentes como animales, parásitos o bacterias.

En ciencias de la tierra, la predicción de actividad sísmica, el estudio de fracturas en la corteza terrestre, etc. En las ciencias sociales se presentan ejemplos que pueden abarcar en economía y sociología. Aunque las características del caos permiten identificarlo de modo cualitativo, es necesario una forma cuantitativa de esta medida. Para esto está el exponente de Lyapunov, este es un número que se encarga de cuantificar la diferencia entre dos trayectorias ligeramente diferentes. Si este valor toma valores mayores de 1, se considera que el sistema es caótico.

3.5. ¿Qué es un billar?

Un billar es un sistema dinámico en el que se considera una partícula puntual encerrada en una región bidimensional a la que se le da una velocidad inicial y esta realiza reflexiones al impactar con la superficie. Diferentes modificaciones pueden ser aplicadas, ya sea a la geometría de la superficie, al proceso de reflexión o a la exposición de algún campo (magnético o gravitatorio) al billar. Algunas regiones que ya fueron estudiadas son los billares rectangulares, circulares, elípticos, en forma de hongo, etc. Además puede considerarse obstáculos en el interior. En la mayoría de casos se considera que la partícula obedece a la reflexión especular (ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión). Sin embargo, se puede considerar variaciones de este, como que la partícula siempre se refleja con el mismo ángulo o que directamente no se refleja y atraviesa la frontera para retornar. Otra modificación consiste en la presencia de un campo gravitatorio o magnético, lo que altera la trayectoria en línea recta dando como resultado una parábola o arco de circunferencia según sea el caso. Evidentemente, esto implica que la partícula a considerar tiene una masa o carga eléctrica definida. El interés en el estudio de los billares dinámicos radica en determinar si las trayectorias serán caóticas o regulares, o si por otro lado existe la posibilidad de tener ambos tipos de trayectorias. De ser el caso, se puede ahondar en las condiciones en las que se tiene trayectorias caóticas o regulares.

Entre las aplicaciones de los billares dinámicos se tiene en el área de óptica, acústica, ciencias biológicas, física del plasma e incluso en matemáticas.

En el campo de la **óptica**, los billares dinámicos se aplican para estudiar como se propagan los haces de luz de una fuente puntual. En cuanto a problemas

de iluminación, la pregunta es si cualquier geometría de una habitación puede ser iluminada completamente por una fuente puntual de luz. Roger Penrose diseñó una forma geométrica que no puede iluminarse completamente, a esta figura se le denomina **La habitación iniluminable de Penrose**. También en el diseño de fibras ópticas, en particular en el diseño de fibras ópticas de doble recubrimiento, la aproximación de los haces de luz propagándose como partículas en los materiales siguiendo las reglas de refracción y reflexión resulta práctica. Cualquier tipo de problema en óptica geométrica puede ser aproximado a un billar dinámico. Se puede mencionar también la aplicación de billares dinámicos al estudio de caústicas, una caústica es la envolvente formada por los rayos de luz que han sido reflejados o refractados por una superficie curva. Un ejemplo es el brillo producido por los rayos de luz que pasan a través de un vaso de agua, en donde la luz refractada forma patrones de diferentes intensidades y formas. Para simular el comportamiento de la luz a través de un material transparente y visualizar las caústicas producidas se debe realizar un trazado de rayos, este proceso es el mismo que se utiliza en la simulación de billares dinámicos. Entre las principales aplicaciones del estudio de caústicas está el del estudio de luminarias, joyería, y arte decorativo en arquitectura. El desafío de simular fielmente las caústicas es un problema que se trabaja actualmente en la computación gráfica para animaciones.

En cuanto a la **acústica**, una aproximación para estudiar la propagación del sonido en habitaciones cerradas consiste en realizar el trazado de haces, que representan a los frentes de ondas sonoras. Computacionalmente, este método es más efectivo [7].

En la rama de **ciencias biológicas** se puede mencionar dos ejemplos: el movimiento de microorganismos en una región cerrada y la navegación de hormigas al explorar un territorio. El primer ejemplo muestra el resultado de que la reflexión de los microorganismos siempre ocurre con el mismo ángulo. Mientras que en el segundo ejemplo, sobre la navegación de las hormigas al explorar un territorio, estas no siguen caminos aleatorios si no que dejan rastros químicos para evitar caminos o frecuentar otros. Entre los modelamientos se tiene los trabajos de Li et. al. [33] y en cuanto a un modelamiento en forma de billar de tiene el trabajo de Albers et. al. [3]

En **física del plasma**, se tiene el dispositivo llamado **Tokamak** que consiste en

una cámara toroidal que confina plasma mediante fuertes campos magnéticos con el objetivo de generar energía nuclear de fusión. Las simulaciones computacionales del Tokamak considera que el plasma confinado se comporta como partículas dentro de un billar dinámico con campo magnético.

En cuanto a una aplicación puramente en el **área de matemáticas**. Bunimovich y Dettman [15] muestran que en un billar abierto, esto es uno que considera un agujero de salida para las partículas encerradas, las fórmulas de escape involucran los ceros de la función zeta de Riemman. También Galperin [22] desarrolla un método para calcular el valor de π simulando dos esferas de billar de diferentes masas de modo que se coloca a la esfera pequeña entre una pared y una esfera grande, se inicia el movimiento de la esfera grande impactando contra la esfera pequeña y se cuenta los rebotes que se realiza en total entre las esferas y la esfera pequeña y la pared. Este metodo permite calcular el valor de π con tantos decimales se desee.

En **optimización** se tiene el problema de Fagnano [24], el problema de Fagnano consiste en determinar el triángulo de menor perímetro inscrito en un triangulo agudo . Este problema ya se encuentra resuelto, sin embargo se puede extender a cualquier tipo de triángulo, las trayectorias se asemejan a la de una partícula en una región triangular. Extensiones incluyen a otros polígonos. Esto tiene una aplicación en problemas de patrullaje, esto consiste en conocer la trayectoria que debe seguir un elemento en el interior de una region cerrada para vigilar una región poligonal minimizando la distancia recorrida.

Sin duda, el estudio de billares dinámicos posee múltiples aplicaciones en diferentes campos de la ciencia.

3.5.1. Ejemplos de billares

En esta sección se menciona algunos ejemplos de billares que han sido estudiados en la literatura científica

Billar rectangular

Se considera que una partícula puntual que se encuentra encerrada en una región rectangular y realiza reflexiones especulares en el interior de esta. La trayectorias son regulares. Un resultado que es importante mencionar consiste en que si se considera

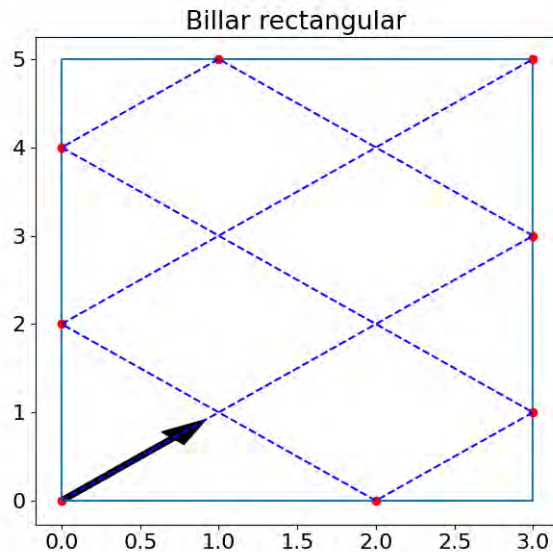


Figura 3.1: Billar rectangular

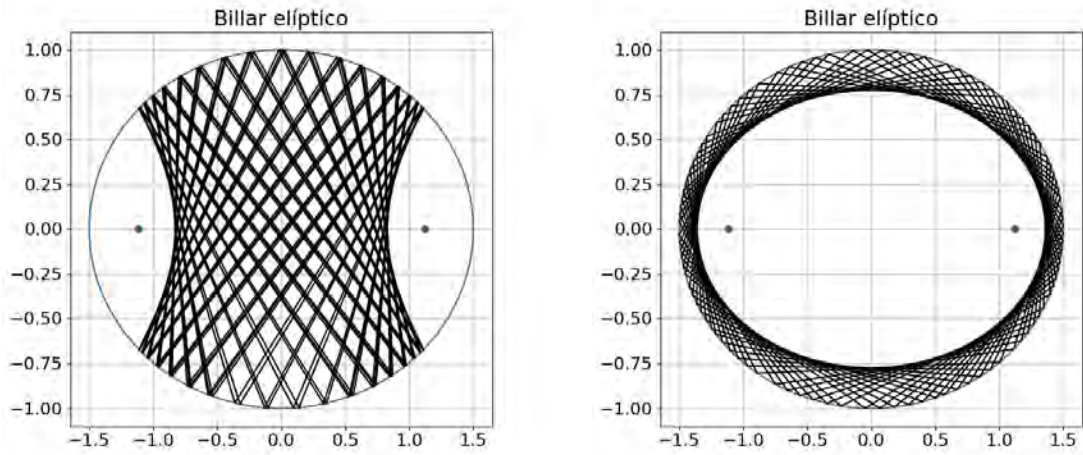
una mesa rectangular de longitudes M y N , donde M y N son números primos entre si, y una partícula es lanzada desde una esquina con un ángulo de 45° , a esta partícula le tomará $M+N-2$ impactos antes volver a colisionar en otra esquina, como lo demuestra H. Steinhaus [49]. Como se puede observar en la figura 3.1

Billar elíptico

La región del billar corresponde a una elipse centrada en el origen de cordendas con ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.4)$$

Donde a y b corresponden a la longitud semi-eje mayor y al semi-eje menor. La figura 3.2 muestra una elipse con $a = 1,5$ y $b = 1$, los puntos verdes corresponden a los focos de la elipse. En este billar se identifican dos tipos de trayectorias posibles dependiendo del primer movimiento. Si en el primer rebote la partícula pasa por la recta que une a los dos focos de la elipse entonces tocará tangencialmente a un par de hipérbolas cuyos focos corresponde a los focos de la elipse, como se muestra en el figura 3.2a. Pero si en caso la partícula no pasa entre los focos de la elipse, el camino seguido formará una elipse confocal 3.2b. M.V. Berry [11] presenta de manera detallada estos resultados de forma analítica.



(a) Trayectoria tangente a un par de hipérbolas

(b) Trayectoria formando una elipse confo-cal

Figura 3.2: Trayectorias posibles en un billar elíptico

Estadio de Buninovich

Este billar fue introducido por L.A. Bunimovich en 1974 [13]. Este consiste en un rectángulo bordeado por dos semicírculos en dos lados opuestos, como se muestra en la figura 3.3. El sistema presenta comportamiento caótico, dos partículas ubicadas en la misma posición inicial con una ligera diferencia en la dirección de la velocidad inicial rápidamente presentan trayectorias muy diferentes. Este modelo ha servido como punto de partida para estudiar el caos en billares dinámicos. Las simulaciones computacionales son de gran ayuda en la obtención de estas conclusiones. Sin embargo, una evidencia experimental para corroborar si los modelos teóricos y computacionales se ajustan al comportamiento real de una partícula en un estadio de Bunimovich fue presentado por Vasconcelos et al [55]. En este experimento los investigadores utilizaron un robot encerrado en un estadio de Bunimovich y este empezaba a moverse en línea recta, al momento de colisionar con una de las paredes se reflejaba especularmente. El robot recolectó los datos de la ubicación y el ángulo al reflejarse contrastando que en efecto los modelos se ajustan a los modelos teóricos.

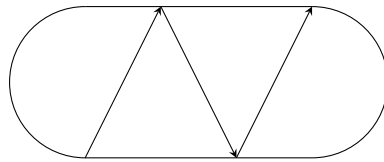


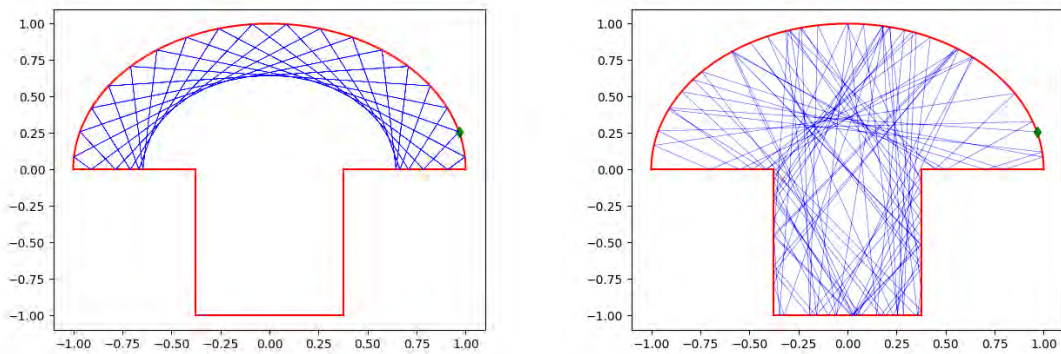
Figura 3.3: Esquema del estadio de Bunimovich

Billar de hongo

El billar de hongo fue introducido por L.A. Bunimovich en 2001 [14]. Este consiste en una semicircunferencia (llamado el sombrero del hongo) ligado a un rectángulo por el lado recto del semicírculo (llamado el tronco del hongo), como se muestra en la figura 3.4. Diversas modificaciones han sido realizadas ya sea al tronco o al sombrero. Adicionalmente, se ha estudiado la propagación de ondas de microondas en microcavidades ópticas en forma de hongo dónde los modelos teóricos y simulaciones son mostradas en Andreasen et. al. [6], también Tsugawa y Aizawa [52] consideran que dentro del hongo existen dos materiales de diferente constante dieléctrica. Los montajes experimentales y resultados han sido reportados en [19, 8, 11, 9, 18] dónde los resultados muestran el comportamiento de la radiación de microondas en una cavidad en forma de hongo. En particular, Backer et. al. en [8] muestran el comportamiento de la radiación de microondas en un hongo de tallo rectangular, mientras que en [19, 11, 9, 18] se presentan resultados en hongos de tronco triangular. Tanto, simulaciones como experimentos toman en cuenta el comportamiento ondulatorio de la radiación en las microcavidades como es de esperarse de modo que no se trata de una partícula que se refleja especularmente en la región si no de una ondas propagándose en la región en forma de hongo. Siendo esta una versión cuántica del billar de hongo.

Billar de Sinai

Este sistema fue introducido por Yakov G. Sinai [47]. Consiste en un cuadrado en cuyo interior hay un círculo centrado en el centro del cuadrado, el diámetro de la circunferencia es menor que el lado del cuadrado, como se muestra en la figura 3.5. El círculo se comporta como un obstáculo al momento de que la partícula se mueve. La partícula realiza reflexiones especulares con la circunferencia, este sistema es altamente caótico [47] [51]. El billar de Sinai tiene una fuerte conexión



(a) Billar de hongo mostrando una trayectoria regular

(b) Billar de hongo mostrando una trayectoria caótica

Figura 3.4: Billar de hongo: El sombrero corresponde al semicírculo y el tronco corresponde al rectángulo inferior.

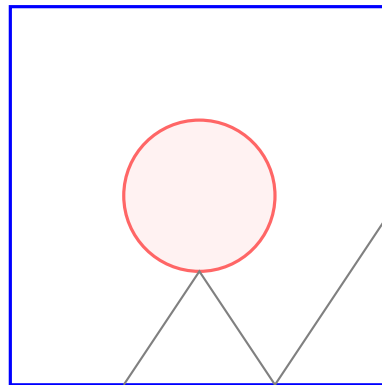
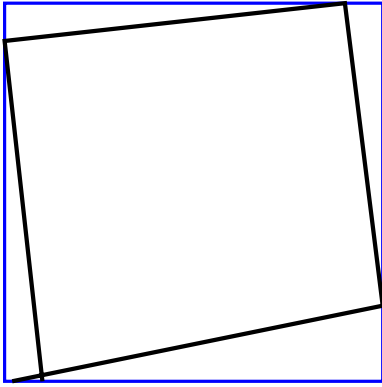


Figura 3.5: Billar de Sinaí

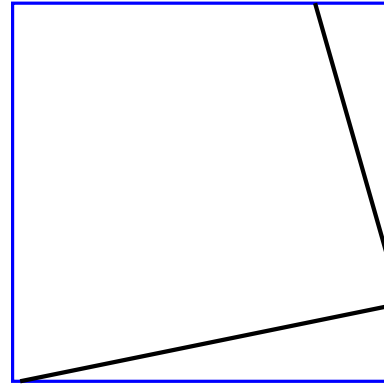
con el gas de Lorentz, este es un modelo de gas ideal propuesto por Hendrik Antoon Lorentz en 1905 para modelar el comportamiento térmico y eléctrico de los electrones colisionando con el núcleo de los átomos. En el gas de Lorentz se establece un plano con obstáculos circulares dispuestos de forma organizada o desorganizada, y una partícula puntual que representa al electrón, se mueve en este plano, impactando con los obstáculos. Diversas modificaciones han sido propuestas como la inclusión de campos eléctricos o magnético, u obstáculos triangulares, hexagonales, etc. [51]

Billar de microorganismos

Ciertos microorganismos que se encuentran sumergidos en un medio acuoso en una placa de Petri no obedecen a una reflexión especular al rebotar en una super-



(a) Billar de microorganismos. No se cumple la ley de reflexión especular.



(b) Billar de microorganismo. Hay un deslizamiento en la superficie reflectora

Figura 3.6: Billar de microorganismo: Dos casos posibles

ficie plana, por el contrario, siguen una ley de reflexión no especular de modo que se reflejan en una superficie con el mismo ángulo independientemente del ángulo incidente [48]. Son diversas las razones para este fenómeno. Puede deberse a la presencia de flagelos en el microorganismo o interacciones hidrodinámicas entre el microorganismo, su medio y la superficie en la que incide. Además es importante considerar la geometría del microorganismo. Algunos ejemplos son los espermatozoides, E.Coli y la Chlamydomonas algae. Para el caso de la Chlamydomonas Algae, esta se refleja con un ángulo de $\theta = 16^\circ$ [29]. Como se observa en la figura 3.6a. Debido a las interacciones entre el microorganismo y la superficie, sucede que los microorganismos se deslizan por una pequeña distancia en las paredes de la superficie [48], como se ve en la figura 3.6b. Una consecuencia perjudicial de este comportamiento es la acumulación de biolaminas y microorganismos en equipos médicos por lo que resulta importante conocer el fenómeno para erradicar cualquier elemento dañino a la salud [25]. El estudio del billar de microorganismos ha promovido el estudio de las trampas de microorganismos, estas son geometrías que permitan aislar a microorganismos independientemente de las reflexiones que realicen o por el tiempo que lo hagan. Las trampas de microorganismos también son utilizadas para separar a dos colonias diferentes de microorganismos en diferentes zonas de un billar [48].

Billar de Fermi-Ulam

Este modelo fue propuesto por Stanislaw Ulam en 1961 [53] como respuesta al problema de la aceleración de Fermi [21]. La aceleración de Fermi es aquella que adquiere una partícula cargada al ser reflejada en un espejo magnético (dispositivo que captura partículas utilizando campos magnéticos). En el billar de Fermi -Ulam se considera una partícula que rebota entre dos paredes rígidas, dónde una de estas está fija y la otra oscila con cierta frecuencia. Este modelo se extendió a dos dimensiones para el gas de Lorentz [34] y para el caso del billar elíptico [32].

Billar de limón

Introducido por Eric J. Heller y Steven Tomsovic en 1993 mientras investigaban las relaciones entre el caos en sistemas clásicos y su relación con el caos en sistemas cuánticos [27]. La forma de limón es la delimitada por la intersección de dos circunferencias de radio de una unidad. La importancia de este sistema radica en que presenta trayectorias caóticas y regulares, la presencia de este comportamiento resulta de interés pues así se podría conocer bajo que condiciones hay caos o trayectorias regulares. Para el caso del billar del limón interfieren factores como el radio de las circunferencias intersectadas o la distancia entre los centros de estas, para esto se realizan simulaciones computacionales [35].

Billar gravitatorio

En este billar se considera a una partícula puntual de masa m expuesta a un campo gravitatorio uniforme vertical. La partícula puede encontrarse encerrada en una región rectangular, cuadrada o elíptica [16] y esta realiza su movimiento expuesta al campo gravitatorio, de modo que su trayectoria son arcos parabólicos. Sin embargo, también es posible que la partícula realice rebotes sobre una superficie parabólica, hiperbólica o de cuña. Posibles extensiones de este trabajo incluye la versión tridimensional de este sistema o campos gravitatorios no uniformes.

Billar Dual (outer billiard)

Fue propuesto por Bernhard Neumann en los años 50 y popularizado por J. Moser [38] [37]. En este sistema se considera una región cerrada y la partícula se

ubica inicialmente en un punto fuera del billar. La partícula se mueve en dirección a la región de modo que su trayectoria es una línea recta tangente a la región. Prosigue con sucesivos caminos tangentes a esta región. Este modelo toma importancia debido a que las trayectorias se asemejan a las órbitas que realizan los planetas alrededor de una estrella. Una pregunta abierta es determinar si bajo alguna circunstancia la partícula escapa de la órbita definida.

3.5.2. Billar magnético

Propuesto inicialmente por Robnick y Berry. [44] La partícula a considerar es una partícula puntual de masa m y con carga eléctrica q , de modo que inicia su movimiento con una velocidad \vec{v} , al chocar con la frontera del billar, la partícula realiza una reflexión especular, un ejemplo se ve en la figura 3.7.

Se considera que la región cuadrada pertenece al plano XY posee un lado de una unidad. La partícula que realiza el movimiento es una de carga q . La velocidad de la partícula es un vector con componentes en el plano XY de la forma $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$, el campo magnético aplicado está en la dirección del eje Z de la forma $\vec{B} = B_z\hat{k}$. De modo que la fuerza magnética que experimenta la partícula es:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (3.5)$$

Entonces, la fuerza magnética tiene la siguiente forma:

$$\vec{F} = q(v_y B_z \hat{i} - v_x B_z \hat{j}) \quad (3.6)$$

La partícula continua su movimiento en plano XY en el interior del cuadrado. Debido a que la velocidad \vec{v} es perpendicular a la fuerza \vec{F} la trayectoria de la partícula realiza un movimiento circular. El radio de esta trayectoria, denominado radio de Larmor, se determina aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento circular:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB_z \quad (3.7)$$

Despejando el radio R :

$$R = \frac{mv}{qB_z} \quad (3.8)$$

La ecuación [3.8](#) indica que la partícula que se mueve en el interior del campo magnético experimenta un movimiento circular de modo que su radio depende de la carga, la masa, la velocidad y la intensidad del campo magnético.

