

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



TESIS

OPTIMIZACIÓN DE MÁQUINAS DE ACEPTACIÓN DE MOORE

PRESENTADO POR:

Br. SHIRLEY MIREYA AYALA CHALLCO

**PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICA**

ASESOR:

Dr. MARCO ANTONIO HERRERA VARGAS

CUSCO - PERÚ

2025

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro. CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, **Asesor** del trabajo de investigación/tesis titulada: OPTIMIZACIÓN DE MÁQUINAS DE ACEPTACIÓN DE MOORE

presentado por: SHIRLEY MIREYA AYALA CHALCO con DNI Nro.: 72038837 presentado por: con DNI Nro.: para optar el título profesional/grado académico de LICENCIADA EN MATEMÁTICA

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por dos veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 5.....%.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera página del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 11 de AGOSTO de 2025



Firma

Post firma MARCO ANTONIO HERRERA VARGAS

Nro. de DNI 23934173

ORCID del Asesor 0000-0003-1569-8635

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: oid: 27259:479385961

SHIRLEY MIREYA AYALA CHALLCO

Optimización de Maquinas de Aceptación de Moore

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:479385961

Fecha de entrega

7 ago 2025, 1:00 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

7 ago 2025, 1:06 p.m. GMT-5

Nombre de archivo

OPTIMIZACIÓN DE MÁQUINAS DE ACEPTACIÓN DE MOORE (2).pdf

Tamaño de archivo

1.3 MB

78 Páginas

15.175 Palabras

70.272 Caracteres

5% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- ▶ Bibliografía
- ▶ Texto citado
- ▶ Texto mencionado
- ▶ Coincidencias menores (menos de 12 palabras)

Fuentes principales

- 4%  Fuentes de Internet
- 1%  Publicaciones
- 3%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Texto oculto**
3 caracteres sospechosos en N.º de página
El texto es alterado para mezclarse con el fondo blanco del documento.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo, con profundo cariño y gratitud, a todas aquellas personas que, de una u otra forma, han sido parte fundamental en mi formación académica.

A mis padres y mi familia, por su apoyo incondicional y aliento en cada etapa de este proceso.

A mis maestros, por guiarme con paciencia, exigencia y sabiduría.

Y a todos quienes, con palabras de aliento me acompañaron en este camino.

AGRADECIMIENTO

Expreso mi más sincero agradecimiento primeramente a Dios, fuente de sabiduría y fortaleza, por haberme guiado y sostenido en cada etapa de este proceso. Su presencia constante me dio esperanza en los momentos difíciles y serenidad para continuar con firmeza.

A la Universidad San Antonio Abad del Cusco, por brindarme la formación académica y las herramientas necesarias para mi desarrollo profesional.

Agradezco al jurado evaluador, por su tiempo, disposición y valiosos aportes en la revisión de esta tesis.

A mi asesor de tesis, Dr. Marco Antonio Herrera Vargas, por su orientación constante, sus sugerencias oportunas y su compromiso durante todo el proceso de investigación.

A mis docentes, por haber contribuido significativamente a mi formación a lo largo de estos años.

A mis padres y familia, por su amor, apoyo incondicional y confianza depositada en mí, pilares fundamentales para alcanzar esta meta.

Finalmente, a todas aquellas personas que, directa o indirectamente, colaboraron en la culminación de este trabajo, les expreso mi más profundo agradecimiento.

ÍNDICE

DEDICATORIA	I
AGRADECIMIENTO.....	II
ÍNDICE DE TABLAS	V
ÍNDICE DE FIGURAS	VI
RESUMEN	VII
ABSTRACT	VIII
INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO I	3
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
1.1 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA	3
1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	4
1.2.1. Problema General.....	4
1.2.2. Problemas Específicos	4
1.3 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN	4
1.4 OBJETIVOS	5
1.4.1. Objetivo General.....	5
1.4.2. Objetivos Específicos.....	5
1.5 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN.....	5
1.6 METODOLOGÍA	6
1.6.1. Tipo de Investigación.....	6
1.6.2. Nivel de Investigación.....	6
1.6.3. Diseño Metodológico	6

1.6.4. Técnicas de Recolección de Información.....	6
CAPITULO II.....	7
MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	7
2.1 ANTECEDENTES	7
2.1.1. Antecedentes Internacionales	7
2.1.2. Antecedentes Nacionales.....	7
2.2 MARCO CONCEPTUAL.....	8
2.2.1. Relaciones y Dígrafos	8
2.2.2. Lenguajes.....	31
2.2.3. Máquinas de Aceptación de Moore	36
2.2.4. Congruencia de Máquinas y Máquina Cociente.....	42
CAPÍTULO III.....	47
OPTIMIZACIÓN DE MÁQUINAS DE ACEPTACIÓN DE MOORE.....	47
3.1 RELACIONES DE COMPATIBILIDAD DE ESTADOS	47
3.2 EQUIVALENCIA DE MÁQUINAS	50
3.3 PARTICIONES SUCESIVAS	51
3.4 ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN	60
CONCLUSIONES	65
RECOMENDACIONES	66
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
ANEXOS.....	69
ANEXO 1:	69

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	38
Tabla 2	43
Tabla 3	61
Tabla 4	62
Tabla 5	62
Tabla 6	63
Tabla 7	69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.....	19
Figura 2.....	26
Figura 3.....	38
Figura 4.....	44
Figura 5.....	56
Figura 6.....	64

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se desarrolló en el ámbito de la matemática discreta y tuvo como objetivo optimizar la estructura de las máquinas de aceptación de Moore, en las que la decisión de aceptación o rechazo de una cadena depende únicamente de la trayectoria recorrida, sin intervención de una función de salida. En este contexto, se desarrolló una metodología de carácter teórico, basada en herramientas de la matemática discreta, como relaciones de equivalencia, dígrafos, trayectorias y conjuntos cocientes. En particular, se formula el uso de relaciones de equivalencia compatibles con la función de transición para inducir particiones del conjunto de estados y construir máquinas cocientes estructuralmente equivalentes, pero con menor cantidad de estados.

La investigación adopta un enfoque teórico básico, con un nivel exploratorio descriptivo y un diseño metodológico no experimental, sustentado en revisión bibliográfica y razonamiento axiomático. Como resultado principal, se concluyó que es posible optimizar las máquinas de aceptación de Moore mediante la formulación de teoremas que demostraron la equivalencia entre la máquina de aceptación de Moore y su correspondiente máquina cociente, obtenida a partir de relaciones de compatibilidad de estados. Este procedimiento de optimización estructural contribuye al fortalecimiento del marco formal de máquinas de Moore y sienta bases sólidas para aplicaciones en modelado de sistemas secuenciales, verificación formal y diseño eficiente de estructuras computacionales.

Palabras clave: Máquinas de aceptación de Moore, optimización, relaciones de equivalencia, relaciones de compatibilidad de estados.

ABSTRACT

This research was conducted within the field of discrete mathematics and aimed to optimize the structure of Moore acceptance machines, in which the decision to accept or reject a string depends solely on the path followed, without the involvement of an output function. In this context, a theoretical methodology was developed, grounded in tools from discrete mathematics such as equivalence relations, digraphs, paths, and quotient sets. In particular, the use of equivalence relations compatible with the transition function is formulated to induce partitions of the state set and to construct quotient machines that are structurally equivalent but contain fewer states.

The study adopts a basic theoretical approach, with an exploratory-descriptive level and a non-experimental methodological design, supported by bibliographic review and axiomatic reasoning. As a main result, it was concluded that Moore acceptance machines can be optimized through the formulation of theorems demonstrating the equivalence between a Moore acceptance machine and its corresponding quotient machine, obtained from state compatibility relations. This structural optimization procedure contributes to strengthening the formal framework of Moore machines and provides a solid foundation for applications in sequential system modeling, formal verification, and the efficient design of computational structures.

Keywords: Moore acceptance machines, optimization, equivalence relations, state compatibility relations.

