



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO  
ESCUELA DE POSGRADO**

**MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS**

**TESIS**

**EXPONENTES DE FLOQUET EN LA ESTABILIDAD DE  
SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES NO AUTÓNOMOS CON  
COEFICIENTES PERIÓDICOS**

**PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN  
MATEMÁTICAS**

**AUTOR**

Br. EDGAR JALISTO MEDINA

**ASESOR:**

Dr. GINO GUSTAVO MAQUI HUAMAN

**ORCID:** 0000-0001-6327-8569

**CUSCO – PERÚ**

**2026**



# Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco

## INFORME DE SIMILITUD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-321-2025-UNSAAC)

El que suscribe, el Asesor GINO GUSTAVO MAQUI HUAMAN.....  
..... quien aplica el software de detección de similitud al

trabajo de investigación/tesistitulada: .....

EXPONENTES DE FLOQUET EN LA ESTABILIDAD DE  
SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES NO AUTÓNOMOS CON  
COEFICIENTES PERIÓDICOS

Presentado por: EDGAR JALISTO MEDINA..... DNI N° 41952661;

presentado por: .....

Para optar el título Profesional/Grado Académico de .....

MAESTRO EN MATEMÁTICAS

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 1 veces, mediante el Software de Similitud, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso del Sistema Detección de Similitud en la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 03%.

### Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No sobrepasa el porcentaje aceptado de similitud.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las subsanaciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, conforme al reglamento, quien a su vez eleva el informe al Vicerrectorado de Investigación para que tome las acciones correspondientes; Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de Asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto las primeras páginas del reporte del Sistema de Detección de Similitud.

Cusco, 12 de MARZO..... de 2026.....

Gino Magui.....

Firma

Post firma Gino Gustavo Magui Huaman.....

Nro. de DNI.....42724610.....


ORCID del Asesor...0000-0001-6327-8569.....

#### Se adjunta:

- Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
- Enlace del Reporte Generado por el Sistema de Detección de Similitud: oid: 27259:566056704

# EDGAR JALISTO MEDINA

## EXONENTES DE FLOQUET EN LA ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES NO AUTOÓNOMOS CON COEFICIENTES...

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

### Detalles del documento

Identificador de la entrega

**trn:oid:::27259:566056704**

**101 páginas**

Fecha de entrega

**10 mar 2026, 1:12 p.m. GMT-5**

**20.370 palabras**

Fecha de descarga

**12 mar 2026, 10:30 p.m. GMT-5**

**93.070 caracteres**

Nombre del archivo

**EXONENTES DE FLOQUET EN LA ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES NO AUTOONO....pdf**

Tamaño del archivo

**1.5 MB**




## 3% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

### Exclusiones


- N.º de coincidencias excluidas

### Fuentes principales

- 3%  Fuentes de Internet
- 2%  Publicaciones
- 2%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

### Marcas de integridad

#### N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**  
176 caracteres sospechosos en N.º de páginas  
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO  
ESCUELA DE POSGRADO

INFORME DE LEVANTAMIENTO DE OBSERVACIONES A TESIS

Dr. TITO LIVIO PAREDES GORDON, Director (e) de la Escuela de Posgrado, nos dirigimos a usted en condición de integrantes del jurado evaluador de la tesis intitulada **EXPOSITORES DE FLOQUET EN LA ESTABILIDAD DE SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES NO AUTÓNOMOS CON COEFICIENTES PERIÓDICOS** de la Br. EDGAR JALISTO MEDINA. Hacemos de su conocimiento que el (la) sustentante ha cumplido con el levantamiento de las observaciones realizadas por el Jurado el día **DIECISÉIS DE ENERO DEL 2026**.

Es todo cuanto informamos a usted fin de que se prosiga con los trámites para el otorgamiento del grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS.

Cusco, 09 de marzo del 2026

DR. LEOPOLDO VERA MALDONADO  
Primer Replicante

MTRO. EDWIN CAZORLA MEDINA  
Segundo Replicante

DR. IGNACIO VELÁSQUEZ HACHA  
Primer Dictaminante

DR. EDISON MARCAVILLACA NIÑO DE GUZMÁN  
Segundo Dictaminante

# Dedicatoria

A mi familia, por su amor incondicional, su apoyo constante y la fortaleza que me inspiran cada día.

A mi hijo, que es mi mayor motivación y la razón por la que busco superarme siempre.

# Agradecimientos

A mis colegas de trabajo, por su colaboración,  
comprensión y por enseñarme con su ejemplo la  
importancia del compromiso y el esfuerzo  
compartido.

Mi infinito agradecimiento al Dr. Gino Gustavo  
Maqui Huaman por su orientación en el  
desarrollo del presente trabajo.

A mis amigos, por su compañía, sus palabras de  
aliento y los momentos compartidos que han  
hecho este camino más llevadero.

A todos ustedes, mi más profundo  
agradecimiento.

# Resumen

El presente trabajo aborda el análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos, un problema que no puede resolverse directamente mediante los autovalores de la matriz de coeficientes, como ocurre en los sistemas lineales autónomos con coeficientes constantes. En este contexto, el principal objetivo del trabajo consiste en el uso de los exponentes de Floquet como herramienta fundamental para caracterizar la estabilidad e inestabilidad del sistema dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos, es decir, se obtiene un criterio de estabilidad en términos del signo de la parte real de los exponentes de Floquet, posteriormente se aplica al estudio de modelos físicos, como el péndulo de Kapitza, y a un modelo biológico de población estructurada con reproducción estacional. Para alcanzar este propósito, se emplea un enfoque analítico basado en la teoría de Floquet, que permite transformar el sistema no autónomo original en un sistema equivalente autónomo con coeficientes constantes. Asimismo, dado que en general no es posible obtener soluciones explícitas, se emplean métodos numéricos para el cálculo de la matriz fundamental y de la matriz de monodromía, los cuales son implementados mediante el lenguaje Python.

**Palabras Clave:** Sistemas dinámicos no autónomos, Matriz de monodromía, Exponentes de Floquet, Péndulo de Kapitza, Modelos poblacionales estacionales.

# Abstract

This thesis addresses the stability analysis of nonautonomous linear dynamical systems with periodic coefficients, a problem that cannot be resolved directly through the eigenvalues of the coefficient matrix, as is the case for autonomous linear systems with constant coefficients. In this context, the primary objective of this work is to employ Floquet exponents as a fundamental tool to characterize the stability and instability of nonautonomous linear dynamical systems with periodic coefficients. Specifically, a stability criterion is established in terms of the sign of the real part of the Floquet exponents. This criterion is subsequently applied to the study of physical models, such as the Kapitza pendulum, and to a biological model of a structured population with seasonal reproduction. To achieve this objective, an analytical approach based on Floquet theory is developed, allowing the original nonautonomous system to be transformed into an equivalent autonomous system with constant coefficients. Furthermore, since explicit solutions cannot generally be obtained, numerical methods are employed to compute the fundamental matrix and the monodromy matrix, which are implemented using the Python programming language.

**Keywords:** Nonautonomous dynamical systems, Monodromy matrix, Floquet exponents, Kapitza pendulum, Seasonal population models.

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>1. Planteamiento del problema</b>	<b>1</b>
1.1. Situación problemática . . . . .	1
1.2. Formulación del problema . . . . .	3
1.2.1. Problema general . . . . .	3
1.2.2. Problemas específicos . . . . .	3
1.3. Justificación de la investigación . . . . .	4
1.4. Objetivos de la investigación . . . . .	5
1.4.1. Objetivo general . . . . .	5
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	5
<b>2. Marco teórico conceptual y metodología</b>	<b>6</b>
2.1. Bases teóricas . . . . .	6
2.1.1. Espacio vectorial . . . . .	6
2.1.2. Exponencial de una matriz . . . . .	10
2.1.3. Forma canónica de Jordan y los bloques de Jordan . . . . .	11
2.1.4. Ecuación diferencial ordinaria de orden $k$ . . . . .	18

2.1.5. Solución de la ecuación diferencial ordinaria . . . . .	20
2.2. Marco conceptual . . . . .	23
2.3. Antecedentes empíricos de la investigación . . . . .	24
2.4. Metodología . . . . .	26
<b>3. Sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>27</b>
3.1. Solución de un sistema lineal homogéneo autónomo . . . . .	27
3.2. Comportamiento de las soluciones de un sistema lineal autónomo . . . . .	36
<b>4. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomos con coeficientes periódicos</b>	<b>48</b>
4.1. Solución fundamental de un sistema lineal no autónomo . . . . .	48
4.2. Aplicaciones . . . . .	68
4.2.1. El péndulo de Kapitza y su relación con la estabilización dinámica . . . . .	68
4.2.2. Aplicación a biología: población estructurada con reproducción estacional . . . . .	75
<b>Conclusiones</b>	<b>83</b>
<b>Sugerencia para futuras investigaciones</b>	<b>84</b>
<b>A. Forma Canónica de Jordan</b>	<b>89</b>
A.1. Obtención de los bloques de Jordan . . . . .	91

# Capítulo 1

## Planteamiento del problema

### 1.1. Situación problemática

Sabemos que dada una ecuación diferencial ordinaria, en muchas de estas ecuaciones diferenciales no se puede determinar de manera explícita las soluciones, pero si se puede analizar el comportamiento de manera cualitativa sin la necesidad de obtener las soluciones.

Dada la ecuación diferencial ordinaria autónoma de la forma

$$x' = f(x), \tag{1.1}$$

con  $x = x(t)$ , el comportamiento de la solución se puede determinar a partir de los valores propios de la matriz  $A$  asociada al sistema lineal autónomo  $x' = Ax$ , sistema que se puede obtener a partir de (1.1). Los valores propios de  $A$  juegan un papel importante en el análisis cualitativo de la solución del sistema (1.1) alrededor de un punto singular  $x = x_0$ , y también se puede determinar si el sistema (1.1) es o no estable. Pero, cuando uno estudia la estabilidad de un sistema dinámico lineal no autónomo de la forma

$$x' = A(t)x, \tag{1.2}$$

Los valores propios de la matriz  $A(t)$  ya no son suficientes para determinar las propiedades cualitativas de estabilidad ni la convergencia uniforme de las soluciones. En el sistema lineal

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{bmatrix} x(t), \quad (1.3)$$

los valores propios de la matriz  $A(t)$ , asociada a (1.3), están dados por  $\lambda = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{7}i)$  que no dependen de la variable  $t$ , con parte real negativa, y a pesar de ello el sistema (1.3) no es asintóticamente estable, puesto que su matriz fundamental  $\Phi(t)$  dada por

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} \cos(t) & e^{-t} \sin(t) \\ -e^{\frac{t}{2}} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) \end{bmatrix}.$$

no converge cuando  $t \rightarrow +\infty$  o cuando  $t \rightarrow -\infty$ , esto muestra que los valores propios instantáneos de  $A(t)$  no reflejan de manera directa el comportamiento global del sistema. De manera particular estudiaremos la estabilidad de un sistema (1.2), cuando  $A(t)$  es periódico. Por medio de un cambio de variables, se puede transformar el sistema (1.2) en un sistema lineal autónomo de la forma

$$y' = By \quad (1.4)$$

y en este trabajo de investigación buscaremos condiciones para determinar la estabilidad del sistema (1.2).

## 1.2. Formulación del problema

### 1.2.1. Problema general

¿De qué manera los exponentes de Floquet permiten caracterizar la estabilidad exponencial del sistema dinámico lineal no autónomo con coeficientes periódicos alrededor de la solución trivial, y cómo puede aplicarse este enfoque al análisis de modelos matemáticos provenientes de la física y la biología con comportamiento periódico?

### 1.2.2. Problemas específicos

1. ¿Qué propiedades de la teoría de Floquet permiten transformar un sistema dinámico lineal no autónomo con coeficientes periódicos en un sistema dinámico lineal autónomo equivalente mediante la solución fundamental y la matriz de monodromía?
2. ¿Cómo se determinan los exponentes de Floquet a partir de la matriz de monodromía asociada a un sistema dinámico lineal no autónomo con coeficientes periódicos?
3. ¿Se pueden aplicar los criterios clásicos de estabilidad exponencial para sistemas dinámicos lineales autónomos con coeficientes constantes al análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos, a través del sistema autónomo equivalente obtenido mediante la teoría de Floquet?
4. ¿De qué manera puede analizarse la estabilidad exponencial, mediante la teoría de Floquet y con apoyo de herramientas computacionales, de modelos matemáticos con coeficientes periódicos que describen fenómenos físicos y biológicos?

### 1.3. Justificación de la investigación

En el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos lineales autónomos con coeficientes constantes, dicha estabilidad puede determinarse a partir de los valores propios de la matriz de coeficientes. Sin embargo, este criterio no es suficiente en el caso de sistemas dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos, donde los valores propios de la matriz instantánea no garantizan la estabilidad del sistema.

Por otra parte, en muchos problemas de ecuaciones diferenciales no es posible obtener soluciones explícitas que permitan describir de manera directa el comportamiento del sistema. En estos casos, resulta necesario recurrir a herramientas teóricas que permitan realizar un análisis cualitativo de las soluciones. En este contexto, los exponentes de Floquet constituyen una herramienta fundamental para el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos, al permitir caracterizar la estabilidad del sistema alrededor de la solución trivial  $x(t) = 0$ .

El presente trabajo se justifica por la necesidad de estudiar y aplicar de manera rigurosa los fundamentos teóricos de la estabilidad en sistemas periódicos, así como por su relevancia en el análisis de fenómenos físicos con comportamiento periódico, donde la teoría de Floquet proporciona criterios precisos de estabilidad e inestabilidad.

## **1.4. Objetivos de la investigación**

### **1.4.1. Objetivo general**

Analizar la estabilidad exponencial de sistemas dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos alrededor de la solución trivial mediante los exponentes de Floquet, y aplicar este enfoque al estudio de modelos matemáticos provenientes de la física y la biología.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

1. Analizar las propiedades de la teoría de Floquet que permiten transformar un sistema dinámico lineal no autónomo con coeficientes periódicos en un sistema dinámico lineal autónomo equivalente mediante la solución fundamental y la matriz de monodromía.
2. Determinar los exponentes de Floquet a partir de la matriz de monodromía asociada a un sistema dinámico lineal no autónomo con coeficientes periódicos.
3. Establecer criterios de estabilidad exponencial para sistemas dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos, aplicando los criterios clásicos de estabilidad de sistemas dinámicos lineales autónomos con coeficientes constantes al sistema autónomo equivalente obtenido mediante la teoría de Floquet.
4. Analizar la estabilidad exponencial, mediante la teoría de Floquet y con apoyo de herramientas computacionales, de modelos matemáticos con coeficientes periódicos que describen fenómenos físicos y biológicos.

# Capítulo 2

## Marco teórico conceptual y metodología

### 2.1. Bases teóricas

En esta sección presentamos algunos resultados que serán fundamentales para el desarrollo de esta tesis.

#### 2.1.1. Espacio vectorial

Esta sección define el espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ .

**Definición 2.1.** (Coelho y Lourenço, 2018, p. 40) Un conjunto no vacío  $V$  es un *espacio vectorial sobre un cuerpo*  $\mathbb{K}$  si, sobre sus elementos están definidas las operaciones

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V,$$

y estas satisfacen las propiedades siguientes:

$$\text{EV1. } u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V.$$

$$\text{EV2. } u + (v + w) = (u + v) + w, \quad \forall u, v, w \in V.$$

$$\text{EV3. } \exists 0 \in V \quad \forall u \in V : u + 0 = 0 + u = u.$$

$$\text{EV4. } \forall u \in V \quad \exists (-u) \in V : u + (-u) = 0.$$

$$\text{EV5. } \alpha(\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$$

$$\text{EV6. } \exists 1 \in K \quad \forall u \in V : 1 \cdot u = u.$$

$$\text{EV7. } (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$$

$$\text{EV8. } \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V.$$

A los elementos de un espacio vectorial se les denomina *vectores*.

En este trabajo de investigación utilizaremos los siguientes espacios vectoriales

1. El conjunto  $V = \mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial real  $n$  dimensional sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$ .
2. El conjunto  $V = \mathbb{C}^n$  es un espacio vectorial complejo  $n$  dimensional sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$ .
3. El conjunto  $V = M(n, \mathbb{K})$  de las matrices sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ), junto con las operaciones adición de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar, es un espacio vectorial.
4. Dados un conjunto cualesquiera no vacío  $X$ ,  $\mathbb{K}$  un cuerpo y  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  el conjunto de todas las funciones  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ . Se definen las siguientes operaciones

a) Para cualesquier  $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ , la adición de  $f$  y  $g$ , denotada por  $f + g : X \rightarrow \mathbb{K}$  está dada por  $(f + g)(x) = f(x) + g(x); \forall x \in X$ .

b) Para cualesquier  $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ , la multiplicación de un escalar por una función, denotada por  $\alpha \cdot f : X \rightarrow \mathbb{K}$  esta dada por  $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x); \forall x \in X$ .

con estas operaciones,  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$

**Definición 2.2.** (Coelho y Lourenço, 2018, p. 49) Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ . Una *base* de  $V$  es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan el espacio  $V$ .

**Definición 2.3.** (Coelho y Lourenço, 2018, p. 51) Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ . Se dice que  $V$  es de *dimensión finita* si admite una base finita.

**Definición 2.4.** (Castilla Peñate y Vidal Esquivel, 2014, p. 16) Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ . Una *norma* es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  tal que para todo  $x, y \in V$  y todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  se verifican las siguientes propiedades:

N1.  $\|x\| \geq 0$ ,

N2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,

N3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,

N4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Observación 2.1.**

1. La aplicación  $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , con  $1 \leq p < \infty$  definida por

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma, llamada *norma  $l_p$*

- Si  $p = 1$ , la norma  $l_1$  está definida por  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  y es llamada *norma de la suma*
- Si  $p = 2$ , la norma  $l_2$  está definida por  $\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  y es llamada *norma Euclidiana* o *norma dos*.

2. La norma  $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  definida por  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  es la llamada *norma uniforme*.

3. Sea  $M(n, \mathbb{C})$  el espacio de todas las matrices cuadradas con entradas complejas. La aplicación  $\|\cdot\|_F : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  definida por

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma matricial, llamada *norma de Frobenius*.

Sea  $\|\cdot\|_p$  una norma vectorial en  $\mathbb{C}^n$  y  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . La norma matricial inducida por la norma vectorial, denotada por  $\|\cdot\|_i$ , es una función  $\|\cdot\|_i : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , definida por

$$\|A\|_i = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

Sea  $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{C})$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ . De la norma matricial inducida por  $\|\cdot\|_2$  en  $\mathbb{R}^n$  tenemos que

$$\|A\|_i = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|},$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de la matriz  $A^T A$ . Esta norma es llamada norma Euclidiana o norma espectral.