En un inicio, Robnick y Berry propusieron que la frontera del billar fuera una curva suave, de modo que la partícula se mueve en el interior de esta curva cerrada. Un campo magnético perpendicular a la superficie es aplicado, de modo que la trayectoria de la partícula es un arco de circunferencia de radio R dependiendo directamente de la intensidad del campo magnético. Del mismo modo, al incidir la partícula con la frontera del billar se produce una reflexión especular. En este trabajo, los autores exploraron numéricamente las trayectorias cuando la curvatura de la trayectoria es mayor y menor que la curvatura de la frontera del billar. La motivación de este trabajo fue la de estudiar sistemas atómicos expuestos a campos magnéticos, así como las simetrías temporales ante presencia de campos magnéticos. Berglund y Kunz [\[10\]](#) continúan el trabajo en billares magnéticos y realizan estudios analíticos motivados del mismo modo de los vínculos entre la mecánica cuántica y partículas cargadas confinadas en regiones cerradas. Complementan el trabajo previo considerando bordes con singularidades (polígonos) y curvaturas negativas. A partir de estos resultados, un estallido de publicaciones empezó por las propiedades de electrones confinados expuestos a campos magnéticos en diferentes configuraciones. Adicionalmente la complejidad del problema se agranda debido a la naturaleza cuántica de los electrones.

En [\[46\]](#), Sim et. al. se establece el sistema denominado *lado magnético* (magnetic edge, en inglés) este consiste en dos campos magnéticos homogéneos de diferentes intensidades (paralelos o antiparalelos), la frontera que los separa es una recta vertical. En este artículo se estudia la trayectoria de la partícula clásica mientras pasa de una zona magnética a la otra, curvando su trayectoria dependiendo del campo aplicado. En cuanto al caso cuántico, se muestran resultados sobre los niveles de energía en este sistema. Adicionalmente, propusieron un sistema que consiste en una región circular en cuyo interior no hay campo magnético y el exterior se encuentra expuesto a un campo magnético constante. Para el caso cuántico se determina la densidad de probabilidad para diferentes intensidades de campo magnético. Extendiendo la última idea, Kocsis y sus colaboradores en [\[30\]](#) ahondan en el estudio cuántico de este

sistema de una región circular sin campo magnético rodeado de un campo magnético constante. Identificaron que este sistema presenta trayectorias regulares y también caóticas. Proponen la inclusión de campos eléctricos para enriquecer la dinámica del sistema. Proponiendo un montaje experimental, Kormanyos et. al. [31] estudian monocapas y bicapas de grafeno. El sistema consiste en tres franjas verticales consecutivas de modo que las franjas laterales están expuestas a campos magnéticos perpendiculares al plano al que pertenecen. Si las franjas son paralelas el sistema recibe el nombre de monocapa, en cambio, si los campos son antiparalelos reciben el nombre de bicapa. Realizaron mediciones de los correspondientes niveles de energía y presentaron expresiones para calcular los niveles de energía para este sistema en particular. También estudian experimentalmente el sistema correspondiente a una región hueca rodeada de un campo magnético. Nogaret [40] recopila avances experimentales importantes en esta línea de investigación, presenta una configuración que consiste en un electrón confinado en campos magnéticos heterogéneos, el sistema considera la disposición de imanes de orden de micrómetros y nanómetros dispuestos uno cerca al otro, igualmente espaciados para estudiar los efectos cuánticos de los electrones atrapados en esta configuración. La trayectoria que tienen los electrones es denominada *trayectoria de serpiente*, esta es una trayectoria ondulante que se consigue cuando se tienen dos regiones diferentes con campos magnéticos antiparalelos de modo que la partícula oscila de una región a otra formando una trayectoria ondulante. El artículo presenta detalles sobre la naturaleza ondulatoria de la trayectoria, así como los efectos cuánticos presentes. En el artículo se hace mención a un experimento desarrollado por Uzur et al. [54], quienes desarrollan un sistema de un cilindro que tiene un campo magnético en su interior rodeado de un campo magnético de menor intensidad. Se realiza el montaje experimental así como mediciones correspondientes y el seguimiento a las trayectorias. Uno de los resultados a resaltar es el que se encuentran trayectorias regulares. El artículo desarrollado por Nogaret [40] hace hincapié en la importancia del desarrollo de esta clase de experimentos ya que las potenciales aplicaciones tecnológicas radican en la magnetoelectrónica, una alternativa a la electrónica convencional ya que aprovecha el espín del electrón de modo que los aparatos diseñados poseen mayores grados de libertad, esto permitiría tecnologías más sofisticadas y diminutas, además de me-

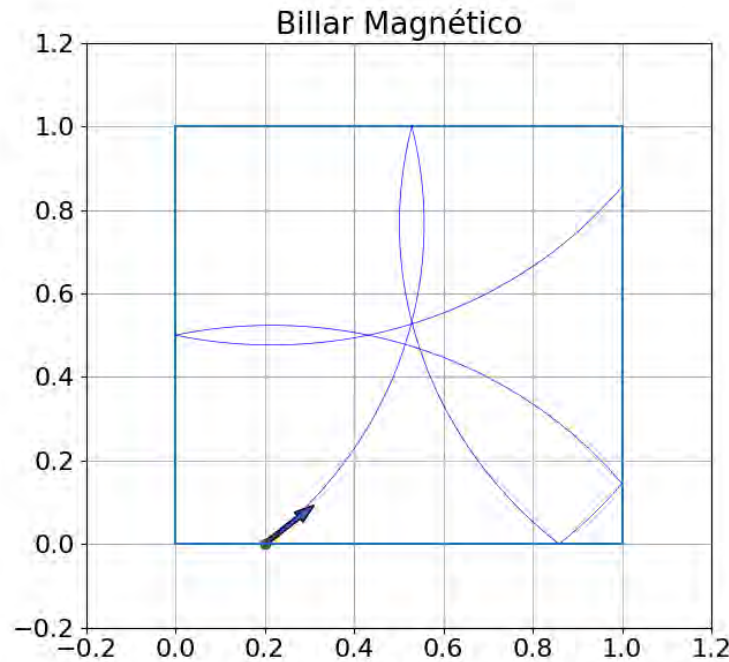


Figura 3.7: Trayectoria de una partícula en un billar magnético

jas en las tecnologías para el almacenamiento de la información [43]. Ejemplos a considerar de los avances experimentales en cuanto al movimiento de electrones en regiones magnéticas se encuentran en [41] [4] [5], donde montajes experimentales son preparados para estudiar diversos fenómenos vinculados con el espín de las partículas capturadas en un campo magnético. En particular, los trabajos liderados por Almulhem [4] [5] hacen énfasis en la potenciales aplicaciones para la elaboración de dispositivos para el almacenamiento de información.

3.5.3. Billar magnético inverso

Un billar magnético inverso es una extensión de un billar magnético previamente explicado en la sección 3.5.2. Nuevamente se considera una partícula puntual de masa \mathbf{m} y carga \mathbf{q} . Se aplica un campo magnético B_{out} en el exterior de la región del billar perpendicular al plano de la frontera. La partícula atraviesa la frontera a considerar. La partícula inicia su movimiento con un vector velocidad que apunta al interior del billar. Al iniciar su movimiento en el interior del billar, la trayectoria de la partícula es una línea recta, al llegar a la frontera de la región, la partícula

la atraviesa la pared y cambia su trayectoria a un arco de circunferencia de radio exterior R_{out} . Este radio se calcula utilizando la ecuación [3.8](#). Posteriormente, la partícula reingresa a la región y cambia su trayectoria a una línea recta. Este sistema fue inicialmente propuesto por Voros et. al. [\[56\]](#) en 2003, aquí se presenta el sistema del billar de Buminovich de modo que se aplica un campo magnético en el exterior y no hay campo magnético en el interior. El tratamiento es puramente clásico. Se calculan dos magnitudes en función del campo magnético exterior: el exponente de Lyapunov y la proporción entre el área caótica y el área regular en el espacio de fases. Los resultados muestran que estas dos cantidades son funciones del campo magnético externo, lo que hace posible ajustar el valor de estas cantidades. Los resultados muestran que a medida que el campo magnético tiende al infinito, el sistema es idéntico al billar de Buminovich, con un comportamiento caótico. Este resultado es coherente con resultados previos, ya que si el campo magnético exterior es muy intenso la partícula no tiene posibilidad de escapar por lo que es prácticamente igual a simplemente reflejarse en la pared del billar. Por otro lado, mientras se reduce el campo magnético se observa la presencia de mayor trayectorias regulares. Los autores sugieren un montaje experimental. Este consiste en colocar un parche de material semiconductor en un 2DEG (por sus siglas en inglés: 2 dimensional electron gas). Se aplica un campo magnético y los electrones inician su movimiento. Esto motivó posteriores estudios teóricos y experimentales como podemos mencionar los siguientes. Uzur et. al. [\[54\]](#) realizaron un experimento en el que dispusieron un disco ferromagnético de disprosio expuesto a un campo magnético de modo que el campo magnético interior es diferente al campo magnético exterior del disco. Este sistema se encuentra expuesto a un 2DEG, de modo que los electrones del gas se mueven a causa de la presencia de estos campos magnéticos. El objetivo fue medir la magnetoresistencia del sistema y su relación con las trayectorias regulares que puedan realizar los electrones. Encontraron un aumento en la resistencia eléctrica del disco cuando los electrones realizaban trayectorias regulares. Una versión a escala cuántica y simplificada de este problema fue propuesta por Kocsis et. al [\[30\]](#). Exploraron un **punto cuántico**, esta es una región circular en la que el interior no tiene campo magnético y el exterior posee un campo magnético. Hicieron un tratamiento cuántico al problema para investigar los niveles de energía del sistema.

Dado que los electrones no son las únicas partículas susceptibles a cambios en su trayectoria ante la presencia de campos magnéticos, Wang et. al. [57] abordaron esta situación proponiendo una región circular con campo magnético interior y exterior en grafeno para un fermión (esto generaliza el caso de trabajar con electrones ya que el electrón es un fermión). Realizando consideraciones puramente cuánticas, encuentran que es más posible encontrar a la partícula en los bordes interiores del punto cuántico. Además de la interacción de las partículas con los campos magnéticos, es necesario tener en cuenta la interacción entre partículas. Para esto, M. Aichinger et al [2] realizaron simulaciones sobre dos partículas cargadas que interactúan mediante la fuerza de repulsión del Coulomb, pero que también están expuestas a un campo magnético. Dependiendo de las condiciones iniciales, las partículas pueden presentar un comportamiento caótico o realizar orbitas regulares. Extendiendo el trabajo de Uzur [54], Xu et al [58] realizaron trabajos en hilos cuánticos. Los hilos cuánticos son alambres conductores de escalas cuánticas en la que se hace necesario considerar los efectos cuánticos presentes. Como se ha mencionado previamente, la introducción del billar magnético inverso por Voros et al [56] desató una serie de investigaciones de este sistema en el campo teórico y experimental. El trabajo de Andres Perico [42] explora el billar magnético inverso en un cuadrado. Considera una región cuadrada de lado uno. De modo que no hay campo magnético en el interior del cuadrado y hay un campo magnético uniforme perpendicular fuera del cuadrado. La trayectoria de la partícula son líneas rectas en el interior y arcos de circunferencia en el exterior. Perico realiza un tratamiento matemático al sistema y encuentra evidencia numérica de caos estudiando el espacio de fases. Hace énfasis en las pendientes de las trayectorias en el interior del cuadrado. Además de abordar por separado dos situaciones: cuando la partícula da la *vuelta por la esquina del cuadrado* y cuando no lo hace. El trabajo de Perico encuentra que el sistema es caótico bajo ciertas condiciones, y esto queda en evidencia al mostrar el espacio de fases de este sistema. Además que muestra que es posible ajustar los parámetros como las condiciones iniciales y el campo magnético externo para proporcionar una trayectoria caótica o regular a la partícula. Sean Gasiorek [23] realiza una extensión del trabajo de Robnik et al. [44] para el caso del billar magnético inverso. Gasiorek considera una región elíptica en la que el interior no posee campo magnético, mientras que el exterior si está expues-

to a un campo magnético perpendicular al plano. Se compara la trayectoria de las partículas cuando la curvatura de la partícula es menor o mayor que la curvatura mínima de la frontera. Irene de Blasi y Susanna Terracini [17] introducen un sistema físico inspirado por trabajo en astrodinámica. El sistema en considerar una región circular del espacio, en el centro de esta hay un agujero negro. La trayectoria de una partícula en el interior se ve deflectada debido al campo gravitatorio, al atravesar el borde circular la partícula deflecta su trayectoria siguiendo la ley de Snell para la refracción. Al salir de la región circular, la partícula retorna debido al campo gravitatorio, nuevamente al retornar, refracta su trayectoria. Este sistema recibe el nombre de **billar refractivo**. De Blasi y Terracini sugieren que su trabajo se aplica a problemas de astrodinámica y en la elaboración de materiales ópticos artificiales [17].

3.5.4. Billar magnético doble

Se sugiere una extensión al billar magnético inverso que se denominará **billar magnético doble**. La extensión consiste en considerar campos magnéticos en el interior y en el exterior de la frontera del billar, de modo que la inclusión de un campo magnético interior a la región a considerar es la característica añadida. El campo magnético interior puede ser paralelo o antiparalelo al campo magnético exterior. Es importante considerar que experimentalmente, esta situación ha sido realizada por Uzur [54], en ese trabajo se considera un anillo en cuyo interior y exterior hay campos magnéticos al interior y al exterior. Sin embargo, se tomará como referencia el trabajo de A. Perico [42], que considera polígonos. Se usa como referencia principal este trabajo debido a que este presenta resultados de las simulaciones numéricas y sirve de referencia para comparar el caso extremo en el el campo interior es muy débil.

Se considera un cuadrado de lado una unidad de lado como se muestra en la figura 3.8. Nótese que el vértice inferior izquierdo coincide con el origen de coordenadas. Esta es la frontera del billar a considerar. Se aplica un campo magnético perpendicular al exterior (al cual denotaremos como B_{out}) y otro al interior de esta región (al cual denotaremos como B_{in}). Estos pueden ser paralelos o antiparalelos. Una partícula puntual de masa m y carga q inicia su movimiento en uno de los lados

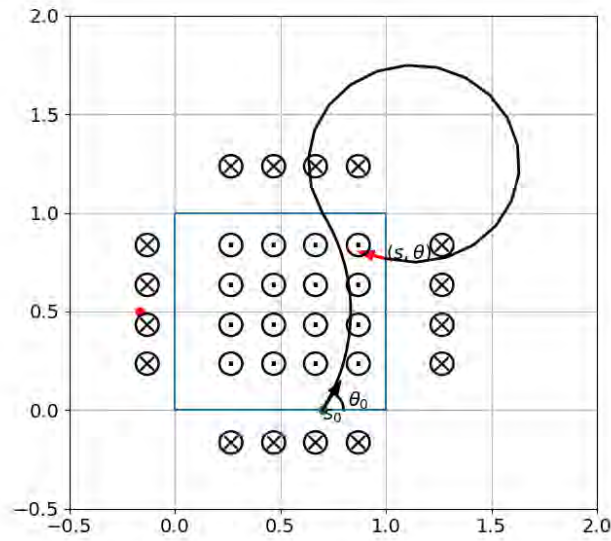


Figura 3.8: Configuración para un billar magnético inverso doble en un cuadrado. El campo magnético exterior B_{out} ingresa al plano de la superficie, y el campo magnético interior B_{in} sale de la superficie.

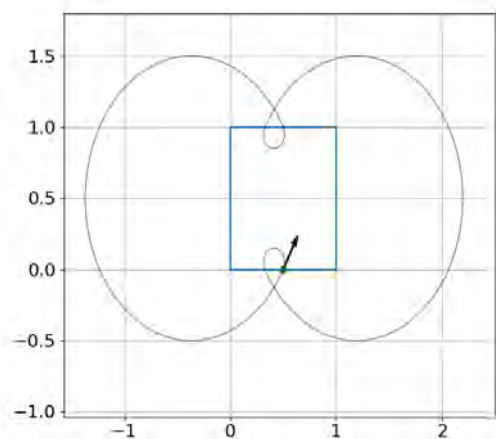
del cuadrado con un vector velocidad \vec{v} de módulo una unidad apuntando al interior de la región. Para simplificar los cálculos de modo que se mantengan la dinámica del movimiento se considera que la masa $m = 1$, la carga $q = 1$ y la velocidad \vec{v} es un vector unitario. Al iniciar su movimiento la trayectoria de la partícula es un arco de circunferencia de radio R_{in} hasta que colisiona o una de las paredes del cuadrado. Al incidir con la frontera, la partícula atraviesa la frontera y cambia su trayectoria a un arco de circunferencia de radio exterior R_{out} . Ambos radios R_{in} y R_{out} están dados por la ecuación [3.8](#)

El cambio en la trayectoria será en sentido horario o antihorario, dependiendo de la dirección de los campos. Eventualmente, la partícula retornará al cuadrado, al reingresar, nuevamente cambia su trayectoria. Algunos ejemplos de trayectorias se encuentran en las figuras [3.9](#). Por ejemplo, en las figuras [3.9a](#) y [3.9b](#) se muestran campos magnéticos paralelos con intensidades en proporción de 1 a 10. La figura [3.9a](#) muestra como $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$, la partícula inicia su movimiento en la posición del punto verde mostrada con el vector velocidad indicado. La trayectoria posee una curvatura muy pequeña en el interior y al salir presenta una curvatura mayor. Mientras que en [3.9b](#) se ha intercambiado las intensidades de los campos, esto

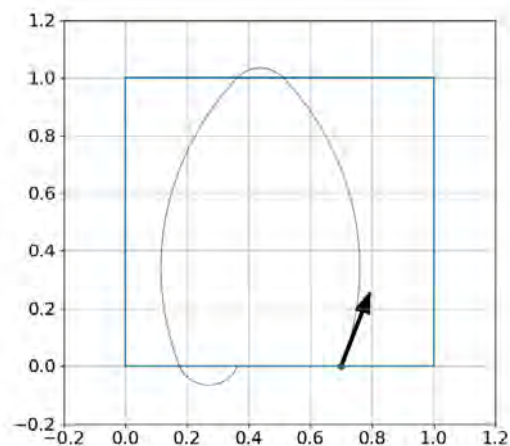
es $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$ e inicia en la misma posición. Se observa una clara diferencia en la trayectoria, la curvatura en el interior es grande, mientras que retorna casi inmediatamente al cuadrado debido al intenso campo magnético. Las figuras [3.9c](#) y [3.9d](#) muestran el caso en que los campos son antiparalelos. Se tiene un campo magnético que ingresa para la región interior y un campo magnético saliente para la región exterior. En ambos casos, al iniciar su movimiento la partícula esta gira en sentido antihorario y al salir de la región, esta cambia su sentido a horario. Para el caso de la figura [3.9c](#) se tiene un $B_{in} = 1$ saliendo de la superficie y $B_{out} = 10$. Mientras que para [3.9d](#) se tiene un $B_{in} = 10$ saliendo de la superficie y $B_{out} = 1$. Hay notables diferencias en las trayectorias para los cuatro casos mencionados por lo que se hace conveniente estudiar cada uno de estos.

Resulta relevante conocer si este sistema presenta comportamiento caótico o regular, y en cualquiera de los casos, bajo que condiciones. El modo de afrontar este problema es mediante la exploración del espacios de fases del sistema. El espacio de fases requiere que definamos coordenadas que describan de manera completa el estado de la partícula, para esto usaremos las coordenadas de Birkhoff como se utiliza en [\[56\]](#), [\[42\]](#) y [\[23\]](#) para este sistema físico. Esta consiste en dos coordenadas s y θ . La coordenada s mide la distancia desde la coordenada inferior izquierda, a través del perímetro del cuadrado en sentido antihorario, hasta retornar nuevamente al vertice inferior izquierdo. Dado que esta coordenada abarca todo el perímetro del cuadrado de lado uno, esta toma valores entre 0 y 4 (pues el cuadrado tiene longitud de 1 unidad). Mientras que la coordenada θ mide el ángulo entre el lado del cuadrado y el vector velocidad, por lo que toma valores entre 0 y π radianes. Durante el movimiento de la partícula, esta sale y reingresa de la región numerosas veces. Cada vez que la partícula reingresa se toma registro de las coordenadas de reingreso de la partícula. Como se puede observar en la figura [3.10](#), la partícula inicia su movimiento en $s = 0,6$ (base inferior del cuadrado) con un ángulo $\theta = 60^\circ$; sale por el lado horizontal superior y reingresa por el lado vertical derecho con coordenadas $s = 1,76$ y $\theta = 74,57^\circ$. Es esta última coordenada de reingreso que es de interés para el espacio de fases, pues tras sucesivos movimientos se registra las coordenadas s y θ del reingreso. Esto, nuevamente, en concordancia con el trabajo de [\[56\]](#), [\[42\]](#) y [\[23\]](#).