INTRODUCCIÓN

Las máquinas de aceptación de Moore fueron introducidas por el ingeniero Edward F. Moore en 1956, en el contexto de sus investigaciones sobre el desarrollo de circuitos secuenciales, dentro del marco teórico de las máquinas de estados finitos y las ciencias de la computación. Este modelo fue concebido con el propósito de formalizar y simplificar la representación abstracta de procesos secuenciales en los que la decisión de aceptar o rechazar una cadena depende únicamente del estado final alcanzado tras recorrer una trayectoria de transición. A diferencia de otros modelos de máquinas de estados finitos, estas no presentan salidas asociadas a los estados, lo que simplifica su estructura lógica, pero también impone retos particulares para su análisis y optimización.

Un problema común en el estudio de estas máquinas es la presencia de una gran cantidad de estados, lo cual incrementa significativamente su complejidad estructural. Esta complejidad puede dificultar su comprensión, implementación, verificación y mantenimiento, especialmente en aplicaciones donde se busca eficiencia computacional y claridad en los modelos. Si bien existen algoritmos clásicos de minimización para máquinas con salidas, estos no se adaptan directamente al caso de las máquinas de aceptación de Moore, ya que requieren ajustes teóricos específicos para operar sobre modelos sin salidas observables. En este contexto, surge la necesidad de desarrollar un marco teórico riguroso que permita reducir el número de estados de una máquina de aceptación de Moore sin alterar su comportamiento.

La importancia de esta investigación radica en que ofrece una solución formal al problema de la complejidad estructural en máquinas de aceptación de Moore. A través de un enfoque teórico, se propone una metodología basada en conceptos de la matemática discreta que permite obtener versiones optimizadas de estas máquinas. Este aporte resulta valioso tanto desde el punto de vista

académico, al enriquecer el marco teórico sobre máquinas de estados finitos, como desde el punto de vista práctico, al facilitar su aplicación en ámbitos como la verificación formal, el modelado de procesos secuenciales y el diseño de sistemas computacionales más eficientes.

En consecuencia, el objetivo de esta investigación es optimizar una máquina de aceptación de Moore mediante la aplicación de relaciones de compatibilidad de estados que permitan inducir particiones del conjunto de estados y construir una máquina cociente equivalente.

La estructura del presente trabajo de investigación está dividida en tres capítulos:

El primer capítulo, presenta el planteamiento del problema de investigación, la formulación del problema general y problemas específicos, la justificación e importancia de la investigación, los objetivos y la metodología empleada en la investigación.

. En el segundo capítulo, se desarrolla el marco teórico conceptual. Se incluyen antecedentes relevantes, tanto nacionales como internacionales, y se definen los conceptos clave que fundamentan la investigación, como relaciones binarias y sus propiedades, dígrafos, trayectorias, lenguajes, máquinas de aceptación de Moore, congruencia de máquinas y máquinas cocientes.

El tercer capítulo, expone el desarrollo de la propuesta de optimización. Se introduce el concepto de relaciones de compatibilidad de estados, se formulan teoremas de equivalencia estructural y se presenta un algoritmo para la construcción de máquinas cocientes.

Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones del estudio, seguidas por las referencias bibliográficas utilizadas y los anexos correspondientes. Este trabajo no solo busca reducir la complejidad estructural de las máquinas de aceptación de Moore, sino también fortalecer su marco teórico y abrir nuevas vías para su aplicación en diferentes áreas de la ingeniería y la computación.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Situación Problemática

Las máquinas de aceptación de Moore constituyen un modelo estructurado mediante una función de transición entre estados y un conjunto de estados de aceptación. A diferencia de las máquinas de Moore convencionales, en las que cada estado produce una salida asociada, las máquinas de aceptación de Moore se caracterizan exclusivamente por la identificación de estados de aceptación, sin generar salidas observables. Este modelo resulta fundamental para representar lenguajes formales, procesos de decisión y sistemas secuenciales en los que la aceptación o rechazo de una cadena depende únicamente de su trayectoria recorrida.

No obstante, en muchas aplicaciones teóricas y prácticas, estas máquinas presentan una cantidad abundante de estados, lo cual incrementa la complejidad estructural y dificulta su análisis, implementación y verificación. En consecuencia, la reducción del número de estados en una máquina de aceptación de Moore debe abordarse desde una perspectiva puramente estructural, basada en criterios internos como la accesibilidad, la compatibilidad de estados y la preservación de trayectorias. Si bien existen algoritmos clásicos de minimización para máquinas de estados finitos, estos requieren ajustes conceptuales significativos para ser aplicables a modelos que carecen de salidas. Por lo cual, es necesario construir un marco axiomático riguroso que permita definir relaciones de equivalencia compatibles con la función de transición, establecer particiones del conjunto de estados y construir máquinas cocientes que sean estructuralmente equivalentes a las originales.

En este contexto, surge la necesidad de una investigación formal que incorpore conceptos de la matemática discreta, tales como relaciones binarias, dígrafos, trayectorias y conjuntos cocientes, para desarrollar y obtener la optimización estructural de las máquinas de aceptación de Moore.

1.2 Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Será posible optimizar una máquina de aceptación de Moore?

1.2.2. Problemas Específicos

- 1) ¿Se podrá desarrollar la teoría de relaciones de equivalencia?
- 2) ¿Será posible analizar la teoría de máquinas de aceptación de Moore y de congruencia de máquinas?
- 3) ¿Será factible obtener máquinas de aceptación de Moore cociente mediante relaciones de compatibilidad de estados?

1.3 Justificación e Importancia de la Investigación

Las máquinas de aceptación de Moore, a diferencia de otras máquinas de estados finitos, presentan ventajas significativas en el ámbito de la teoría de la computación, particularmente por su estructura determinista y su fácil implementación en el modelado de circuitos secuenciales y sistemas de control, tales como decodificadores y procesadores. Esta simplicidad estructural ha motivado su uso en aplicaciones prácticas que requieren una estructura formal precisa y predecible.

Por otra parte, esta investigación enriquece el marco teórico sobre máquinas de estados finitos, puesto que contribuye a la formalización rigurosa de un procedimiento de optimización basado en conceptos fundamentales de la matemática discreta. El aporte de esta investigación

radica en que establece un marco axiomático y lógico que permite demostrar, mediante razonamiento deductivo, que la máquina cociente conserva el comportamiento funcional de la máquina original en términos de accesibilidad y estructura de transición. Esta contribución es relevante para el diseño de modelos formales más compactos, aplicables en contextos como la verificación de sistemas discretos, la optimización de procesos abstractos y la investigación formal en ingeniería y ciencias de la computación.

1.4 Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Optimizar una máquina de aceptación de Moore

1.4.2. Objetivos Específicos

- 1) Desarrollar la teoría de relaciones de equivalencia
- 2) Analizar la teoría de máquinas de aceptación de Moore y de congruencia de máquinas
- 3) Obtener máquinas de aceptación de Moore cociente mediante relaciones de compatibilidad de estados.

1.5 Limitaciones de la Investigación

Para el presente trabajo de investigación una limitación fue, la escasa información sobre máquinas de aceptación de Moore.

1.6 Metodología

1.6.1. Tipo de Investigación

Esta investigación es de tipo teórica básica, puesto que, se amplien los conocimientos teóricos de las matemáticas discretas con el propósito de aplicarlos en el proceso de optimizar máquinas de aceptación de Moore.

1.6.2. Nivel de Investigación

El presente trabajo de investigación, tiene el nivel de investigación exploratorio descriptivo, tal como recomienda Hernández et al. (2014), debido a que el tema desarrollado es poco conocido en el área de la matemática discreta y busca especificar las propiedades y características del tema a estudiar.

1.6.3. Diseño Metodológico

El diseño metodológico es no experimental, puesto que, se aplica resultados axiomáticos para obtener la máquina optimizada equivalente a la máquina de aceptación de Moore inicial.

1.6.4. Técnicas de Recolección de Información

La Técnica utilizada es revisión bibliográfica, por ende, se lleva a cabo una revisión exhaustiva de la literatura para contextualizar y respaldar el marco teórico de la investigación. Los instrumentos utilizados para la investigación son artículos, libros y tesis relacionadas.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1 Antecedentes

2.1.1. Antecedentes Internacionales

Avedillo (1992) en su tesis de doctorado, *Una aproximación al diseño óptimo de máquinas de estados finitos*, Universidad de Sevilla tuvo como objetivo desarrollar algoritmos de reducción de número de estados de las máquinas de estados finitos. Para tal propósito, desarrolló dos algoritmos heurísticos REDUCES y ARNES, el primero es una aproximación constructiva basada en máximos compatibles, y el segundo identifica y selecciona compatibles para un cubrimiento cerrado de una nueva tabla de estados.