**Proposición 2.1.** (Castilla Peñate y Vidal Esquivel, 2014, p. 23) Para todo  $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ , se cumple que  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

*Demostración.* Como en espacios vectoriales de dimensión finita todas las normas son equivalentes, considerando la norma de Frobenius y por definición del producto de matrices se tiene que

$$\|AB\| = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

entonces,

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2.$$

Por desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy–Schwarz en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right)^{1/2}.$$

Sustituyendo y reordenando las sumas finitas,

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{kj}|^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\|AB\|^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2.$$

Por tanto,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . □

**Observación 2.2.** Sean  $A \in M(n, \mathbb{C})$  y  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Se tiene que,  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ .

## 2.1.2. Exponencial de una matriz

**Definición 2.5.** (Barreira y Valls, 2008, p. 63) Sea  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . La *exponencial de la matriz*  $A$  se denota como la matriz  $e^A \in M(n, \mathbb{C})$  y está definida por la serie

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

La exponencial de una matriz permite expresar soluciones explícitas de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias en el caso autónomo. Asimismo, constituye una herramienta fundamental para el análisis de estabilidad de dichos sistemas, tanto en el caso autónomo como en el no autónomo con coeficientes periódicos.

**Teorema 2.1.** (Castilla Peñate y Vidal Esquivel, 2014, p. 31) Sea  $\{A_k\}$  una sucesión de matrices  $m \times n$  tal que  $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$  converge para alguna norma matricial  $\|\cdot\|$ . Entonces, la serie matricial  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$  converge.

**Proposición 2.2.** (Sideris, 2013, p. 6) Sean  $A, B \in M(n, \mathbb{C})$  dos matrices. Se tienen las siguientes propiedades:

1. La exponencial  $e^{tA}$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y  $\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$ .
2. Si  $AB = BA$ , entonces  $e^{A+B} = e^A e^B$ .
3.  $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = e^{sA} e^{tA}$ ;  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ .
4.  $e^{tA}$  es invertible  $\forall t \in \mathbb{R}$ , y  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ .
5. Si  $P \in M(n, \mathbb{C})$  es invertible, entonces  $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .
6.  $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A$ .

Considerando la Definición 2.5,  $A(t)$  una función matricial y  $t \in \mathbb{R}$  se define lo siguiente.

**Definición 2.6.** Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$  una función matricial continua en  $\mathbb{R}$ . La *matriz exponencial de una función matricial*  $A(t)$  está definida por:

$$e^{A(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A(t))^k, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Observación 2.3.** Es de observar que:

1.  $A(\cdot) = [a_{ij}(\cdot)]_{n \times n}$  es continua, si  $a_{ij}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es continua,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ .
2.  $e^{A(t)} \neq e^{tA}$ , ya que  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ , mientras que  $e^{A(t)}$  se refiere a la exponencial de la matriz evaluada en cada instante  $t$ .

### 2.1.3. Forma canónica de Jordan y los bloques de Jordan

En esta sección se define la matriz canónica y los bloques de Jordan para una matriz arbitraria de orden  $n \times n$ , conceptos que serán útiles, de manera particular, la estabilidad de sistemas dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos.

**Definición 2.7.** (Coelho y Lourenço, 2018, p. 86 ) Sea  $A \in M(m \times n, \mathbb{C})$ . El *subespacio nulo* de  $A$ , denotado por  $Ker(A)$ , es el conjunto

$$Ker(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}.$$

Este conjunto constituye un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^n$ , cuya dimensión se denomina **nulidad** de  $A$ .

**Definición 2.8.** (Coelho y Lourenço, 2018, p. 141 ) Sea  $A \in M(n, \mathbb{C})$  y sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$ . Supóngase que el polinomio característico de  $A$  se factoriza como  $p_A(x) = (x - \lambda)^m q(x)$ , con  $q(\lambda) \neq 0$ .

El número  $m$  se denomina *multiplicidad algebraica* de  $\lambda$  y se denota por  $m_a(\lambda)$ .

La *multiplicidad geométrica* de  $\lambda$ , denotada por  $m_g(\lambda)$ , es la dimensión del espacio propio asociado a  $\lambda$ , es decir,  $m_g(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda I)$ .

**Observación 2.4.** Cuando la multiplicidad geométrica de un valor propio  $\lambda$  es menor que su multiplicidad algebraica, la matriz  $A$  no es diagonalizable. En tal caso, se introducen los *vectores generalizados* para completar una base del espacio y obtener la forma canónica de Jordan.

**Definición 2.9.** (Perko, 2001, p. 32) Sea  $A \in M(n, \mathbb{C})$  una matriz con valor propio  $\lambda$  y un vector no nulo  $w \in \mathbb{C}^n$ . Se dice que  $w$  es un *vector generalizado asociado a  $\lambda$*  si existe un entero  $k \geq 1$  tal que

$$(A - \lambda I)^k w = 0.$$

El menor entero  $k$  que cumple esta condición se llama el *orden* del vector generalizado. Si  $k = 1$ , el vector  $w$  es un vector propio ordinario.

**Teorema 2.2.** (Barreira y Valls, 2008, p. 64) Sea  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . Entonces existe una matriz invertible  $P \in M(n, \mathbb{C})$  tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} R_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  son valores propios de  $A$ ,  $n_j \geq 1$ ,  $\sum_{j=1}^k n_j = n$  y  $k \leq n$ .

La matriz  $J = P^{-1}AP$  se denomina *forma canónica de Jordan* de  $A$ . Está constituida por bloques  $R_{n_j}(\lambda_j)$ , cada uno de los cuales es una matriz cuadrada de orden  $n_j \leq n$  asociada al valor propio  $\lambda_j$  de  $A$ , cada bloque puede escribirse en la forma

$$R_{n_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

si  $mg(\lambda) < ma(\lambda)$ .

La forma canónica de Jordan la denotaremos por:

$$J = P^{-1}AP = \text{diag}[R_{n_1}(\lambda_1), R_{n_2}(\lambda_2), \dots, R_{n_k}(\lambda_k)].$$

**Proposición 2.3.** (Barreira y Valls, 2008, p. 65) Sea  $R \in M(n, \mathbb{C})$  una matriz que tiene la forma  $R = \lambda I + N$ , donde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$e^R = e^\lambda \left( I + N + \frac{1}{2!}N^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}N^{n-1} \right),$$

donde  $N$  es la matriz nilpotente de índice  $n$ , tal que  $N^n = 0$  es la matriz nula.

Para ilustrar el procedimiento de obtención de la forma canónica de Jordan, se considerara la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

los valores propios de  $A$  se determinan a partir de la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda)^3 = 0,$$

así los valores propios de  $A$  son:  $\lambda_1 = 2$ , de multiplicidad algebraica  $ma(\lambda_1) = 1$  y  $\lambda_2 = 4$ , multiplicidad algebraica  $ma(\lambda_2) = 3$ .

Para  $\lambda_1$ , debido a que  $ma(\lambda_1) = 1$ , se tiene un bloque de Jordan de orden  $1 \times 1$ . Mientras que para  $\lambda_2$ , se tendrá un super bloque con las siguientes posibilidades:

- Si la multiplicidad geométrica de  $\lambda_2$  es 3, el super bloque tendrá tres bloques de orden uno.
- Si la multiplicidad geométrica de  $\lambda_2$  es 2, el super bloque tendrá dos bloques, uno de orden dos y otro de orden uno.
- Si la multiplicidad geométrica de  $\lambda_2$  es 1, el super bloque será un único bloque de orden tres.

La multiplicidad geométrica de  $\lambda_2$  es la dimensión de  $\ker[A - \lambda_2 I]$ :

$$\ker[A - \lambda_2 I] = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

transformando a la forma escalonada, se tiene:

$$\rightarrow \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, la dimensión del núcleo es:

$$m_g(\lambda_2) = \dim \ker[A - \lambda_2 I] = 2,$$

Dado que la multiplicidad geométrica del valor propio  $\lambda_2 = 4$  es igual a 2 y que la multiplicidad algebraica de  $\lambda_2$  es 3, entonces el número de bloques de Jordan asociados a  $\lambda_2$  está compuesta por dos bloques, de tamaños 2 y 1, respectivamente. Por tanto, el super bloque correspondiente a  $\lambda_2$  es de la forma:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array} \right),$$

por lo tanto, la forma canónica de Jordan es la matriz:

$$J = \left( \begin{array}{c|c|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

**Definición 2.10.** (Coelho y Lourenço, 2018, p. 31) Sea  $P \in M(n, \mathbb{C})$ . Se dice que  $P$  es *invertible* si existe una matriz  $P^{-1} \in M(n, \mathbb{C})$  tal que

$$PP^{-1} = P^{-1}P = I_n,$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ . De manera equivalente,  $P$  es invertible si y solo si  $\det(P) \neq 0$ .

**Lema 2.1.** (Viana y Espinar, 2021, p. 198) Sean  $A, P \in M(n, \mathbb{C})$  con  $P$  invertible, entonces

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$$

**Proposición 2.4.** (Barreira y Valls, 2008, p. 65) Sean  $A, P \in M(n, \mathbb{C})$ , con  $P$  invertible, y sea  $J = P^{-1}AP$  la forma canónica de Jordan de  $A$ . Entonces, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se cumplen:

1.  $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$ .

2.  $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tR_{n_1}(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tR_{n_2}(\lambda_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tR_{n_k}(\lambda_k)} \end{pmatrix}$ , donde  $R_{n_j}(\lambda_j)$  es un bloque de Jordan de orden  $n_j$  asociado al valor propio  $\lambda_j$  de  $A$ , para  $j = 1, \dots, k \leq n$ .

**Observación 2.5.** Sea  $A \in M(n, \mathbb{C})$ .

1. Si  $A$  es una matriz diagonal con  $n$  valores propios diferentes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , entonces la matriz exponencial de  $tA$  está dada por

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. Si  $\lambda$  es un valor propio real de  $A$ , de multiplicidad algebraica  $m \leq n$ , y  $R$  un bloque de Jordan de orden  $k$ , correspondiente a  $\lambda$ , entonces la matriz exponencial de  $tR$  está dada por

$$e^{tR} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(k-3)!}t^{k-3} & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. Si  $A$  es una matriz real y  $R_{n_j}(\lambda_j)$  es un bloque de Jordan de orden  $q$  correspondiente al valor propio complejo  $\lambda_j = \alpha + i\beta$ , entonces existe un bloque  $R_{n_{j+1}}(\lambda_{j+1})$  de orden  $q$  ( $q = n_j = n_{j+1} \geq 1$ ) correspondiente al valor propio conjugado  $\lambda_{j+1} = \alpha - i\beta$ .

Considérese el bloque complejo  $R_{2q}$  de orden  $2q$ , que forma parte de la diagonal de  $J = P^{-1}AP$ , de la forma

$$R_{2q} = \begin{pmatrix} R_q(\alpha + i\beta) & 0 \\ 0 & R_q(\alpha - i\beta) \end{pmatrix}.$$

La matriz  $R_{2q}$  es semejante a la matriz  $R_{2q}^*$  (forma canónica real de  $R_{2q}$ ), definida por

$$R_{2q}^* = P_{2q}^{-1}R_{2q}P_{2q} = \begin{pmatrix} J_q(\alpha) & -\beta I_q \\ \beta I_q & J_q(\alpha) \end{pmatrix},$$

donde

$$P_{2q} = \begin{pmatrix} I_q & iI_q \\ I_q & -iI_q \end{pmatrix}, \quad P_{2q}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_q & I_q \\ -iI_q & iI_q \end{pmatrix},$$

constituyen las transformaciones estándar que permiten determinar la forma canónica real de  $R_{2q}$ , siendo  $I_q$  la matriz identidad de orden  $q$ .

Finalmente, la forma canónica real de la matriz  $A$  viene dada por

$$J^* = \text{diag} \left[ R_{n_1}(\lambda_1), \dots, R_{n_j}(\lambda_j), R_{(2q)_{j+1}}^*(\lambda_{j+1}), \dots, R_{(2q)_{k-1}}^*(\lambda_{k-1}) \right],$$

y la exponencial de  $J^*$  está dada por

$$e^{J^*} = \text{diag} \left[ e^{R_{n_1}(\lambda_1)}, \dots, e^{R_{n_j}(\lambda_j)}, e^{R_{(2q)_{j+1}}^*(\lambda_{j+1})}, \dots, e^{R_{(2q)_{k-1}}^*(\lambda_{k-1})} \right].$$

4. Si  $R_{2q}^* = P_{2q}^{-1}R_{2q}P_{2q}$  para algún valor propio complejo  $\lambda = \alpha + i\beta$  de la matriz  $A$ , entonces:

$$e^{tR_{2q}^*} = \text{diag} \left[ e^{tR_q(\alpha)}, e^{tR_q(\alpha)} \right] \begin{pmatrix} \cos(\beta t) I_q & -\text{sen}(\beta t) I_q \\ \text{sen}(\beta t) I_q & \cos(\beta t) I_q \end{pmatrix}.$$

**Observación 2.6.** Sea  $A \in M(n, \mathbb{R})$ . Si  $J = P^{-1}AP$  es la forma canónica de Jordan compleja de  $A$ , con  $P$  una matriz compleja no singular, entonces, agrupando los bloques asociados a pares de valores propios complejos conjugados, se obtiene una matriz real  $J^*$ , denominada forma canónica real de  $A$ . En consecuencia, existe una matriz real no singular  $P_0$  tal que  $J^* = P_0^{-1}AP_0$ .

### 2.1.4. Ecuación diferencial ordinaria de orden $k$

**Definición 2.11.** (Viana y Espinar, 2021, p. 2) Una ecuación diferencial ordinaria es una expresión de la forma

$$x^{(k)} = F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}), \quad (2.1)$$

donde  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$  es una función continua definida en un conjunto abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{1+kd}$ . La variable  $t$  toma valores en  $\mathbb{R}$ , mientras que  $x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  toman valores en  $\mathbb{R}^d$ . Los enteros  $k \geq 1$  y  $d \geq 1$  se denominan, respectivamente, el **orden** y la **dimensión** de la ecuación diferencial.

La ecuación (2.1) se dice autónoma si  $f$  no depende de la variable  $t$ . En adelante, se empleará la notación  $x'$  y  $x''$  en sustitución de  $x^{(1)}$  y  $x^{(2)}$ , respectivamente, para simplificar la escritura de las derivadas de primer y segundo orden.

**Observación 2.7.** De manera particular, para  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la ecuación (2.1) será lineal, si  $f$  es lineal en  $x, x', x'', \dots, x^{(k-1)}$ . Es decir, la ecuación (2.1) es lineal si dicha ecuación se puede reescribir de la siguiente forma:

$$a_k(t)x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t) \quad (2.2)$$

Las ecuaciones diferenciales lineales tienen las siguientes características:

- a) La variable dependiente  $x$  y las derivadas  $x, x', x'', \dots, x^{(k)}$  son de grado uno.
- b) Las funciones coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_k$ , de  $x, x', x'', \dots, x^{(k)}$ , dependen únicamente de  $t$ .

Una ecuación diferencial  $x^{(k)} = F(t, x, x', x'', \dots, x^{(k-1)})$  con  $x \in \mathbb{R}^d$ , donde  $k$  es el orden y  $d$  la dimensión del espacio vectorial al cual pertenece la variable  $x$ , siempre se puede escribir como una ecuación diferencial matricial de primer orden, sólo tenemos que considerar

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x_1, \\ x'' = x'_1 = x_2, \\ \vdots \\ x^{(k-1)} = x'_{k-2} = x_{k-1}, \\ x^{(k)} = x'_{k-1} = F(t, x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}). \end{array} \right.$$

Luego el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x_1, \\ x'_1 = x_2, \\ \vdots \\ x'_{k-2} = x_{k-1}, \\ x'_{k-1} = F(t, x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}). \end{array} \right.$$

es equivalente a la ecuación diferencial matricial de orden uno y dimensión  $kd$ ,  $y' = G(t, y)$ , donde  $y = (x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$  y  $G(t, y) = (x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, F(t, x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}))$

La ecuación diferencial del oscilador lineal amortiguado forzado dado por:

$$y'' + ky' + \omega_0^2 y = F \cos(\omega t), \quad (2.3)$$

donde  $k > 0$  representa el coeficiente de amortiguamiento,  $\omega_0$  la frecuencia natural del sistema y  $F \cos(\omega t)$  el término de excitación externa, puede reescribirse como un sistema equivalente de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello, se definen las nuevas variables de estado

$$\begin{aligned} y &= x_1, \\ y' &= x'_1 = x_2, \\ y'' &= x'_2. \end{aligned}$$

Despejando  $y''$  de (2.3) se obtiene:

$$y'' = -ky' - \omega_0^2 y + F \cos(\omega t).$$

Luego

$$x_2' = -kx_2 - \omega_0^2 x_1 + F \cos(\omega t).$$

Por tanto, el sistema equivalente de primer orden queda expresado como

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -\omega_0^2 x_1 - kx_2 + F \cos(\omega t), \end{aligned}$$

o, de manera abreviada, en forma vectorial  $x' = f(t, x)$ , donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega_0^2 x_1 - kx_2 + F \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

### 2.1.5. Solución de la ecuación diferencial ordinaria

Dada la función continua  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en el conjunto abierto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma:

$$x' = f(t, x), \tag{2.4}$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_n(t, x))$ .

El estudio de la ecuación (2.4) y sus variaciones involucran la llamada condición de Lipschitz, tal condición toma la forma de una desigualdad y es la piedra angular para obtener información sobre las soluciones de la ecuación (2.4), tales como la existencia y la unicidad de soluciones.

**Definición 2.12.** (Viana y Espinar, 2021, p. 28 ) Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función definida en el conjunto  $D$ . Se dice que  $f$  es localmente Lipschitz en la variable  $x$ , si para todo  $(t_0, x_0) \in D$ , existen  $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$  y  $C = C(t_0, x_0) > 0$  tal que  $\overline{B_\delta(t_0) \times B_\delta(x_0)} \subset D$  y

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todo  $t \in \overline{B_\delta(t_0)}$  y cada  $x, y \in \overline{B_\delta(x_0)}$ .