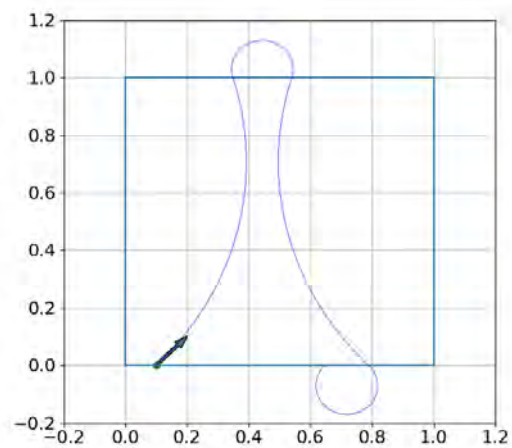
En la figura [3.11](#) se muestra un billar con un $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$, con la partícula



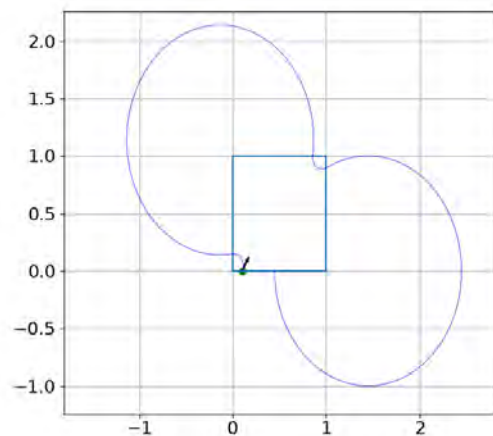
(a) Campos magnéticos paralelos. $B_{in} > B_{out}$



(b) Campos magnéticos paralelos. $B_{in} < B_{out}$



(c) Campos magnéticos antiparalelos. $B_{in} < B_{out}$



(d) Campos magnéticos antiparalelos. $B_{in} > B_{out}$

Figura 3.9: Trayectorias posibles en un billar magnético doble

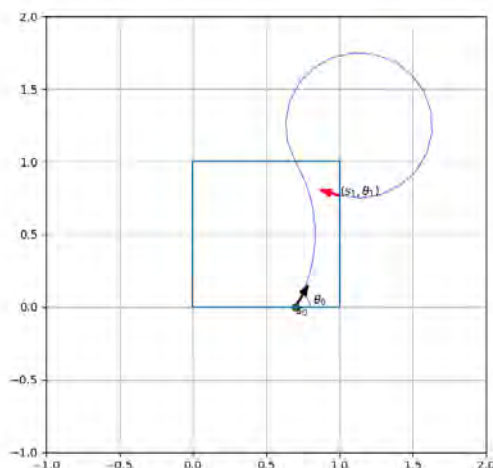


Figura 3.10: Coordenadas s y θ

que inicia su movimiento en $s = 0,5$ y con una velocidad inicial con $\theta = 15^\circ$; con su respectivo espacio de fases. La trayectoria mostrada no presenta un patrón o regularidad en el movimiento, y para comprobarlo se observa el espacio de fases, el cual, del mismo modo solo muestra muchos puntos dispersados sin organización alguna. Sin embargo, si en este mismo billar se cambia las condiciones iniciales como se muestra en la figura [3.12](#) donde $s = 0,6$ y $\theta = 50^\circ$. La trayectoria si muestra un patrón regular, esto queda plasmado en el espacio de fases dónde se observan dos curvas cerradas. Esta es la característica de las trayectorias regulares, en la cual el espacio de fases forma una o varias curvas cerradas. Estas dos trayectorias pueden ser encontradas mediante prueba - error. Sin embargo, este sería un modo ineficiente de conocer el comportamiento del sistema. Para superar este obstáculo la solución adecuada es explorar una gran cantidad de trayectorias y llenar el espacio de fases en su totalidad. Una vez obtenido una visión general del espacio de fases resulta de modo mas visual identificar trayectorias regulares.

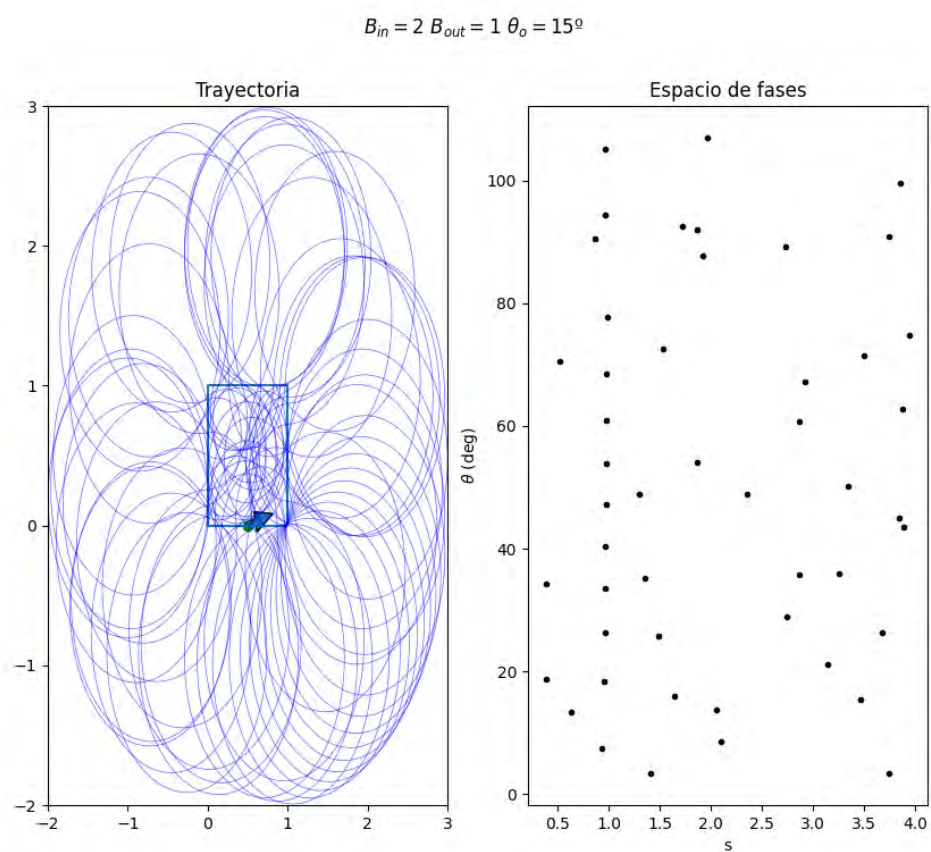


Figura 3.11: Trayectoria caótica con su espacio de fases

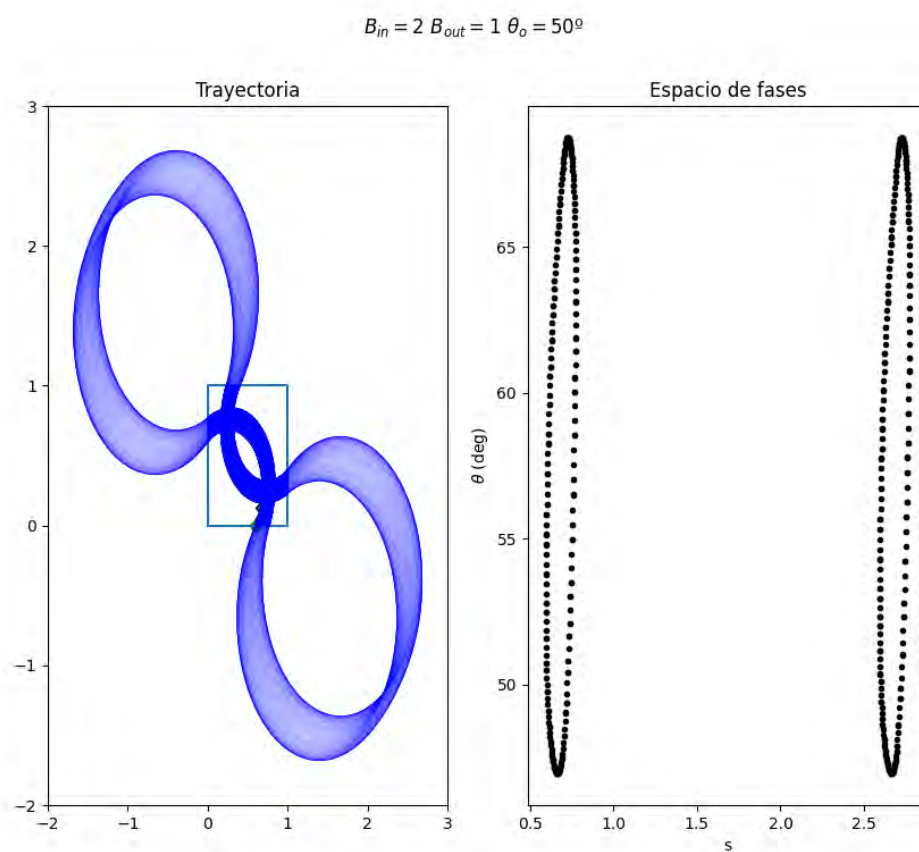


Figura 3.12: Trayectoria regular con su espacio de fases

Capítulo 4

Resultados

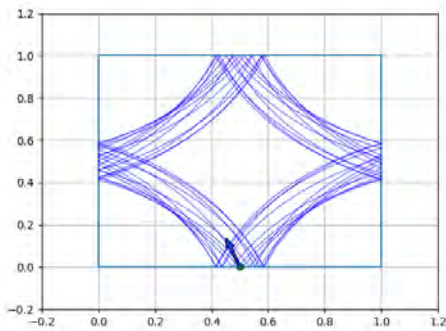
Esta sección presenta los resultados de las simulaciones realizadas para el billar magnético doble utilizando la librería elaborada en Python. La región a considerar es un cuadrado de 1 unidad de lado con dos campos magnéticos perpendiculares a la superficie aplicados tanto al interior (denominado B_{in}) y al exterior (denominado B_{out}). Se estudia la dinámica de una partícula cargada en la configuración del billar.

Los resultados de los casos estudiados se han separado de la siguiente manera:

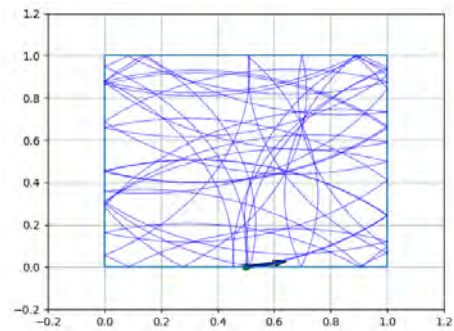
- Campo magnético exterior B_{out} mucho mayor que B_{in} . Esto, con el objetivo de verificar si los resultados son compatibles con los de A. Perico [42], que es un trabajo que sirvió de antecedente a la presente tesis.
- Campos magnéticos paralelos: Los campos magnéticos exterior e interior son paralelos entre ellos y perpendiculares al plano de la región cuadrada. Se consideran dos situaciones. La primera cuando $B_{in} > B_{out}$ y la segunda cuando $B_{in} < B_{out}$.
- Campos magnéticos antiparalelos: Los campos magnéticos exterior e interior son antiparalelos entre ellos y son perpendiculares a la región cuadrada. Se consideran dos situaciones. La primera cuando $B_{in} > B_{out}$ y la segunda cuando $B_{in} < B_{out}$.

4.1. Campo magnético B_{out} mucho mayor que B_{in}

Se inició con el caso de considerar un cuadrado de 1 unidad de lado en el que se incluye un campo magnético interior $B_{in} = 1$ y el campo magnético exterior de $B_{out} = 10000$. Esto para aproximar el caso en que la partícula no puede escapar al exterior del cuadrado y se encuentra confinada en la región interior con un campo magnético aplicado que curva su trayectoria. Un ejemplo de trayectoria regular y caótica se encuentra en [4.1](#). El correspondiente espacio de fases para esta configuración se encuentra en la figura [4.2](#).



(a) Trayectoria regular



(b) Trayectoria caótica

Figura 4.1: Campos magnéticos paralelos con $B_o = \text{grande}$

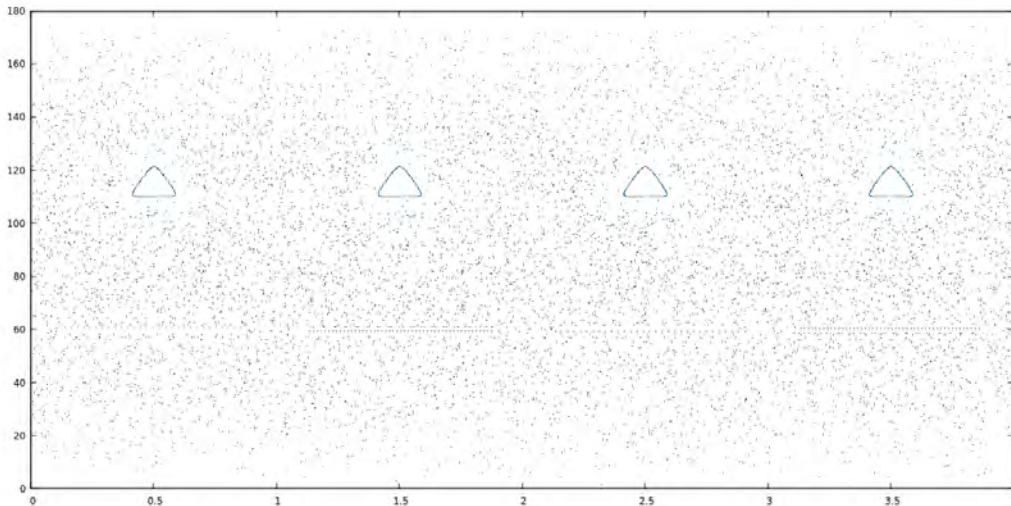


Figura 4.2: Espacio de fases para un B_{out} mucho mas grande que B_{int}

Las paredes practicamente reflejan a la partícula debido a que al apenas escapar de la frontera del billar, la partícula inmediatamente regresa al interior. Estos

resultados son los esperados para este tipo de configuración. [42]

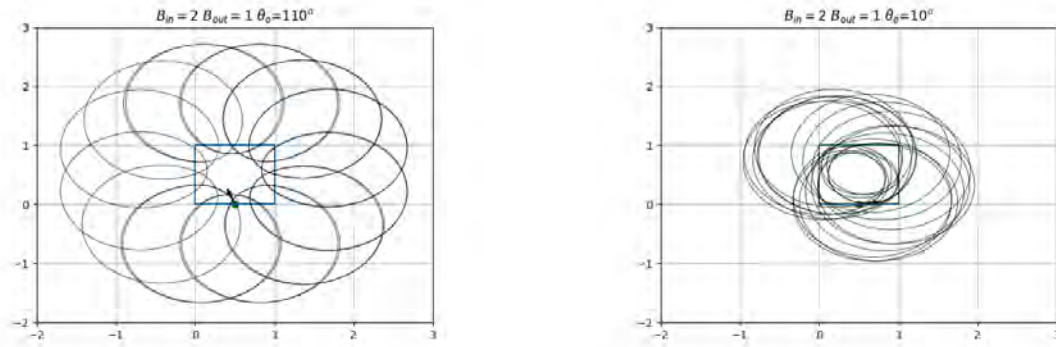
4.2. Campos magnéticos paralelos

Esta sección considera que los campos magnéticos aplicados son paralelos entre si y de diferente magnitud, además que son perpendiculares al plano de la región cuadrada. Dentro de esta sección se consideran dos casos. El primero para $B_{in} > B_{out}$ y el segundo para $B_{in} < B_{out}$.

4.2.1. El caso : $B_{in} > B_{out}$

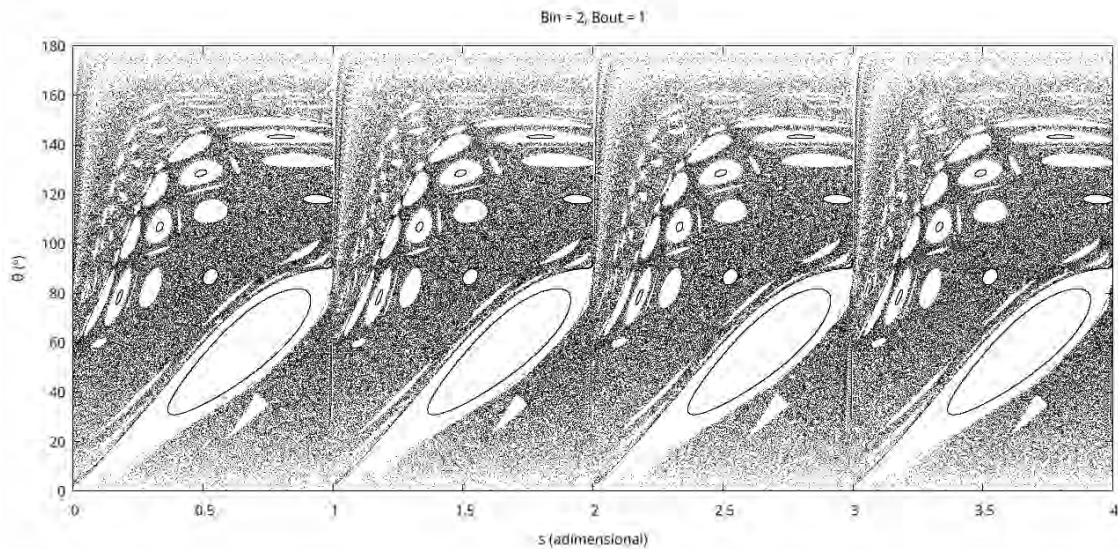
Se considera que el campo magnético interior mayor que el campo magnético exterior. El campo magnético exterior toma un valor fijo de 1 y el campo magnético interior toma valores de 2,3,5 y 10. Por lo que se tienen 4 casos diferentes. Se muestran ejemplos de trayectorias de los 4 casos (en cada uno de una trayectoria regular y otra caótica), y los correspondientes espacios de fases para los 4 casos.

- Para el caso de $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$: Los resultados se muestran en la figura [4.3]. Se presentan los casos una trayectoria regular en la figura [4.3a] y una trayectoria caótica en la figura [4.3b]. La trayectoria regular muestra una curva cerrada coherente con el comportamiento físico esperado, dado que en el interior el campo magnético es mayor el radio de curvatura es menor y en el exterior el radio es mayor. Mientras que la trayectoria caótica no presente una estructura definida. El espacio de fases se encuentra en la figura [4.4]. Es importante recordar en este punto que en el espacio de fases el eje horizontal corresponde al perímetro del cuadrado de lado 1 (por eso abarca de 0 a 4), mientras que el eje vertical corresponde al ángulo formado entre el vector velocidad y la pared del cuadrado (por eso va de 0° a 180°). Esto también explica porqué se ven 4 veces el mismo patrón en el espacio de fases (este comportamiento se repetirá en los demás casos de estudio). Las regiones en blanco corresponde a zonas dónde se obtendrán trayectorias regulares si es que la partícula tiene esas coordenadas, mientras que los puntos negros que llenan el espacio de fases son condiciones en las que la trayectoria será caótica. La figura [4.4] muestra pequeñas zonas blancas, dónde se presentan trayectorias regulares.

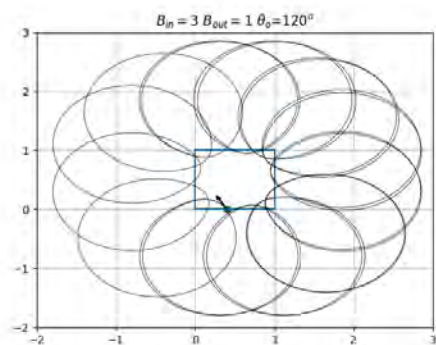


(a) Trayectoria regular

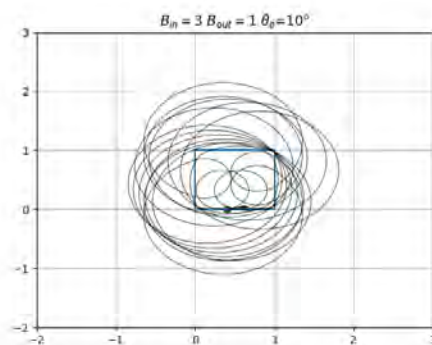
(b) Trayectoria caótica

Figura 4.3: Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$ Figura 4.4: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$

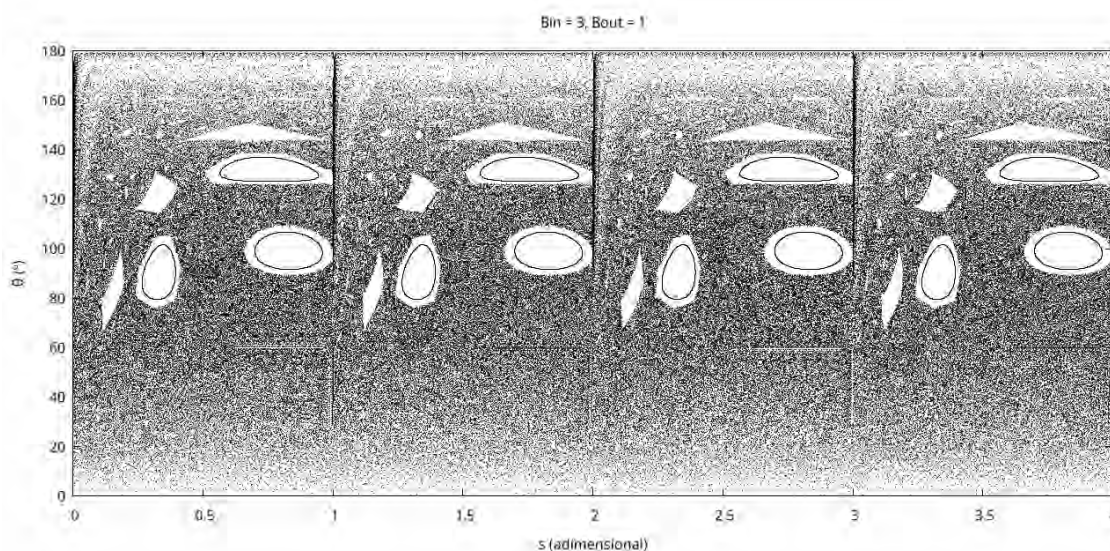
- Para el caso de $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$: Tanto la trayectoria regular y caótica se muestran en la figura 4.5. Para el caso de la trayectoria regular se muestra en la figura 4.5a, es importante aclarar que esta no es la única trayectoria regular posible con estos valores de campo magnético, mientras que la trayectoria caótica de la figura 4.5b se muestra desorganizada. Hay un cambio en el espacio de fases 4.5 en comparación al apartado previo, esto es que se ven más regiones blancas y solo regiones caóticas para la parte inferior del gráfico.