Rodríguez (2023) en su tesis de licenciatura, *Desarrollo de técnicas de optimización de máquinas de estados finitos para su implementación basada en un FPGA*, Universidad de Chile tuvo como objetivo crear un algoritmo para la optimización de máquinas de estados finitos y desempeño de circuitos digitales en un FPGA. Desarrollando así, una herramienta de optimización en Flask mediante un algoritmo que genera una nueva máquina de estados finitos optimizada. Además, creó e implementó una interfaz gráfica en JavaScript que facilita el uso de esta herramienta para su implementación en un FPGA, haciéndola más accesible y fácil de utilizar.

2.1.2. Antecedentes Nacionales

Herrera (2017) en su tesis de maestría, *Minimización de autómatas finitos*, Universidad de San Antonio Abad del Cusco tuvo como objetivo determinar la minimización de autómatas finitos deterministas. Para tal propósito, mediante el Teorema de Myhill Nerode y las relaciones de

indistinguibilidad, se verificó que el lenguaje del autómata finito determinista mínimo acepta el lenguaje del autómata finito determinista dado inicialmente.

2.2 Marco Conceptual

2.2.1. Relaciones y Dígrafos

2.2.1.1. Relaciones Binarias y sus Representaciones

Definición 2.2.1.1. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos conjuntos distintos del vacío. Se llama producto cartesiano de \mathcal{A} y \mathcal{B} , denotado por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, al conjunto de todos los pares ordenados en los que el primer elemento pertenece al conjunto \mathcal{A} , y el segundo, a \mathcal{B} . Es decir:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{ (a, b) \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B} \}$$

(Liu, 1995, p. 103)

Definición 2.2.1.2. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos conjuntos distintos del vacío. Se llama relación binaria de \mathcal{A} en \mathcal{B} al subconjunto R de todos los pares (a, b) de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tales que verifiquen que aRb . Es decir:

$$R = \{ (a, b) \mid (a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \wedge aRb \}$$

(Rosen, 2004, p. 439)

Definición 2.2.1.3. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos conjuntos distintos del vacío, y R una relación binaria de \mathcal{A} en \mathcal{B} . Se definen:

- i) El dominio de R : $Dom(R) = \{ a \in \mathcal{A} \mid \exists b \in \mathcal{B} \wedge aRb \}$
- ii) El rango o imagen de R : $Ran(R) = \{ b \in \mathcal{B} \mid \exists a \in \mathcal{A} \wedge aRb \}$

(Johnsonbaugh, 2005, p. 117)

De acuerdo a Rosen (2004), “la relación R está incluido en el producto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ y se denomina relación sobre \mathcal{A} o en \mathcal{A} , si el conjunto \mathcal{A} es igual al conjunto \mathcal{B} .” (pp. 440,441).

Definición 2.2.1.4. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se define la matriz de adyacencia de R como una matriz booleana de orden n , denotada por M_R . Es decir:

$$M_R = [r_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, a_j) \in R \\ 0 & \text{si } (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

(Rosen, 2004, p. 456)

Con el fin de ilustrar la Definición 2.2.1.4, se construye la matriz de adyacencia de una relación $R = \{(l, m), (l, o), (m, n), (n, m), (n, n), (o, l)\}$, definida en el conjunto $\mathcal{A} = \{l, m, n, o\}$, como sigue:

Primero, se analiza si cada par ordenado generado por $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ pertenece o no a la relación R :

$$(l, l) \notin R \Rightarrow r_{11} = 0$$

$$(l, m) \in R \Rightarrow r_{12} = 1$$

$$(l, n) \notin R \Rightarrow r_{13} = 0$$

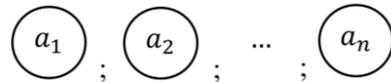
$$(l, o) \in R \Rightarrow r_{14} = 1$$

De la misma manera, para $r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}, r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}$, obteniendo así la siguiente matriz de adyacencia de R :

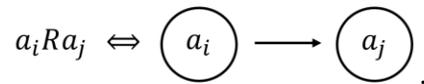
$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Definición 2.2.1.5. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se llama dígrafo de R a una representación gráfica formada de la siguiente manera:

Primero, cada elemento de \mathcal{A} se representa dentro de un círculo llamado vértice o nodo, y se simbolizan por:



Luego, cada vez que un par $(a_i, a_j) \in R$, se traza una flecha orientada, desde el nodo correspondiente a un a_i hasta el nodo de un a_j , como sigue:



formando así el dígrafo de R . (Kolman et al., 1997, p. 111)

2.2.1.2. Operaciones con Relaciones Binarias

Definición 2.2.1.6. Sean R y H relaciones sobre el conjunto finito no vacío $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, con $n \in \mathbb{Z}^+$. Se definen:

- i) La relación unión de R con H , denotada por $R \cup H$:

$$(a_i, a_j) \in R \cup H \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R \vee (a_i, a_j) \in H$$

De manera equivalente:

$$R \cup H = \{ (a_i, a_j) \mid (a_i, a_j) \in R \vee (a_i, a_j) \in H \}$$

- ii) La relación intersección de R con H , denotada por $R \cap H$:

$$(a_i, a_j) \in R \cap H \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R \wedge (a_i, a_j) \in H$$

De manera equivalente:

$$R \cap H = \{ (a_i, a_j) \mid (a_i, a_j) \in R \wedge (a_i, a_j) \in H \}$$

iii) La relación complemento de R , denotada por \bar{R} :

$$(a_i, a_j) \in \bar{R} \Leftrightarrow (a_i, a_j) \notin R$$

De manera equivalente:

$$\bar{R} = \{ (a_i, a_j) \mid (a_i, a_j) \notin R \}$$

iv) La relación inversa de R , denotada por R^{-1} :

$$(a_i, a_j) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a_j, a_i) \in R$$

De manera equivalente:

$$R^{-1} = \{ (a_i, a_j) \mid (a_j, a_i) \in R \}$$

(Kolman et al., 1997, p. 146)

Definición 2.2.1.7. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, R y H relaciones sobre \mathcal{A} , y $M_R = [r_{ij}]_{n \times n}$ y $M_H = [h_{ij}]_{n \times n}$ matrices de adyacencia de R y H , respectivamente. Se definen:

i) La matriz de adyacencia de la relación $R \cup H$:

$$M_{R \cup H} = [x_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, a_j) \in R \vee (a_i, a_j) \in H \\ 0 & \text{si } (a_i, a_j) \notin R \wedge (a_i, a_j) \notin H \end{cases}$$

ii) La matriz de adyacencia de la relación $R \cap S$:

$$M_{R \cap H} = [y_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, a_j) \in R \wedge (a_i, a_j) \in H \\ 0 & \text{si } (a_i, a_j) \notin R \vee (a_i, a_j) \notin H \end{cases}$$

iii) La matriz de adyacencia de la relación complementaria \bar{R} :

$$M_{\bar{R}} = [\bar{r}_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } \bar{r}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, a_j) \notin R \\ 0 & \text{si } (a_i, a_j) \in R \end{cases}$$

iv) La matriz de adyacencia de la relación inversa R^{-1} :

$$M_{R^{-1}} = [p_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, a_j) \in R^{-1} \\ 0 & \text{si } (a_i, a_j) \notin R^{-1} \end{cases}$$

v) La transpuesta de la matriz de adyacencia de la relación R :

$$(M_R)^t = [r_{ji}]_{n \times n}, \text{ donde } r_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_j, a_i) \in R \\ 0 & \text{si } (a_j, a_i) \notin R \end{cases}$$

(Kolman et al., 1997, p. 148)