Consideremos la función  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(t, x) = (x_2, -w_0^2 x_1 - kx_2 + F \cos(wt)),$$

donde  $x = (x_1, x_2)$ ,  $w_0 > 0$  y  $k > 0$  son constantes reales. Para todo  $(t, x)$  y  $(t, y)$  pertenecientes a un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , se verifica que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

es decir,  $f$  satisface una condición de Lipschitz respecto de la segunda variable. En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &= \|(x_2, -w_0^2 x_1 - kx_2 + F \cos(wt)) - (y_2, -w_0^2 y_1 - ky_2 + F \cos(wt))\| \\ &= \|(x_2 - y_2, -w_0^2(x_1 - y_1) - k(x_2 - y_2))\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right\| \\ \|f(t, x) - f(t, y)\| &= \|A(x - y)\| \end{aligned}$$

donde:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -k \end{pmatrix}; x - y = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$

Por tanto,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \|x - y\|.$$

Como la norma inducida de  $A$  es finita, se concluye que la función  $f$  es Lipschitz continua en la segunda variable, con constante de Lipschitz  $L = \|A\|$ .

**Definición 2.13.** (Barreira y Valls, 2012, p. 4) Sean  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua definida en el abierto  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $x : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ . Se dice que  $x$  es solución de la ecuación (2.4) si verifica las siguientes condiciones.

- a)  $(t, x(t)) \in D; \forall t \in (a, b)$
- b)  $x'(t) = f(t, x(t)); \forall t \in (a, b)$

**Teorema 2.3.** (Viana y Espinar, 2021, p. 28) Consideremos la función  $f : D \subset \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua en el abierto  $D$  y localmente Lipschitz en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces se tiene lo siguiente:

- a) Para todo  $(t_0, x_0) \in D$  existe un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{R}$  y una solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la ecuación (2.4) tal que  $t_0 \in I$  y  $x(t_0) = x_0$ .
- b) Si  $x_1 : I_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $x_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  son soluciones de la ecuación (2.4) y existe  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  tal que  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ , entonces  $x_1(t) = x_2(t)$  para todo  $t \in I_1 \cap I_2$ .

## 2.2. Marco conceptual

- Sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomos con coeficientes periódicos.
- Solución fundamental del sistema  $x' = A(t)x$
- Teoría de Floquet.

Los conceptos presentados en este marco conceptual se encuentran estrechamente relacionados en el desarrollo de la presente investigación. El punto de partida es el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no autónomos con coeficientes periódicos, los cuales surgen de manera natural en la modelación de fenómenos físicos y biológicos con comportamiento periódico.

La solución fundamental del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  desempeña un papel central en el análisis, ya que describe la evolución del sistema en el tiempo y permite definir la matriz de monodromía asociada al período de los coeficientes. La teoría de Floquet establece que dicha solución puede descomponerse en el producto de una matriz periódica y una exponencial matricial, lo que posibilita relacionar la estabilidad del sistema con los valores propios de la matriz de monodromía y, en consecuencia, con los exponentes de Floquet.

De este modo, el marco conceptual proporciona la base necesaria para el análisis de la estabilidad del sistema alrededor de la solución trivial  $x(t) \equiv 0$ , que constituye el objetivo central del estudio. En este trabajo, la estabilidad del sistema se entiende en el sentido de estabilidad exponencial de la solución trivial, dado que los criterios obtenidos mediante la teoría de Floquet proporcionan cotas exponenciales para las soluciones.

## 2.3. Antecedentes empíricos de la investigación

### Antecedentes internacionales

Michael Faraday (1831) realizó uno de los primeros estudios experimentales relacionados con fenómenos de inestabilidad paramétrica en sistemas físicos sometidos a excitaciones periódicas. Sus observaciones sentaron las bases para el estudio de sistemas con comportamiento periódico, evidenciando que excitaciones temporales pueden inducir inestabilidad incluso en sistemas aparentemente estables.

Posteriormente, Mathieu (1868) formuló una ecuación diferencial lineal con coeficientes periódicos para modelar el comportamiento de ondas superficiales en lagos de forma elíptica. La denominada ecuación de Mathieu se convirtió en uno de los ejemplos clásicos de sistemas dinámicos periódicos variantes en el tiempo y en un modelo fundamental para el estudio de estabilidad paramétrica.

Un aporte fundamental fue realizado por Floquet (1883), quien estableció los fundamentos de la teoría que hoy lleva su nombre. En su trabajo, introdujo una descomposición de la matriz fundamental de sistemas lineales con coeficientes periódicos, proporcionando un marco teórico riguroso para el análisis de la estabilidad de sus soluciones mediante multiplicadores y exponentes característicos.

Durante el siglo XX, la teoría de Floquet fue aplicada a problemas físicos concretos. En particular, Meissner (1918) estudió la estabilidad de las barras laterales de locomotoras, modelando el problema mediante ecuaciones diferenciales con parámetros periódicos en el tiempo. Este trabajo evidenció la relevancia práctica de los sistemas dinámicos periódicos en el análisis de sistemas mecánicos reales.

El análisis general de la estabilidad de sistemas dinámicos no autónomos tiene su base teórica en los trabajos clásicos de Lyapunov (1992), quien desarrolló una teoría general de estabilidad del movimiento sin requerir la obtención explícita de soluciones. Los sistemas con coeficientes periódicos constituyen un caso particular dentro de este marco general, cuyo estudio se ve complementado de manera natural por la teoría de Floquet.

Desde un enfoque más moderno, Jošić y Rosenbaum (2008) presentó una interpretación

geométrica de la estabilidad en ecuaciones diferenciales lineales no autónomas, destacando el papel de los multiplicadores y exponentes característicos en la descripción del comportamiento dinámico. Asimismo, el autor discute posibles extensiones teóricas que abren nuevas líneas de investigación en el área.

En años recientes, se han desarrollado contribuciones que amplían y unifican la teoría de Floquet. El artículo de Da Cunha y Davis (2011) propone una formulación unificada para sistemas periódicos discretos, continuos e híbridos, estableciendo una descomposición canónica y analizando la relación entre multiplicadores y exponentes de Floquet mediante la matriz de monodromía.

Finalmente, la tesis de Vargas Castillo (2022) aplica la teoría de Floquet al modelado y análisis de convertidores de potencia, evidenciando la utilidad de esta teoría en sistemas de ingeniería con coeficientes periódicos y resaltando su aplicabilidad en contextos tecnológicos actuales.

### **Antecedentes nacionales**

En el ámbito nacional, Mendoza Jiménez (2013) desarrolló una tesis en la que aplica la teoría de Floquet al estudio de ecuaciones diferenciales lineales no autónomas con coeficientes periódicos, con el objetivo de analizar la estabilidad de sus soluciones. En dicho trabajo, el autor combina la teoría de Floquet con el teorema de Hartman–Grobman, proporcionando un análisis cualitativo del comportamiento dinámico de los sistemas considerados.

Por otro lado, la tesis de Choque Huamán (2008), titulada *Estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales a través de ciclos límite y su visualización computacional*, constituye un antecedente relevante en el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos desde una perspectiva global. En esta investigación se analizan las condiciones bajo las cuales pequeñas perturbaciones no alteran la estructura cualitativa del sistema, haciendo énfasis en la estabilidad estructural y en el uso de herramientas computacionales.

La presente tesis se vincula con estos trabajos en el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos, pero se diferencia de ellos al centrarse en el análisis **cuantitativo y local de la estabilidad exponencial de la solución trivial** en sistemas dinámicos lineales no autónomos

con coeficientes periódicos. En particular, se emplea la **teoría de Floquet** y el análisis de los **exponentes de Floquet** para caracterizar rigurosamente la estabilidad, estableciendo un enfoque analítico complementario a los estudios previos realizados en el ámbito nacional.

## 2.4. Metodología

Este proyecto de investigación es de carácter bibliográfico-descriptivo, basado en una revisión sistemática de libros impresos y artículos científicos relacionados con el análisis de sistemas dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos. El objetivo es compilar y organizar de manera coherente la información teórica más relevante que permita establecer condiciones rigurosas de estabilidad.

El estudio se centra en el análisis de la estabilidad del sistema dinámico alrededor de la solución trivial  $x(t) \equiv 0$ , bajo la noción de estabilidad exponencial. Para ello, se emplea la teoría de Floquet como herramienta principal, la cual permite transformar el sistema no autónomo original en un sistema equivalente con coeficientes constantes y relacionar la estabilidad con el espectro de la matriz de monodromía.

Asimismo, se analizan en detalle las demostraciones de los principales teoremas que conducen a criterios de estabilidad e inestabilidad en términos de los exponentes de Floquet. Dado que, en general, no es posible obtener soluciones explícitas, el enfoque teórico se complementa con métodos numéricos para el cálculo de la matriz fundamental y de la matriz de monodromía, los cuales son implementados mediante el lenguaje Python.

Finalmente, la metodología desarrollada se aplica al estudio de modelos físicos y biológicos con comportamiento periódico, permitiendo ilustrar la aplicabilidad de los resultados teóricos obtenidos.

# Capítulo 3

## Sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

En este capítulo se estudian los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias, con especial atención al caso homogéneo y autónomo. Se introduce la matriz fundamental de soluciones y la exponencial matricial, herramientas que permiten expresar la solución general del sistema y analizar su comportamiento dinámico. El desarrollo teórico se orienta a comprender la estructura del sistema lineal homogéneo, entendida como la forma en que las soluciones dependen de los valores y vectores propios de la matriz de coeficientes, así como a estudiar su estabilidad, determinada por la evolución temporal de dichas soluciones y caracterizar la estabilidad de los sistemas lineales homogéneos.

### 3.1. Solución de un sistema lineal homogéneo autónomo

Un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden con  $n$  variables están dados por:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots = \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Considerando las siguientes aplicaciones:

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

donde  $x$  es de clase  $C^1$ ,

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)),$$

$$a_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_{ij}(t), \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

con  $a_{ij}(t)$  funciones continuas,

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad t \longmapsto A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t). \tag{3.1}$$

El sistema (3.1) es homogéneo si  $g(t)$  es el vector nulo. En el presente trabajo nos interesaremos en un sistema homogéneo de la forma

$$x'(t) = A(t)x(t). \tag{3.2}$$

El sistema homogéneo (3.2) se dice *autónomo* si todas las entradas de  $A(t)$  son funciones constantes, es decir, no dependen de la variable  $t$ , y lo escribiremos de la siguiente forma:

$$x'(t) = Ax(t), \tag{3.3}$$

donde  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  es una matriz de coeficientes constantes, y  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial de clase  $C^1$ .

La solución del sistema (3.3) se puede determinar utilizando los valores propios de la matriz  $A$  y sus correspondientes vectores propios y vectores generalizados. De acuerdo a la Definición (2.13) se dice que  $x$  es una *solución* del sistema (3.3) si verifica las siguientes condiciones:

a)  $(t, x(t)) \in D; \forall t \in (a, b)$

b)  $x'(t) = Ax(t); \forall t \in (a, b)$

**Proposición 3.1.** (Robinson, 1995, p. 97) Sea  $A \in M(n, \mathbb{R})$ . La función vectorial  $x(t) = e^{\lambda t} v$  es una solución del sistema (3.3) si y solo si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  con vector propio  $v$ .

*Demostración.* Supóngase que  $x(t) = e^{\lambda t} v$  es solución del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ , entonces  $x(t)$  verifica las condiciones a) y b) de la Definición (2.13):

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} v,$$

$$Ax(t) = A(e^{\lambda t} v) = e^{\lambda t} Av,$$

igualando ambas expresiones:

$$Ax(t) = x'(t) \implies e^{\lambda t} Av = \lambda e^{\lambda t} v,$$

por lo tanto:

$$Av = \lambda v,$$

esta última igualdad implica que  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  con vector propio  $v$ .

Verifiquemos las condiciones a) y b) de la Definición (2.13). La ecuación diferencial que estamos estudiando es  $x'(t) = Ax(t)$ , la función  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(t, x) = Ax(t)$  no depende explícitamente de  $t$ , es una función lineal en  $x$  y tiene por dominio a  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . La función propuesta  $x(t) = e^{\lambda t} v$  es una función de clase  $C^1$  y está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto  $(t, x(t)) \in D; \forall t \in (a, b)$ .

Ahora, supóngase que  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  con vector propio  $v$ ,  $Av = \lambda v$ , multiplicando

por  $e^{\lambda t}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}(Av)e^{\lambda t} &= (\lambda v)e^{\lambda t}, \\ A(e^{\lambda t}v) &= (\lambda e^{\lambda t}v), \\ Ax(t) &= x'(t),\end{aligned}$$

con este último resultado se concluye que  $x(t) = e^{\lambda t}v$  es solución del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ .  $\square$

**Proposición 3.2.** (Robinson, 1995, p. 99) Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , con multiplicidad algebraica  $m \leq n$ , y sea  $w$  un vector generalizado tal que

$$(A - \lambda I)^{k+1}w = 0, \quad k + 1 \leq m.$$

Entonces

$$x(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w$$

es solución del sistema (3.3).

*Demostración.* Para verificar que  $x(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w$  es solución del sistema (3.3), se tienen que verificar las condiciones a) y b) de la definición (2.13).

Para verificar la condición a) es suficiente observar que la función  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(t, x) = Ax(t)$  que no depende explícitamente de  $t$ , es una función lineal en  $x$  y tiene por dominio a  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . La función propuesta  $x(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w$  es una función de clase  $C^1$  y está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto  $(t, x(t)) \in D ; \forall t \in (a, b)$ .

Así se cumple la condición a).

Para verificar la condición b), sea

$$x(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w.$$

Luego, derivando y aplicando la regla del producto

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w + e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{d}{dt} \left( \frac{t^j}{j!} \right) (A - \lambda I)^j w,$$

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w + e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda I)^j w,$$

ahora, en la segunda sumatoria, considerando el cambio de índice  $r = j - 1$ , se tiene que  $j = r + 1$ ,  
y

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w + e^{\lambda t} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{t^r}{r!} (A - \lambda I)^{r+1} w,$$

factorizando  $e^{\lambda t}$  y ordenando

$$x'(t) = e^{\lambda t} \left[ \lambda \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w + (A - \lambda I) \sum_{r=0}^k \frac{t^r}{r!} (A - \lambda I)^r w \right],$$

como  $(A - \lambda I)^{k+1} w = 0$ , se puede extender la sumatoria del segundo termino hasta  $k$  sin alterar el valor, pues el último término de la sumatoria con  $r = k$  es nulo cuando se multiplica por  $(A - \lambda I)$ . Por lo tanto:

$$x'(t) = [\lambda I + (A - \lambda I)] \left( e^{\lambda t} \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j w \right) = Ax(t),$$

esto prueba que  $x(t)$  es solución del sistema (3.3). □

**Proposición 3.3.** (Perko, 2001, p. 20) Sean  $A, D \in M(n, \mathbb{R})$  matrices semejantes. Entonces el cambio de variable lineal  $y(t) = Px(t)$  transforma el sistema  $x'(t) = Ax(t)$  en el sistema  $y'(t) = Dy(t)$ . En particular, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a)  $x(t)$  es solución de  $x'(t) = Ax(t)$ ;
- b)  $y(t) = Px(t)$  es solución de  $y'(t) = Dy(t)$ .

Donde  $P \in M(n, \mathbb{R})$  es una matriz invertible, tal que  $A = P^{-1}DP$ .

*Demostración.* Supóngase que  $x(t)$  es solución del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ , y defínase  $y(t) = Px(t)$ .

Como  $P$  es invertible, se tiene  $x(t) = P^{-1}y(t)$ .

Derivando, se obtiene  $x'(t) = P^{-1}y'(t)$ . Dado que  $x'(t) = Ax(t)$ , resulta

$$P^{-1}y'(t) = A(P^{-1}y(t)).$$

Multiplicando por  $P$ ,

$$y'(t) = PAP^{-1}y(t).$$

Como  $A = P^{-1}DP$ , se sigue que  $PAP^{-1} = D$ , y por tanto  $y'(t) = Dy(t)$ .

Recíprocamente, si  $y(t)$  satisface  $y'(t) = Dy(t)$  y se define  $x(t) = P^{-1}y(t)$ , entonces

$$y(t) = Px(t) \text{ y } y'(t) = Px'(t).$$

Sustituyendo en la ecuación anterior,

$$Px'(t) = DPx(t).$$

Multiplicando por  $P^{-1}$  se obtiene  $x'(t) = P^{-1}DPx(t) = Ax(t)$ . Esto prueba la equivalencia.  $\square$

**Definición 3.1.** (Perko, 2001, p. 60) Sea  $A \in M(n, \mathbb{R})$  y  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  una función matricial. Se dice que  $\Phi(t)$  es una *matriz fundamental de soluciones* del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ , si se cumplen las siguientes condiciones:

- a)  $\Phi(t)$  es invertible para todo  $t$ .
- b)  $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ .

**Observación 3.1.**

- a) Todas las columnas de la matriz  $\Phi(t)$  son soluciones del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ .
- b) La exponencial  $e^{tA}$  es una matriz fundamental de soluciones del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ .

En particular, se cumple que  $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ .

**Proposición 3.4.** (Sotomayor Tello, 1979, p. 63) Sea  $x'(t) = Ax(t)$  un sistema lineal autónomo, con  $A \in M(n, \mathbb{R})$ . Si  $A$  tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , correspondientes a los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , entonces

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} v_1 & e^{\lambda_2 t} v_2 & \dots & e^{\lambda_n t} v_n \end{bmatrix} \in M(n, \mathbb{R})$$

es una matriz fundamental de soluciones del sistema.