(a) Trayectoria regular



(b) Trayectoria caótica

Figura 4.5: Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$ Figura 4.6: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$

- Para el caso de $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$: Al incrementar el campo magnético interior, el radio de curvatura en el interior del billar es menor y las trayectorias no pueden ocupar el interior del cuadrado, tal como es muestra en la figura 4.7. La trayectoria regular se muestra en la figura 4.7a y la trayectoria caótica en 4.7b. El espacio de fases 4.8 presenta grandes regiones blancas en la parte superior del gráfico, mientras la parte inferior queda llena de regiones caóticas.

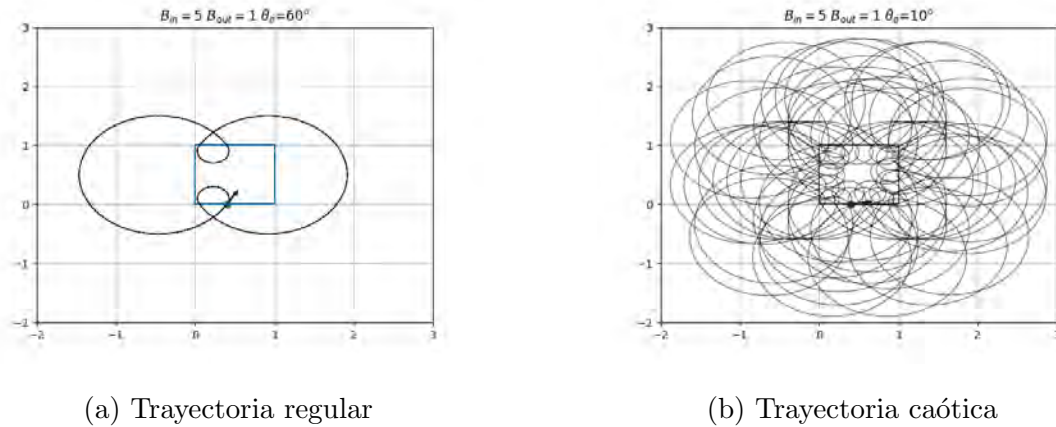


Figura 4.7: Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$

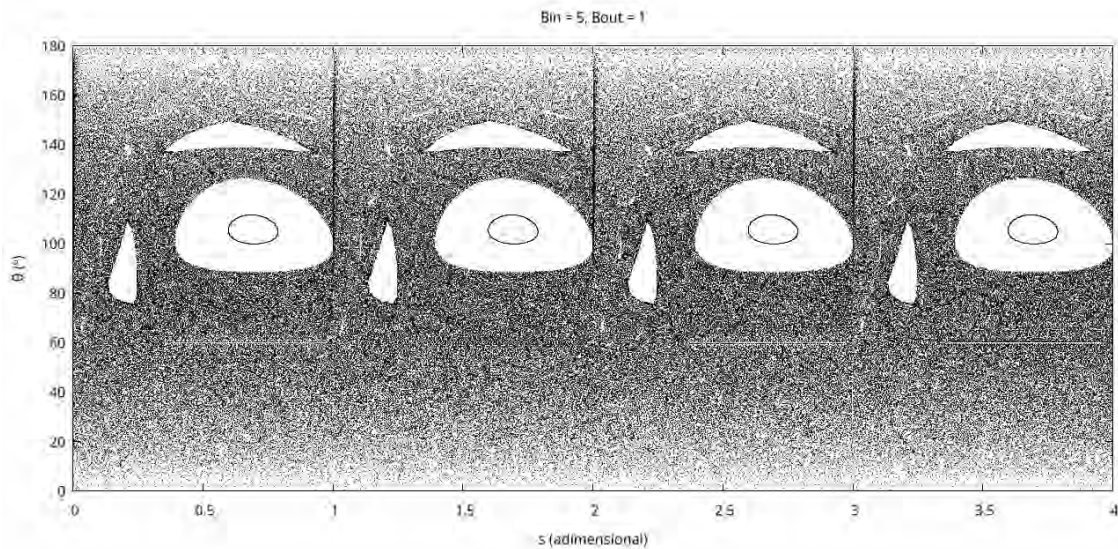


Figura 4.8: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$

- Para el caso de $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$: Los resultados se muestran en la figura [4.9](#). La trayectoria regular se muestra en [4.9a](#) y la trayectoria caótica en [4.9b](#). Se hace nuevamente evidente, que dado a la mayor intensidad en el interior del billar, la partícula no alcanza a pasar por las zonas cercas al centro del cuadrado. El espacio de fases correspondiente [4.10](#) presenta zonas para trayectorias regulares (blancas en forma triangular en la parte superior). Este espacio de fases muestra una marcada separación entre las regiones caóticas y regulares.

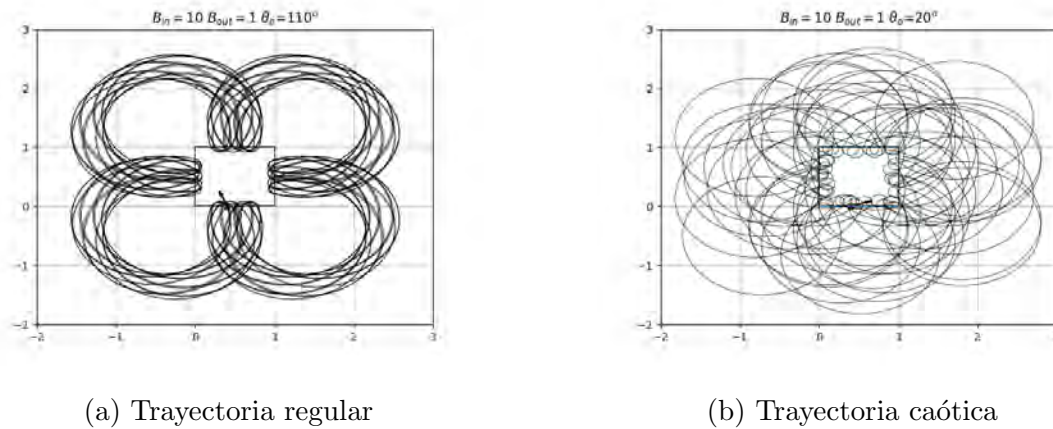


Figura 4.9: Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$

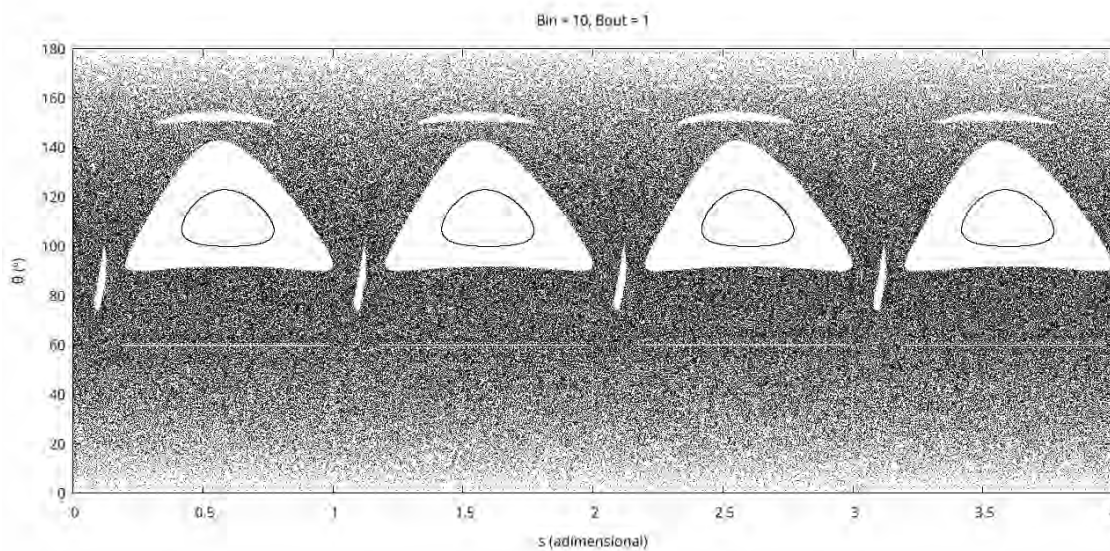


Figura 4.10: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$

Se pone en evidencia que el espacio de fases proporciona información del sistema. Se observa que a medida que el campo magnético interior incrementa, las regiones regulares son más definidas y fáciles de identificar.

4.2.2. El caso: $B_{in} < B_{out}$

En contraste con el caso anterior, esta sección muestra los resultados para el caso en que el campo magnético interior B_{in} es menor que B_{out} . El campo magnético interior toma un valor fijo de 1 y el campo magnético exterior toma valores de 2,3,5

y 10. Del mismo modo se tienen 4 casos.

- Para el caso de $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$: Los resultados se muestran en la figura 4.11. La trayectoria regular se muestra en la figura 4.11a y la trayectoria caótica en 4.11b. El espacio de fases se muestra en la figura 4.12 y nuevamente hay pequeñas regiones para las trayectorias regulares dispersadas, como pequeñas islas, a lo largo del espacio de fases.

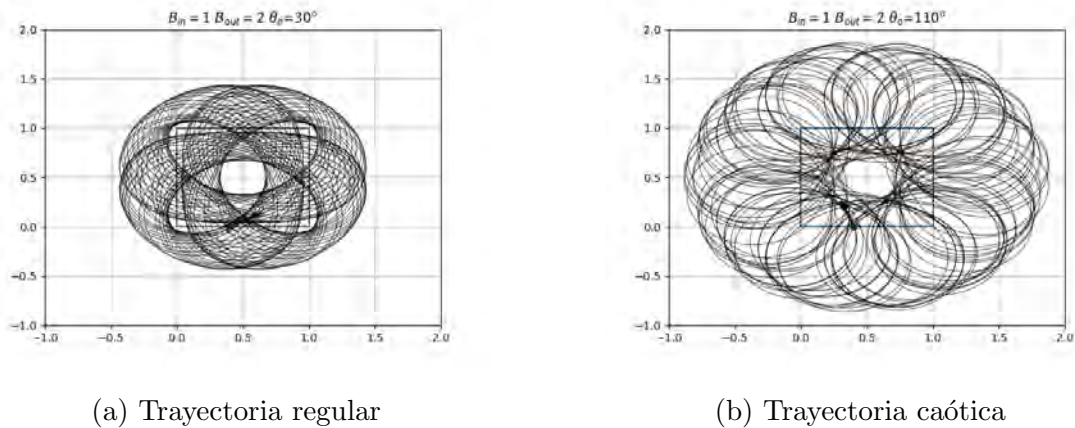


Figura 4.11: Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$

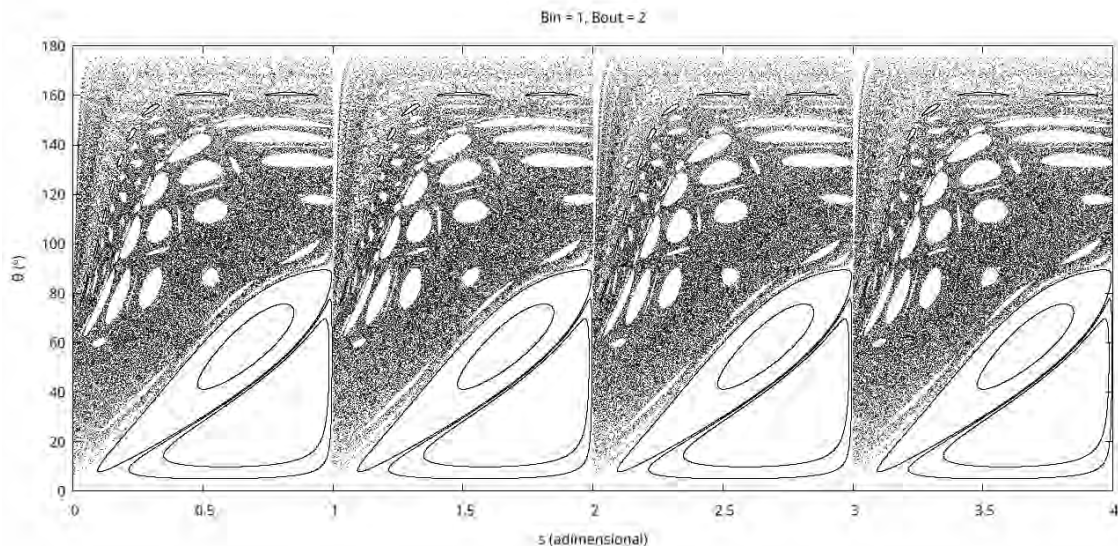
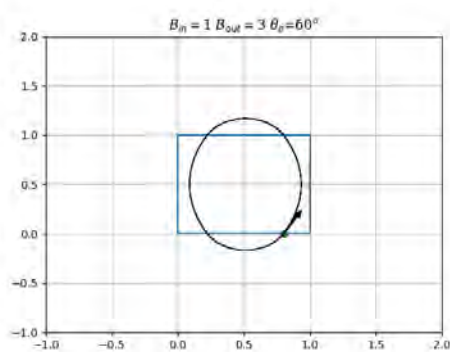


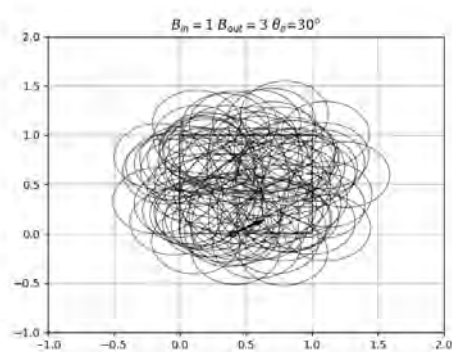
Figura 4.12: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$

- Para el caso de $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$: Los resultados de las trayectorias se muestran en la figura 4.13. La trayectoria regular muestra una curva cerrada en

la figura 4.13a, mientras que la trayectoria caótica se muestra en la figura 4.13b. El espacio de fases se muestra en la figura 4.14 y la región para las trayectorias caóticas predomina en la zona inferior del gráfico, y las islas correspondientes a las regiones regulares toma una mejor organización en comparación al caso previo.



(a) Trayectoria regular



(b) Trayectoria caótica

Figura 4.13: Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$

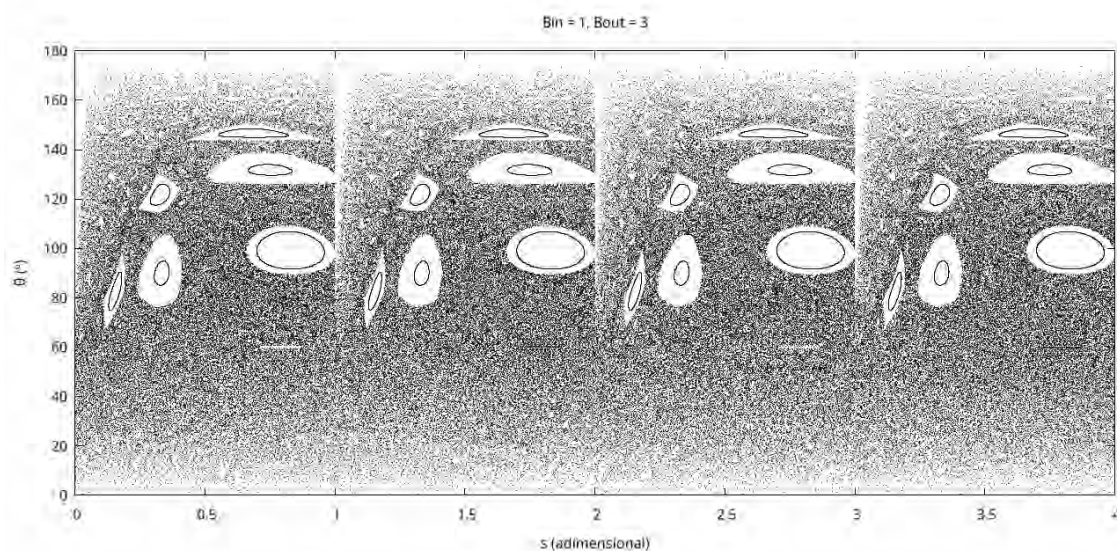
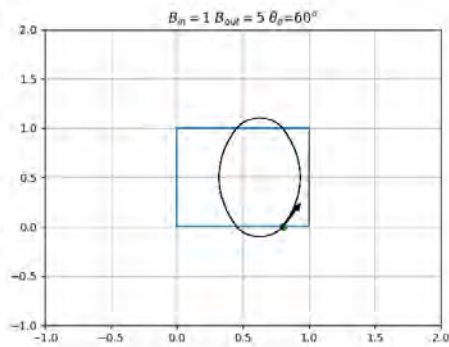


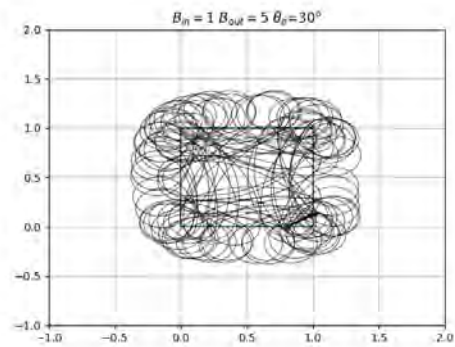
Figura 4.14: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$

- Para el caso de $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$: Los resultados se muestran en la figura 4.15. La trayectoria regular de la figura 4.15 que tiene una forma de balón alargado. Mientras que la trayectoria caótica se muestra en la figura 4.15. El espacio

de fases correspondiente en la figura 4.16, aquí se observa grandes regiones bien definidas dónde se desarrollan trayectorias regulares, y con certeza, las condiciones iniciales que se ubican en la parte inferior del gráfico desembocarán en trayectorias caóticas.



(a) Trayectoria regular



(b) Trayectoria caótica

Figura 4.15: Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$

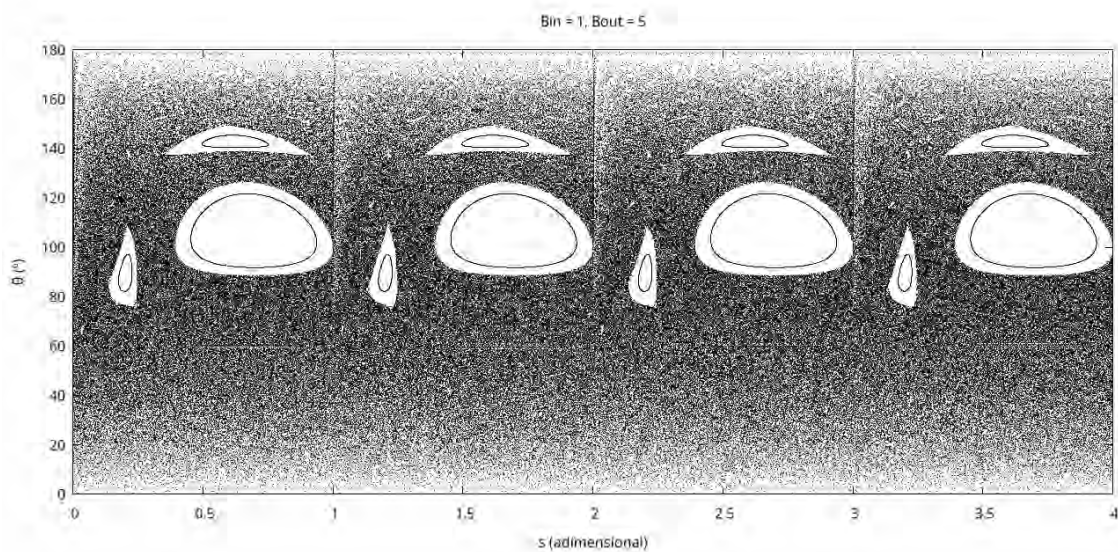
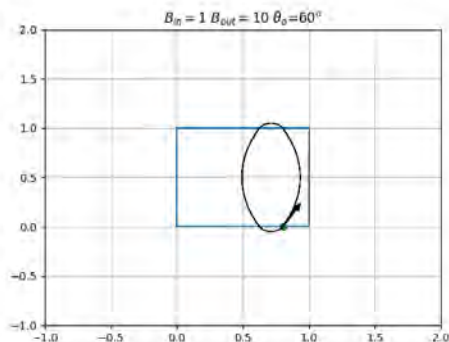


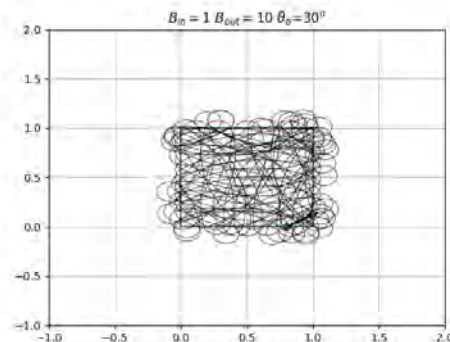
Figura 4.16: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$

- Para el caso de $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$: Los resultados se muestran en la figura 4.17. La trayectoria regular presente en la figura 4.17a del mismo modo del caso anterior, la trayectoria regular tiene forma de balón alargado (para esas condiciones específicas), y la trayectoria caótica en la figura 4.17b. El espacio

de fases se observa en la figura 4.18. Sin duda, se evidencia las regiones para las trayectorias regulares. Nuevamente, la parte inferior del espacio de fases está dominada por trayectorias caóticas.