Definición 2.2.1.8. Sea \mathcal{A} un conjunto finito distinto del vacío, R y H relaciones sobre \mathcal{A} , y $M_R = [r_{ij}]_{n \times n}$ y $M_H = [h_{ij}]_{n \times n}$ matrices de adyacencia de R y H , respectivamente. Se definen:

i) La disyunción de M_R y M_H , denotada por $M_R \vee M_H$:

$$M_R \vee M_H = [d_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{ij} = 1 \vee h_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } r_{ij} = 0 \wedge h_{ij} = 0 \end{cases}$$

ii) La conjunción de M_R y M_H , denotada por $M_R \wedge M_H$:

$$M_R \wedge M_H = [c_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{ij} = 1 \wedge h_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } r_{ij} = 0 \vee h_{ij} = 0 \end{cases}$$

(Kolman et al., 1997, p. 36)

Teorema 2.2.1.1. Sea \mathcal{A} un conjunto finito distinto del vacío, y R y H relaciones sobre \mathcal{A} . Si

M_R y M_H son matrices de adyacencia de R y H , respectivamente, entonces se cumplen:

i) $M_{R \cup H} = M_R \vee M_H$

ii) $M_{R \cap H} = M_R \wedge M_H$

iii) $M_{R^{-1}} = (M_R)^t$

(Espinoza, 2017, p. 122)

Demostración:

i) Sean las matrices $M_R = [r_{ij}]_{n \times n}$, $M_H = [h_{ij}]_{n \times n}$, $M_{R \cup H} = [x_{ij}]_{n \times n}$, y

$M_R \vee M_H = [d_{ij}]_{n \times n}$. Para demostrar que $M_{R \cup H} = M_R \vee M_H$, se tiene que mostrar que,

en la posición a_{ij} de ambas matrices, se cumple que $x_{ij} = d_{ij}$, para $i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$x_{ij} = 1 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R \vee (a_i, a_j) \in H$$

$$\Leftrightarrow r_{ij} = 1 \vee h_{ij} = 1$$

$$\Leftrightarrow d_{ij} = 1$$

Por consiguiente:

$$x_{ij} = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1$$

De forma similar se obtiene que:

$$x_{ij} = 0 \Leftrightarrow d_{ij} = 0$$

Entonces, se concluye que:

$$x_{ij} = d_{ij}, \text{ para } i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$\therefore M_{R \cup H} = M_R \vee M_H$$

ii) Sean las matrices $M_R = [r_{ij}]_{n \times n}$, $M_H = [h_{ij}]_{n \times n}$, $M_{R \cap H} = [y_{ij}]_{n \times n}$, y

$M_R \wedge M_H = [c_{ij}]_{n \times n}$. Para demostrar que $M_{R \cap H} = M_R \wedge M_H$, se tiene que mostrar que,

en la posición a_{ij} de ambas matrices, se cumple que $y_{ij} = c_{ij}$, para $i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$y_{ij} = 1 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R \wedge (a_i, a_j) \in H$$

$$\Leftrightarrow r_{ij} = 1 \wedge h_{ij} = 1$$

$$\Leftrightarrow c_{ij} = 1$$

Por consiguiente:

$$y_{ij} = 1 \Leftrightarrow c_{ij} = 1$$

De forma similar se obtiene que:

$$y_{ij} = 0 \Leftrightarrow c_{ij} = 0$$

Entonces, se concluye que:

$$y_{ij} = c_{ij}, \text{ para } i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$\therefore M_{R \cap H} = M_R \wedge M_H$$

iii) Sean las matrices $M_R = [r_{ij}]_{n \times n}$, $M_{R^{-1}} = [p_{ij}]_{n \times n}$, $(M_R)^t = [r_{ji}]_{n \times n}$. Para demostrar que

$M_{R^{-1}} = (M_R)^T$, se tiene que mostrar que, en la posición a_{ij} de ambas matrices, se cumple

que $p_{ij} = r_{ji}$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$:

$$p_{ij} = 1 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (a_j, a_i) \in R$$

$$\Leftrightarrow r_{ji} = 1$$

Por consiguiente:

$$p_{ij} = 1 \Leftrightarrow r_{ji} = 1$$

De manera similar se obtiene que:

$$p_{ij} = 0 \Leftrightarrow r_{ji} = 0$$

Entonces, se concluye que:

$$p_{ij} = r_{ji}, \text{ para } i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$\therefore M_{R^{-1}} = (M_R)^t$$

Teorema 2.2.1.2. Sea \mathcal{A} un conjunto finito distinto del vacío. Si R y H son relaciones sobre \mathcal{A} , entonces se cumplen:

$$\text{i) } (R \cup H)^{-1} = R^{-1} \cup H^{-1}$$

$$\text{ii) } (R \cap H)^{-1} = R^{-1} \cap H^{-1}$$

(Kolman et al., 1997, p. 149)

Demostración:

i) Sean $a_i, a_j \in \mathcal{A}$, y R y H relaciones sobre \mathcal{A} . Se demuestra que $(R \cup H)^{-1} = R^{-1} \cup H^{-1}$:

$$\begin{aligned} (a_i, a_j) \in (R \cup H)^{-1} &\Leftrightarrow (a_j, a_i) \in R \cup H \\ &\Leftrightarrow (a_j, a_i) \in R \vee (a_j, a_i) \in H \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R^{-1} \vee (a_i, a_j) \in H^{-1} \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in (R^{-1} \cup H^{-1}) \end{aligned}$$

$$\therefore (R \cup H)^{-1} = R^{-1} \cup H^{-1}$$

ii) Sean $a_i, a_j \in \mathcal{A}$, y R y H relaciones sobre \mathcal{A} . Se demuestra que $(R \cap H)^{-1} = R^{-1} \cap H^{-1}$:

$$\begin{aligned} (a_i, a_j) \in (R \cap H)^{-1} &\Leftrightarrow (a_j, a_i) \in R \cap H \\ &\Leftrightarrow (a_j, a_i) \in R \wedge (a_j, a_i) \in H \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R^{-1} \wedge (a_i, a_j) \in H^{-1} \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in (R^{-1} \cap H^{-1}) \end{aligned}$$

$$\therefore (R \cap H)^{-1} = R^{-1} \cap H^{-1}$$

Definición 2.2.1.9. Sean \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} conjuntos finitos distintos del vacío; R , una relación de \mathcal{A} en \mathcal{B} y H , una relación de \mathcal{B} en \mathcal{C} . Se denomina relación compuesta de R y H , denotada por $H \circ R$, a una relación de \mathcal{A} en \mathcal{C} , si $H \circ R$ está constituida por aquellos pares ordenados cuyo segundo elemento en un par de R coincide con el primer elemento de un par de H . Es decir:

$$H \circ R = \{ (a, c) \mid \exists b \in \mathcal{B}, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in H \}$$

Además, $H \circ R \neq R \circ H$. (Espinoza, 2017, p.124)

Definición 2.2.1.10. Sean $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_\alpha, \dots, b_n\}$ y $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ conjuntos finitos distintos del vacío, $n \in \mathbb{Z}^+$, R una relación de \mathcal{A} en \mathcal{B} , H una relación de \mathcal{B} en \mathcal{C} y $H \circ R$ una relación compuesta de R y H . Se define la matriz de adyacencia de $H \circ R$, como el producto booleano de las matrices de adyacencia de R y H , denotado por $M_R \odot M_H$. Es decir:

$$M_{H \circ R} = M_R \odot M_H = [t_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, b_\alpha) \in R \wedge (b_\alpha, c_j) \in H \\ 0 & \text{si } (a_i, b_\alpha) \notin R \wedge (b_\alpha, c_j) \notin H \end{cases}$$

De manera equivalente:

$$M_R \odot M_H = [t_{ij}]_{n \times n}, \text{ donde } t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{i\alpha} = 1 \wedge h_{\alpha j} = 1, \text{ para algún } \alpha, 1 \leq \alpha \leq n \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

(Rosen, 2004, p. 458)

A partir de la Definición 2.2.1.10, se construye una matriz de adyacencia para la relación compuesta $H \circ R$, de las relaciones R y H sobre el conjunto finito $\mathcal{A} = \{1,2,3,4\}$, siendo:

$$R = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,4), (3,2) \} \text{ y}$$

$$H = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (3,1), (4,1), (4,3) \}.$$