*Demostración.* Sea  $\phi_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$  la columna  $i$ -ésima de  $\Phi(t)$ . Demostrar que  $\phi_i(t)$  es solución del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ . Como  $v_i$  es un vector propio correspondiente al valor propio  $\lambda_i$ , por la Proposición (3.1) se cumple:

$$\phi_i'(t) = \lambda_i e^{\lambda_i t} v_i = A \phi_i(t).$$

Por tanto, cada columna de  $\Phi(t)$  es solución del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ . Ahora demostrar que  $\Phi(t)$  es invertible. Por hipótesis, los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son linealmente independientes, entonces, para todo  $t$ , los vectores

$$e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, e^{\lambda_n t} v_n$$

también son linealmente independientes (pues la multiplicación por una función escalar no anula la independencia). Por lo tanto,  $\Phi(t)$  es invertible. Para verificar que  $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ , se calcula la derivada de  $\Phi(t)$  con respecto a  $t$

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} v_1 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} v_2 & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} v_n \end{bmatrix}.$$

se reescribe cada columna de  $\Phi(t)$  como

$$\lambda_i e^{\lambda_i t} v_i = e^{\lambda_i t} (\lambda_i v_i) = e^{\lambda_i t} (A v_i),$$

así

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} (A v_1) & e^{\lambda_2 t} (A v_2) & \dots & e^{\lambda_n t} (A v_n) \end{bmatrix},$$

extrayendo el factor  $A$ , se tiene que

$$\Phi'(t) = A \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} v_1 & e^{\lambda_2 t} v_2 & \dots & e^{\lambda_n t} v_n \end{bmatrix} = A \Phi(t).$$

Por tanto,  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental de soluciones del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ .  $\square$

Con el propósito de ilustrar el procedimiento para determinar la matriz exponencial de un sistema lineal autónomo, considere el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + 5x_2 + x_3, \\ x'_2 = -5x_1 - 6x_2 + 4x_3, \\ x'_3 = 2x_3, \end{cases}$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -5 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

a partir de la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

se obtienen los valores propios

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 + 3i, \quad \lambda_3 = -2 - 3i$$

y sus vectores propios correspondientes son

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{28}{25} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-4-3i}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-4+3i}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de paso  $P$  formada por los vectores propios es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{28}{25} & \frac{-4-3i}{5} & \frac{-4+3i}{5} \\ -\frac{1}{5} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Dado que la matriz  $A$  es real, la Observación (2.6) garantiza la existencia de una matriz real  $P_0$  tal que  $J^* = P_0^{-1}AP_0$ , donde  $J^*$  corresponde a la forma canónica de Jordan real de  $A$ . En este caso,

$$P_0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = P_0 e^{tJ^*} P_0^{-1}.$$

De este modo, la matriz exponencial se expresa como

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{28}{25} & -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \cos(3t) & -e^{-2t} \operatorname{sen}(3t) \\ 0 & e^{-2t} \operatorname{sen}(3t) & e^{-2t} \cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Después de efectuar el producto matricial, se obtiene:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cos(3t) + 4 \operatorname{sen}(3t)}{3 e^{2t}} & \frac{5 \operatorname{sen}(3t)}{3 e^{2t}} & \frac{28 e^{4t} - 28 \cos(3t) - 29 \operatorname{sen}(3t)}{25 e^{2t}} \\ -\frac{5 \operatorname{sen}(3t)}{3 e^{2t}} & \frac{3 \cos(3t) - 4 \operatorname{sen}(3t)}{3 e^{2t}} & \frac{-e^{4t} + \cos(3t) + 8 \operatorname{sen}(3t)}{5 e^{2t}} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

La matriz obtenida constituye una matriz fundamental de soluciones del sistema, y permite expresar su solución general como  $x(t) = e^{tA}x_0$ , donde  $x_0$  es la condición inicial.

**Observación 3.2.** Si la matriz  $A$  es semejante a la forma canónica de Jordan real  $J^*$  mediante una matriz invertible  $P_0$ , es decir,  $A = P_0 J^* P_0^{-1}$ , entonces se cumple que  $e^{tA} = P_0 e^{tJ^*} P_0^{-1}$ . En consecuencia, la función matricial

$$\Phi(t) = P_0 e^{tJ^*}$$

es una matriz fundamental del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ , ya que satisface  $\Phi'(t) = A\Phi(t)$  y  $\Phi(0) = P_0$ . Además, se cumple la igualdad matricial  $\Phi(t) = e^{tA} P_0$ , que relaciona esta matriz fundamental con la matriz exponencial del sistema.

## 3.2. Comportamiento de las soluciones de un sistema lineal autónomo

Dado el sistema lineal autónomo  $x'(t) = Ax(t)$ , donde  $A$  es una matriz constante de orden  $n \times n$ . Su estudio es importante porque modela muchos fenómenos físicos y permite aproximar sistemas no lineales cerca del equilibrio. El comportamiento de las soluciones depende de las propiedades algebraicas de la matriz  $A$ , en particular de sus valores propios y de su estructura canónica. Los valores propios determinan si las soluciones crecen, decrecen u oscilan a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Así, mediante el estudio del espectro de  $A$  es posible clasificar el sistema como estable, inestable o asintóticamente estable.

**Proposición 3.5.** (Sotomayor Tello, 1979, p. 63) Sea  $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda)$ , con  $\alpha < -\mu < 0$ . Entonces existe una constante  $c > 0$  tal que, para todo  $t \geq 0$ , se cumple:

$$\|e^{tR_{2q}}\| \leq c e^{-\mu t}$$

$$\|e^{tR_{2q}^*}\| \leq c e^{-\mu t},$$

donde  $R_{2q}^*$  es la forma canónica real del bloque  $R_{2q}$  asociados al valor propio  $\lambda$ , visto en la Observación (2.5).

**Proposición 3.6.** Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$  con parte real  $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , y sea  $0 < \mu < \alpha$ . Entonces, existe una constante  $c > 0$  tal que, para todo  $t \leq 0$ , se cumple:

$$\|e^{tR_{2q}}\| \leq c e^{\mu t},$$

$$\|e^{tR_{2q}^*}\| \leq c e^{\mu t},$$

donde  $R_{2q}^*$  es la forma canónica real de  $R_{2q}$  asociados al valor propio  $\lambda$ , visto en la Observación (2.5).

*Demostración.* El resultado se obtiene aplicando la Proposición 3.5 (Sotomayor Tello, 1979, p. 63) a la matriz  $-A$ . En efecto, si  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , entonces  $\operatorname{Re}(-\lambda) < 0$ , por lo que la estimación exponencial para  $t \geq 0$  se traduce en la estimación anterior para  $t \leq 0$ .  $\square$

**Proposición 3.7.** (Barreira y Valls, 2008, p. 77) Si una matriz  $A \in M(n, \mathbb{R})$  tiene todos sus valores propios con parte real negativa, entonces existen constantes  $c > 0$  y  $\mu > 0$  tales que

$$\|e^{tA}\| \leq c e^{-\mu t}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

**Proposición 3.8.** (Barreira y Valls, 2008, p. 67) Dado  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , la solución del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ , con condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , está dada por

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

**Definición 3.2.** (Barreira y Valls, 2008, p. 106) Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua y considérese el sistema  $x'(t) = f(t, x)$ .

Sea  $x(t, t_0, \bar{x}_0)$  una solución del sistema definida para todo  $t \geq t_0$ . Se dice que la solución  $x(t, t_0, \bar{x}_0)$  es *estable* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, si  $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta$ , entonces la solución  $x(t, t_0, x_0)$  está definida para todo  $t \geq t_0$  y satisface

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Cuando la solución del sistema no es estable, este se llamará *inestable*.

**Definición 3.3.** (Barreira y Valls, 2008, p. 107) La solución  $x(t, t_0, \bar{x}_0)$  del sistema  $x'(t) = f(t, x)$  se dice *asintóticamente estable* si:

- a) es estable;
- b) existe  $\alpha > 0$  tal que si  $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \alpha$ , entonces  $\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

En lo que sigue se considerarán sistemas lineales de la forma  $x'(t) = A(t)x(t)$ , donde  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  es una función continua. Obsérvese que en este caso  $f(t, x) = A(t)x$  y se cumple que  $f(t, 0) = 0$ , por lo que  $x(t) = 0$  es una solución del sistema. Por consiguiente, se estudiará la estabilidad de la solución trivial.

Un caso particular importante es el sistema lineal autónomo  $x'(t) = Ax(t)$ , donde  $A \in M(n, \mathbb{R})$  es una matriz constante.

**Teorema 3.1.** (Barreira y Valls, 2008, p. 112) Sea  $A \in M(n, \mathbb{C})$  y  $x'(t) = Ax(t)$  un sistema lineal autónomo. Entonces se tiene:

- a) El sistema es *estable* si y solo si  $A$  no tiene valores propios con parte real positiva y, cada valor propio con parte real cero tiene un bloque de Jordan diagonal.
- b) El sistema es *asintóticamente estable* si y solo si  $A$  tiene solo valores propios con parte real negativa.
- c) El sistema es *inestable* si y solo si  $A$  tiene al menos un valor propio con parte real positiva, o bien al menos un valor propio con parte real cero con un bloque de Jordan no diagonal.

*Demostración.* Para la demostración, se considera que la matriz  $A$  está en su forma canónica de Jordan:

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} R_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{n_k} \end{pmatrix},$$

donde  $P$  es una matriz invertible y cada  $R_{n_j}$  es un bloque de Jordan de orden  $n_j \times n_j$ . Entonces, por la Proposición (2.4) se tiene

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tR_{n_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tR_{n_2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tR_{n_k}} \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (3.4)$$

Además, cada bloque exponencial tiene la expresión:

$$e^{tR_{n_j}} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_j-3}}{(n_j-3)!} & \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Se observa que las entradas situadas por encima de la diagonal principal de  $e^{tR_{n_j}}$  tienen la forma  $e^{\lambda_j t} p(t)$ , donde  $p(t)$  es un polinomio de grado a lo sumo  $n_j - 1$ . Bajo estas consideraciones, se procede con la demostración del teorema.

**Prueba de a)** ( $\Rightarrow$ ) Se busca una estimación para la matriz  $e^{tA}$  en términos de la parte real de los valores propios de  $A$ .

$$\|e^{tA}\| = \|P e^{tJ} P^{-1}\|$$

Por la desigualdad submultiplicativa de la norma, se obtiene:

$$\|e^{tA}\| \leq \|P\| \|e^{tJ}\| \|P^{-1}\|.$$

Además,

$$\|e^{tJ}\| = \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \|e^{tR_j(\lambda_j)}\| \right\}.$$

Por la definición de exponencial de bloque de Jordan, se tiene

$$e^{tR_j(\lambda_j)} = e^{\lambda_j t} e^{tR_j(0)},$$

donde  $R_j(0)$  es una matriz nilpotente de la forma

$$R_j(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la norma, se obtiene

$$\|e^{tR_j(\lambda_j)}\| \leq e^{\operatorname{Re} \lambda_j t} \|e^{tR_j(0)}\|.$$

Sea

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq k} \{ \operatorname{Re} \lambda_j \},$$

entonces

$$\|e^{tR_j(\lambda_j)}\| \leq e^{\alpha t} \|e^{tR_j(0)}\|.$$

Por otro lado, para cada  $\varepsilon_j > 0$ , existe una constante  $C_j = C_j(\varepsilon_j) > 0$  tal que

$$\|e^{tR_j(0)}\| \leq C_j e^{\varepsilon_j t}, \quad t \geq 0.$$

En efecto, si se define

$$M_j = \sup_{t \geq 0} \{ \|e^{tR_j(0)}\| e^{-\varepsilon_j t} \},$$

entonces, como  $R_j(0)$  es nilpotente,  $e^{tR_j(0)}$  es una matriz polinómica en  $t$ , y la función  $\|e^{tR_j(0)}\| e^{-\varepsilon_j t}$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, que dicho supremo es finito. En consecuencia,

$$\|e^{tR_j(0)}\| \leq M_j e^{\varepsilon_j t}, \quad t \geq 0.$$

De este modo, se puede tomar  $C_j = M_j$ . Por tanto,

$$\|e^{tA}\| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \max_{1 \leq j \leq k} \{e^{\alpha t} C_j e^{\varepsilon_j t}\}.$$

Sea:

$$C = \max_{1 \leq j \leq k} \{C_j\}, \quad \beta = \max_{1 \leq j \leq k} \{\varepsilon_j\},$$

entonces

$$\|e^{tA}\| \leq \|P\| \|P^{-1}\| C e^{(\alpha+\beta)t}.$$

Finalmente, si se define

$$K = \|P\| \|P^{-1}\| C,$$

se concluye que

$$\|e^{tA}\| \leq K e^{(\alpha+\beta)t}.$$

Para algún  $t_0 > 0$  y  $x_0 = x(t_0)$ , la función

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

es solución del sistema

$$x'(t) = Ax(t).$$

Por lo tanto,

$$\|e^{tA} x_0\| \leq \|x_0\| K e^{(\alpha+\beta)t}, \quad \forall t \geq t_0 > 0. \quad (3.6)$$

Por otro lado, si existe  $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , entonces, existe un  $x_0 \neq 0$  tal que  $e^{tA} x_0 = e^{\lambda t}$ . De la desigualdad (3.6) se deduce que para cualquier  $x_0 \neq 0$ ,  $\|e^{tA} x_0\| = \|x_0\| e^{\alpha t} \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , lo cual contradice a la hipótesis de la estabilidad del sistema  $x'(t) = Ax(t)$ . Por tanto,

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq k} \{\operatorname{Re}(\lambda_j)\} < 0.$$

En consecuencia, la matriz  $A$  no tiene valores propios con parte real positiva.

Ahora, se demostrará que todos los bloques de Jordan asociados a valores propios  $\lambda_j$  con parte real nula son diagonales. Por simplicidad, se considera un bloque de Jordan  $R_{n_j}(\lambda_j)$  de orden  $n_j = 2$ , para algún  $j$ , no diagonal, de la forma

$$R_{n_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & r \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad r \neq 0.$$

Entonces, la exponencial de dicho bloque está dada por

$$e^{tR_{n_j}(\lambda_j)} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & rt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $\text{Re}(\lambda_j) = 0$ , se tiene  $|e^{\lambda_j t}| = 1$ , por lo que el crecimiento de  $e^{tR_{n_j}(\lambda_j)}$  viene determinado por el término lineal  $rt$ . En consecuencia, al menos una entrada de la matriz fundamental  $e^{tA}$  crece sin acotación cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Esto implica que el sistema  $x'(t) = Ax(t)$  no es estable, lo cual contradice la hipótesis de estabilidad. Por lo tanto, para cada valor propio con parte real cero, el bloque de Jordan correspondiente es necesariamente diagonal.

**Prueba de a)** ( $\Leftarrow$ ) Supóngase que la matriz  $A$  no tiene valores propios con parte real positiva y que todos los valores propios con parte real nula tienen bloques de Jordan diagonales. Sea  $x(t) = e^{tA}x_0$  la solución general del sistema vectorial  $x'(t) = Ax(t)$  para algún  $t_0 \geq 0$ , donde  $x_0 = x(t_0)$  y  $e^{tA}$  la matriz fundamental dada en (3.4). Por el resultado de (3.6)

$$\|e^{tA}x_0\| \leq \|x_0\|Ke^{(\alpha+\beta)t}, \quad \forall t \geq t_0 > 0$$

donde  $\alpha = \max_{1 \leq j \leq k} \{\text{Re}(\lambda_j)\}$ ,  $\beta = \max_{1 \leq j \leq k} \{\varepsilon_j\}$ .

Por hipótesis,  $\text{Re}(\lambda_j) \leq 0$  para todo  $j$ . Entonces, existe  $\beta > 0$  tal que  $\beta < \min_{1 \leq j \leq k} \{-\text{Re}(\lambda_j)\}$ . De

donde se obtiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_j) &< -\beta < 0 \\ \alpha &< -\beta < 0 \\ \alpha + \beta &< 0 \end{aligned}$$

Entonces, existe una constante  $C = C(\beta) > 0$  tal que  $e^{(\alpha+\beta)t} < C$ . En consecuencia,

$$\|x(t)\| = \|e^{tA}x_0\| \leq \|x_0\|KC = \varepsilon, \forall t \geq t_0 > 0.$$

Por consiguiente,  $\|x(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0 > 0$  cuando  $\|x_0\| < \delta(t_0)$ .

**Prueba de b) ( $\Rightarrow$ ).** Considérese la matriz fundamental  $\Phi(t) = e^{tA}$  dada en (3.4). Para cada bloque de Jordan  $R_{n_j}$  asociado al valor propio  $\lambda_j$ , se tiene

$$e^{tR_{n_j}} = e^{\lambda_j t} \left( I + tN_j + \frac{1}{2!}t^2N_j^2 + \dots + \frac{1}{(n_j-1)!}t^{n_j-1}N_j^{n_j-1} \right) = e^{\lambda_j t} N(t).$$

Por hipótesis, el sistema es asintóticamente estable; por lo tanto  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 0$ . Como  $\Phi(t)$  es una matriz diagonal por bloques cuyas componentes son  $e^{tR_{n_j}}$ , se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tR_{n_j}} = 0.$$

En consecuencia, para cualquier norma matricial se tiene  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} \|N(t)\| = 0$ .

Por otra parte,  $N(t)$  es una matriz polinómica no nula; por lo tanto, existe una entrada  $p(t)$  que es un polinomio de grado  $m \geq 0$ . Para  $t$  suficientemente grande se cumple  $|p(t)| \geq Ct^m$ , con  $C > 0$ , y como toda norma matricial es mayor o igual que el valor absoluto de cualquiera de sus entradas, se tiene

$$\|N(t)\| \geq |n_{\alpha\beta}(t)| \geq Ct^m.$$

De aquí se obtiene

$$e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} Ct^m \leq e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} \|N(t)\|.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} C t^m = 0.$$

Si  $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} C t^m = +\infty,$$

lo cual constituye una contradicción. Por consiguiente,  $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ .

**Prueba de b) ( $\Leftarrow$ ).** Se considera la matriz fundamental  $\Phi(t) = e^{tA}$  dada en (3.4). Para cada bloque de Jordan  $R_{n_j}$ , asociado a un valor propio  $\lambda_j$ , se tiene

$$e^{tR_{n_j}} = e^{\lambda_j t} \left( I + tN_j + \frac{1}{2!} t^2 N_j^2 + \dots + \frac{1}{(n_j - 1)!} t^{n_j - 1} N_j^{n_j - 1} \right) = e^{\lambda_j t} N(t).$$

En consecuencia,

$$\|e^{tR_{n_j}}\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} \|N(t)\|.$$

Además,  $\Phi(t) = e^{tA}$  y  $e^{tR_{n_j}} = e^{\lambda_j t} N(t)$ . Por hipótesis,  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ , por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t \operatorname{Re}(\lambda_j)} = 0.$$

Por consiguiente, para todo bloque de Jordan  $R_{n_j}$  se tiene  $\|e^{tR_{n_j}}\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Como

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}(e^{tR_{n_1}}, \dots, e^{tR_{n_k}}),$$

y cada  $e^{tR_{n_j}} \rightarrow 0$ , se obtiene que  $e^{tJ} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Finalmente,  $e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1} \rightarrow P 0 P^{-1} = 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , lo cual implica que el sistema es asintóticamente estable.

**Prueba de c) ( $\Rightarrow$ ).** Sea  $\Phi(t) = e^{tA}$  la matriz fundamental del sistema lineal autónomo  $x'(t) = Ax(t)$  con  $\Phi(0) = I$  y sea  $A = PJP^{-1}$  su forma de Jordan, donde  $J = \operatorname{diag}(R_{n_1}(\lambda_1), \dots, R_{n_k}(\lambda_k))$ .

Entonces,

$$\Phi(t) = e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}, \quad e^{tJ} = \text{diag} (e^{tR_{n_1}(\lambda_1)}, \dots, e^{tR_{n_k}(\lambda_k)}). \quad (3.7)$$

Cada bloque satisface (3.5):

$$e^{tR_{n_j}} = e^{\lambda_j t} \left( I + tN_j + \frac{1}{2!} t^2 N_j^2 + \dots + \frac{1}{(n_j - 1)!} t^{n_j - 1} N_j^{n_j - 1} \right) = e^{\lambda_j t} N(t), \quad (3.8)$$

donde  $N$  es la matriz nilpotente con unos en la superdiagonal y  $N^{n_j} = 0$ .