(a) Trayectoria regular



(b) Trayectoria caótica

Figura 4.17: Campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$

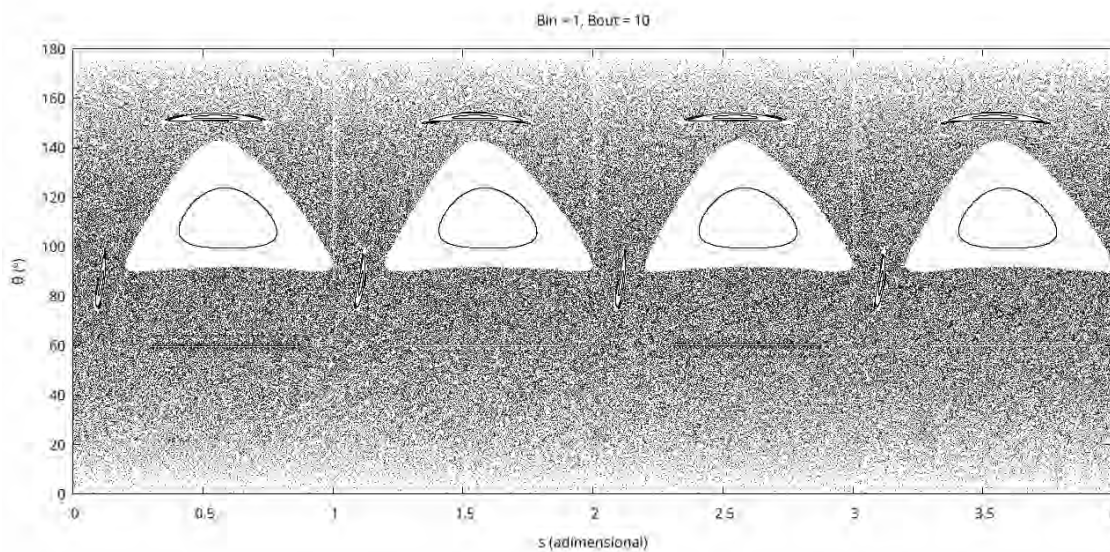


Figura 4.18: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$

4.3. Campos magnéticos antiparalelos

Los campos magnéticos se consideran antiparalelos entre sí y perpendiculares a la región del billar. Nuevamente, se tienen dos casos en el que el campo magnético interior B_{in} es mayor que el campo magnético exterior B_{out} y viceversa.

4.3.1. El caso $B_{in} > B_{out}$

El campo magnético exterior B_{out} toma el valor fijo de 1 y el campo magnético interior B_{in} toma valores de 2, 3, 5 y 10.

- Para el caso de $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$: Los resultados de las trayectorias se muestran en la figura 4.19. La trayectoria muestra el cambio en el sentido de giro. Por ejemplo la figura 4.19a muestra una trayectoria regular, mientras que la trayectoria caótica se muestra en 4.19b. El espacio correspondiente a estas condiciones están en la figura 4.20. La configuración es diferente al del caso de los campos magnéticos paralelos. La región caótica se sitúa en la región superior del gráfico mientras que las regiones con trayectorias regulares en la región inferior, sin una forma definida.

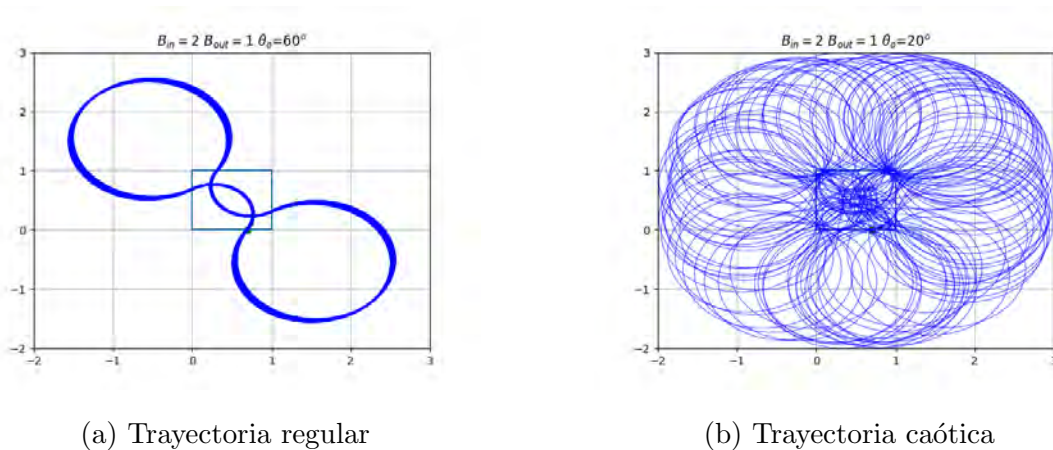


Figura 4.19: Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$

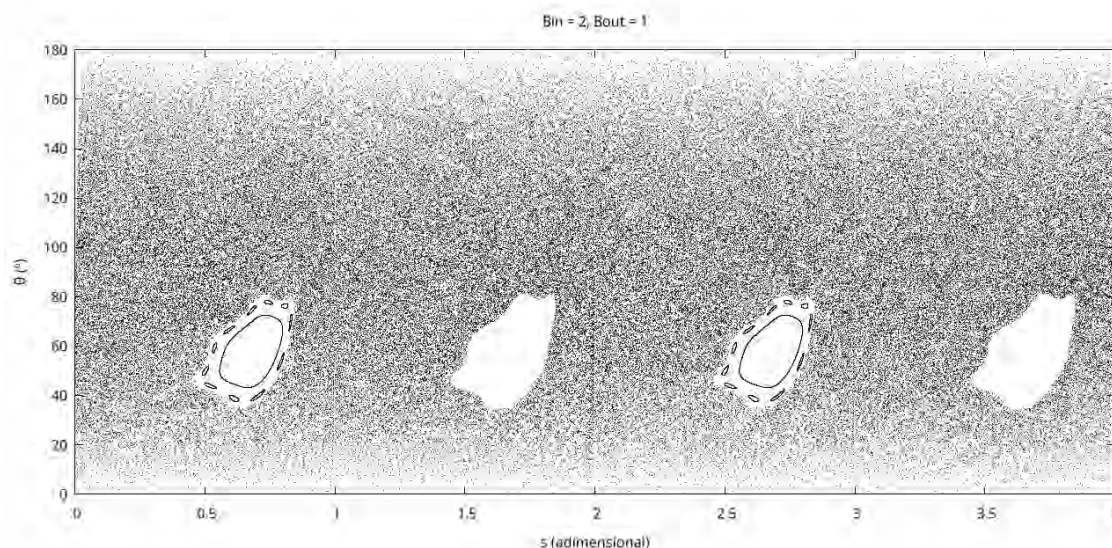
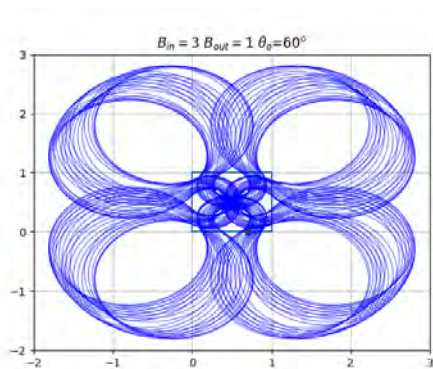
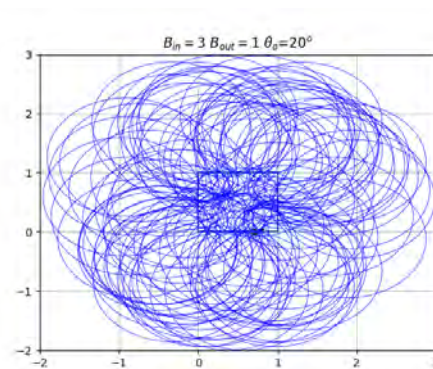


Figura 4.20: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos con $B_{in} = 2$ y $B_{out} = 1$

- Para el caso de $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$: Los resultados se muestran en la figura 4.21. El patrón en la figura regular aparece en la figura 4.21a mientras que la trayectoria irregular está en la figura 4.21b. El espacio de fases se ve en la figura 4.22. La región con trayectorias regulares sigue preservando una forma irregular y se mantiene en la zona inferior del gráfico.



(a) Trayectoria regular



(b) Trayectoria caótica

Figura 4.21: Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$

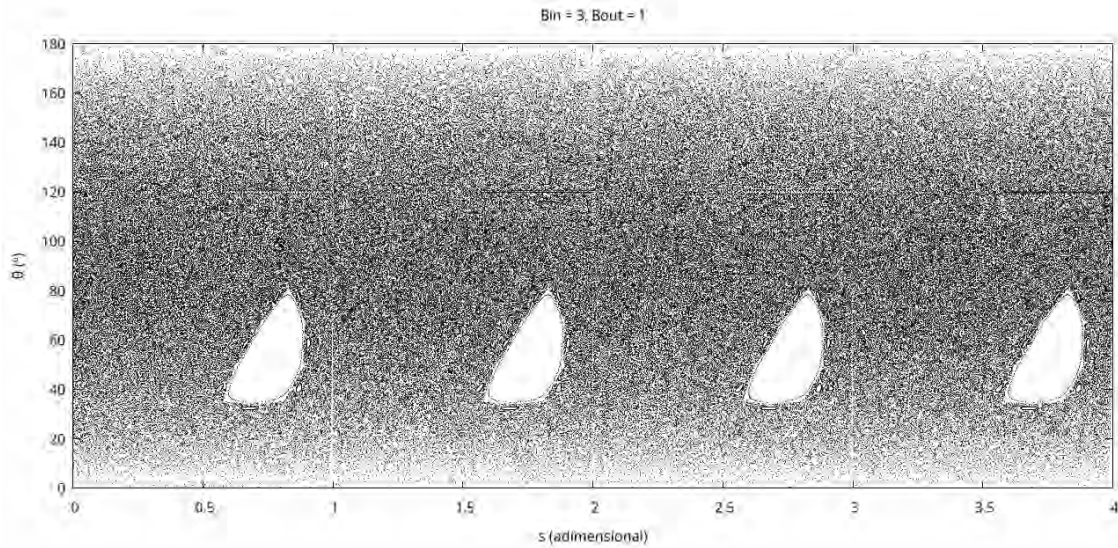


Figura 4.22: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos con $B_{in} = 3$ y $B_{out} = 1$

- Para el caso de $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$: A medida que el campo interior se incrementa como se en la figura 4.23, la partícula no pasa por la región en el centro del cuadrado. El patrón regular se encuentra en la figura 4.23a, y de la trayectoria caótica en 4.23b. El espacio de fases correspondiente se ve en la figura 4.24. La región con trayectorias regulares se aproxima a una forma triangular debido al incremento del campo magnético interior.

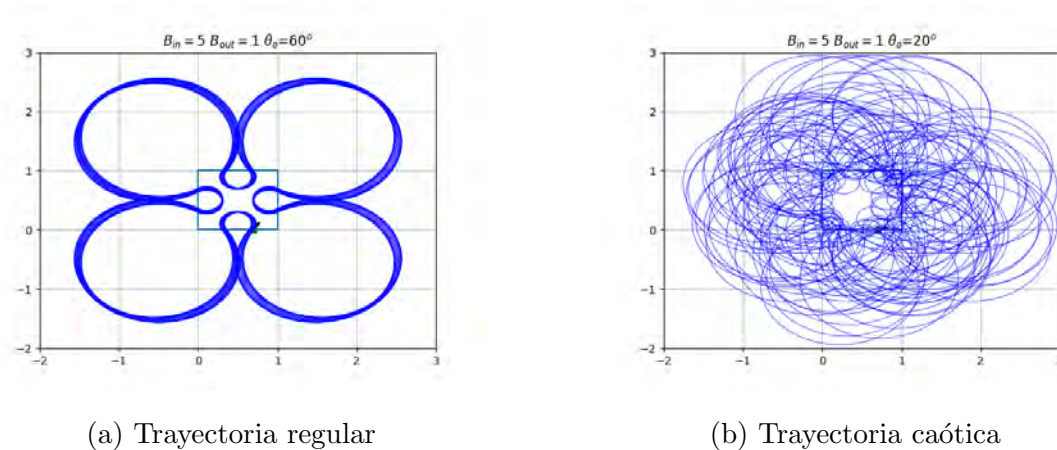


Figura 4.23: Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$

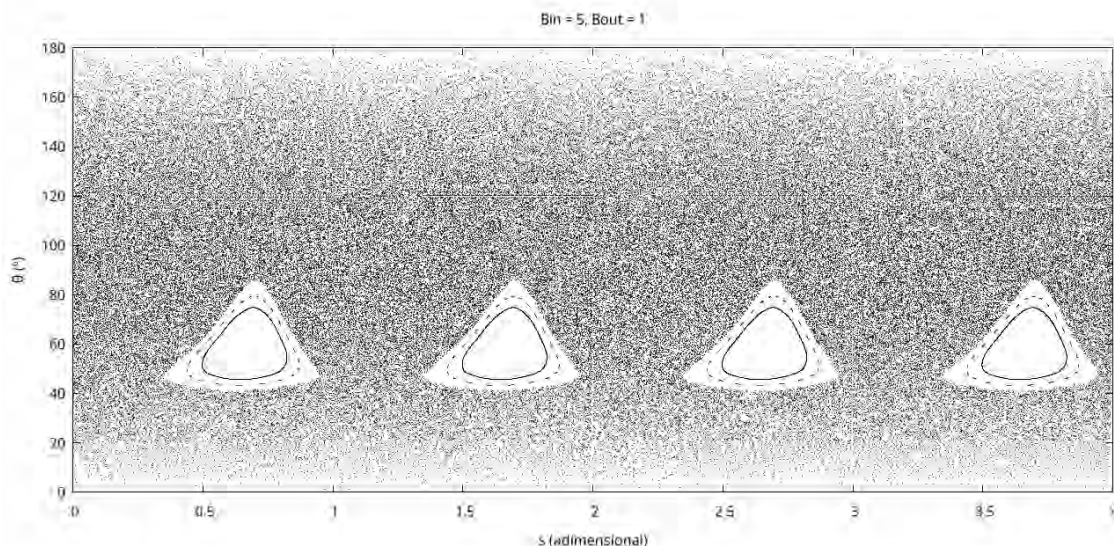


Figura 4.24: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos con $B_{in} = 5$ y $B_{out} = 1$

- Para el caso de $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$: Es notable la diferencia de los radios de curvatura en la figura 4.25. La trayectoria regular se muestra en en la figura 4.25a, mientras que la trayectoria caótica en la figura 4.25b. El espacio de fases de la figura 4.26 muestra que las regiones con trayectorias regulares se aproximan a una forma triangular, y es de menor tamaño que en los casos anteriores.

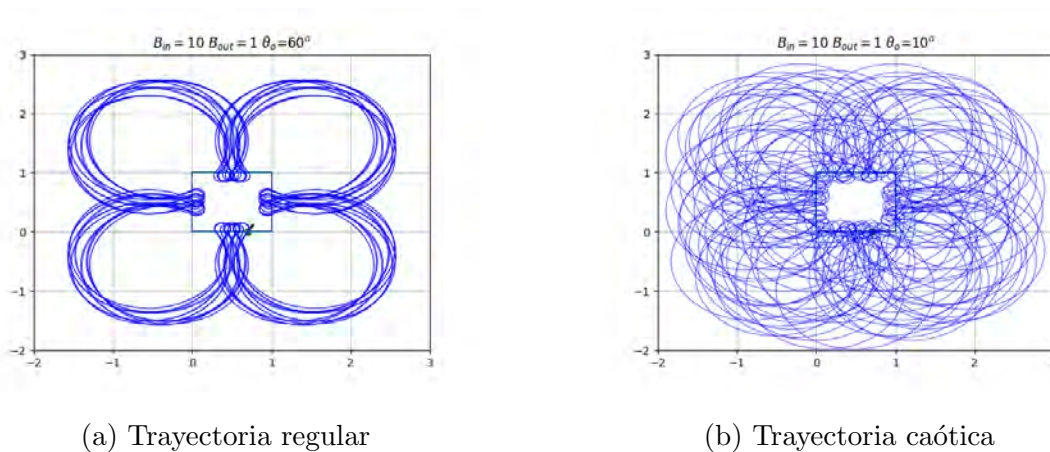


Figura 4.25: Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$

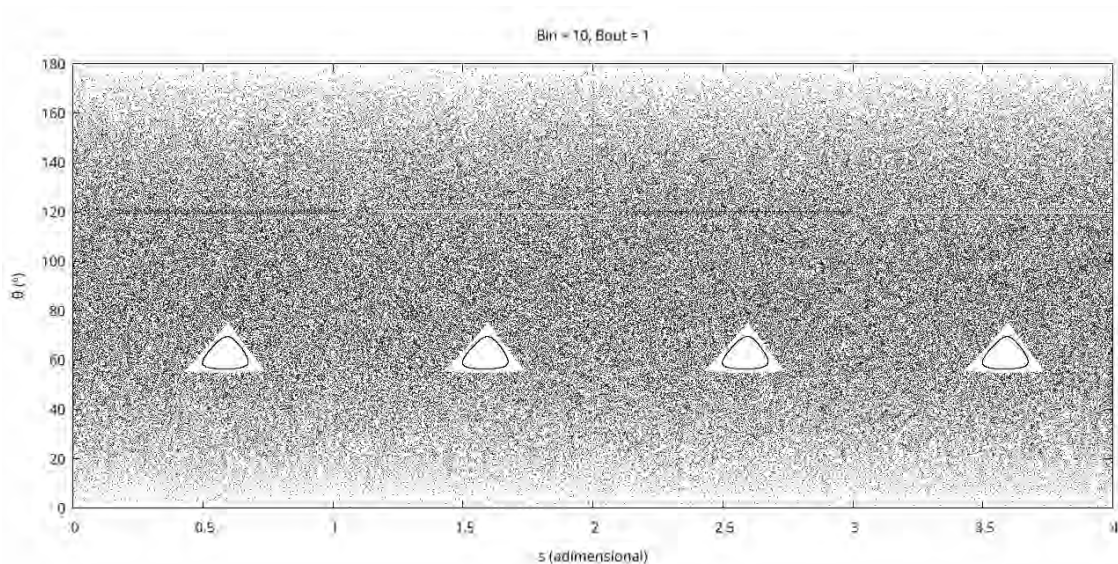
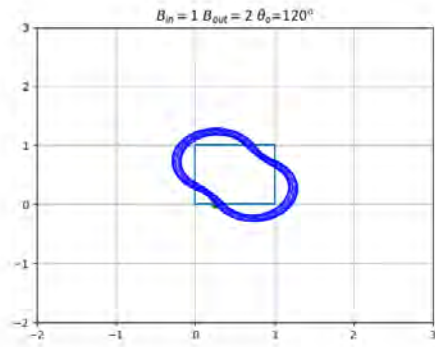


Figura 4.26: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos con $B_{in} = 10$ y $B_{out} = 1$

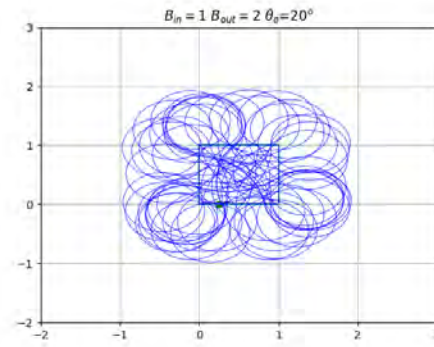
4.3.2. El caso $B_{in} < B_{out}$

El campo magnético interior B_{in} toma el valor fijo de 1 y el campo magnético exterior B_{out} toma valores de 2,3,5 y 10.

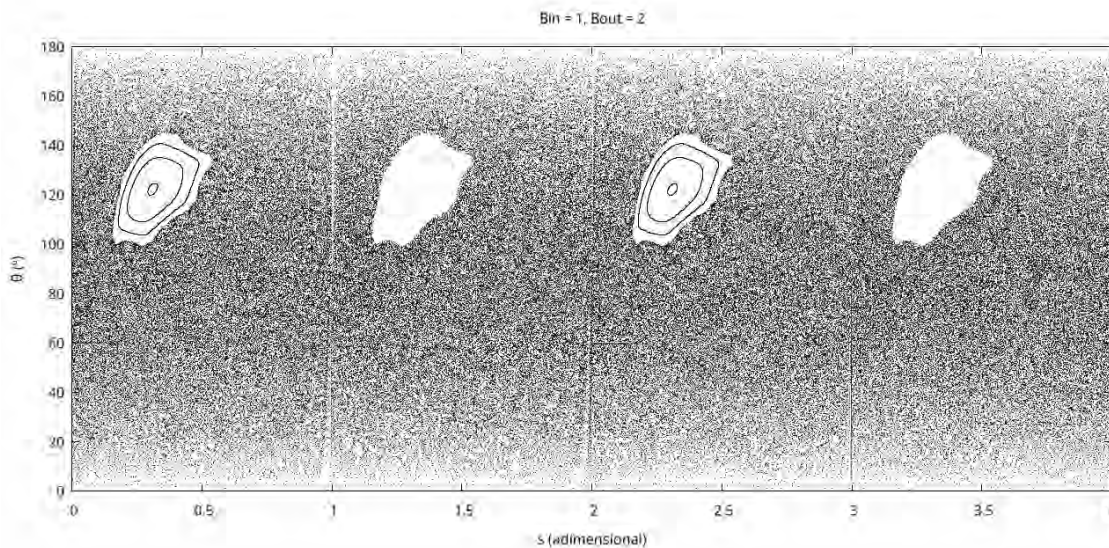
- Para el caso de $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$: Los resultados de las trayectorias de ejemplo se muestran en la figura 4.27. La trayectoria regular de la figura 4.27a muestra una figura con dos lóbulos, mientras que la trayectoria caótica se ve en la figura 4.27b. El espacio de fases de la figura 4.28 se divide en la una región caótica en la zona inferior del gráfico mientras que la región con trayectorias regulares se situa en la parte superior del gráfico, tiene un borde irregular.