Primero, se obtiene las matrices de adyacencia de R y H , como sigue:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad \text{y} \quad M_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Luego, se utiliza la definición de producto booleano de matrices para conseguir la matriz de adyacencia $M_{H \circ R}$ de la relación compuesta $H \circ R$:

$$M_{H \circ R} = M_R \odot M_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Por operaciones booleanas se sabe que:

a) Para la operación conjunción: $0 \wedge 0 = 0$; $0 \wedge 1 = 0$; $1 \wedge 0 = 0$; $1 \wedge 1 = 1$

b) Para la operación disyunción: $0 \vee 0 = 0$; $0 \vee 1 = 1$; $1 \vee 0 = 1$; $1 \vee 1 = 1$

Teniendo en cuenta las operaciones conjunción y disyunción, se resuelve el producto booleano de matrices como sigue:

$$t_{11} = (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) = 1$$

$$t_{12} = (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$$

$$t_{13} = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1$$

$$t_{14} = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) = 1$$

De la misma manera, se opera para $t_{21}, t_{22}, t_{23}, t_{24}, t_{31}, t_{32}, t_{33}, t_{34}, t_{41}, t_{42}, t_{43}, t_{44}$, obteniendo así la siguiente matriz de adyacencia:

$$M_{H \circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4},$$

y la relación compuesta $H \circ R = \{ (1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (3,3) \}$.

Teorema 2.2.1.3. Sean \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} y \mathcal{D} conjuntos finitos distintos del vacío. Si R es una relación de \mathcal{A} en \mathcal{B} , H una relación de \mathcal{B} en \mathcal{C} , y Q una relación de \mathcal{C} en \mathcal{D} , entonces se cumple:

$$i) \quad Q \circ (H \circ R) = (Q \circ H) \circ R$$

$$ii) \quad (H \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ H^{-1}$$

(Grimaldi, 1997, p. 345)

Demostración:

i) Sean $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $c \in \mathcal{C}$, y $d \in \mathcal{D}$. Se muestra que $Q \circ (H \circ R) = (Q \circ H) \circ R$, como sigue:

$$\begin{aligned} (a, d) \in [Q \circ (H \circ R)] &\Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{C} \mid (a, c) \in (H \circ R) \wedge (c, d) \in Q \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{C} \mid [\exists b \in \mathcal{B} \mid (a, b) \in R \wedge (b, c) \in H] \wedge (c, d) \in Q \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{B} \mid (a, b) \in R \wedge [\exists c \in \mathcal{C} \mid (b, c) \in H \wedge (c, d) \in Q] \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{B} \mid (a, b) \in R \wedge (b, d) \in (Q \circ H) \\ &\Leftrightarrow (a, d) \in [(Q \circ H) \circ R] \end{aligned}$$

$$\therefore Q \circ (H \circ R) = (Q \circ H) \circ R$$

ii) Sean $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, y $c \in \mathcal{C}$. Se muestra que $(H \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ H^{-1}$, como sigue:

$$\begin{aligned} (c, a) \in (H \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (a, c) \in (H \circ R) \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{B} \mid (a, b) \in R \wedge (b, c) \in H \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{B} \mid (b, a) \in R^{-1} \wedge (c, b) \in H^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists b \in \mathcal{B} \mid (c, b) \in H^{-1} \wedge (b, a) \in R^{-1} \\ &\Leftrightarrow (c, a) \in (R^{-1} \circ H^{-1}) \end{aligned}$$

$$\therefore (H \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ H^{-1}$$

2.2.1.3. Trayectorias

Definición 2.2.1.11. Sea $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se llama trayectoria de longitud n de a_0 hasta a_n en R , denotada por $\tau: a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$, a una sucesión finita alternante de $n + 1$ nodos etiquetados por los elementos de \mathcal{A} y n flechas dirigidas que comienzan en el nodo correspondiente a un a_0 y terminan en el nodo de un a_n , tal que:

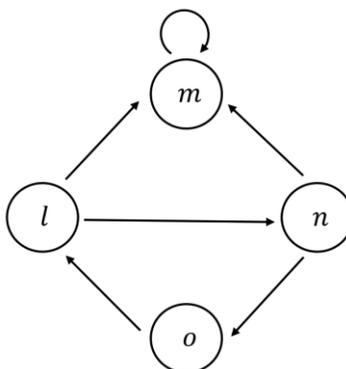
$$a_0 R a_1; a_1 R a_2; \dots; a_{n-1} R a_n$$

(Rosen, 2004, p. 464)

De acuerdo a Kolman et al., (1997), “una trayectoria que inicia y termina en el mismo nodo, sin repetir ningún nodo a excepción del primero, se denomina ciclo, y una trayectoria de longitud uno que conecta un nodo consigo mismo se denomina lazo u oreja” (p. 117). En la Figura 1, se ilustra esta definición.

Figura 1

Dígrafo de una relación binaria R



Nota. El diagrama presenta el dígrafo de una relación binaria $R = \{(l, m), (l, n), (m, m), (n, m), (n, o), (o, l)\}$ sobre un conjunto $\mathcal{A} = \{l, m, n, o\}$ y sus trayectorias $\tau_1: l, n, o, l$ de longitud 3 que es un ciclo y $\tau_2: m, m$ de longitud 1 que es un lazo. Elaboración propia.

Definición 2.2.1.12. Sea $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}_0^+$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, R una relación sobre \mathcal{A} , y $\tau_1: a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ y $\tau_2: a_n, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k$ dos trayectorias de longitud n y k , respectivamente. Se llama composición de τ_1 con τ_2 , denotada por $\tau_2 \circ \tau_1$, a una trayectoria de longitud $n + k$ de a_0 hasta b_k en R . Es decir:

$$\tau_2 \circ \tau_1: a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k$$

(Kolman et al., 1997, p. 117)

Definición 2.2.1.13. Sea $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \dots, a_m, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $m \geq 2$ y $n \in \mathbb{Z}_0^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se define la potencia de relaciones en \mathcal{A} , denotada por R^m , como la relación compuesta:

$$R^m = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{m\text{-veces}}, m \geq 2$$

Equivalentemente, se tiene que:

$$(a_0, a_m) \in R^m, m \geq 2 \Leftrightarrow \exists \tau: a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m \mid a_0 R a_1; a_1 R a_2; \dots; a_{m-1} R a_m$$

(Espinoza, 2017, p. 125)

Teorema 2.2.1.4. Sea R una relación sobre el conjunto finito no vacío \mathcal{A} , y M_R una matriz de adyacencia de R . Si R^m es la potencia de relaciones en \mathcal{A} , con $m \geq 2$, entonces la matriz de adyacencia de R^m , denotada por M_{R^m} , se obtiene mediante el producto booleano de matrices como sigue:

$$M_{R^m} = \underbrace{M_R \odot M_R \odot \dots \odot M_R}_{m\text{-veces}}, m \geq 2$$

(Rosen, 2004, p. 45)

Demostración:

Para realizar la demostración, se utiliza el método por inducción, como sigue:

i) Base:

Sean las matrices de adyacencia $M_R = [r_{ij}]_{n \times n}$, $M_{R^2} = [x_{ij}]_{n \times n}$, y $M_R \odot M_R = [t_{ij}]_{n \times n}$, cuando $m = 2$. Para demostrar que $M_{R^2} = M_R \odot M_R$, se tiene que mostrar que, en la posición a_{ij} de ambas matrices, se cumple que $x_{ij} = t_{ij}$, para $i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} x_{ij} = 1 &\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R^2 \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R \circ R \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_\alpha) \in R \wedge (a_\alpha, a_j) \in R \\ &\Leftrightarrow r_{i\alpha} = 1 \wedge r_{\alpha j} = 1 \\ &\Leftrightarrow t_{ij} = 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$x_{ij} = 1 \Leftrightarrow t_{ij} = 1$$

De forma similar se obtiene que:

$$x_{ij} = 0 \Leftrightarrow t_{ij} = 0$$

Entonces, se concluye que:

$$x_{ij} = t_{ij}, \text{ para } i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Por el axioma de extensión $M_{R^2} = M_R \odot M_R$

ii) Hipótesis:

Suponiendo válido para $m = k$, se cumple que:

$$M_{R^k} = \underbrace{M_R \odot M_R \odot \dots \odot M_R}_{k\text{-veces}}, k > 2$$

iii) Paso de inducción:

Sean las matrices de adyacencia $M_R = [r_{ij}]_{n \times n}$, $M_{R^k} = [y_{ij}]_{n \times n}$, $M_{R^{k+1}} = [z_{ij}]_{n \times n}$, y $M_{R^k} \odot M_R = [v_{ij}]_{n \times n}$, cuando $m = k+1$. Para demostrar que $M_{R^{k+1}} = M_{R^k} \odot M_R$, se tiene que mostrar que, en la posición a_{ij} de ambas matrices, se cumple que $z_{ij} = v_{ij}$, para $i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} z_{ij} = 1 &\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R^{k+1} \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R^k \circ R \\ &\Leftrightarrow (a_i, a_\alpha) \in R^k \wedge (a_\alpha, a_j) \in R \\ &\Leftrightarrow y_{i\alpha} = 1 \wedge r_{\alpha j} = 1 \\ &\Leftrightarrow v_{ij} = 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$z_{ij} = 1 \Leftrightarrow v_{ij} = 1$$

De forma similar se obtiene que:

$$z_{ij} = 0 \Leftrightarrow v_{ij} = 0$$

Entonces, se concluye que:

$$z_{ij} = v_{ij}, \text{ para } i, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Por el axioma de extensión $M_{R^{k+1}} = M_{R^k} \odot M_R$

$$\therefore M_{R^m} = \underbrace{M_R \odot M_R \odot \dots \odot M_R}_{m\text{-veces}}, m \geq 2$$

2.2.1.4. Propiedades de las Relaciones Binarias

De acuerdo a Kolman et al. (1997), “en diversas aplicaciones de las ciencias de la computación y las matemáticas aplicadas, se trabaja principalmente con relaciones definidas sobre un conjunto finito no vacío \mathcal{A} , en lugar de entre conjuntos distintos. Además, dichas relaciones suelen cumplir propiedades como la reflexividad, simetría y transitividad.” (p. 124).

Definición 2.2.1.14. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se define la relación diagonal de \mathcal{A} , denotado por $\Delta_{\mathcal{A}}$, como sigue:

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \{ (a_i, a_i) \mid a_i \in \mathcal{A} \}$$

(Kolman, 1997, p. 124)

Teorema 2.2.1.5. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se dice que:

i) R es reflexiva si, y solo si, $(a_i, a_i) \in R$ para todo elemento a_i que pertenece a \mathcal{A} . Es decir:

$$R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow (a_i, a_i) \in R, \forall a_i \in \mathcal{A}$$

ii) R es irreflexiva si, y solo si, $(a_i, a_i) \notin R$ para todo elemento a_i que pertenece a \mathcal{A} .

Es decir:

$$R \text{ es irreflexiva} \Leftrightarrow (a_i, a_i) \notin R, \forall a_i \in \mathcal{A}$$

(Kolman et al., 1997, p. 124)

De acuerdo a Rosen (2004), “la relación R sobre el conjunto finito \mathcal{A} es reflexiva, si en su dígrafo todos los nodos presentan un lazo o si en su matriz de adyacencia todas las entradas diagonales son iguales a 1” (p. 457).

Teorema 2.2.1.6. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se dice que R es simétrica si, y solo si, dado $(a_i, a_j) \in R$, se cumple que $(a_j, a_i) \in R$. Es decir:

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow [(a_i, a_j) \in R \Rightarrow (a_j, a_i) \in R]$$

De manera equivalente:

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow R = R^{-1}$$

(Epp, 2012, p. 444).

De acuerdo a Rosen (2004), “la relación R sobre el conjunto finito \mathcal{A} es simétrica, si en su dígrafo existe flecha de ida y de vuelta entre dos nodos diferentes o si su matriz de adyacencia es igual a su matriz transpuesta” (p. 457).

Teorema 2.2.1.7. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se dice que R es antisimétrica si, y solo si, dados $(a_i, a_j) \in R$ y $(a_j, a_i) \in R$, se cumple que a_i es igual a a_j . Es decir:

$$R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow [(a_i, a_j) \in R \wedge (a_j, a_i) \in R \Rightarrow a_i = a_j]$$

(Kolman et al., 1997, p. 124)

Teorema 2.2.1.8. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se dice que R es transitiva si, y solo si, dados $(a_i, a_j) \in R$ y $(a_j, a_k) \in R$, se cumple que $(a_i, a_k) \in R$. Es decir:

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow [(a_i, a_j) \in R \wedge (a_j, a_k) \in R \Rightarrow (a_i, a_k) \in R]$$

De manera equivalente:

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow R = R^2$$

(Johnsonbaugh, 2005, p. 135)

2.2.1.5. Relaciones de Equivalencia y Conjuntos Cociente

De acuerdo a Kolman et al. (1997), “si se tiene una partición de un conjunto finito no vacío \mathcal{A} , entonces dicha partición puede usarse para construir una relación de equivalencia en \mathcal{A} ” (p. 132).

Definición 2.2.1.15. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Se dice que R es una relación de equivalencia, si R es reflexiva, simétrica y transitiva a la vez. Es decir:

- i) $\forall a_i \in \mathcal{A}: a_i R a_i$
- ii) $\forall a_i, a_j \in \mathcal{A}: a_i R a_j \Rightarrow a_j R a_i$
- iii) $\forall a_i, a_j, a_k \in \mathcal{A}: a_i R a_j \wedge a_j R a_k \Rightarrow a_i R a_k$

(Espinoza, 2017, p. 118)

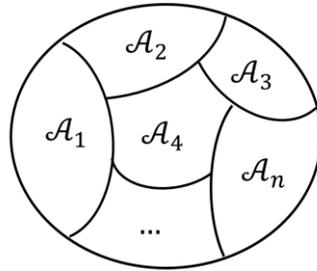
Definición 2.2.1.16. Sea \mathcal{A} un conjunto finito distinto del vacío y $J = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto finito de índices. Se dice que una partición del conjunto \mathcal{A} , es una familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in J}$ de subconjuntos de \mathcal{A} , llamados bloques o celdas de la partición, como se ve en la Figura 2, tal que verifican las siguientes condiciones:

- i) $\mathcal{A}_i \neq \phi, \forall i \in J$
- ii) $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \phi$, siempre que $i \neq j$
- iii) $\bigcup_{i \in J} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$

(Epp, 2012, p. 460)

Figura 2

Una partición del conjunto \mathcal{A}



Nota. En el diagrama los \mathcal{A}_i son subconjuntos no vacíos de \mathcal{A} , distintos entre sí, con $i \in J = \{1, 2, \dots, n\}$. Adaptado de *Matemáticas Discretas y sus Aplicaciones* (p. 477), por Rosen K., 2004, McGrawHill Iberoamericana.

Definición 2.2.1.16. Sea \mathcal{A} un conjunto finito distinto del vacío, R una relación de equivalencia en \mathcal{A} , y a, a_α elementos de \mathcal{A} . Se llama clase de equivalencia de a , con respecto a R , al conjunto de todos los elementos relacionados con a , y se denota por $[a]$. Es decir:

$$a_\alpha \in [a] \Leftrightarrow a_\alpha R a$$

De manera equivalente:

$$[a] = \{ a_\alpha \in \mathcal{A} \mid a_\alpha R a \}$$

(Grimaldi, 1997, p. 367)

Teorema 2.2.1.9. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto finito distinto del vacío, con $n \in \mathbb{Z}^+$, y R una relación sobre \mathcal{A} . Si R es una relación de equivalencia en \mathcal{A} , se cumple que:

- i) $[a_i] = [a_j] \Leftrightarrow a_i R a_j \mid [a_i] \cap [a_j] \neq \phi$
- ii) $[a_i] \neq [a_j], i \neq j \Rightarrow a_i \not R a_j \mid [a_i] \cap [a_j] = \phi$

(Espinoza, 2017, p. 121)

Demostración:

i) Para demostrar que $[a_i] = [a_j] \Leftrightarrow a_i R a_j \mid [a_i] \cap [a_j] \neq \phi$, se prueba por doble inclusión:

(\Rightarrow) Se muestra que $[a_i] \cap [a_j] \neq \phi$, si $[a_i] = [a_j]$. Como $a_i, a_j \in \mathcal{A}$, sea un $a_\alpha \in \mathcal{A}$,

tal que:

$$\begin{aligned} [a_i] = [a_j] &\Rightarrow a_\alpha \in [a_i] \wedge a_\alpha \in [a_j] \\ &\Rightarrow a_\alpha R a_i \wedge a_\alpha R a_j \\ &\Rightarrow a_i R a_\alpha \wedge a_\alpha R a_j \\ &\Rightarrow a_i R a_j \mid [a_i] \cap [a_j] \neq \phi \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Se muestra por el axioma de extensión que $[a_i] = [a_j]$, si $[a_i] \cap [a_j] \neq \phi$. Como

$a_i, a_j \in \mathcal{A}$, sea un $a_\alpha \in \mathcal{A}$, tal que:

$$\begin{aligned} a_\alpha \in [a_i] &\Leftrightarrow a_\alpha R a_i \wedge a_i R a_j \\ &\Leftrightarrow a_\alpha R a_j \\ &\Leftrightarrow a_\alpha \in [a_j] \end{aligned}$$

Luego $[a_i] \subset [a_j]$ y $[a_j] \subset [a_i] \Rightarrow [a_i] = [a_j]$

$$\therefore [a_i] = [a_j] \Leftrightarrow a_i R a_j$$

ii) Para demostrar que $[a_i] \neq [a_j]$ si $[a_i] \cap [a_j] = \phi$, se muestra por el absurdo.

Suponiendo que $[a_i] \cap [a_j] \neq \phi$, con $a_i, a_j \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \exists a_\alpha \in ([a_i] \cap [a_j]) &\Rightarrow a_\alpha \in [a_i] \wedge a_\alpha \in [a_j] \\ &\Rightarrow a_\alpha R a_i \wedge a_\alpha R a_j \\ &\Rightarrow a_i R a_\alpha \wedge a_\alpha R a_j \\ &\Rightarrow a_i R a_j \end{aligned}$$

Por i) si $a_i R a_j$ entonces $[a_i] = [a_j]$ ($\Rightarrow \Leftarrow$)

Lo cual es una contradicción a la hipótesis $[a_i] \neq [a_j]$, entonces lo contrario es verdadero.

$$\therefore [a_i] \neq [a_j] \Rightarrow [a_i] \cap [a_j] = \phi$$

Definición 2.2.1.17. Sea \mathcal{A} un conjunto finito distinto del vacío, R una relación de equivalencia en \mathcal{A} , y $[a]$ una clase de equivalencia de $a \in \mathcal{A}$. Se llama conjunto cociente de \mathcal{A} mediante la relación R , denotado por \mathcal{A}/R , al conjunto de todas las clases de equivalencia de \mathcal{A} . Es decir:

$$\mathcal{A}/R = \{ [a] \mid a \in \mathcal{A} \}$$

(Kolman et al., 1997, p. 134)

Teorema 2.2.1.10. Sea \mathcal{A} un conjunto finito no vacío y R una relación sobre \mathcal{A} . Si R es una relación de equivalencia en \mathcal{A} , entonces R determina una partición de \mathcal{A} , en clases de equivalencia. (Epp, 2012, p. 469)

Demostración:

Se debe demostrar que, el conjunto de todas las clases de equivalencia de los elementos de \mathcal{A} , cumple las tres condiciones de la definición de partición.

i) Como R es una relación de equivalencia definida en $\mathcal{A} \neq \phi$, entonces para cualquier

$a \in \mathcal{A}$, se cumple que:

$$a R a \Rightarrow a \in [a]$$

$$\Rightarrow [a] \in \mathcal{A}_i$$

$$\therefore \mathcal{A}_i \neq \phi, \forall a \in \mathcal{A}$$

ii) Si $\mathcal{A} \neq \phi$ y $a_i, a_j \in \mathcal{A}$ elementos cualesquiera, tal que $a_i \neq a_j$ entonces existen las clases de equivalencia $[a_i], [a_j]$, tal que, por el Teorema 2.2.1.9, se cumple inmediatamente que:

$$[a_i] \neq [a_j], i \neq j \Rightarrow (a, b) \notin R \mid [a] \cap [b] = \phi$$

Por lo cual, las clases de equivalencia serán disjuntas, puesto que, si dos de estas tuvieran un elemento en común, entonces serian la misma clase.

iii) Por la definición de partición de un conjunto y la definición de clases de equivalencia, todo elemento perteneciente a $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} [a]$, también pertenece al conjunto \mathcal{A} .

∴ Por i), ii) y iii), R determina una partición de \mathcal{A} , en clases de equivalencia.

Definición 2.2.1.18. Sea R una relación de equivalencia sobre el conjunto finito no vacío \mathcal{A} , $J = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto finito de índices y $P = \{\mathcal{A}_i\}_{i \in J}$ una partición de \mathcal{A} . Se dice que una relación asociada a la partición P , denotada por R_P , está definida como:

$$R_P = \{ (a_\alpha, a_\kappa) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid \exists i_0 \in J \wedge a_\alpha, a_\kappa \in \mathcal{A}_{i_0} \}$$

(Rosen, 2004, p. 477)

Teorema 2.2.1.11. Sea \mathcal{A} un conjunto finito distinto del vacío y $J = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto finito de índices. Si $P = \{\mathcal{A}_i\}_{i \in J}$ es una partición del conjunto \mathcal{A} , entonces la relación R_P , asociada P , es una relación de equivalencia en \mathcal{A} . (Epp, 2012, p. 472)

Demostración:

Para probar que R_P es relación de equivalencia, se tiene que probar que R_P es reflexiva, simétrica y transitiva, usando la definición de R_P :

$$(a_\alpha, a_\kappa) \in R_P \Leftrightarrow \exists i_0 \in J \wedge a_\alpha, a_\kappa \in \mathcal{A}_{i_0},$$

y la definición de partición de un conjunto, puesto que, por hipótesis, $P = \{\mathcal{A}_i\}_{i \in J}$ es una partición de \mathcal{A} , siendo $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in J} \mathcal{A}_i$:

i) Sea $a_\alpha \in \mathcal{A}$, por la definición de partición de \mathcal{A} , se tiene que:

$$\begin{aligned} a_\alpha \in \mathcal{A} &\Rightarrow a_\alpha \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{A}_i \\ &\Rightarrow \exists i_0 \in J \wedge a_\alpha \in \mathcal{A}_{i_0} \\ &\Rightarrow \exists i_0 \in J \wedge a_\alpha, a_\alpha \in \mathcal{A}_{i_0} \\ &\Rightarrow (a_\alpha, a_\alpha) \in R_P \end{aligned}$$

$\therefore R_P$ es reflexiva.

ii) Sean $a_\alpha, a_\kappa \in \mathcal{A}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} (a_\alpha, a_\kappa) \in R_P &\Rightarrow \exists i_0 \in J \wedge a_\alpha, a_\kappa \in \mathcal{A}_{i_0} \\ &\Rightarrow \exists i_0 \in J \wedge a_\kappa, a_\alpha \in \mathcal{A}_{i_0} \\ &\Rightarrow (a_\kappa, a_\alpha) \in R_P \end{aligned}$$

$\therefore R_P$ es simétrica.

iii) Sean $a_\alpha, a_\kappa, a_l \in \mathcal{A}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{a) } (a_\alpha, a_\kappa) \in R_P &\Rightarrow \exists i_0 \in J \wedge a_\alpha, a_\kappa \in \mathcal{A}_{i_0} \\ \text{b) } (a_\kappa, a_l) \in R_P &\Rightarrow \exists i_0 \in J \wedge a_\kappa, a_l \in \mathcal{A}_{i_0} \end{aligned}$$

De a) y b) por la propiedad transitiva, se tiene que:

$$\exists i_0 \in J \wedge a_\alpha, a_l \in \mathcal{A}_{i_0} \Rightarrow (a_\alpha, a_l) \in R_P$$

$\therefore R_P$ es transitiva.