Demostración del contrarrecíproco. Como  $J$  es diagonal por bloques, basta acotar cada  $e^{tR_{n_j}(\lambda_j)}$  para  $t \geq 0$ .

Si  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ , entonces por la Proposición (3.5) existe  $c_j > 0$  tal que

$$\|e^{tR_{n_j}(\lambda_j)}\| \leq c_j e^{-\mu_j t} \leq c_j, \quad t \geq 0.$$

Si  $\text{Re}(\lambda_j) = 0$  y el bloque es diagonal, entonces  $R_{n_j}(\lambda_j) = \lambda_j I$  y

$$e^{tR_{n_j}(\lambda_j)} = e^{\lambda_j t} I, \quad \|e^{tR_{n_j}(\lambda_j)}\| = |e^{\lambda_j t}| = 1.$$

En consecuencia, existe  $M > 0$  tal que  $\|e^{tJ}\| \leq M$  para todo  $t \geq 0$ . Usando (3.7),

$$\|\Phi(t)\| = \|P e^{tJ} P^{-1}\| \leq \|P\| \|e^{tJ}\| \|P^{-1}\| \leq \|P\| M \|P^{-1}\| =: C, \quad t \geq 0.$$

Luego, para toda condición inicial  $x_0$ ,

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t)x_0\| \leq \|\Phi(t)\| \|x_0\| \leq C \|x_0\|, \quad t \geq 0.$$

Esto implica la estabilidad del equilibrio 0, lo cual contradice la hipótesis de inestabilidad. En consecuencia, si el sistema es inestable, entonces necesariamente existe un valor propio con parte real positiva, o bien existe un valor propio con parte real cero cuyo bloque de Jordan no es diagonal.

**Prueba de c)** ( $\Leftarrow$ ). Supóngase que  $A$  tiene al menos un valor propio  $\lambda$  con  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , o bien existe un valor propio  $\lambda$  con  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  cuyo bloque de Jordan asociado tiene tamaño  $n \geq 2$  (es decir, el bloque no es diagonal).

- (I) Si existe  $\lambda$  con  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , entonces por (3.8) el correspondiente  $e^{tR_{n_j}(\lambda)}$  contiene el factor  $e^{\lambda t}$ . Por tanto, existen constantes  $c > 0$  y un vector  $y_0$  cuyas componentes son no nulas únicamente en las coordenadas correspondientes a ese bloque de Jordan tales que

$$\|e^{tJ}y_0\| \geq ce^{\operatorname{Re}(\lambda)t}, \quad (t \geq 0).$$

Si tomamos  $x_0 = Py_0$ , de (3.7) se obtiene

$$\|\Phi(t)x_0\| = \|Pe^{tJ}y_0\| \geq \frac{1}{\|P^{-1}\|} \|e^{tJ}y_0\| \geq \frac{c}{\|P^{-1}\|} e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty,$$

de donde existe una solución no acotada y el sistema es *inestable*.

- (II) Si  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  y el bloque de Jordan  $R_{n_j}$  de tamaño  $n_j \geq 2$ , entonces el nilpotente  $N$  asociado es no nulo. En la base canónica del bloque tomemos el último vector canónico  $e_{n_j}$  (último de la cadena de Jordan en la convención usada).

Utilizando  $N^k e_{n_j} = e_{n_j-k}$  para  $k = 0, \dots, n_j - 1$ , de (3.8):

$$e^{tR_{n_j}(\lambda)} e_{n_j} = e^{\lambda t} \left( e_{n_j} + te_{n_j-1} + \frac{t^2}{2!} e_{n_j-2} + \dots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} e_1 \right).$$

Como  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ , el factor  $e^{\lambda t}$  tiene módulo constante y, por tanto, la norma de  $e^{tR_{n_j}(\lambda)} e_{n_j}$  crece polinómicamente con término principal de orden  $t^{n_j-1}$ . Es decir, existen una constante  $c' > 0$  y  $t_0$  tales que  $\|e^{tR_{n_j}(\lambda)} e_{n_j}\| \geq c' t^{n_j-1}$  para  $t \geq t_0$ .

Llevándolo al sistema original con  $x_0 = Pe_{n_j}$ ,

$$\|X(t)x_0\| = \|Pe^{tJ}e_{n_j}\| \geq \frac{1}{\|P^{-1}\|} \|e^{tJ}e_{n_j}\| \geq \frac{c'}{\|P^{-1}\|} t^{n_j-1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty,$$

con lo que también existe una solución no acotada y el sistema es *inestable*.

En ambos subcasos obtenemos inestabilidad, por lo que si  $A$  cumple alguna de las dos condiciones del enunciado entonces el sistema es inestable.  $\square$

Los resultados obtenidos en el **Capítulo 3**, dedicado al estudio de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes constituye el fundamento para extender el estudio de la estabilidad al caso de los *sistemas lineales no autónomos con coeficientes periódicos* de la forma  $x'(t) = A(t)x(t)$ , donde  $A(t)$  es una función matricial de periodo  $T$ . En este contexto, el análisis espectral ya no se basa directamente en los valores propios de la matriz  $A(t)$ , sino en los *exponentes de Floquet* (valores propios de una matriz constante  $R$ ) tal que

$$\Phi(t) = P(t) e^{tR},$$

donde  $\Phi(t)$  es la matriz fundamental del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  y  $P(t)$  una matriz periódica de periodo  $T$ . De esta forma, la estabilidad de los sistemas lineales con coeficientes constantes no sólo proporciona un marco conceptual sólido, sino que también sirve como punto de partida para comprender, generalizar la estabilidad de los sistemas con coeficientes periódicos y analizar la dinámica y el comportamiento asintótico de las soluciones mediante los *exponentes de Floquet*.

# Capítulo 4

## Sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomos con coeficientes periódicos

En este capítulo utilizaremos el teorema de Floquet para analizar el comportamiento de las soluciones de un sistema lineal no autónomo con coeficientes periódicos, de la forma

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad (4.1)$$

el cual, en muchos casos, surge como la linealización de ecuaciones diferenciales no lineales. Las soluciones del sistema (4.1) se pueden estudiar a través de un sistema de ecuaciones diferenciales lineal autónomo equivalente al sistema (4.1). El teorema de Floquet muestra que, mediante un cambio adecuado de coordenadas, existe una transformación de coordenadas periódica que reduce el sistema periódico a un sistema lineal con matriz constante en las nuevas coordenadas, lo que permite describir de manera más sencilla la evolución temporal de sus soluciones.

### 4.1. Solución fundamental de un sistema lineal no autónomo

Determinar la solución fundamental o matriz fundamental para el sistema (4.1) ya no es tan fácil como para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales autónomos, a partir del concepto de matriz fundamental y sus propiedades, buscaremos una representación de tal matriz, esto nos permitira determinar la estabilidad de las soluciones del sistema (4.1).

**Definición 4.1.** (Barreira y Valls, 2008, p. 78) Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  una aplicación continua con periodo  $T > 0$ . Se dice que el sistema lineal no autónomo de la forma  $x'(t) = A(t)x(t)$  es de coeficientes periódicos, si  $A(t+T) = A(t), \forall t \in \mathbb{R}$ .

No todos los sistemas periódicos admiten soluciones periódicas. El problema de valor inicial

$$\begin{aligned}x' &= \cos^2(t)x \\x(0) &= x_0\end{aligned}$$

no autónoma de periodo  $T = 2\pi$  tiene una solución no periódica de la forma:

$$x(t) = x_0 e^{\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)}$$

**Definición 4.2.** (Barreira y Valls, 2008, p. 59) Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  una aplicación continua y  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  una función matricial. Se dice que  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental de soluciones del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$ , si:

- a)  $\Phi(t)$  es invertible,
- b)  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ .

De aquí en adelante, se considerará como solución fundamental del sistema (4.1) a la función  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$  definida por la matriz

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \cdots & \phi_n(t) \end{bmatrix},$$

donde los vectores columna  $\phi_j(t) = (\phi_{1j}(t), \phi_{2j}(t), \dots, \phi_{nj}(t)); j = 1, 2, \dots, n$  son soluciones del sistema (4.1).

**Proposición 4.1.** (Barreira y Valls, 2008, p. 61) Si  $\Phi(t)$  y  $\varphi(t)$  son matrices fundamentales de soluciones del sistema (4.1), entonces existe una matriz invertible  $C \in M(n, \mathbb{C})$  tal que

$$\varphi(t) = \Phi(t)C, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Proposición 4.2.** Si  $A(t) \in M(n, \mathbb{C})$  es periódica de período  $T$ , y  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$  es una matriz fundamental del sistema (4.1), entonces:

a)  $\Phi(t+T)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ , es también una matriz fundamental del sistema (4.1).

b) Se cumple la relación  $\Phi(t+T) = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) \Phi(T)$ .

*Demostración.* Utilizando la hipótesis de que  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental y la periodicidad de  $A(t)$ , se tiene que:

a) Si  $\varphi(t) = \Phi(t+T)$ , derivando respecto a  $t$ :

$$\varphi'(t) = \Phi'(t+T) = A(t+T) \Phi(t+T) = A(t) \varphi(t),$$

donde se utilizó la periodicidad  $A(t+T) = A(t)$ . Esto muestra que  $\Phi(t+T)$  es solución del sistema (4.1).

Para verificar que es una matriz fundamental, se observa que los vectores columna de  $\Phi(t+T)$  son linealmente independientes, pues son traslaciones de los vectores columna de  $\Phi(t)$ , que forman una base de soluciones. Por tanto,  $\Phi(t+T)$  es invertible para todo  $t$ , y en consecuencia, por la Definición 4.2,  $\Phi(t+T)$  es una matriz fundamental.

b) Como  $\Phi(t)$  y  $\Phi(t+T)$  son matrices fundamentales, entonces por la Proposición 4.1, existe una matriz invertible  $C \in M(n, \mathbb{C})$  tal que

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) C.$$

Evaluando en  $t = 0$ , se obtiene:

$$\Phi(T) = \Phi(0) C,$$

y como  $\Phi(0)$  es invertible, se deduce:

$$C = \Phi^{-1}(0) \Phi(T).$$

Sustituyendo de nuevo en la relación anterior, resulta:

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) \Phi(T),$$

que era lo que se quería demostrar.

□

Considerando el siguiente sistema lineal

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}(t) \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \operatorname{sen}(t) \cos t & -1 + \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2(t) \end{pmatrix} x(t),$$

de período  $T = 2\pi$ . Una matriz fundamental asociada al sistema está dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} \cos(t) & e^{-t} \operatorname{sen}(t) \\ -e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen}(t) & e^{-t} \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dado que el sistema es  $2\pi$ -periódico, se cumple la relación  $\Phi(t+2\pi) = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) \Phi(2\pi)$ , la cual verifica las propiedades de la Proposición (4.2). En este caso, la matriz  $\Phi(2\pi)$  constituye la *matriz de monodromía* del sistema, que lo definiremos más adelante.

**Proposición 4.3.** (Viana y Espinar, 2021, p. 244) Si  $B$  es una matriz invertible de orden  $n \times n$ , entonces existe una matriz  $R$  (posiblemente compleja) de orden  $n \times n$  tal que

$$B = e^R.$$

*Demostración.* Por el Teorema 2.2, la forma canónica de Jordan de  $B$  está dada por  $J = P^{-1} B P$ , donde  $P$  es una matriz invertible. Supongamos que  $J = e^K$ , de manera que:

$$B = P e^K P^{-1}.$$

Equivalentemente,

$$B = e^{P K P^{-1}}.$$

Por tanto, podemos definir:

$$R = PKP^{-1},$$

y bajo estas consideraciones se cumple que:

$$B = e^R.$$

Ahora, como  $J$  es la forma canónica de Jordan, puede escribirse como una matriz diagonal por bloques

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{pmatrix},$$

donde cada bloque  $J_j$  tiene la forma

$$J_j = \lambda_j I_{n_j} + N_j,$$

con  $\lambda_j$  los valores propios distintos de  $B$  de multiplicidad algebraica  $n_j$ ,  $I_{n_j}$  la matriz identidad de orden  $n_j$ , y  $N_j$  una matriz nilpotente tal que  $N_j^{n_j} = 0$ . Para cada bloque  $J_j$ , se define su logaritmo matricial como

$$A_j = \log(J_j) = \log\left[\lambda_j \left(I_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} N_j\right)\right].$$

Definamos

$$A_j := (\log \lambda_j) I_{n_j} + \log\left(I_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} N_j\right)$$

Dado que  $N_j$  es nilpotente, se puede definir el logaritmo matricial mediante su expansión formal:

$$\log(I + M) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} M^p,$$

válida siempre que el radio espectral  $\rho(M) < 1$ . En nuestro caso, al tomar  $M = \lambda_j^{-1} N_j$ , la serie

se trunca en un número finito de términos, pues  $N_j^{n_j} = 0$ . Luego, se obtiene:

$$A_j = (\log \lambda_j) I_{n_j} + \sum_{p=1}^{n_j-1} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left( \frac{1}{\lambda_j} N_j \right)^p,$$

aplicando la exponencial matricial a ambos miembros, se tiene

$$e^{A_j} = e^{(\log \lambda_j) I_{n_j}} e^{\sum_{p=1}^{n_j-1} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left( \frac{1}{\lambda_j} N_j \right)^p} = \lambda_j \left( I_{n_j} + \frac{1}{\lambda_j} N_j \right) = J_j.$$

Esta última igualdad muestra que, cada bloque  $J_j$  puede expresarse como una exponencial de una matriz  $A_j$ , y la matriz de Jordan  $J$  se escribe como  $J = e^K$  con

$$K = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k).$$

Esto demuestra que para toda matriz invertible  $B$  existe una matriz

$$R = P \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) P^{-1},$$

tal que  $B = e^R$  □

**Definición 4.3.** (Barreira y Valls, 2008, p. 80) Dada la matriz fundamental  $\Phi(t)$  del sistema (4.1), una matriz invertible  $C \in M(n, \mathbb{C})$  que satisface

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

se llama *matriz monodrómica* del sistema (4.1).

Un valor propio  $\mu = e^{\lambda T}$  de la matriz monodrómica se denomina *multiplicador característico*, y el número  $\lambda$  se llama *exponente de Floquet* (o exponente característico) del sistema (4.1).

La matriz de monodromía (o matriz de una vuelta o de un período)  $C$  está definida por:

$$C = \Phi^{-1}(0) \Phi(T).$$

**Proposición 4.4.** (Barreira y Valls, 2008, p. 80) Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$  una función matricial continua y periódica de período  $T$ . Si  $\Phi(t)$  y  $\varphi(t)$  son matrices fundamentales del sistema (4.1), con matrices de monodromía  $C$  y  $D$  respectivamente, entonces existe una matriz invertible  $S \in M(n, \mathbb{C})$  tal que:

$$S^{-1}CS = D.$$

**Teorema 4.1.** (Viana y Espinar, 2021, p. 244) Si  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$  es una función matricial continua y periódica de período  $T$ , entonces para toda matriz fundamental  $\Phi(t)$  del sistema (4.1) existe una matriz invertible  $P(t)$ , de período  $T$ , y una matriz constante  $B$ , tales que:

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Por hipótesis,  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental. Por la Proposición (4.2), la matriz:

$$\varphi(t) = \Phi(t+T)$$

también es una matriz fundamental. Entonces, por la Proposición (4.1), existe una matriz invertible  $C \in M(n, \mathbb{C})$  tal que:

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C. \tag{4.2}$$

De este resultado se deduce que  $C$  es una matriz de monodromía asociada a  $\Phi(t)$ . Por otro lado, como  $C$  es una matriz invertible, por la Proposición (4.3) existe una matriz constante  $B$  tal que:

$$C = e^{TB}.$$

Esto establece la existencia de una matriz exponencial asociada a  $C$ . Ahora se debe demostrar que existe una matriz invertible  $P(t)$  tal que:

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB},$$

como  $e^{-tB}$  es una matriz invertible (pues la exponencial de cualquier matriz siempre es invertible),

podemos definir:

$$P(t) := \Phi(t) e^{-tB},$$

la matriz  $P(t)$  es invertible, ya que es el producto de dos matrices invertibles. Falta verificar que  $P(t)$  es periódica de período  $T$ . Por definición, se tiene:

$$P(t+T) = \Phi(t+T) e^{-(t+T)B},$$

utilizando la relación (4.2) y la propiedad de la exponencial matricial:

$$e^{TB} e^{-TB} = I,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \Phi(t) C e^{-tB} e^{-TB} \\ P(t+T) &= \Phi(t) (e^{TB}) e^{-tB} e^{-TB} \\ P(t+T) &= \Phi(t) e^{-tB} \\ P(t+T) &= P(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $P(t)$  es de período  $T$ . Esto completa la demostración del Teorema (4.1). □

**Corolario 4.1.** (Kelley, 2010, p. 71) Sea  $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$  como en el Teorema (4.1). Entonces, una función  $x(t)$  es solución del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  si y solo si  $y(t) = P^{-1}(t)x(t)$  es solución del sistema  $y'(t) = By(t)$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótesis,  $x(t)$  es una solución del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$ , entonces existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x(t) = \Phi(t)x_0$ . Así,

$$y(t) = P^{-1}(t) \Phi(t) x_0 = P^{-1}(t) P(t) e^{tB} x_0 = e^{tB} x_0.$$

Dado que  $e^{tB}$  es una matriz fundamental del sistema  $y'(t) = By$ , se concluye que  $y(t)$  es solución de dicho sistema.

( $\Leftarrow$ ) Considerando que  $y(t) = P^{-1}(t)x(t)$  es solución de  $y'(t) = By(t)$ . Entonces existe  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$y(t) = e^{tB} y_0.$$

Por tanto,

$$x(t) = P(t)y(t) = P(t)e^{tB} y_0 = \Phi(t)y_0,$$

y se concluye que  $x(t)$  es solución de  $x'(t) = A(t)x(t)$ .  $\square$

**Teorema 4.2.** (Kelley, 2010, p. 73) Sea  $\Phi(t)$  una matriz fundamental y  $C$  la matriz de monodromía del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$ , con  $A(t)$   $T$ -periódica. Entonces, para cada valor propio  $\mu_0$  de  $C$ , existe una solución  $x(t)$  tal que

$$x(t+T) = \mu_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $\mu_0$  es un valor propio de la matriz de monodromía

$$C = \Phi^{-1}(0)\Phi(T),$$

donde  $\Phi$  es una matriz fundamental del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$ .