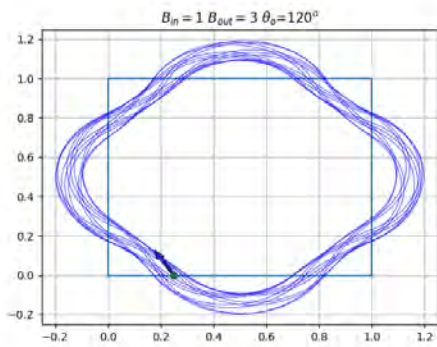
(a) Trayectoria regular



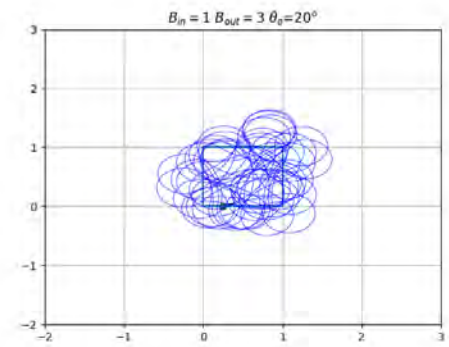
(b) Trayectoria caótica

Figura 4.27: Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$ Figura 4.28: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 2$

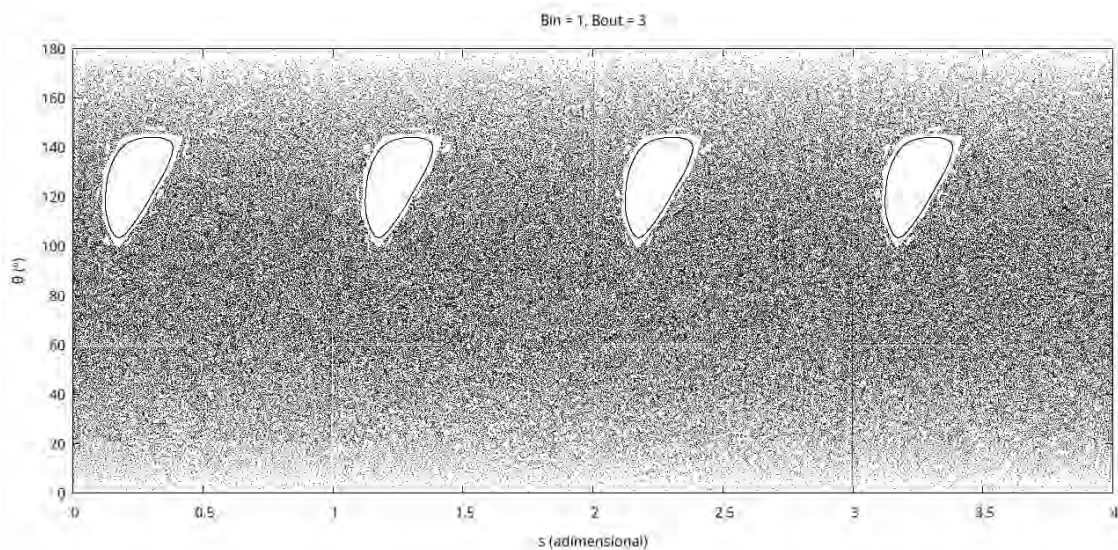
- Para el caso de $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$: Los resultados se muestran en la figura [4.29](#). La trayectoria regular se ve en la figura [4.29a](#), mientras que la trayectoria caótica se ve en la figura [4.29b](#). El espacio de fases correspondiente se ve en la figura [4.30](#) muestra que la región con trayectorias regulares tiene una forma menos irregular que el caso previo.



(a) Trayectoria regular



(b) Trayectoria caótica

Figura 4.29: Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$ Figura 4.30: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 3$

- Para el caso de $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$: Los resultados de las trayectorias se encuentran en la figura 4.31, en la figura 4.31a se ve la trayectoria regular mientras que la trayectoria caótica en la figura 4.31b. El espacio de fases se ve en la figura 4.32, la región con trayectorias regulares posee una frontera de forma triangular.

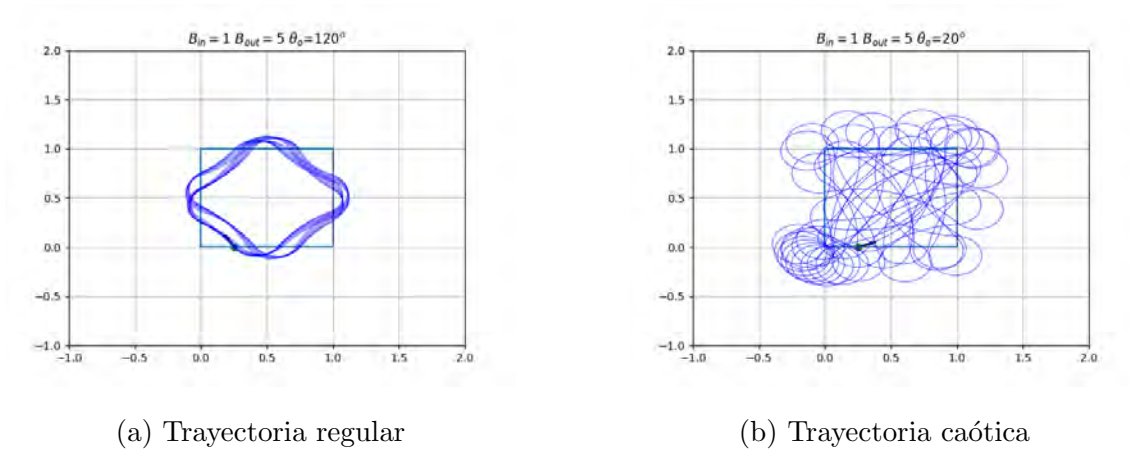


Figura 4.31: Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$

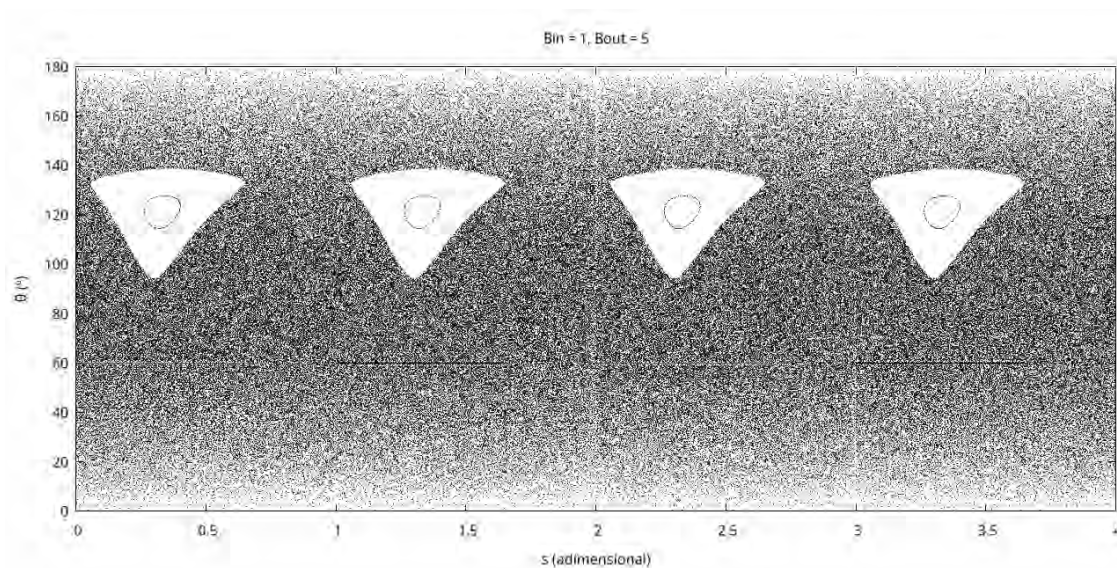


Figura 4.32: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 5$

- Para el caso de $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$: Los resultados se muestran en la figura 4.33, la trayectoria regular se muestra en la figura 4.33a y la trayectoria caótica en 4.33b. El espacio de fases de la figura 4.34 muestra que la región con trayectorias regulares tiene forma rectangular y de menor área que en los casos anteriores.

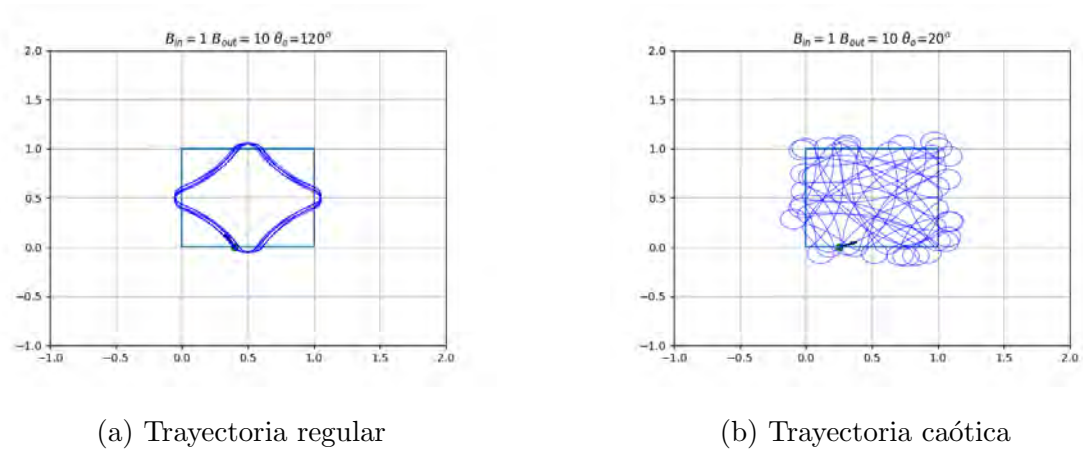


Figura 4.33: Campos magnéticos anti-paralelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$

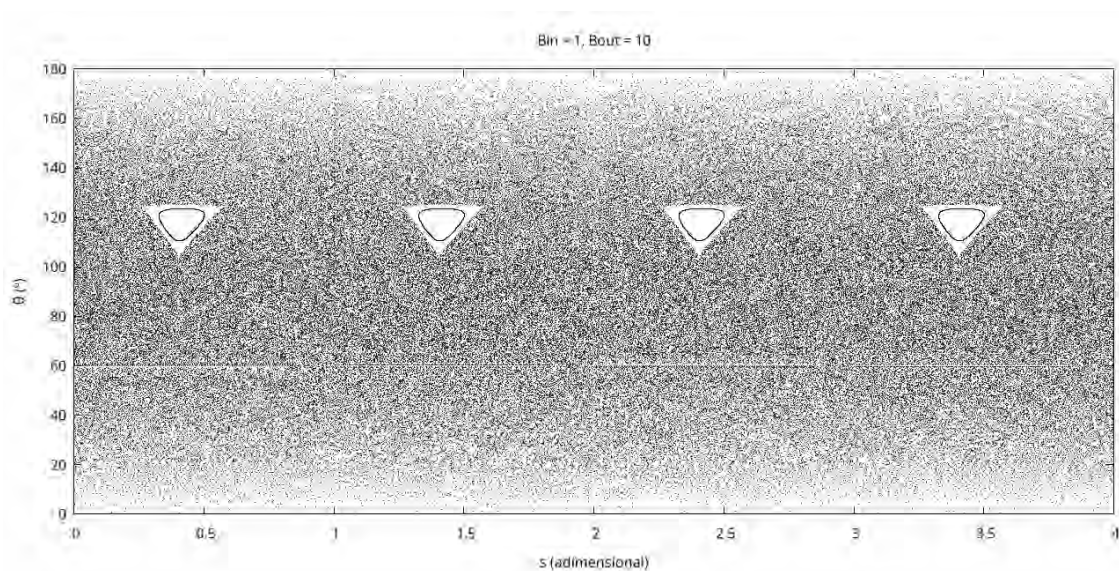


Figura 4.34: Espacio de fases para un billar de campos magnéticos antiparalelos con $B_{in} = 1$ y $B_{out} = 10$

Capítulo 5

Conclusiones

Respecto al objetivo general se ha elaborado una colección de funciones que fueron agrupadas en una librería en Python, denominada **magnetic.py**, esta simula la dinámica del billar magnético doble en una región cuadrada. El código fuente de la librería se encuentra en el Apéndice [A](#). La librería recibe como datos de entrada las condiciones iniciales y las intensidades de los campos magnéticos, al ejecutarse el código permite visualizar el comportamiento de la partícula. Incluye el código para el caso en que los campos magnéticos aplicados sean paralelos (en el apéndice [B](#)) o antiparalelos (en el apéndice [C](#)).

Referente al primer objetivo específico, la librería contiene funciones que simulan la trayectoria de la partícula en el billar magnético doble en una región cuadrada. Para esto se introducen como datos de entrada las coordenadas iniciales y las intensidades de los campos magnéticos interior y exterior, al ejecutarse el código muestra un gráfico de la trayectoria de partícula. Para todos los casos estudiados se observan trayectorias regulares y caóticas.

En relación al segundo objetivo específico se desarrollaron las funciones en la librería en Python para obtener los datos de las coordenadas s y θ en un archivo de texto y a partir de este graficar el espacio de fases para todos los casos expuestos. En todos los casos estudiados, la estructura del espacio de fases muestra regiones de puntos dispersos (correspondiente a condiciones iniciales que originan trayectorias caóticas) y regiones en blanco (correspondientes a condiciones iniciales que originan trayectorias regulares).

En cuanto al tercer objetivo, se identifica si una trayectoria es regular o caótica

mediante la inspección del espacio de fases del sistema que proporciona la librería. Si las condiciones iniciales de la trayectoria caen en la región de puntos desorganizados entonces la trayectoria es caótica, caso contrario, la trayectoria corresponde a una trayectoria regular. Todos los casos expuestos muestran que hay tanto trayectorias regulares como caóticas.

Apéndice A

Librería magnetic

La librería magnetic.py contiene todas las funciones requeridas para simular la dinámica del billar magnético.

```
1 '''
2 MAGNETIC ANTIPARALELO
3 '''
4
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 def solve2eq(A,B,C):
9     '''
10    Solve second-degree equation of the form
11    A*x**2 + B*x + C = 0
12    Input: A,B,C coefficients
13    Output: Two roots x1 and x2
14    Note: If there is no solutios
15    it returns an array [None,None]
16    '''
17    #Discriminant
18    d = B**2 - 4*A*C
19    if d<0:
20        #No real solutions
21        print('PROBLEMAS EN FUNCION solve2eq. d < 0')
22        return np.array([None,None])
```

```
23 else:
24     #Solving
25     x1 = (-B+np.sqrt(d))/(2*A)
26     x2 = (-B-np.sqrt(d))/(2*A)
27     sol = np.float128([x1,x2])
28     return sol
29
30
31
32 def normalVect(v):
33     '''
34     VECTOR NORMAL A LA VELOCIDAD
35     '''
36     return np.array([-v[1],v[0]])
37
38 def circunference(h,k,r):
39     '''
40     COORDENADAS (X,Y) PARA GRAFICAR LA TRAYECTORIA CIRCULAR
41     '''
42     angle = np.linspace(0,2*np.pi)
43     x = r*np.cos(angle)+h
44     y = r*np.sin(angle)+k
45     return np.array([x,y])
46
47 def modulo(X):
48     return (X[0]**2 + X[1]**2)**0.5
49
50 def unitary(X):
51     modulo = (X[0]**2 + X[1]**2)**0.5
52     return X/modulo
53
54 def centroCirc(P,v,B):
55     '''
56     P = (x,y) particle position
57     r = (rx,ry) vector from particle to circunference center
58     c = (h,k) position of the circunference center
```

```

59
60 c = r + P
61 '''
62 r = (1/B)*unitary( np.array([-v[1]*B,v[0]*B]) )
63 c = P + r
64 return c
65
66 def centroCircOut(P,v,B):
67     '''
68     P = (x,y) particle position
69     r = (rx,ry) vector from particle to circunference center
70     c = (h,k) position of the circunference center
71
72     c = r + P
73     '''
74     r = (1/B)*unitary( np.array([v[1]*B,-v[0]*B]) )
75     c = P + r
76     return c
77
78
79 def centroCirc2(P,v,R):
80     '''
81     HALLAR EL CENTRO DE CIRCUNFERENCIA
82     SI LA ENTRADA ES EL PUNTO Y LA VELOCIDAD
83     '''
84     normal_v = normalVect(v)
85     w = np.arctan(normal_v[0]/normal_v[1])
86     h = P[0]+R*np.sin(w)
87     k = P[1]+R*np.cos(w)
88     return np.array([h,k])
89
90 def rotar(v,angle):
91     '''
92     ROTAR UN VECTOR V UN ANGULO EN SENTIDO ANTI-HORARIO
93     '''
94     R = np.array([

```

```
95     [np.cos(angle), -np.sin(angle)],
96     [np.sin(angle), np.cos(angle)]
97 ])
```

```
98
99     return np.dot(R, v)
100
101 def intersection(h, k, r):
102     '''
103     INTERSECCION CON PARED VERTICAL x=0
104     '''
105     #y = np.sqrt(r**2 - h**2) + k
106     return np.sqrt(r**2 - h**2) + k
107
108 def intersection_base(centro, R):
109     '''
110     INTERSECCION CON EL PISO
111     '''
112     h, k = centro[0], centro[1]
113     if R**2 - k**2 < 0:
114         #print('intersection_base: no base intersection')
115         P1 = np.array([None, None])
116         P2 = np.array([None, None])
117
118     else:
119         s1 = np.sqrt(R**2 - k**2) + h
120         s2 = -np.sqrt(R**2 - k**2) + h
121         #retornar datos de menor a mayor
122         if s1 < s2:
123             x1 = s1
124             x2 = s2
125         else:
126             x1 = s2
127             x2 = s1
128         P1 = np.array([x1, 0])
129         P2 = np.array([x2, 0])
130     return np.array([P1, P2])
```

```
131
132 #def hatIntersection(centro,R):
133 # '''
134 # IS THERE HAT INTERSECTION?
135 # RETURN: TRUE OR FALSE
136 # '''
137 # gamma = R**2 - np.power(centro[0],2) - np.power(centro
138 #         [1],2) - 1
139 # A = centro[0]**2 + centro[1]**2
140 # B1 = gamma*centro[0]
141 # C = (gamma**2 / 4)-centro[1]**2
142 # discriminante = B1**2 - 4*A*C
143 # if discriminante >= 0 :
144 #     val = True
145 # else:
146 #     val = False
147 # return val
148
149 def circ_x_intersection(centro,R):
150     '''
151     INTERSECCION ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS
152     '''
153     gamma = R**2 - np.power(centro[0],2) - np.power(centro
154     [1],2) - 1
155     A = centro[0]**2 + centro[1]**2
156     B1 = gamma*centro[0]
157     C = (gamma**2 / 4)-centro[1]**2
158
159     discriminante = B1**2 - 4*A*C
160     #print('discriminante:',discriminante)
161     if discriminante > 0:
162         xhit = solve2eq(A,B1,C)
163         #ordenar de menor a mayor
164         if xhit[0]<xhit[1]:
```

```
165     x2 = xhit[1]
166     else:
167         x1 = xhit[1]
168         x2 = xhit[0]
169     return np.array([x1,x2])
170
171 elif discriminante == 0:
172     xhit = solve2eq(A,B1,C)
173     return np.array([xhit[0],xhit[1]])
174 else:
175     #print('No hat intersection')
176     return np.array([None,None])
177
178 def circ_y_intersection(xhit,centro,R):
179
180     if xhit[0] == None or xhit[1] == None:
181         return np.array([None,None])
182
183     elif xhit[0] == xhit[1]:
184         if 1-xhit[0]**2 < 0:
185             return np.array([None,None])
186         else:
187             y1,y2 = np.sqrt(1-xhit[0]**2),-np.sqrt(1-xhit[0]**2)
188             return np.array([y1,y2])
189
190     else:
191
192         y1A,y1B = np.sqrt(1-xhit[0]**2), -np.sqrt(1-xhit[0]**2)
193         y2A,y2B = np.sqrt(1-xhit[1]**2), -np.sqrt(1-xhit[1]**2)
194
195         d1A = (centro[0]-xhit[0])**2 + (centro[1]-y1A)**2 - R**2
196         d1B = (centro[0]-xhit[0])**2 + (centro[1]-y1B)**2 - R**2
197
198         if np.abs(d1A) < np.abs(d1B):
199             y1 = y1A
200     else:
```

```

201     y1 = y1B
202
203     d2A = (centro[0]-xhit[1])**2 + (centro[1]-y2A)**2 - R**2
204     d2B = (centro[0]-xhit[1])**2 + (centro[1]-y2B)**2 - R**2
205     if np.abs(d2A) < np.abs(d2B):
206         y2 = y2A
207     else:
208         y2 = y2B
209
210     return np.array([y1,y2])
211
212 def unitary_vector(v):
213     '''
214     RETURNS UNITARY VECTOR
215     Input:
216     > v: two dimensional vector
217     Output:
218     Unitary vector of v
219     '''
220     return v/np.sqrt(v[0]**2 + v[1]**2)
221
222
223 def reflexVelocityHat(hit,velocity):
224     '''
225     If ball collides with mushroom hat, this functions returns
226     the reflex velocity
227     JUST FOR THE MUSHROOM (FOR THE MOMENT)
228     '''
229     normal = unitary_vector(-hit) #vector normal
230     reflex = np.float128(velocity - (np.dot(2*velocity,normal))
231         *normal) #vector velocidad reflexion
232     return reflex
233
234 def arcPlot(c):
235     '''
236     plot arc inside table