Sea  $x_0$  un vector propio asociado a  $\mu_0$  y definiendo la función vectorial

$$x(t) = \Phi(t)x_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces  $x$  es una solución no trivial del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  y se cumple que

$$x(t+T) = \Phi(t+T)x_0$$

por la definición (4.3) y como  $x_0$  es un vector propio asociado a  $\mu_0$ , se tiene que

$$x(t+T) = \Phi(t)Cx_0$$

$$x(t+T) = \Phi(t)\mu_0 x_0$$

luego se verifica que  $x(t+T) = \mu_0 x(t)$  Por lo tanto, existe una solución  $x(t)$  tal que  $x(t+T) = \mu_0 x(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Teorema 4.3.** (Viana y Espinar, 2021) Sea  $x'(t) = A(t)x(t)$  un sistema lineal homogéneo  $T$ -periódico, y sean  $P(t)$  y  $B$  las matrices  $T$ -periódica y constante, respectivamente, dadas en el Teorema (4.1). Entonces, el cambio de variable  $x(t) = P(t)y(t)$  transforma la ecuación  $x'(t) = A(t)x(t)$  en el sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes  $y'(t) = By(t)$ .

*Demostración.* Por el Teorema (4.1), se tiene que  $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$  es una matriz fundamental del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$ . Derivando directamente se obtiene:

$$[P(t)e^{tB}]' = A(t)P(t)e^{tB}.$$

Esto implica:

$$P'(t)e^{tB} + P(t)Be^{tB} = A(t)P(t)e^{tB}.$$

Multiplicando por  $e^{-tB}$  y despejando  $P'(t)$ , resulta:

$$P'(t) = A(t)P(t) - P(t)B.$$

Por otro lado, derivando la ecuación del cambio de variable  $x(t) = P(t)y(t)$ , se tiene:

$$x'(t) = P'(t)y(t) + P(t)y'(t).$$

Sustituyendo  $P'(t)$ :

$$x'(t) = [A(t)P(t) - P(t)B]y(t) + P(t)y'(t).$$

Agrupando términos:

$$x'(t) = A(t)P(t)y(t) - P(t)By(t) + P(t)y'(t).$$

Como  $x'(t) = A(t)x(t) = A(t)P(t)y(t)$ , igualando:

$$A(t)P(t)y(t) = A(t)P(t)y(t) - P(t)By(t) + P(t)y'(t),$$

de donde:

$$0 = P(t) [y'(t) - By(t)].$$

Finalmente, como  $P(t)$  es invertible, se concluye que:

$$y'(t) = By(t).$$

□

**Proposición 4.5.** (Barreira y Valls, 2008, p. 82) Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$  una función continua de periodo  $T$ . Entonces,  $\lambda$  es un exponente de Floquet del sistema

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

si y solo si  $e^{\lambda t} p(t)$  es solución de dicha ecuación para alguna función no nula  $p(t)$  de periodo  $T$ .

*Demostración.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótesis,  $\lambda$  es un exponente de Floquet, de modo que  $e^{\lambda T}$  es un valor propio de la matriz monodromía  $e^{TB}$ . Esto implica que  $\lambda$  es un valor propio de  $B$ . Por tanto, existe  $x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tal que

$$Bx_0 = \lambda x_0 \quad \text{y} \quad e^{tB} x_0 = e^{\lambda t} x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando por  $P(t)$ :

$$P(t) e^{tB} x_0 = e^{\lambda t} P(t) x_0.$$

Por el Teorema (4.1),  $\Phi(t) = P(t) e^{tB}$  es una matriz fundamental de la ecuación,  $x'(t) = A(t)x(t)$  y como sus columnas forman una base del espacio de soluciones, se concluye que  $e^{\lambda t} p(t)$  es

solución de  $x'(t) = A(t)x(t)$ , con

$$p(t) = P(t)x_0,$$

que es periódica.

( $\Leftarrow$ ) Considerando que  $e^{\lambda t} p(t)$  es solución del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$ . Por el Teorema (4.1),

$$e^{\lambda t} p(t) = P(t) e^{tB} x_0,$$

para algún  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ . Evaluando en  $t + T$ :

$$e^{\lambda(t+T)} p(t) = P(t) e^{(t+T)B} x_0 = P(t) e^{tB} e^{TB} x_0,$$

por periodicidad de  $p(t)$  y  $P(t)$ , se tiene:

$$e^{\lambda T} P(t) e^{tB} x_0 = P(t) e^{tB} e^{TB} x_0.$$

Multiplicando por  $(P(t) e^{tB})^{-1}$ , se obtiene:

$$(e^{\lambda T} I - e^{TB}) x_0 = 0.$$

Por tanto,  $e^{\lambda T}$  es un valor propio de  $e^{TB}$ , y en consecuencia, por la Definición (4.3)  $\lambda$  es un exponente característico. □

**Teorema 4.4.** (Barreira y Valls, 2008, p. 111) Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$  una función matricial continua y sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$ . Entonces el sistema es:

- a) estable si y sólo si  $\sup\{\|\Phi(t)\| : t > 0\} < +\infty$ ;
- b) asintóticamente estable si y sólo si  $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ ;

*Demostración. prueba a)* ( $\Rightarrow$ ) Considerando que el sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  es estable. Entonces, para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\Phi(t) \Phi(0)^{-1} x_0\| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad \|x_0\| \leq \delta, \quad \forall t > 0.$$

Por definición de norma matricial inducida por la norma euclidiana, se tiene:

$$\|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\| = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}x_0\|}{\|x_0\|}.$$

Haciendo el cambio de variable

$$y_0 = \delta \frac{x_0}{\|x_0\|},$$

de modo que  $\|y_0\| = \delta$ , resulta que:

$$\|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\| = \frac{1}{\delta} \sup_{\|y_0\|=\delta} \|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}y_0\|.$$

Por la hipótesis de estabilidad:

$$\|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}y_0\| \leq \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Entonces  $\|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$ ,  $\forall t > 0$ . Ahora, usando la desigualdad submultiplicativa de la norma:

$$\|\Phi(t)\| \leq \|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\| \|\Phi(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|\Phi(0)\|.$$

Finalmente, se concluye que:

$$\sup\{\|\Phi(t)\| : t > 0\} \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|\Phi(0)\| < +\infty.$$

Por tanto, la matriz fundamental está uniformemente acotada.

**prueba b)** ( $\Leftarrow$ ) Suponiendo que  $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Entonces existe una constante  $M > 0$  tal que

$$\sup\{\|\Phi(t)\| : t > 0\} \leq M < +\infty.$$

Por el inciso a), el sistema  $x' = A(t)x$  es estable.

Por otro lado, para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}x_0\| = \|\Phi(t)y_0\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty,$$

donde  $y_0 = \Phi(0)^{-1}x_0$ . Por tanto, toda solución tiende a cero, es decir, el sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  es asintóticamente estable.

**prueba de b)** ( $\Rightarrow$ ) Suponiendo que el sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  es asintóticamente estable. Entonces, para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty.$$

En particular, tomando  $\|x_0\| = 1$ , se sigue que

$$\|\Phi(t)\| = \sup_{\|x_0\|=1} \|\Phi(t)x_0\| = \sup_{\|x_0\|=1} \|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\Phi(0)x_0\| \leq \|\Phi(0)\| \sup_{\|z\|=1} \|\Phi(t)\Phi(0)^{-1}z\| \rightarrow 0,$$

cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Con esto se concluye la demostración del inciso b) □

**Teorema 4.5.** (Barreira y Valls, 2008, p. 112) Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{C})$  una función matricial continua periódica de periodo  $T$  y sea  $B$  la matriz del Teorema (4.1). Entonces el sistema (4.1) es:

- a) estable si y sólo si no existen exponentes de Floquet con parte real positiva y, para cada exponente de Floquet con parte real nula, el bloque de Jordan correspondiente de la matriz  $B$  es diagonal;
- b) asintóticamente estable si y sólo si todos los exponente de Floquet tienen parte real negativa.
- c) inestable si y solo si existe al menos un exponente de Floquet con parte real positiva, o bien existe un exponente de Floquet con parte real nula cuyo bloque de Jordan correspondiente de la matriz  $B$  no es diagonal.

*Demostración.* Por el Teorema (4.1), una solución fundamental para la ecuación (4.1) es de la forma

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y por el Teorema (4.3),  $e^{tB}$  es una matriz fundamental del sistema vectorial  $y'(t) = By(t)$ .

**prueba de a)** ( $\Rightarrow$ ) Supongase que la ecuación (4.1) es estable. Entonces, por el Teorema (4.4), se tiene  $\sup_{t>0} \|\Phi(t)\| < +\infty$ . entonces existe una constante  $C > 0$ , tal que  $\Phi(t) \leq C$ .

De la igualdad  $e^{tB} = P^{-1}(t)\Phi(t)$  y la submultiplicatividad de la norma, se obtiene

$$\|e^{tB}\| \leq \|P^{-1}(t)\| \|\Phi(t)\|, \quad \forall t > 0,$$

por el Teorema (4.1), la matriz  $P(t)$  es periódica, invertible y continua, entonces existe una constante  $M > 0$  tal que  $\|P^{-1}(t)\| \leq M, \quad \forall t > 0$ , entonces

$$\|e^{tB}\| \leq \|P^{-1}(t)\| \|\Phi(t)\| \leq MC, \quad \forall t > 0,$$

$$\|e^{tB}\| \leq K, \quad \forall t > 0,$$

con  $K = MC$

Por el Corolario (4.1),  $e^{tB}$  es una matriz fundamental del sistema vectorial  $y'(t) = By(t)$ , el cual resulta ser estable. Por lo tanto, y de acuerdo con el Teorema (3.1), inciso a), no hay exponente de Floquet con parte real positiva y, para cada exponente de Floquet con parte real cero, el bloque de Jordan correspondiente de la matriz  $B$  es diagonal.

**Prueba de a)** ( $\Leftarrow$ ) Considerando el sistema vectorial  $y'(t) = By(t)$ , la hipótesis de que no hay exponente de Floquet con parte real positiva y para cada exponente de Floquet con parte real cero el bloque Jordan correspondiente de la matriz  $B$  es diagonal, entonces por el Teorema (3.1), el sistema  $y'(t) = By(t)$  es estable. Es decir, para algún  $t_0 > 0$  y  $y_0 = y(t_0)$ , la solución  $y(t) = e^{tB}y_0$  del sistema  $y'(t) = By(t)$  verifica

$$\|e^{tB}y_0\| < \varepsilon; \forall t > 0$$

$$\sup\{\|e^{tB}y_0\| : t > 0\} < +\infty; y_0 \neq 0$$

Por el Teorema (4.1),  $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$  es una solución fundamental del sistema (4.1), entonces

$$\|\Phi(t)\| \leq \|P(t)\| \|e^{tB}\|$$

Por el Teorema (4.1), la matriz  $P(t)$  es periódica, invertible y continua, entonces existe una constante  $C > 0$  tal que  $\|P^{-1}(t)\| \leq C, \quad \forall t > 0$ , luego

$$\|\Phi(t)\| < C\|e^{tB}\|$$

$$\sup\{\|\Phi(t)\| : t > 0\} < C\sup\{\|e^{tB}\| : t > 0\} < +\infty$$

Por el Teorema (4.4) se concluye que el sistema (4.1) es estable.

**Prueba de b)** ( $\Rightarrow$ ) Por el Corolario (4.1)  $y(t) = P(t)^{-1}x(t)$  es solución vectorial del sistema  $y'(t) = By(t)$ , con  $x(t)$  una solución vectorial del sistema (4.1)

$$\|y(t)\| \leq \|P(t)^{-1}\| \|x(t)\|$$

por el Teorema (4.1), la matriz  $P(t)$  es periódica, invertible y continua, entonces existe una constante  $K > 0$  tal que  $\|P^{-1}(t)\| \leq K, \quad \forall t > 0$ , entonces

$$\|y(t)\| \leq K\|x(t)\|$$

Por otro lado, considerando  $x(t) = \Phi(t)x_0$  para algún  $t_0 \geq 0$  y  $x_0 = x(t_0)$ , entonces

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| \|\Phi(t)\|$$

por hipótesis, el sistema (4.1) es asintóticamente estable, y por el Teorema (4.4) se tiene que  $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , entonces  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , este último resultado implica que  $\|y(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Sabemos que  $e^{tB}$  es una matriz fundamental del sistema  $y'(t) = By(t)$ , entonces  $y(t) = e^{tB}y_0$  es una solución de  $y'(t) = By(t)$ , entonces

$$\|e^{tB}y_0\| \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

$$\|e^{tB}\| \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

Entonces, el sistema  $y'(t) = By(t)$  es asintóticamente estable y por el Teorema (3.1), todos los

valores propios de la matriz  $B$  tiene parte real negativa. Portanto el sistema (4.1) solo tiene exponentes de Floquet con parte real negativa.

**Prueba de b)** ( $\Leftarrow$ ) Por hipótesis, el sistema (4.1) sólo tiene exponentes de Floquet con parte real negativa, entonces por el Teorema (3.1), el sistema  $y'(t) = By(t)$  es asintóticamente estable, es decir  $\|e^{tB}\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Por el Teorema (4.1),  $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$  es la matriz fundamental del sistema (4.1), entonces

$$\|\Phi(t)\| \leq \|P(t)\| \|e^{tB}\|$$

por otro lado  $P(t)$  es periódica, invertible y continua, entonces existe una constante  $C > 0$  tal que  $\|P^{-1}(t)\| \leq C, \quad \forall t > 0$ , entonces

$$\|\Phi(t)\| \leq C \|e^{tB}\|$$

$$\|\Phi(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

Por tanto, por el Teorema (4.4), el sistema (4.1) es asintóticamente estable.

**Prueba de c)** ( $\Rightarrow$ ) Por el Teorema (4.1), una matriz fundamental de (4.1) es  $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$  con  $P(t)$  de periodo  $T$ , invertible y continua, tal que  $x(t) = P(t)y(t)$  y  $y(t) = P(t)^{-1}x(t)$ . Como  $P$  y  $P^{-1}$  son continuas y  $T$ -periódicas, existen constantes  $K, L > 0$  tales que

$$\|P(t)\| \leq K, \quad \|P(t)^{-1}\| \leq L, \quad (\forall t \geq 0).$$

Note que  $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$ . Para todo  $t \geq 0$  y todo  $v \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$\|\Phi(t)v\| = \|P(t)e^{tB}v\| \leq \|P(t)\| \|e^{tB}v\| \leq K \|e^{tB}v\| \tag{4.3}$$

$$\|e^{tB}v\| = \|P(t)^{-1}\Phi(t)v\| \leq \|P(t)^{-1}\| \|\Phi(t)v\| \leq L \|\Phi(t)v\|. \tag{4.4}$$

De desigualdad (4.3) se deduce además

$$\|e^{tB}v\| \geq \frac{1}{K} \|\Phi(t)v\|.$$

Ahora, supóngase que el sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  es inestable. Entonces existe  $x_0 \neq 0$  tal que

$$\|\Phi(t)x_0\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Aplicando la desigualdad anterior con  $v = x_0$ , se obtiene

$$\|e^{tB}x_0\| \geq \frac{1}{K} \|\Phi(t)x_0\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Esto muestra que la solución  $y(t) = e^{tB}x_0$  del sistema  $y'(t) = By(t)$  diverge, es decir,  $y'(t) = By(t)$  es inestable. Utilizando el Teorema (3.1) se concluye que hay al menos un exponente de Floquet con parte real positiva o al menos un exponente de Floquet con parte real cero tal que el bloque de Jordan correspondiente de la matriz  $B$  no es diagonal.

**Prueba de (c) ( $\Leftarrow$ )** Por hipótesis, hay al menos un exponente de Floquet con parte real positiva o al menos un exponente de Floquet con parte real cero tal que el bloque de Jordan correspondiente de la matriz  $B$  no es diagonal, entonces por el Teorema (3.1) se puede afirmar que el sistema  $y'(t) = By(t)$  es inestable.

Ahora, si el sistema  $y'(t) = By(t)$  es inestable, entonces el sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  también es inestable. En efecto.

De la desigualdad (4.4) se deduce además

$$\|\Phi(t)v\| \geq \frac{1}{L} \|e^{tB}v\|.$$

Supongamos ahora que el sistema  $y'(t) = By(t)$  es inestable. Entonces existe  $y_0 \neq 0$  tal que

$$\|e^{tB}y_0\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Aplicando la desigualdad anterior con  $v = y_0$  obtenemos

$$\|\Phi(t)y_0\| \geq \frac{1}{L} \|e^{tB}y_0\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Esto muestra que la solución  $x(t) = \Phi(t)y_0$  del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  diverge, por tanto  $x'(t) = A(t)x(t)$  es inestable.

□

A partir del criterio de estabilidad formulado en términos de exponentes de Floquet, es posible obtener una caracterización equivalente basada en los multiplicadores de Floquet, la cual resulta particularmente conveniente para aplicaciones y cálculos numéricos.

**Teorema 4.6.** (Kelley, 2010, p. 71) Sean  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  los multiplicadores de Floquet del sistema  $x'(t) = A(t)x(t)$  con  $A(t)$   $T$ -periódica. Entonces la solución trivial es:

- a) asintóticamente estable si  $|\mu_i| < 1$  para todo  $i$ .
- b) estable si existe al menos un  $\mu_j$  con  $|\mu_j| = 1$ , y todos los multiplicadores con módulo uno son semisimples (diagonalizables), mientras que para los demás  $i \neq j$  se cumple  $|\mu_i| < 1$ .
- c) inestable si existe algún  $\mu_i$  con  $|\mu_i| > 1$ .

*Demostración.* Sea  $x'(t) = A(t)x(t)$  con  $A(t+T) = A(t)$  y sea  $\Phi(t)$  una matriz fundamental con  $\Phi(0) = I$ . Por el Teorema de Floquet existe una matriz  $T$ -periódica e invertible  $P(t)$  y una matriz constante  $B \in M(n, \mathbb{C})$  tales que

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}, \quad P(t+T) = P(t).$$

En particular, la matriz de monodromía  $M := \Phi(T)$  satisface

$$M = \Phi(T) = P(T)e^{TB} = P(0)e^{TB} = e^{TB},$$

pues  $P(T) = P(0)$  y  $P(0) = \Phi(0) = I$ . Por tanto, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los exponentes de Floquet (valores propios de  $B$  con multiplicidad algebraica), los multiplicadores de Floquet  $\mu_1, \dots, \mu_n$

(valores propios de  $M$ ) verifican

$$\mu_i = e^{T\lambda_i}, \quad |\mu_i| = |e^{T\lambda_i}| = e^{T\operatorname{Re}(\lambda_i)}.$$

**(a)** Si  $|\mu_i| < 1$  para todo  $i$ , entonces  $e^{T\operatorname{Re}(\lambda_i)} < 1$  para todo  $i$  y por tanto  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$  para todo  $i$ . Por el Teorema (4.5) (b), la solución trivial es asintóticamente estable. El recíproco se obtiene invirtiendo el argumento.

**(c)** Si existe  $|\mu_i| > 1$ , entonces  $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$  y por el Teorema (4.5) (c) la solución trivial es inestable. Recíprocamente, si la solución trivial es inestable, por el Teorema (4.5) (c) ocurre: o bien existe  $\lambda$  con  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  (y entonces  $|\mu| = e^{T\operatorname{Re}(\lambda)} > 1$ ), o bien existe un exponente con  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  cuyo bloque de Jordan en  $B$  no es diagonal, lo que produce un bloque no diagonal en  $M = e^{TB}$  asociado a  $|\mu| = 1$  y, en consecuencia, inestabilidad.

**(b)** Suponiendo que la solución trivial es estable pero no asintóticamente estable. Por el Teorema (4.5) (a), se tiene  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$  para todo  $i$  y, además, todo exponente con  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  es *semisimple* (su bloque de Jordan en  $B$  es diagonal). Entonces  $|\mu_i| = e^{T\operatorname{Re}(\lambda_i)} \leq 1$  para todo  $i$ , y como no hay estabilidad asintótica existe algún  $\lambda$  con  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ , equivalente a que exista al menos un  $\mu$  con  $|\mu| = 1$ . La semisimplicidad de esos  $\lambda$  implica que los multiplicadores correspondientes en  $M = e^{TB}$  son también semisimples (no aparecen bloques de Jordan no triviales) y, para los demás, se tiene  $|\mu_i| < 1$ . Esto prueba (b).

Con (a), (b) y (c) queda demostrada la caracterización en términos de los multiplicadores de Floquet. □

El criterio basado en multiplicadores de Floquet, Teorema (4.6), resulta especialmente adecuado para el análisis numérico de sistemas periódicos, ya que permite decidir la estabilidad de la solución trivial a partir del espectro de la matriz de monodromía.

## 4.2. Aplicaciones

En esta sección presentaran dos aplicaciones de los exponentes de Floquet en el análisis de la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales no autónomo con coeficientes periódicos. Para tal efecto, primeramente consideraremos una ecuación diferencial no lineal de segundo orden relacionada con un péndulo invertido que oscila sobre un soporte vibrante, modelo propuesto por el matemático ruso Pyotr Leonidovich Kapitza, luego consideraremos una aplicación de los exponentes de Floquet en el análisis de un modelo poblacional Zhao (2017) estructurado por clases, en el cual la población se divide en juveniles y adultos. El modelo incorpora explícitamente la transición de individuos entre clases y una tasa de reproducción dependiente del tiempo y periódica. Al igual que en el caso del péndulo de Kapitza, el sistema resultante puede formularse como un sistema lineal no autónomo con coeficientes periódicos, permitiendo aplicar la teoría de Floquet para estudiar la estabilidad de las soluciones. Un tratamiento unificado de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos y sus aplicaciones en sistemas físicos y biológicos se encuentra en la literatura clásica sobre la ecuación de Hill y la teoría de Floquet. En particular, modelos como la ecuación de Mathieu y el péndulo de Kapitza constituyen ejemplos paradigmáticos de estabilidad paramétrica, mientras que enfoques análogos se aplican al estudio de poblaciones estructuradas con estacionalidad Magnus y Winkler (1966), Nayfeh y Mook (1979) y Zhao (2017).

### 4.2.1. El péndulo de Kapitza y su relación con la estabilización dinámica

El **péndulo de Kapitza** constituye un modelo clásico de la dinámica no lineal y un ejemplo paradigmático de *estabilización vibracional*: la posibilidad de estabilizar una posición de equilibrio inestable mediante una excitación periódica rápida del sistema. En 1951, Kapitza (1951) demostró que un péndulo cuyo punto de suspensión oscila verticalmente con frecuencia  $\omega$  y amplitud  $a$  puede estabilizar su posición invertida si la vibración satisface ciertas condiciones de alta frecuencia, de modo que el movimiento rápido genera un *potencial efectivo* que modifica la estabilidad del equilibrio superior. Este fenómeno, inicialmente contraintuitivo, se conoce hoy como *estabilidad dinámica inducida*.

Recientemente, se han desarrollado extensiones del modelo a sistemas más complejos. Por ejemplo, Citro et al. (2015) analizan el *many-body Kapitza pendulum*, mostrando que la excitación periódica puede inducir fases estables en sistemas acoplados mediante expansiones de alta frecuencia tipo Floquet-Magnus. Asimismo, Richards (2018) realizaron una implementación experimental a microescala, confirmando la validez del modelo incluso en regímenes de vibración a frecuencias elevadas.

La idea de *estabilización por excitación periódica* ha trascendido la mecánica clásica y actualmente inspira estrategias de **control de actitud** en vehículos aéreos no tripulados (UAV o drones). Aunque los modelos de drones Alvarez-Salazar et al. (2020) y Y. Wang et al. (2019) son más complejos, el principio físico es análogo: una modulación rápida del empuje o del par angular puede generar un efecto estabilizante promedio sobre una dinámica inherentemente inestable. En esta línea, Chen et al. (2023) proponen un controlador de actitud para cuadricópteros basado en *notch filters* y descomposición aditiva de estados, que permite atenuar vibraciones periódicas y mejorar la estabilidad global del vuelo. En conjunto, estos avances muestran que el modelo de Kapitza sigue siendo un marco conceptual vigente, no solo en la mecánica teórica sino también en la ingeniería moderna de sistemas dinámicos, sirviendo de puente entre la *estabilidad vibracional* y el *control dinámico robusto* de sistemas reales como los drones, es por ello que nos hemos propuesto utilizar el modelo del péndulo de Kapitza para la aplicación física de nuestro trabajo.

La ecuación que modela al péndulo de Kapitza está dada por:

$$\theta''(t) + \left( \frac{g}{L} - \frac{a\omega^2}{L} \cos(\omega t) \right) \sin[\theta(t)] = 0, \quad (4.5)$$

Donde

$L$ : es la longitud del péndulo

$g$ : es la aceleración gravitacional

$a$ : es la amplitud

$w$ : es la frecuencia angular

Para aplicar los exponentes de Floquet en el análisis de estabilidad de la ecuación (4.5), debemos expresar dicha ecuación como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomas de

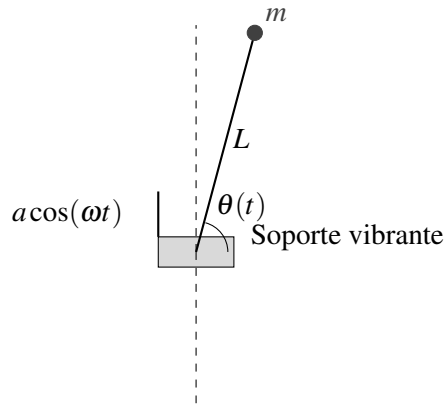


Figura 4.1: Esquema del péndulo invertido con soporte vibrante

coeficientes periódicos. Se observa que la presencia de  $\sin[\theta(t)]$  hace que la ecuación (4.5) sea no lineal, pero utilizando una aproximación en series de Taylor alrededor de  $\theta = \pi$ , se tiene que

$$\sin[\theta(t)] \approx \sin(\pi) + \cos(\pi)(\theta - \pi) = -x,$$

luego la ecuación linealizada alrededor de  $\theta = \pi$  estaría dada por

$$x''(t) - \left( \frac{g}{L} - \frac{a\omega^2}{L} \cos(\omega t) \right) x = 0. \quad (4.6)$$

Finalmente, haciendo el cambio de variables

$$x'(t) = y(t), \quad y'(t) = x''(t),$$

se obtiene el sistema matricial linealizado de la ecuación (4.5):

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} - \frac{a\omega^2}{L} \cos(\omega t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

A la ecuación (4.7) la podemos abreviar como

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (4.8)$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} - \frac{a\omega^2}{L} \cos(\omega t) & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz  $\frac{2\pi}{\omega}$ -periódica, y

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

El sistema (4.8) cumple todas las condiciones del Teorema (4.1). Para poder analizar la estabilidad del sistema (4.8), consideraremos los valores de las constantes:

$$g = 9,8, \quad L = 1, \quad a = 0,1, \quad \omega = 50.$$

También debemos considerar la matriz fundamental  $\Phi(t) = P(t) e^{tB}$ , la cual permitirá determinar la matriz de monodromía

$$M = \Phi(T) = P(T) e^{TB},$$

con  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . En vista de que la matriz  $\Phi(t)$  no se puede determinar de manera analítica, debido a la presencia del coeficiente periódico  $\frac{g}{L} - \frac{a\omega^2}{L} \cos(\omega t)$ , se emplearán métodos numéricos para su aproximación. En esta tesis, dichos métodos se implementan mediante el lenguaje Python, utilizando esquemas estándar de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias, tal como se describen en Kiusalaas (2013). Este enfoque permite calcular de manera efectiva la matriz de monodromía y los multiplicadores de Floquet del sistema en estudio.

## Implementación código python para el modelo péndulo de Kapitza.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.linalg import logm

# System parameters
g = 9.81
L = 1
a = 0.1
w = 50
T = 2*np.pi/w

# Matrix A(t)
def A(t):
    return np.array([[0, 1],
                    [(g/L) - (a*w**2/L)*np.cos(w*t), 0]])

# System: dX/dt = A(t) X
def linear_system(t, x):
    X = x.reshape(2, 2)
    dXdt = A(t) @ X
    return dXdt.flatten()

# Computer fundamental_matrix Phi(T)
def compute_fundamental_matrix(T):
    x0 = np.eye(2).flatten()
    sol = solve_ivp(
        linear_system, [0, T], x0,
        t_eval=[T],
```

```

        method="RK45",
        rtol=1e-9, atol=1e-11
    )
    Phi_T=sol.y[:, -1].reshape(2, 2)
    return Phi_T

# Monodromy matrix M = Phi(T)
Phi_T = compute_fundamental_matrix(T)
print("Matriz de Monodromia M = Phi(T):")
print(Phi_T)

# Matrix B
B = logm(Phi_T) / T
print("logarithmic matrix:")
print(B)
eigenval_b = np.linalg.eigvals(B)
print("eigenvalues of matrix B: ")
print(eigenval_b)

```

Los resultados de la implementación computacional en código python son los siguientes.

**Monodromia:**

$$M = \begin{pmatrix} 0,97884436 & 0,15361218 \\ -27252866 & 0,97884436 \end{pmatrix}.$$

**Logaritmo matricial:**

$$B = \begin{pmatrix} -3,64643679x10^{-10} & 1,23110080 \\ -2,18413828 & 1,71145193x10^{-10} \end{pmatrix}.$$

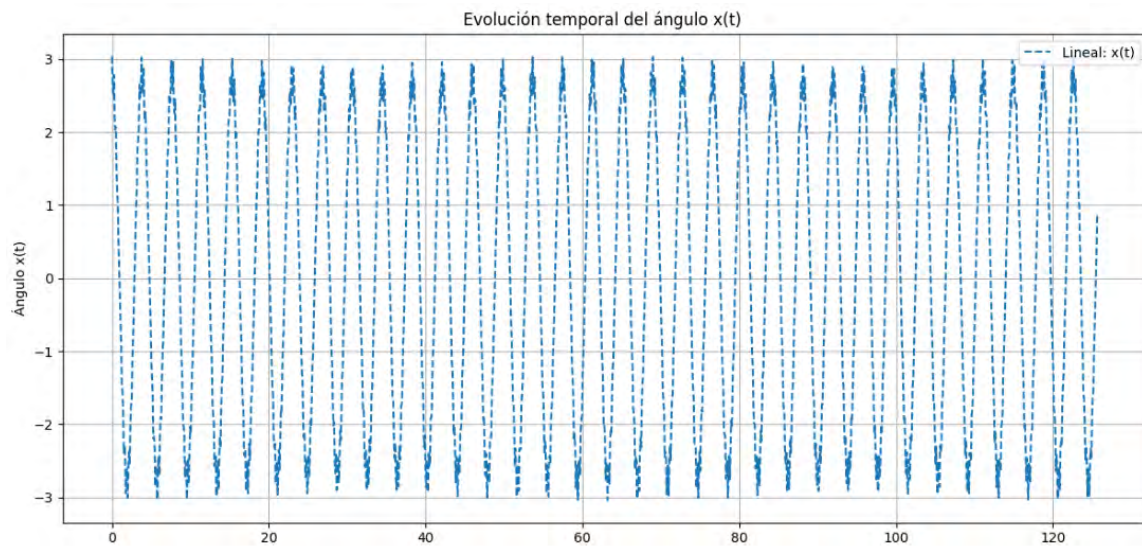
### Exponentes de Floquet:

$$\lambda_1 = -9,67492432 \times 10^{-11} + 1,63978486i$$

$$\lambda_2 = -9,67492432 \times 10^{-11} - 1,63978486i$$

Dado que ambos exponentes de Floquet son cercanos a cero, se concluye, por el Teorema (4.5), que el sistema (4.8) es estable.

### Representación gráfica de la evolución temporal del ángulo $x(t)$



En la gráfica se observa que la evolución del ángulo a lo largo del tiempo  $t$  se mantiene estable.

### 4.2.2. Aplicación a biología: población estructurada con reproducción estacional

El análisis de modelos poblacionales en entornos periódicos ha sido desarrollado rigurosamente por W. Wang y Zhao (2021) para modelos poblacionales con coeficientes dependientes del tiempo y periódicos. En dicho trabajo se consideran sistemas dinámicos del tipo

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad F(t+T, x) = F(t, x), \quad (4.9)$$

y se analiza la estabilidad del estado trivial  $x = 0$ , que corresponde a la extinción poblacional.

Al linealizar el sistema (4.9) alrededor del estado trivial, se obtiene un sistema lineal periódico de la forma

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad A(t+T) = A(t), \quad (4.10)$$

donde  $A(t)$  es una matriz con coeficientes biológicamente interpretables.

En este contexto, el resultado central de W. Wang y Zhao (2021) establece la existencia de una razón reproductiva básica periódica, denotada por  $\mathcal{R}_0$ , tal que

$$\mathcal{R}_0 < 1 \iff \rho(M) < 1 \iff \text{extinción poblacional}, \quad (4.11)$$

mientras que

$$\mathcal{R}_0 > 1 \iff \rho(M) > 1 \iff \text{persistencia poblacional}. \quad (4.12)$$

Aquí,  $\rho(M)$  denota el radio espectral de la matriz de monodromía  $M$ . Este resultado generaliza el criterio clásico de estabilidad en entornos con coeficientes constantes al caso periódico, proporcionando una base rigurosa para la aplicación de la teoría de Floquet en modelos biológicos.

### Modelo por clases: juveniles y adultos

Sea

$$x(t) = \begin{pmatrix} J(t) \\ G(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.11)$$

donde  $J(t)$  representa la población juvenil y  $G(t)$  la población adulta en el instante  $t$ . Se considera el siguiente modelo lineal con transición de clases y reproducción:

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad A(t+T) = A(t), \quad (4.12)$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\mu_J & b(t) \\ \gamma & -\mu_G \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Aquí:

- $\mu_J > 0$ : tasa de mortalidad juvenil,
- $\mu_G > 0$ : tasa de mortalidad adulta,
- $\gamma > 0$ : tasa de maduración (transición de juveniles a adultos),
- $b(t) \geq 0$ : tasa de natalidad (aporte de adultos a juveniles), asumida  $T$ -periódica:

$$b(t+T) = b(t).$$

Una elección típica para modelar estacionalidad es

$$b(t) = b_0 \left( 1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right), \quad b_0 > 0, \quad 0 \leq \varepsilon < 1. \quad (4.14)$$

En consecuencia, por (4.13), la matriz  $A(t)$  es  $T$ -periódica.

## Forma de Floquet y matriz de monodromía

El sistema (4.12) es un sistema lineal con coeficientes periódicos, por lo que satisface las hipótesis del Teorema (4.1). Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental del sistema, definida por

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I_2, \quad (4.15)$$

donde  $I_2$  denota la identidad  $2 \times 2$ .

La *matriz de monodromía* se define como

$$M = \Phi(T). \quad (4.16)$$

Los autovalores de  $M$ , denotados por  $\lambda_1, \lambda_2$ , son los *multiplicadores de Floquet*. Además, existe una descomposición de Floquet

$$\Phi(t) = P(t)e^{tB}, \quad P(t+T) = P(t),$$

lo que implica  $M = \Phi(T) = P(T)e^{TB}$ .

## Criterio de persistencia/extinción

El comportamiento asintótico del sistema (4.12) queda determinado por el radio espectral de la matriz de monodromía  $M$ , definido por

$$\rho(M) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}.$$

Aplicando el Teorema (4.6):

- si  $\rho(M) < 1$ , entonces  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y la población tiende a la extinción (sistema (4.12) asintóticamente estable )
- si  $\rho(M) > 1$ , existe crecimiento neto por períodos y la población persiste (sistema (4.12) inestable).

Por tanto, el análisis de persistencia o extinción poblacional se reduce al cálculo de los multiplicadores de Floquet asociados a la matriz de monodromía  $M$ .

### Implementación numérica para el modelo biológico

En general, la matriz fundamental  $\Phi(t)$  no se expresa de forma cerrada cuando  $b(t)$  es periódica, por lo que la monodromía  $M = \Phi(T)$  se calcula numéricamente integrando (4.15) en el intervalo  $[0, T]$ . El cálculo de  $M$  es análogo al realizado en la aplicación del péndulo de Kapitza, donde la periodicidad del coeficiente impide una expresión analítica simple de la matriz fundamental.

### Implementación código python

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
from scipy.linalg import logm

# System parameters
mu_J = 0.6      # mortalidad juvenil
mu_G = 0.4      # mortalidad adulta
gamma = 0.8     # maduracion J -> G

b0 = 1.2        # natalidad media
eps = 0.6       # estacionalidad

T = 12.0
w = 2*np.pi/T

# Tasa de natalidad periodica
def b(t):
    return b0*(1.0 + eps*np.cos(w*t))
```

```

# Matrix A(t)
def A(t):
    return np.array([[ -mu_J,  b(t)],
                    [ gamma, -mu_G]])

# System: dx/dt=A(t)x(t)
def linear_system(t, x):
    X = x.reshape(2, 2)
    dXdt = A(t) @ X
    return dXdt.flatten()

# Fundamental matrix Phi(T)
def compute_fundamental_matrix(T):
    x0 = np.eye(2).flatten()
    sol = solve_ivp(
        linear_system, [0, T], x0,
        t_eval=[T],
        method="RK45",
        rtol=1e-9,
        atol=1e-11
    )

    Phi_T = sol.y[:, -1].reshape(2, 2)
    return Phi_T

# Monodromy matrix M = Phi(T)
Phi_T = compute_fundamental_matrix(T)
print("Monodromia M = Phi(T):")
print(Phi_T)

```

```

# Matrix B
B = logm(Phi_T) / T
print("Matriz B = (1/T) log(M):")
print(B)

mu = np.linalg.eigvals(B)
print("\nExponentes de Floquet (autovalores de B):")
print(mu)
print("Partes reales:", np.real(mu))

# Eigenvalues and spectral radius of M

eig_M = np.linalg.eigvals(M)
rho_M = np.max(np.abs(eig_M))
print("\nAutovalores de M:")
print(eig_M)
print("Radio espectral rho(M) =", rho_M)

```

### Resultados de la implementación numérica

#### Monodromía:

$$M = \begin{pmatrix} 119,06317217 & 198,35036535 \\ 84,08858988 & 140,08531964 \end{pmatrix}.$$

#### Logaritmo matricial:

$$B = \begin{pmatrix} -0,57812814 & 1,47432514 \\ 0,62502492 & -0,42187191 \end{pmatrix}.$$

### Exponentes de Floquet:

$$\lambda_1 = -1,46311682,$$

$$\lambda_2 = 0,46311677.$$

Dado que uno de los exponentes de Floquet tiene parte real positiva, se concluye, por el Teorema (4.5), que el sistema (4.12) es inestable.