```

```
235     '''
236     cx = c[0]
237     cy = c[1]
238     arcx = np.array([])
239     arcy = np.array([])
240     for i in range(len(cx)):
241         if cx[i]**2 + cy[i]**2 <= 1 and cy[i]>=0:
242             plt.plot(cx[i],cy[i], 'k.')
243             #arcx=np.append(arcx,cx[i])
244             #arcy=np.append(arcy,cy[i])
245
246 def trajectory(pos,vel):
247     '''
248     Trajectory of particle
249     Input:
250     > pos: initial position
251     > vel: initial velocity
252     Output: Line equation of the trajectory of the ball  $y=m*x$ 
253     +b
254     > m: slope
255     > b: y-axis intersection
256     '''
257     m = vel[1]/vel[0]
258     b = pos[1] - m*pos[0]
259     trajectory = np.array([m,b]) #m y b trajectory
260     return trajectory
261
262 def tangent(hit):
263     '''
264     Tangent line on hat's point
265     Input:
266     > hit: collision point on hat
267     Output: equation of tangent line on a given hat point
268      $yT = mT*x + bT$ 
269     >mT : slope of tangent Tline
270     >bT : y-axis intersection
```

```
270     '''
271     mT = -hit[0]/hit[1]
272     bT = hit[1] - mT*hit[0]
273     tangent = np.array([mT,bT]) # m and b of tangent line
274     return tangent
275
276 def angleVectors(m1,m2):
277     '''
278     Angle between two vectors given the slopes
279     Input:
280     > m1,m2: slope of the two vectors
281     Output:
282     > alpha: Angle between 2 vectors
283     '''
284     alpha = np.arctan(np.abs((m1-m2)/(1+m1*m2)))
285     return alpha
286
287
288 def thetaAngle(hat):
289     '''
290     Scaling the theta angle (horizontal axis of phase space)
291     '''
292     theta = np.arctan(hat[1]/hat[0])
293     if hat[0]<0:
294         if hat[1]>0:
295             theta = np.pi - np.arctan(-hat[1]/hat[0])
296         elif hat[1]<0:
297             theta = np.pi + np.arctan(np.abs(hat[1]/hat[0]))
298     if hat[0]>0 and hat[1]<0:
299         theta = 3*np.pi/2 + np.arctan(np.abs(hat[0]/hat[1]))
300     return theta
301
302 def phiAngle(theta,hat):
303     '''
304     Determining phi angle
305     '''
```

```

306 phi = np.pi/2 + theta
307
308 if hat[0]>0 and hat[1]<0:
309     phi = np.pi/2 - np.arctan(np.abs(hat[1]/hat[0]))
310 return phi
311
312 def alphaAngle(hat,veloReflex,phi):
313     '''
314     Alpha Angle
315     '''
316     #trajectoryLine = trajectory(ri,vi)
317     tangentLine = tangent(hat)
318     alpha = angleVectors(tangentLine[0],veloReflex[1]/
319         veloReflex[0])
320     if hat[0]>0:
321         if hat[1]>0:
322             if veloReflex[0]<0 and veloReflex[1]<0:
323                 alpha = np.pi - phi + np.arctan(np.abs(veloReflex[1])
324 /np.abs(veloReflex[0]))
325             if veloReflex[0]>0 and veloReflex[1]<0:
326                 alpha = np.pi - alpha
327         if hat[1]<0:
328             if veloReflex[0]<0 and veloReflex[1]>0:
329                 alpha = np.pi/2 - phi + np.arctan(np.abs(veloReflex
330 [0]/veloReflex[1]))
331             if veloReflex[0]<0 and veloReflex[1]<0:
332                 alpha = np.pi - alpha
333
334 if hat[0]<0:
335     if hat[1]>0:
336         if veloReflex[0]>0 and veloReflex[1]<0:
337             alpha = (3*np.pi/2 - phi) + np.arctan(np.abs(
338 veloReflex[0])/np.abs(veloReflex[1]))
339         if veloReflex[0]>0 and veloReflex[1]>0:
340             alpha = np.pi - alpha
341     if hat[1]<0:

```

```
338     if veloReflex[0]>0 and veloReflex[1]>0:
339         alpha = 2*np.pi - phi + np.arctan(np.abs(veloReflex
147 [1]/veloReflex[0]))
340     if veloReflex[0]<0 and veloReflex[1]>0:
341         alpha = np.pi - alpha
342
343     return alpha
344
345 def hatCollision(pos,vel):
346     '''
347     This function detects the collision points on the
148 mushroom hat
349     Expected two points because it solves the intersection
350 of a circunference and a line
351     Input:
352     > pos : initial position of the ball
353     > vel : initial velocity of the ball
354     Output:
355     > posChoque: Collision points P1 and P2
356     '''
357     xout = pos[0]
358     yout = pos[1]
359     m = vel[1]/vel[0]
360     b = pos[1] - m*pos[0]
361     A = m**2 + 1
362     B = 2*m*b
363     C = b**2 - 1
364     xsol = solve2eq(A,B,C)
365     x1,x2 = xsol[0],xsol[1]
366     if np.absolute(x1-xout) < np.absolute(x2-xout):
367         xchoque = x1
368     else:
369         xchoque = x2
370     ychoque = m*xchoque + b
371     posChoque = np.float64([xchoque,ychoque])
372     return posChoque
```

```

372
373
374
375 def hatLineIntersection(gamma_left, gamma_right, B):
376     '''
377     Function for plotting the mushroom hat.
378     Intersection between hat and tilted line for plotting
379     Input:
380     > gamma_left, gamma_right : angles
381     > B: base
382     Output: Left and right points of intersection of tilted
383     lines and mushroom hat
384     '''
385     Pleft = hatCollision([-B/2,0], [-np.cos(gamma_left), np.
386     sin(gamma_left)])
387     Pright = hatCollision([B/2,0], [np.cos(gamma_right), np.sin
388     (gamma_right)])
389     return [Pleft, Pright]
390
391 def arcHatPlot(gamma_left, gamma_right, B):
392     '''
393     Draw the hat
394     Input: gamma_left, gamma_right, B
395     Output: Mushroom hat plot
396     '''
397     Pleft, Pright = hatLineIntersection(gamma_left, gamma_right
398     , B)
399     alpha0 = np.arctan(Pright[1]/Pright[0])
400     alphaF = np.pi + np.arctan(Pleft[1]/Pleft[0])
401     alpha = np.linspace(alpha0, alphaF, 50000)
402     x = np.cos(alpha)
403     y = np.sin(alpha)
404
405     plt.plot(x, y, 'r')
406
407 def mushroomPlot(gamma_left, gamma_right, B, H):

```

```

404     '''
405     Draw all the mushroom
406     Input:
407     > Gamma Left and gamma right angle
408     > B: base
409     > H: height
410     Output:
411     Mushroom Plot
412     '''
413     Pleft,Pright = hatLineIntersection(gamma_left,gamma_right
414     ,B)
415     arcHatPlot(gamma_left,gamma_right,B)
416     plt.plot([-B/2,-B/2],[0,-H],'r')
417     plt.plot([-B/2,B/2],[-H,-H],'r')
418     plt.plot([B/2,B/2],[-H,0],'r')
419     plt.plot([Pleft[0],-B/2],[Pleft[1],0],'r')
420     plt.plot([Pright[0],B/2],[Pright[1],0],'r')
421 def wallCircleIntersection(wall,centro,radio):
422     '''
423     Intersección entre la pared inclinada y la trayectoria
424     circunferencial
425     ordenado de izquierda a derecha
426     '''
427     m = wall[0]
428     b = wall[1]
429     A = 1 + m**2
430     B = 2*(-centro[0]+m*b-m*centro[1])
431     C = centro[0]**2 + b**2 - 2*b*centro[1] + centro[1]**2 -
432     radio**2
433
434     if B**2 - 4*A*C < 0:
435         P1 = np.array([None,None])
436         P2 = np.array([None,None])
437     else:

```

```
437     x = solve2eq(A,B,C)
438     if x[0] < x[1]:
439         x1 = x[0]
440         x2 = x[1]
441     else:
442         x1 = x[1]
443         x2 = x[0]
444     y1 = m*x1 + b
445     y2 = m*x2 + b
446     P1 = np.array([x1,y1])
447     P2 = np.array([x2,y2])
448     return [P1,P2]
449
450 def reflexVelocityWall(normal,velocity):
451     '''
452     Reflexion velocity for a ball colliding on a wall
453     '''
454     reflex = np.float64(velocity - (2*np.dot(velocity,normal))*
455         normal)
456     return reflex
457
458 def hatCircleIntersection(centro,R):
459     '''
460     COLLISION WITH HAT
461     '''
462     gamma = R**2 - np.power(centro[0],2) - np.power(centro
463         [1],2) - 1
464     A = centro[0]**2 + centro[1]**2
465     B1 = gamma*centro[0]
466     C = (gamma**2 / 4) - centro[1]**2
467     discriminante = B1**2 - 4*A*C
468
469     if discriminante >= 0:
470         xhit = circ_x_intersection(centro,R)
471         yhit = circ_y_intersection(xhit,centro,R)
472         P1 = np.array([xhit[0],yhit[0]])
```

```
471     P2 = np.array([xhit[1],yhit[1]])
472     else:
473         P1 = np.array([None,None])
474         P2 = np.array([None,None])
475     return np.array([P1,P2])
476
477 def verticalLineCircunference(R,c,x):
478     '''
479     Intersection between vertical line x=constante
480     and a circunference
481     '''
482     h,k = c[0],c[1]
483     #hallando discriminante
484     Adiscr = 1
485     Bdiscr = -2*k
486     Cdiscr = k**2 + (x-h)**2 - R**2
487
488     discr = Bdiscr**2 - 4*Adiscr*Cdiscr
489
490     if discr >= 0:
491         #print('Si hay solucion')
492         y1 = (-Bdiscr + np.sqrt(discr))/(2*Adiscr)
493         y2 = (-Bdiscr - np.sqrt(discr))/(2*Adiscr)
494         sol1 = np.array([x,y1])
495         sol2 = np.array([x,y2])
496
497     elif discr < 0:
498         #print('No hay solucion')
499         sol1 = np.array([None,None])
500         sol2 = np.array([None,None])
501
502     else:
503         print('PROBLEMAS CON LA DISCRIMINANTE')
504
505     #sol1 = np.array([x,y1])
506     #sol2 = np.array([x,y2])
```

```
507
508     return [sol1,sol2]
509
510 def horizontalLineCircunference(R,c,y):
511     '''
512     Interesction between horizontal line y=constante
513     '''
514     h,k = c[0],c[1]
515     Adiscr = 1
516     Bdiscr = -2*h
517     Cdiscr = h**2 + (y-k)**2 - R**2
518
519     discr = Bdiscr**2 - 4*Adiscr*Cdiscr
520
521     if discr >= 0:
522         #print('Si hay solucion')
523         x1 = (-Bdiscr + np.sqrt(discr))/(2*Adiscr)
524         x2 = (-Bdiscr - np.sqrt(discr))/(2*Adiscr)
525         sol1 = np.array([x1,y])
526         sol2 = np.array([x2,y])
527
528     elif discr < 0:
529         #print('No hay soluci n')
530         sol1 = np.array([None,None])
531         sol2 = np.array([None,None])
532     else:
533         print('PROBLEMAS CON LA DISCRIMINANTE')
534
535     #sol1 = np.array([x1,y])
536     #sol2 = np.array([x2,y])
537
538     return [sol1,sol2]
539
540 def validarPoints(punto):
541     """
```

```
542     Dado un conjunto de puntos se valida las
intersecciones
543     """
544     if punto[0] is None:
545         #print('Punto no valida')
546         val = np.array([None, None])
547     else:
548         #verificar si los puntos estan dentro de las
fronteras
549         if punto[0] >= 0 and punto[0] <= 1:
550             #print('VALIDO')
551             if punto[1] >= 0 and punto[1] <= 1:
552                 #print('CONFIRMADO, VALIDO')
553                 val = punto
554             else:
555                 #print('lo siento, no valido
')
556                 val = np.array([None, None])
557         else:
558             #print('No valido')
559             val = np.array([None, None])
560     return val
561
562 def sDistance(P):
563     '''
564     Hallando la distancia s
565     '''
566     if P[1] == 0:
567         s = P[0]
568     elif P[0] == 1:
569         s = P[0] + P[1]
570     elif P[1] == 1:
571         s = 2 + (1 - P[0])
572     elif P[0] == 0:
573         s = 4 - P[1]
574     else:
```

```
575         print(10*' ', 'PROBLEMAS')
576
577     return s
578
579 def sThetaAngle(P,v):
580     '''
581     Hallar angulo theta entre pared y velocidad
582     '''
583     if P[1] == 0: #Down
584         T = np.array([1,0])
585         if v[0] > 0: #apuntar a la derecha
586             #menor de 90
587             angle = np.arccos(v[0]/np.sqrt(v
588 [0]**2 + v[1]**2))
589         elif v[0] < 0: #apuntar a la izquierdaa
590             #mayor de 90
591             #angle = np.pi - np.arccos(v[0]/np.
592 sqrt(v[0]**2 + v[1]**2))
593             angle = np.arccos(v[0]/np.sqrt(v
594 [0]**2 + v[1]**2))
595         elif P[0] == 1 : #Right
596             T = np.array([0,1])
597             if v[1] > 0: #apuntar arriba
598                 #menor de 90
599                 #angle = np.arccos(v[1]/np.sqrt(v
600 [0]**2 + v[1]**2))
601                 angle = np.arccos(v[1]/np.sqrt(v
602 [0]**2 + v[1]**2))
603             elif v[1] < 0: #apuntar abajo
604                 #mayor de 90
605                 #angle = np.pi - np.arccos(v[1]/np.
606 sqrt(v[0]**2 + v[1]**2))
607                 angle = np.arccos(v[1]/np.sqrt(v
608 [0]**2 + v[1]**2))
609         elif P[1] == 1: # Up
610             T = np.array([-1,0])
```

```

604         if v[0] > 0: #apuntar a la derecha
605             #mayor de 90
606             #angle = np.pi - np.arccos(v[0]/np.
sqrt(v[0]**2 + v[1]**2))
607             angle = np.pi - np.arccos(v[0]/np.
sqrt(v[0]**2 + v[1]**2))
608         elif v[0] < 0: #apuntar a la izquierda
609             #menor de 90
610             angle = np.pi - np.arccos(v[0]/np.
sqrt(v[0]**2 + v[1]**2))
611         elif P[0] == 0 : #Left
612             T = np.array([0,-1])
613             if v[1] > 0: #apuntar arriba
614                 #mayor de 90
615                 angle = np.pi - np.arccos(v[1]/np.
sqrt(v[0]**2 + v[1]**2))
616                 #angle = np.arccos(v[1]/np.sqrt(v
[0]**2 + v[1]**2))
617             elif v[1] < 0: #apuntar abajo
618                 #menor de 90
619                 #angle = np.arccos(v[1]/np.sqrt(v
[0]**2 + v[1]**2))
620                 angle = np.pi - np.arccos(v[1]/np.
sqrt(v[0]**2 + v[1]**2))
621         else:
622             print('PROBLEMAS')
623
624
625         return angle
626
627 def pointOut(centro,P,R):
628     '''
629     Retorna el punto de salida
630     '''
631     h,k = centro[0],centro[1]
632     x,y = P[0],P[1]

```

```
633     hits = [] #lista que guarda todos los puntos de
choque
634     right1,right2 = verticalLineCircunference(R,centro,1)
635     valright1 = validarPoints(right1)
636     valright2 = validarPoints(right2)
637     if valright1[0] is not None:
638         hits.append(right1)
639     if valright2[0] is not None:
640         hits.append(right2)
641     left1,left2 = verticalLineCircunference(R,centro,0)
642     valleft1 = validarPoints(left1)
643     valleft2 = validarPoints(left2)
644     if valleft1[0] is not None:
645         hits.append(left1)
646     if valleft2[0] is not None:
647         hits.append(left2)
648     up1,up2 = horizontalLineCircunference(R,centro,1)
649     valup1 = validarPoints(up1)
650     valup2 = validarPoints(up2)
651     if valup1[0] is not None:
652         hits.append(up1)
653     if valup2[0] is not None:
654         hits.append(up2)
655     down1,down2 = horizontalLineCircunference(R,centro,0)
656     valdown1 = validarPoints(down1)
657     valdown2 = validarPoints(down2)
658     if valdown1[0] is not None:
659         hits.append(down1)
660     if valdown2[0] is not None:
661         hits.append(down2)
662     ###
663     #Detectar puntos
664     ###
665     punto_partida = thetaAngle(np.array([P[0]-centro[0],P
[1]-centro[1]]))
666     points_list = []
```

```

667     resta_list = []
668     #hallar el punto de partida
669     for point in hits:
670         resta = np.abs(punto_partida - thetaAngle(np.
array([point[0]-centro[0],point[1]-centro[1]])))
671         if resta < 10e-8:
672             #print('partida',point)
673                 pass
674         else:
675             points_list.append(point)
676             resta_list.append(resta)
677
678     vPartida = np.array([P[0]-centro[0],P[1]-centro[1]])
679     anguloPoint_list = []
680     for hit in points_list:
681         vhit = np.array([ hit[0]-centro[0],hit[1]-
centro[1] ])
682         cos = (vPartida[0]*vhit[0] + vPartida[1]*vhit
[1])/(modulo(vPartida)*modulo(vhit))
683         arccos = np.arccos(cos)
684         cruz = np.cross([vPartida[0],vPartida[1],0],[
vhit[0],vhit[1],0])
685
686         if cruz[2] < 0:
687             #mayor de 180
688                 if cos > 0:
689                     anguloPoint = 2*np.pi - np.
abs(np.arccos(cos))
690                 else:
691                     anguloPoint = 2*np.pi - np.
abs(np.arccos(cos))
692             else:
693                 #menor de 180
694                     anguloPoint = np.arccos(cos)
695                 if anguloPoint < 0:

```

```
696         anguloPoint = np.pi +
anguloPoint
697         anguloPoint_list.append(anguloPoint)
698
699
700     choque = points_list[np.argmin(anguloPoint_list)]
701     hit = choque
702     P = choque
703     #print('Punto salida',P)
704
705     return P
706
707 def veloOut(P,centro):
708     '''
709     Velocidad de salida
710     '''
711     if P[1] == 1:
712         d = P - centro
713         vOut = rotar(d,np.pi/2)
714     elif P[0] == 0:
715         #print('choque pared izquierda')
716         d = P - centro
717         vOut = rotar(d,np.pi/2)
718     elif P[1] == 0:
719         #print('choque base')
720         d = P - centro
721         vOut = rotar(d,np.pi/2)
722
723     elif P[0] == 1:
724         #print('choque pared derecha')
725         d = P - centro
726         vOut = rotar(d,np.pi/2)
727
728     else:
729         print('problemas!!')
730
```

```
731     #print('velo salida',vOut) ### velo de salida
732     return vOut
733
734 def plotArc(A1,A2,centro,R,cline):
735     '''
736     Graficar arco de circunferencia
737     '''
738     #hit = P
739     #A2 = hit
740     #para A
741     thetaA1 = thetaAngle(np.array([A1[0]-centro[0],A1[1]-
742     centro[1]]))
743     #print('angulo 1 punto A',np.rad2deg(thetaA1))
744     #para B
745     thetaA2 = thetaAngle(np.array([A2[0]-centro[0],A2[1]-
746     centro[1]]))
747     #print('angulo 2 punto B',np.rad2deg(thetaA2))
748
749     if thetaA1 < thetaA2:
750         #theta = np.linspace(0,thetaB-thetaA,num=10)
751         thetaList = np.linspace(thetaA1,thetaA2,num
752         =100)
753     else: #thetaA > thetaB
754         thetaList = np.linspace(thetaA1,thetaA2+2*np.
755         pi,num=100)
756     #theta = np.linspace(0,thetaB-thetaA,num=10)
757     #print(np.rad2deg(thetaList))
758     #R = np.matrix([[np.cos(theta),-np.sin(theta)],[np.sin(
759     theta),np.cos(theta)]])
760     curveX = R*np.cos(thetaList)+centro[0]
761     curveY = R*np.sin(thetaList)+centro[1]
762     plt.plot(curveX,curveY,color = cline, linewidth=0.5)
```


Apéndice B

Código Paralelo

El siguiente código hace uso de la librería del apéndice [A](#) para simular la dinámica de la partícula en campos magnéticos paralelos.

```
1 import numpy as np
2 from magnetic import *
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 #####
6 #Par metros de entrada #
7 #####
8 print(10*'=' )
9 print('BIENVENIDO AL BILLAR INVERSO CON CAMPO MAGNETICO
10         INTERIOR')
11 print('CAMPO MAGNETICO PARALELO')
12 print(10*'=' )
13 Bin,Bout = 10,1
14 vAngle = 100 # en grados sexagesimales
15 #####
16 Rin,Rout = 1/Bin,1/Bout
17 x,y = 0.6 , 0.0 #ubicaci n inicial
18 P = np.array([x,y])
19
20 vx,vy = np.cos(np.deg2rad(vAngle)),np.sin(np.deg2rad(vAngle))
        #velocidad inicial
```

```

21 v = np.array([vx,vy])
22 print('Campo Magnetico interior:',Bin)
23 print('Campo Magnetico exterior:',Bout)
24 print('Posici n inicial:',P)
25 print('Velocidad inicial(angulo):',vAngle)
26 plt.xlim(-2,3)
27 plt.ylim(-2,3)
28 plt.plot(x,y,'go')
29 plt.plot([0,1,1,1,0,0],[0,0,1,1,1,0])
30 file1 = open('sdata.txt',"w")
31 #file2 = open('unfolded.dat',"w")
32
33 for i in range(10000):
34     #print('Iteracion',i)
35     #print('SALIDA')
36     A1 = P
37     centro = centroCirc(P,v,Bin)
38     P = pointOut(centro,P,Rin) #punto salida
39     #print('PUNTO SALIDA',P)
40     v = veloOut(P,centro)
41     #print('VELOCIDAD SALIDA',v)
42     plotArc(A1,P,centro,Rin)
43     #####
44     #print('INGRESO')
45     A1 = P
46     centro = centroCirc(P,v,Bout)
47     P = pointOut(centro,P,Rout) #punto salida
48     #print('PUNTO INGRESO',P)
49     v = veloOut(P,centro)
50     #print('VELOCIDAD INGRESO',v)
51     #plt.arrow(P[0],P[1],v[0],v[1])
52     plotArc(A1,P,centro,Rout)
53     #print(sDistance(P),v,np.rad2deg(sThetaAngle(P,v)))
54     ##### GUARDAR DATA S Y UNFOLDED
55     file1.write(str(sDistance(P))+"\t"+str(np.rad2deg(
sThetaAngle(P,v))+"\n")

```

```
56         #file2.write(str(i+P[0])+"\t"+str(i+P[1])+"\n")
57
58 print('Plot de la trayectoria guardado en trajectory_plot.png
    ')
59 plt.savefig('trajectory_plot.png')
60 plt.clf()
61 file1.close()
62 phaseData = np.loadtxt('sdata.txt')
63 plt.plot(phaseData[:,0],phaseData[:,1], 'r,')
64 plt.xlim(0,4)
65 plt.ylim(0,360)
66 plt.savefig('phase_space.png')
67 print('Data del espacio de fases guardado en sdata.txt')
68 print('Plot del espacio de fases guardado en phase_space.png'
    )
69 #plt.show()
```