### Valores propios de la monodromía y su radio espectral

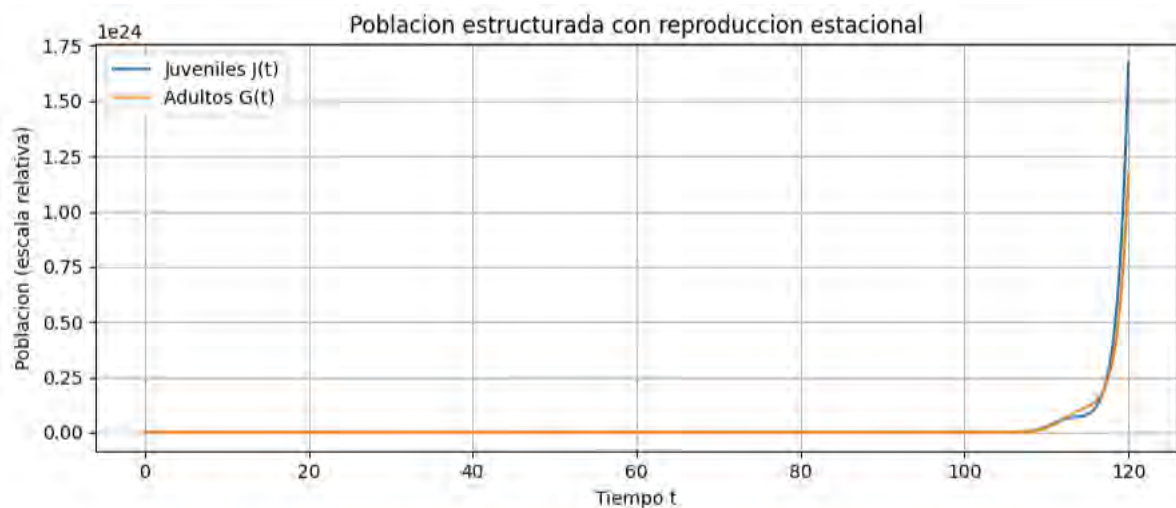
$$\mu_1 = 2,37092195 \times 10^{-8},$$

$$\mu_2 = 2,59148492 \times 10^2$$

Aplicando el Teorema (4.6), se concluye que el sistema (4.12) es inestable.

Por otro lado, según el resultado central de W. Wang y Zhao (2021), analizando el radio espectral de la matriz de monodromía:  $\rho(M) = 259,14849178179907 > 1$ , se concluye que existe crecimiento neto periódico y la población persiste (sistema (4.12) inestable).

### Representación gráfica de la dinámica temporal de juveniles y adultos con reproducción estacional



En la gráfica se observa que existe crecimiento neto por periodos y la población persiste.

# Conclusiones

## Conclusión general

La investigación demuestra que los exponentes de Floquet permiten caracterizar la **estabilidad exponencial** del sistema dinámico lineal no autónomo con coeficientes periódicos alrededor de la solución trivial. Mediante la reducción del sistema original a un sistema autónomo equivalente con coeficientes constantes, se establece un criterio riguroso de estabilidad basado en el signo de la parte real de los exponentes de Floquet, lo que posibilita su aplicación al análisis de modelos matemáticos provenientes de la física, la biología y otras ramas del conocimiento con comportamiento periódico.

## Conclusiones de los objetivos específicos

1. Se analizaron las propiedades fundamentales de la teoría de Floquet que permiten transformar un sistema dinámico lineal no autónomo con coeficientes periódicos en un sistema dinámico lineal autónomo equivalente mediante la construcción de la solución fundamental y la matriz de monodromía, estableciendo así un marco adecuado para el análisis de estabilidad.
2. Se determinó que los exponentes de Floquet pueden obtenerse a partir del espectro de la matriz de monodromía asociada al sistema dinámico lineal no autónomo con coeficientes periódicos. Cuando no fue posible obtener expresiones analíticas, el empleo de métodos numéricos permitió calcular dichos exponentes con adecuada precisión.
3. Se establecieron criterios de **estabilidad exponencial** para la solución trivial de sistemas

dinámicos lineales no autónomos con coeficientes periódicos, aplicando los criterios clásicos de estabilidad de sistemas dinámicos lineales autónomos con coeficientes constantes al sistema autónomo equivalente obtenido mediante la teoría de Floquet. Dichos criterios se expresan en función del signo de la parte real de los exponentes de Floquet.

4. Se analizó la estabilidad exponencial, mediante la teoría de Floquet y con apoyo de herramientas computacionales, de modelos matemáticos con coeficientes periódicos que describen fenómenos físicos y biológicos, ilustrando la utilidad del enfoque mediante el estudio del péndulo de Kapitza y de un modelo de población estructurada con reproducción estacional.

# Sugerencia para futuras investigaciones

A partir de los resultados obtenidos y del marco teórico desarrollado en el presente trabajo, se identifican diversas líneas de investigación que podrían ampliar el alcance de la teoría de Floquet y su aplicación en sistemas físicos y matemáticos de interés. A continuación, se presentan tres propuestas concretas:

- La teoría de Floquet, en su formulación clásica, se aplica a sistemas lineales con coeficientes periódicos. Una posible extensión consistiría en el análisis de estabilidad de soluciones periódicas en sistemas no lineales del tipo

$$x''(t) = f(x, t), \quad f(x, t + T) = f(x, t),$$

empleando técnicas de **linealización local** alrededor de soluciones periódicas  $x_p(t)$  y analizando la estabilidad orbital mediante los multiplicadores de Floquet asociados a la dinámica linealizada.

- Una segunda dirección de investigación sería extender la teoría de Floquet a ecuaciones diferenciales no lineales con acoplamiento espacial, descritos por ecuaciones diferenciales parciales periódicamente excitadas de tipo espacio-temporal, por ejemplo:

$$\phi_{tt}(t) - c^2 \phi_{xx}(t) + (g_0 + g_1 \cos(\omega t)) \text{sen}(\phi(t)) = 0.$$

- Una tercera línea de investigación sería aplicar la teoría de Floquet en el diseño de controladores periódicos basados en teoría de Floquet para la supresión activa de vibraciones en

sistemas con entradas periódicas, por ejemplo:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad u(t) = U_0 + U_1 \cos(\omega t).$$

Esta línea de investigación conecta directamente con aplicaciones prácticas en sistemas mecatrónicos, aeronáuticos y robóticos, extendiendo los resultados de Chen, Zhang y Quan (2023) hacia un marco teórico general basado en el control periódico.

En conjunto, estas tres líneas constituyen una proyección natural del presente trabajo, integrando los fundamentos de la teoría de Floquet con la dinámica no lineal, el análisis de estabilidad en sistemas distribuidos y el diseño de controladores periódicos aplicados.

# Bibliografía

- Alvarez-Salazar, O. S., Lozano, R., & Fantoni, I. (2020). Active vibration suppression in unmanned aerial vehicles using periodic control strategies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *144*, 106890. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106890>
- Barreira, L., & Valls, C. (2008). *Stability of nonautonomous differential equations*. Springer.
- Barreira, L., & Valls, C. (2012). *Ordinary differential equations: Qualitative theory*. American Mathematical Society.
- Castilla Peñate, T. R., & Vidal Esquivel, F. A. (2014). *Representación matricial de la función  $q$ -exponencial* [Tesis doctoral, Universidad EAFIT].
- Chen, W., Zhang, W., & Quan, Q. (2023). Quadcopter attitude control with vibration reduction by additive-state-decomposition dynamic inversion design with a notch filter. *Aerospace Science and Technology*, *138*, 108887. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2023.108887>
- Choque Huamán, P. (2008). *Estabilidad estructural de sistemas dinámicos autónomos no lineales a través de ciclos límites y su visualización computacional* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco].
- Citro, R., Dalla Torre, E. G., D'Alessio, L., Polkovnikov, A., Babadi, M., Oka, T., & Demler, E. (2015). Dynamical stabilization and many-body Kapitza phases of periodically driven spin systems. *Annals of Physics*, *360*, 694-710. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2015.07.018>
- Coelho, F. U., & Lourenço, M. L. (2018). *Um curso de álgebra linear*. Universidade de São Paulo.
- Da Cunha, J. J., & Davis, J. M. (2011). A unified Floquet theory for discrete, continuous, and hybrid periodic linear systems. *Journal of Differential Equations*, *251*(11), 2987-3027. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.07.010>

- Floquet, G. (1883). Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12, 47-88.
- Jošić, K., & Rosenbaum, R. (2008). Unstable solutions of linear nonautonomous differential equations. *SIAM Review*, 50(3), 570-584.
- Kapitza, P. L. (1951). Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates. *Soviet Physics JETP*, 21(5), 588-597. <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/21/5/p588?a=list>
- Kelley, W. G. (2010). *The theory of differential equations*. Springer.
- Kiusalaas, J. (2013). *Numerical Methods in Engineering with Python* (3.<sup>a</sup> ed.). Cambridge University Press.
- Lyapunov, A. M. (1992). *The General Problem of the Stability of Motion* [Original work published 1892]. Taylor & Francis.
- Magnus, W., & Winkler, S. (1966). *Hill's Equation*. Interscience Publishers.
- Mathieu, É. (1868). Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 13, 137-203.
- Meissner, E. (1918). Über Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. *Schweizerische Bauzeitung*, 72(11), 95-98.
- Mendoza Jiménez, J. (2013). *Sistemas periódicos: Perturbación y aplicaciones* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú].
- Nayfeh, A. H., & Mook, D. T. (1979). *Nonlinear Oscillations*. Wiley-Interscience.
- Perko, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems*. Springer.
- Richards, C. J. e. a. (2018). A microscopic Kapitza pendulum. *Scientific Reports*, 8(1), 12926. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-31392-8>
- Robinson, C. (1995). *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press.
- Sideris, T. C. (2013). *Ordinary differential equations and dynamical systems* (Vol. 2). Springer.
- Sotomayor Tello, J. M. (1979). *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Vargas Castillo, J. (2022). *La teoría de Floquet en el modelado y análisis de convertidores de potencia* [Tesis de maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo].

- Viana, M., & Espinar, J. M. (2021). *Differential equations: A dynamical systems approach to theory and practice*. American Mathematical Society.
- Wang, W., & Zhao, X.-Q. (2021). Basic reproduction ratios for population models in periodic environments. *Journal of Differential Equations*, 279, 462-498. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.11.014>
- Wang, Y., Ding, X., & Li, Z. (2019). Periodic control and averaging-based stability analysis for quadrotor UAVs. *IEEE Control Systems Letters*, 3(4), 945-950. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2921324>
- Zhao, X.-Q. (2017). *Dynamical Systems in Population Biology* (2.<sup>a</sup> ed.). Springer.

# Apéndice A

## Forma Canónica de Jordan

### Preliminares

A continuación se resumen algunos conceptos extraídos de Coelho y Lourenço, 2018

- (a) Un *valor propio* de  $A \in M(n, \mathbb{C})$  es un número  $\lambda \in \mathbb{C}$  para el cual existe un vector no nulo  $v \in \mathbb{C}^n$  que satisface

$$Av = \lambda v.$$

- (b) Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A \in M(n, \mathbb{C})$ , entonces todo vector no nulo  $v$  que satisface  $Av = \lambda v$  se denomina *vector propio* de  $A$  asociado a  $\lambda$ .

- (c) El *polinomio característico* de  $A \in M(n, \mathbb{C})$  es de la forma  $p_A(x) = (x - \lambda)^m q(x)$  con  $q(x) \neq 0$

- (d) La *multiplicidad algebraica* de  $\lambda$ , denotada por  $m_a(\lambda)$ , es el orden de  $\lambda$  como raíz del polinomio característico  $p_A(x)$ .

- (e) La *multiplicidad geométrica* de  $\lambda$ , denotada por  $m_g(\lambda)$ , se define como

$$m_g(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda I).$$

- (f) Se dice que  $A \in M(n, \mathbb{C})$  es *diagonalizable* si existe una matriz invertible  $P$  tal que

$A = PDP^{-1}$  con  $D$  diagonal. Equivalentemente,  $A$  es diagonalizable si y solo si  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$  para todo valor propio  $\lambda$  de  $A$ .

## Procedimiento para obtener los bloques de Jordan

A continuación se resume un procedimiento práctico para determinar la forma y tamaño de los bloques de Jordan

1. **Valores propios:** calcular el polinomio característico  $p_A(x) = (x - \lambda)^m q(x)$  de la matriz  $A \in M(\mathbb{C})$  y hallar sus raíces  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  junto con sus multiplicidades algebraicas  $m_a(\lambda_i)$ .
2. **Número de bloques:** para cada  $\lambda_i$ , calcular el número de bloques de Jordan asociados a  $\lambda_i$  está dado por

$$m_g(\lambda_i) = \dim \ker(A - \lambda_i I).$$

3. **Tamaños de los bloques:** para cada valor propio  $\lambda_i$  se estudian las dimensiones

$$d_p(\lambda_i) = \dim \ker(A - \lambda_i I)^p, \quad p = 1, 2, \dots,$$

hasta que la sucesión se estabiliza, es decir, hasta que existe un entero positivo  $p_0$  tal que

$$d_{p_0}(\lambda_i) = d_{p_0+1}(\lambda_i).$$

En este caso, los incrementos

$$d_p(\lambda_i) - d_{p-1}(\lambda_i)$$

determinan el número de *cadena de Jordan* asociadas a  $\lambda_i$  cuyo tamaño es mayor o igual que  $p$ .

## A.1. Obtención de los bloques de Jordan

La forma canónica de Jordan se obtiene a partir de los valores propios de la matriz  $A \in M(n, \mathbb{C})$ , estudiando la relación entre las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio, así como el crecimiento de los núcleos de los operadores  $(A - \lambda I)^p$ . En esta sección se describen los distintos tipos de bloques de Jordan que pueden aparecer y la manera en que se obtienen.

### Caso 1: Valor propio real diagonalizable

Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  un valor propio de  $A$  tal que  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ . En este caso se cumple  $\ker(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I)^2$ , por lo que no existen vectores propios generalizados. Cada auto-vector genera un bloque de Jordan de tamaño 1. La contribución de  $\lambda$  en la forma canónica de Jordan es una matriz diagonal de la forma

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

### Caso 2: Valor propio real no diagonalizable

Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  un valor propio tal que

$$m_g(\lambda) < m_a(\lambda).$$

Entonces

$$\ker(A - \lambda I) \subsetneq \ker(A - \lambda I)^2,$$

lo que implica la existencia de vectores propios generalizados. En este caso se construyen *cadenas de Jordan*

$$(A - \lambda I)x_1 = 0, \quad (A - \lambda I)x_{j+1} = x_j,$$

cuya longitud determina el tamaño del bloque asociado. El bloque de Jordan correspondiente es de la forma

$$R_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad k \geq 2.$$

### Caso 3: Para valores propios complejos simples

Supóngase que  $A \in M(n, \mathbb{C})$  posee un par de valores propios complejos conjugados

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

Entonces, sobre  $\mathbb{C}$ , existe un bloque complejo diagonal de orden dos

$$R_2 = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix},$$

el cual es semejante al bloque real definido por

$$R_2^* = P_2^{-1} R_2 P_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

donde

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

son las transformaciones estándar que permiten determinar la forma canónica real de  $R_2$ .

Más generalmente, si el par  $\alpha \pm i\beta$  es diagonalizable y cada valor propio complejo tiene multiplicidad algebraica  $q$ , la forma canónica real de  $A$  contiene  $q$  bloques  $2 \times 2$  de la forma

$$R_2^*(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

dispuestos diagonalmente, es decir,

$$R_{2q}^* = \begin{pmatrix} R_2^*(\alpha, \beta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2^*(\alpha, \beta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_2^*(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \in M(2q).$$

Este bloque describe una dinámica oscilatoria con frecuencia  $\beta$  y crecimiento o decaimiento determinado por  $\alpha$ .

#### Caso 4: Par de valores propios complejos defectivos

Supóngase que  $A \in M(n, \mathbb{C})$  posee un par de valores propios complejos conjugados

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0,$$

y que dicho par es *no diagonalizable*, es decir, su multiplicidad geométrica es estrictamente menor que su multiplicidad algebraica. En este caso existen vectores propios generalizados complejos asociados a  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$ .

Sobre  $\mathbb{C}$ , la contribución de este par a la forma canónica de Jordan está dada por un bloque complejo defectivo de orden  $q$ , de la forma

$$R_{2q} = \begin{pmatrix} \lambda I_q & I_q \\ 0 & \lambda I_q \end{pmatrix},$$

donde  $I_q$  denota la matriz identidad de orden  $q$  y  $q \geq 2$  representa la longitud de la cadena de Jordan compleja.

Mediante una transformación de semejanza compleja–real construida a partir de la matriz

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},$$

aplicada bloque a bloque, se obtiene la forma canónica real correspondiente, que viene dada por el bloque

$$R_{2q}^* = \begin{pmatrix} R_2^*(\alpha, \beta) & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2^*(\alpha, \beta) & I_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_2^*(\alpha, \beta) & I_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_2^*(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \in M(2q),$$

donde

$$R_2^*(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este bloque describe una dinámica oscilatoria con frecuencia  $\beta$  combinada con un crecimiento polinomial de orden  $q - 1$ , multiplicando el factor exponencial  $e^{\alpha t}$ .