Apéndice C

Código Antiparalelo

El siguiente código hace uso de la librería del apéndice [A](#) para simular la dinámica de la partícula en campos magnéticos antiparalelos.

```
1
2 import numpy as np
3 from magnetic import *
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 #####
7 #Par metros de entrada #
8 #####
9 print('BIENVENIDO AL BILLAR INVERSO CON CAMPO MAGNETICO
10       INTERIOR')
11 print('CAMPOS ANTIPARALELOS')
12 Bin,Bout = 10,1
13 Rin,Rout = 1/Bin,1/Bout
14
15 x,y = 0.13 , 0 #ubicaci n inicial
16 xi,yi=x,y
17 P = np.array([x,y])
18 vx,vy = np.cos(np.deg2rad(45.0)),np.sin(np.deg2rad(45.0)) #
19       velocidad inicial
20 vxi,vyi=vx,vy
21 v = np.array([vx,vy])
22 print('Campo Magnetico interior:',Bin)
```

```

21 print('Campo Magnetico exterior:',Bout)
22 print('Posici n inicial:',P)
23 print('Velocidad inicial:',v)
24 #plt.title('Billar Magn tico')
25 plt.grid()
26 plt.xlim(-2,3)
27 plt.ylim(-2,3)
28 plt.plot(x,y,'go')
29 plt.arrow(xi,yi,vx/10,vy/10,width=0.01)
30
31 plt.plot([0,1,1,1,0,0],[0,0,1,1,1,0])
32 file1 = open('sdata.dat',"w")
33 file2 = open('unfolded.dat',"w")
34 for i in range(10):
35     #print('Iteracion',i)
36     #print('==>SALIDA')
37     A1 = P
38     centro = centroCirc(P,v,Bin)
39     #print('CENTRO SALIDA',centro[0],centro[1])
40     #plt.plot(centro[0],centro[1],'r.')
41     P = pointOut(centro,P,Rin) #punto salida
42     #print('PUNTO SALIDA',P)
43     v = veloOut(P,centro)
44     #print('VELOCIDAD SALIDA',v)
45     plotArc(A1,P,centro,Rin)
46     #####
47     #print('==>INGRESO')
48     A1 = P
49     centro = centroCircOut(P,v,Bout)
50     #print('CENTRO INGRESO',centro[0],centro[1])
51     #plt.plot(centro[0],centro[1],'r.')
52     P = pointOut(centro,P,Rout) #punto salida
53     #print('PUNTO INGRESO',P)
54     v = -1*veloOut(P,centro) ### ---- GARANTIZAR GIRO
55     HORARIO/ANTIHORARIO
56     #print('VELOCIDAD INGRESO',v)

```

```
56     plotArc(P,A1,centro,Rout)
57     ##### GUARDAR DATA S Y UNFOLDED
58     file1.write(str(sDistance(P))+"\t"+str(np.rad2deg(
sThetaAngle(P,v))+"\n")
59     file2.write(str(i+P[0])+"\t"+str(i+P[1])+"\n")
60
61 #plt.arrow(xi,yi,vxi,vyi,head_width=0.05,width=0.03,color='
black')
62 #plt.savefig('plot')
63 plt.show()
```


Apéndice D

Ejemplo 1: Diferentes trayectorias

```
1 '''
2 EJEMPLO DE DOS TRAYECTORIAS LIGERAMENTE DIFERENTES
3 '''
4 import numpy as np
5 from magnetic import *
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 #####
9 #Par metros de entrada #
10 #####
11 print('BIENVENIDO AL BILLAR INVERSO CON CAMPO MAGNETICO
12       INTERIOR')
13 print('CAMPOS ANTIPARALELOS')
14 Bin,Bout = 1,2
15 Rin,Rout = 1/Bin,1/Bout
16
17 #PARTICULA 1
18 x1,y1 = 0.5 , 0 #ubicaci n inicial
19 xi1,yi1=x1,y1
20 P1 = np.array([x1,y1])
21 vx1,vy1 = np.cos(np.deg2rad(28.0)),np.sin(np.deg2rad(28.0)) #
22 velocidad inicial
23 vxi1,vyi1=vx1,vy1
24 v1 = np.array([vx1,vy1])
```

```

23
24 #PARTICULA 2
25 x2,y2 = 0.5 , 0 #ubicaci n inicial
26 xi2,yi2=x2,y2
27 P2 = np.array([x2,y2])
28 vx2,vy2 = np.cos(np.deg2rad(26.0)),np.sin(np.deg2rad(26.0)) #
    velocidad inicial
29 vxi2,vyi2=vx2,vy2
30 v2 = np.array([vx2,vy2])
31
32
33 print('Campo Magnetico interior:',Bin)
34 print('Campo Magnetico exterior:',Bout)
35 print('Posici n inicial 1:',P1)
36 print('Velocidad inicial 1:',v1)
37 print('Posici n inicial 2:',P2)
38 print('Velocidad inicial 2:',v2)
39 #plt.title('Billar Magn tico')
40 plt.grid()
41 plt.xlim(-2,3)
42 plt.ylim(-2,3)
43 plt.plot(x1,y1,'go')
44 plt.arrow(xi1,yi1,vx1/10,vy1/10,width=0.01)
45 plt.plot(x2,y2,'go')
46 plt.arrow(xi2,yi2,vx2/10,vy2/10,width=0.01)
47
48 plt.plot([0,1,1,1,0,0],[0,0,1,1,1,0])
49
50 for i in range(3):
51     ### INTERIOR ###
52     A11 = P1
53     centro1 = centroCirc(P1,v1,Bin)
54     P1 = pointOut(centro1,P1,Rin)
55     v1 = veloOut(P1,centro1)
56     plotArc(A11,P1,centro1,Rin,'b')
57

```

```
58     A12 = P2
59     centro2 = centroCirc(P2,v2,Bin)
60     P2 = pointOut(centro2,P2,Rin)
61     v2 = veloOut(P2,centro2)
62     plotArc(A12,P2,centro2,Rin,'r')
63
64     #####
65     ### EXTERIOR ###
66     A11 = P1
67     centro1 = centroCircOut(P1,v1,Bout)
68     P1 = pointOut(centro1,P1,Rout)
69     v1 = -1*veloOut(P1,centro1)
70     plotArc(P1,A11,centro1,Rout,'b')
71
72     A12 = P2
73     centro2 = centroCircOut(P2,v2,Bout)
74     P2 = pointOut(centro2,P2,Rout)
75     v2 = -1*veloOut(P2,centro2)
76     plotArc(P2,A12,centro2,Rout,'r')
77
78 plt.show()
```


Apéndice E

Ejemplo 2: Generar video

```
1 '''
2 subplots
3 '''
4
5 import numpy as np
6 from magnetic import *
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 import os
9 def plotArc(A1,A2,centro,R):
10     '''
11     Graficar arco de circunferencia
12     '''
13     #hit = P
14     #A2 = hit
15     #para A
16     thetaA1 = thetaAngle(np.array([A1[0]-centro[0],A1[1]-
17     centro[1]]))
18     #print('angulo 1 punto A',np.rad2deg(thetaA1))
19     #para B
20     thetaA2 = thetaAngle(np.array([A2[0]-centro[0],A2[1]-
21     centro[1]]))
22     #print('angulo 2 punto B',np.rad2deg(thetaA2))
23
24     if thetaA1 < thetaA2:
```

```

23     #theta = np.linspace(0,thetaB-thetaA,num=10)
24         thetaList = np.linspace(thetaA1,thetaA2,num
25 =20)
26     else: #thetaA > thetaB
27         thetaList = np.linspace(thetaA1,thetaA2+2*np.
28 pi,num=20)
29 #theta = np.linspace(0,thetaB-thetaA,num=10)
30 #print(np.rad2deg(thetaList))
31 #R = np.matrix([[np.cos(theta),-np.sin(theta)],[np.sin(
32 theta),np.cos(theta)]]))
33     curveX = R*np.cos(thetaList)+centro[0]
34     curveY = R*np.sin(thetaList)+centro[1]
35     #plt.plot(curveX,curveY,color = 'b', linewidth=0.5)
36     curve = [curveX,curveY]
37     return curve
38
39 #####
40 #Par metros de entrada #
41 #####
42 print('BIENVENIDO AL BILLAR INVERSO CON CAMPO MAGNETICO
43 INTERIOR')
44 print('CAMPOS ANTIPARALELOS')
45 Bin,Bout = 10,1
46 Rin,Rout = 1/Bin,1/Bout
47
48 phase = np.loadtxt('dato10-1.txt')
49 fig,(ax1,ax2) = plt.subplots(1,2)
50 ax2.plot(phase[:,0],phase[:,1], 'r,')
51
52 for angle in np.arange(2,179,2):
53     fig.suptitle(r'$B_{in}=${'+str(Bin)+' '+r'$B_{out}=${'+str(
54 Bout)+' '+r'$\theta_{o}=${'+str(angle)+' ')
55     x,y = 0.5 , 0 #ubicaci n inicial
56     P = np.array([x,y])
57     vx,vy = np.cos(np.deg2rad(angle)),np.sin(np.deg2rad(angle)
58 )) #velocidad inicial

```

```

53     v = np.array([vx,vy])
54     P_init,v_init=P,v
55     print(angle)
56     #print('Campo Magnetico interior:',Bin)
57     #print('Campo Magnetico exterior:',Bout)
58     #print('Posici n inicial:',P)
59     #print('Velocidad inicial:',v)
60     ax1.set_xlim(-2,3)
61     ax1.set_ylim(-2,3)
62     ax1.plot(x,y,'go')
63
64
65     ax1.plot([0,1,1,1,0,0],[0,0,1,1,1,0])
66     #file1 = open('sdata.dat',"w")
67     #file2 = open('unfolded.dat',"w")
68
69     for i in range(200):
70         #print('Iteracion',i)
71         #print('==>SALIDA')
72         A1 = P
73         centro = centroCirc(P,v,Bin)
74         #print('CENTRO SALIDA',centro[0],centro[1])
75         #plt.plot(centro[0],centro[1], 'r.')
76         P = pointOut(centro,P,Rin) #punto salida
77         #print('PUNTO SALIDA',P)
78         v = veloOut(P,centro)
79         curveResult = plotArc(A1,P,centro,Rin)
80         #print('VELOCIDAD SALIDA',v)
81         ax1.plot(curveResult[0],curveResult[1], 'b',linewidth
=0.5,alpha=0.6)
82         #####
83         #print('==>INGRESO')
84         A1 = P
85         centro = centroCircOut(P,v,Bout)
86         #print('CENTRO INGRESO',centro[0],centro[1])
87         #plt.plot(centro[0],centro[1], 'r.')

```

```

88     P = pointOut(centro,P,Rout) #punto salida
89     #print('PUNTO INGRESO',P)
90     v = -1*veloOut(P,centro)
91     #print('VELOCIDAD INGRESO',v)
92     curveResult=plotArc(P,A1,centro,Rout)
93     ax1.plot(curveResult[0],curveResult[1],'b',linewidth
=0.5,alpha=0.6)
94     ##### GUARDAR DATA S Y UNFOLDED
95     #file1.write(str(sDistance(P))+"\t"+str(np.rad2deg(
sThetaAngle(P,v))+"\n")
96     #file2.write(str(i+P[0])+"\t"+str(i+P[1])+"\n")
97     file_temp = open("temp.txt","a")
98     file_temp.write(str(sDistance(P))+"\t"+str(np.rad2deg
(sThetaAngle(P,v))+"\n")
99
100     ax1.arrow(P_init[0],P_init[1],v_init[0]/10,v_init[1]/10,
width=0.05)
101     phaseTemp = np.loadtxt('temp.txt')
102     ax2.plot(phaseTemp[:,0],phaseTemp[:,1],'k.')
103     fig.savefig('plot'+str(angle).zfill(3)+'.png')
104     os.remove("temp.txt")
105     ax1.cla()
106     ax2.cla()
107     ax2.plot(phase[:,0],phase[:,1],'r,')
108     #fig.show()
109     #plt.clf()
110
111 os.system("ffmpeg -framerate 2 -pattern_type glob -i '*.png'
-c:v libx264 -pix_fmt yuv420p out4.mp4")

```

Bibliografía

- [1] AY Abul-Magd, B Dietz, T Friedrich, and Achim Richter. Spectral fluctuations of billiards with mixed dynamics: from time series to superstatistics. *Physical Review E*, 77(4):046202, 2008.
- [2] M Aichinger, S Janecek, and E Räsänen. Billiards in magnetic fields: A molecular dynamics approach. *Physical Review E*, 81(1):016703, 2010.
- [3] Thijs Albers, Stijn Delnoij, Nico Schramma, and Maziyar Jalaal. Billiards with spatial memory. *Physical Review Letters*, 132(15):157101, 2024.
- [4] Najla K Almulhem, Maksym E Steblyi, Alain Nogaret, Jean-Claude Portal, Harvey E Beere, and David A Ritchie. Photovoltage detection of damon–eshbach and dipolar edge spin waves of nanomagnets with two-dimensional electron gas system. *Japanese Journal of Applied Physics*, 57(9S2):09TF01, 2018.
- [5] Najla K Almulhem, Maksym E Steblyi, Jean-Claude Portal, Alexander S Samardak, Harvey E Beere, David A Ritchie, and Alain Nogaret. Photovoltage detection of spin excitation of a ferromagnetic stripe and disk at low temperature. *Japanese Journal of Applied Physics*, 59(SE):SEED02, 2020.
- [6] Jonathan Andreasen, Hui Cao, Jan Wiersig, and Adilson E Motter. Marginally unstable periodic orbits in semiclassical mushroom billiards. *Physical review letters*, 103(15):154101, 2009.
- [7] Hanna Autio, Nikolaos-Georgios Vardaxis, and Delphine Bard Hagberg. An iterative ray tracing algorithm to increase simulation speed while maintaining overall precision. In *Acoustics*, volume 5, pages 320–342. MDPI, 2023.

-
- [8] A Bäcker, R Ketzmerick, S Löck, Marko Robnik, Gregor Vidmar, Ruven Höhmann, Ulrich Kuhl, and H-J Stöckmann. Dynamical tunneling in mushroom billiards. *Physical review letters*, 100(17):174103, 2008.
- [9] Arnd Bäcker, B Dietz, T Friedrich, M Miski-Oglu, Achim Richter, F Schäfer, and S Tomsovic. Friedel oscillations in microwave billiards. *Physical Review E*, 80(6):066210, 2009.
- [10] Nils Berglund and Hervé Kunz. Integrability and ergodicity of classical billiards in a magnetic field. *Journal of statistical physics*, 83:81–126, 1996.
- [11] Michael V Berry. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard. *European Journal of Physics*, 2(2):91, 1981.
- [12] George David Birkhoff. *Dynamical Systems*, volume 9. American Mathematical Society Colloquium Publications, 1927.
- [13] Leonid A Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Communications in Mathematical Physics*, 65:295–312, 1979.
- [14] Leonid A Bunimovich. Mushrooms and other billiards with divided phase space. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 11(4):802–808, 2001.
- [15] Leonid A Bunimovich and Carl P Dettmann. Escape from a circle and riemann hypotheses. *arXiv preprint math/0603373*, 2006.
- [16] Diogo Ricardo da Costa, Carl P Dettmann, and Edson D Leonel. Circular, elliptic and oval billiards in a gravitational field. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3):731–746, 2015.
- [17] Irene De Blasi and Susanna Terracini. Refraction periodic trajectories in central mass galaxies. *Nonlinear Analysis*, 218:112766, 2022.
- [18] B Dietz, T Friedrich, M Miski-Oglu, Achim Richter, F Schäfer, and TH Seligmann. Nonperiodic echoes from quantum mushroom-billiard hats. *Physical Review E*, 80(3):036212, 2009.

- [19] Barbara Dietz, T Friedrich, M Miski-Oglu, A Richter, and F Schäfer. Spectral properties of bunimovich mushroom billiards. *Physical Review E*, 75(3):035203, 2007.
- [20] Sergio Carrasco Días. *Metodología de la investigación científica: pautas metodológicas para diseñar y elaborar el proyecto de investigación*. Cambridge University Press, 2015.
- [21] Enrico Fermi. On the origin of the cosmic radiation. *Physical review*, 75(8):1169, 1949.
- [22] Gregorii Aleksandrovich Gal’perin. Playing pool with π (the number π from a billiard point of view). *Regular and chaotic dynamics*, 8(4):375–394, 2003.
- [23] Sean Gasiorek. On the dynamics of inverse magnetic billiards. *Nonlinearity*, 34(3):1503, 2021.
- [24] Konstantinos Georgiou, Somnath Kundu, and Paweł Prałat. The fagnano triangle patrolling problem. In *International Symposium on Stabilizing, Safety, and Security of Distributed Systems*, pages 157–171. Springer, 2023.
- [25] GDJF Harkes, J Dankert, and Jan Feijen. Bacterial migration along solid surfaces. *Applied and environmental microbiology*, 58(5):1500–1505, 1992.
- [26] Boris Hasselblatt and Anatole Katok. *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*. Cambridge University Press, 2003.
- [27] Eric J Heller and Steven Tomsovic. Postmodern quantum mechanics. *Physics Today*, 46(7):38–46, 1993.
- [28] Christian Hernandez-Sampieri, Roberto y Mendoza. *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. Mcgraw-hill México, 2020.
- [29] Vasily Kantsler, Jörn Dunkel, Marco Polin, and Raymond E Goldstein. Ciliary contact interactions dominate surface scattering of swimming eukaryotes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(4):1187–1192, 2013.
- [30] Bence Kocsis, Gergely Palla, and József Cserti. Quantum and semiclassical study of magnetic quantum dots. *Physical Review B*, 71(7):075331, 2005.

- [31] Andor Kormanyos, Peter Rakyta, Laszlo Oroszlany, and József Cserti. Bound states in inhomogeneous magnetic field in graphene: Semiclassical approach. *Physical Review B*, 78(4):045430, 2008.
- [32] Florian Lenz, Fotis K Diakonou, and Peter Schmelcher. Tunable fermi acceleration in the driven elliptical billiard. *Physical Review Letters*, 100(1):014103, 2008.
- [33] Lixiang Li, Haipeng Peng, Jürgen Kurths, Yixian Yang, and Hans Joachim Schellnhuber. Chaos–order transition in foraging behavior of ants. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23):8392–8397, 2014.
- [34] A Loskutov, AB Ryabov, and LG Akinshin. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(44):7973, 2000.
- [35] Črt Lozej, Dragan Lukman, and Marko Robnik. Classical and quantum mixed-type lemon billiards without stickiness. *arXiv preprint arXiv:2104.08925*, 2021.
- [36] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.
- [37] Jürgen Moser. Is the solar system stable? *The Mathematical Intelligencer*, 1:65–71, 1978.
- [38] Jurgen Moser. *Stable and random motions in dynamical systems: With special emphasis on celestial mechanics*, volume 1. Princeton university press, 2001.
- [39] James Dickson Murray and James Dickson Murray. *Mathematical Biology: II: Spatial Models and Biomedical Applications*, volume 3. Springer, 2003.
- [40] Alain Nogaret. Electron dynamics in inhomogeneous magnetic fields. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 22(25):253201, 2010.
- [41] Alain Nogaret, Maksym Steblyy, Jean-Claude Portal, Harvey E Beere, and David A Ritchie. Ballistic hall photovoltammetry of magnetic resonance in individual nanomagnets. *Physical Review Letters*, 126(20):207701, 2021.

- [42] Andres Perico. *Dynamics of Inverse Magnetic Billiards on Polygons*. Phd tesis, UC Santa Cruz, California, EEUU, 2022.
- [43] Gary A Prinz. Magnetoelectronics. *Science*, 282(5394):1660–1663, 1998.
- [44] Marko Robnik and Michael Victor Berry. Classical billiards in magnetic fields. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 18(9):1361, 1985.
- [45] Parongama Sen and Bikas K Chakrabarti. *Sociophysics: an introduction*. OUP Oxford, 2014.
- [46] Heung-Sun Sim, K-H Ahn, Kee-Joo Chang, G Ihm, N Kim, and SJ Lee. Magnetic edge states in a magnetic quantum dot. *Physical review letters*, 80(7):1501, 1998.
- [47] Yakov Grigor’evich Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. ergodic properties of dispersing billiards. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 25(2):141–192, 1970.
- [48] Saverio E Spagnolie, Colin Wahl, Joseph Lukasik, and Jean-Luc Thiffeault. Microorganism billiards. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 341:33–44, 2017.
- [49] Hugo Steinhaus. *Mathematical snapshots*. Courier Corporation, 1950.
- [50] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [51] Serge Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30. American Mathematical Soc., 2005.
- [52] Satoru Tsugawa and Yoji Aizawa. Stagnant motion in chaotic region of mushroom billiard system with dielectric medium. *Journal of the Physical Society of Japan*, 81(6):064004, 2012.
- [53] SM Ulam. On some statistical properties of dynamical systems. In *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 3, pages 315–320. University of California Press, 1961.

-
- [54] D Uzur, A Nogaret, HE Beere, DA Ritchie, CH Marrows, and BJ Hickey. Probing the annular electronic shell structure of a magnetic corral. *Physical Review B*, 69(24):241301, 2004.
- [55] JVA Vasconcelos, LH Miranda-Filho, AJF de Souza, AR de C. Romaguera, and ALR Barbosa. Interaction between a robot and bunimovich stadium billiards. *Scientific Reports*, 12(1):4983, 2022.
- [56] Zoltán Vörös, Tamás Tasnádi, József Cserti, and Péter Pollner. Tunable lyapunov exponent in inverse magnetic billiards. *Physical Review E*, 67(6):065202, 2003.
- [57] Dali Wang and Guojun Jin. Bound states of dirac electrons in a graphene-based magnetic quantum dot. *Physics Letters A*, 373(44):4082–4085, 2009.
- [58] Hengyi Xu, T Heinzl, and IV Zozoulenko. Electronic properties of quantum dots formed by magnetic double barriers in quantum wires. *Physical Review B*, 84(3):035319, 2011.