En consecuencia, de i), ii) y iii), R_P es una relación de equivalencia.

2.2.2. Lenguajes

2.2.2.1. Alfabetos y Cadenas

Definición 2.2.2.1. Se llama alfabeto a un conjunto finito y no vacío de símbolos, y se denota por I . Algunos de los alfabetos más conocidos, son el alfabeto binario $I = \{0,1\}$ y el alfabeto de las letras minúsculas $I = \{a, b, c\}$. (Hopcroft et al., 2007, p. 24)

Definición 2.2.2.2. Sea $I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un alfabeto, con $n \in \mathbb{Z}^+$. Se llama cadena o palabra sobre I a una secuencia finita de símbolos de I , denotada por $x = a_1 a_2 \dots a_n$. Asimismo, si la cadena tiene cero símbolos, se llama cadena vacía y se denota por λ . (Epp, 2012, p. 329)

Definición 2.2.2.3. Sean x e y cadenas sobre el alfabeto I . Se llama longitud de una cadena, denotada por $|x|$, al número de símbolos que contiene la cadena. Además, inductivamente se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x = \lambda \\ |y| + 1 & , \text{ si } x = ya, \quad a \in I \end{cases}$$

En particular, para las cadenas $x = 00100111$ y $z = acbcb$ sobre los alfabetos $I = \{0,1\}$ $I = \{a, b, c\}$ respectivamente, se cumple que $|x| = 8$ y $|z| = 5$. (García et al., 2001, p. 7)

Definición 2.2.2.4. Sea $I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un alfabeto. Se denomina potencia de un alfabeto, denotado por I^n , con $n \in \mathbb{Z}_0^+$, al conjunto de todas las cadenas de longitud n formadas con los símbolos de I . Es decir:

$$I^n = \{ a_1 a_2 \dots a_n \mid n \geq 0 \wedge a_i \in I \}$$

Sea el caso del alfabeto binario $I = \{0,1\}$, cuyas potencias incluyen al conjunto de la cadena de longitud 0 denotado por $I^0 = \{\lambda\}$, y al conjunto de cadenas de longitud 3, denotado por $I^3 = \{000,001,010,100,011,101,110,111\}$. (Hopcroft et al., 2007, p. 25)

Definición 2.2.2.5. Sea I un alfabeto. Se llama lenguaje universal, denotado por I^* , al conjunto de todas las cadenas sobre I . Es decir:

$$I^* = \cup_{n \geq 0} I^n$$

(García et al., 2001, p. 7)

Definición 2.2.2.6. Sea $I = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$ un alfabeto, I^* el conjunto de todas las cadenas sobre I , y $x = a_1 a_2 \dots a_n$ e $y = b_1 b_2 \dots b_m$ cadenas de I^* , con $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Se llama concatenación de cadenas, denotado por (\cdot) , a una ley de composición interna u operación interna en I^* , definida como sigue:

$$\begin{aligned} (\cdot) : I^* \times I^* &\rightarrow I^* \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y = a_1 \dots a_{n-1} a_n b_1 \dots b_{m-1} b_m, \text{ donde } n, m \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

(Hopcroft et al., 2007, p. 26)

De acuerdo a García (2001), “la operación interna (\cdot) dota al conjunto I^* de estructura monoide con la propiedad asociativa y existencia del elemento neutro λ .” (p. 8).

Teorema 2.2.2.1. Sea I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I , y x, y, z cadenas de I^* . La operación concatenación (\cdot) , cumple las siguientes propiedades:

- i) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- ii) $x \cdot \lambda = \lambda \cdot x = x$
- iii) $|x \cdot y| = |x| + |y|$

(García et al., 2001, p. 8)

Demostración:

i) Sean $x = a_1a_2 \dots a_m$, $y = b_1b_2 \dots b_n$ y $z = c_1c_2 \dots c_p$ cadenas de I^* . Se prueba la propiedad asociativa como sigue:

$$\begin{aligned} \text{a) } (x \cdot y) \cdot z &= (a_1a_2 \dots a_mb_1b_2 \dots b_n) \cdot z \\ &= a_1a_2 \dots a_mb_1b_2 \dots b_nc_1c_2 \dots c_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x \cdot (y \cdot z) &= x \cdot (b_1b_2 \dots b_nc_1c_2 \dots c_p) \\ &= a_1a_2 \dots a_mb_1b_2 \dots b_nc_1c_2 \dots c_p \end{aligned}$$

De a) y b) se tiene que $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

∴ La operación interna (\cdot) es asociativa.

ii) Sea $\lambda \in I^*$ la cadena vacía, y $x = a_1a_2 \dots a_m$ una cadena de I^* . Se prueba la propiedad del elemento neutro como sigue:

$$\text{a) } x \cdot \lambda = a_1a_2 \dots a_m = x$$

$$\text{b) } \lambda \cdot x = a_1a_2 \dots a_m = x$$

∴ La operación interna (\cdot) tiene elemento neutro.

iii) Sea $\lambda \in I^*$ la cadena vacía, y x, y, z cadenas de I^* . Para probar que $|x \cdot y| = |x| + |y|$, procedemos por inducción en $|y|$:

a) Base:

Para $|y| = 0$, cuando $y = \lambda$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= |x \cdot \lambda| \\ &= |x| \\ &= |x| + 0 \\ &= |x| + |y| \end{aligned}$$

b) Hipótesis:

Suponiendo válido para $|y| < k$, $k \in \mathbb{Z}^+$

Paso de inducción:

Sea $a_i \in I$. Para $|y| = k$, cuando $y = za_i$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= |x \cdot za_i| \\ &= |(x \cdot z)a_i| \\ &= |x \cdot z| + 1 \\ &= |x| + |z| + 1 \\ &= |x| + |y| \end{aligned}$$

$$\therefore |x \cdot y| = |x| + |y|$$

2.2.2.2. Operaciones con Lenguajes

Definición 2.2.2.7. Sea I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I . Se llama lenguaje sobre I , denotado por L , a un subconjunto no vacío de cadenas de I^* . Asimismo, se llama lenguaje vacío sobre I , denotado por ϕ , si es un subconjunto vacío de I^* . (Grimaldi, 1997, p. 313)

Definición 2.2.2.8. Sea I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I , x una cadena de I^* , y L_1 y L_2 lenguajes sobre I . La unión de estos lenguajes se define como sigue:

$$L_1 \cup L_2 = \{ x \in I^* \mid x \in L_1 \vee x \in L_2 \}$$

Además, la unión de lenguajes cumple con las propiedades asociativa, conmutativa y existencia del elemento neutro ϕ . (Brookshear, 1993, p. 58)

Definición 2.2.2.9. Sea I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I , x una cadena de I^* , y L_1 y L_2 lenguajes sobre I . La intersección de estos lenguajes se define como sigue:

$$L_1 \cap L_2 = \{ x \in I^* \mid x \in L_1 \wedge x \in L_2 \}$$

Además, la intersección de lenguajes cumple con las propiedades asociativa, conmutativa y existencia del elemento neutro I^* . (García et al., 2001, p. 10)

Definición 2.2.2.10. Sea I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I , x una cadena de I^* , y L_1 y L_2 lenguajes sobre I . Se llama complementario de L , denotado por L^c , al lenguaje que contiene todas las cadenas sobre I que no pertenecen a L . Es decir:

$$L^c = \{ x \in I^* \mid x \notin L \}$$

(García et al., 2001, p. 10)

Definición 2.2.2.11. Sea I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I , x una cadena de I^* , y L_1 y L_2 lenguajes sobre I . La concatenación de L_1 y L_2 está definido como sigue:

$$L_1 \cdot L_2 = \{ (x.y) \in I^* \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2 \}$$

Además, la concatenación de lenguajes cumple con las propiedades asociativa, distributiva respecto a la unión, existencia del elemento neutro $\{\lambda\}$ y anulador \emptyset . (Brookshear, 1993, p. 60)

Definición 2.2.2.12. Sea I un alfabeto, $\{\lambda\}$ el conjunto de la cadena de longitud cero y L un lenguaje sobre I . La potencia de un lenguaje L está definido como sigue:

$$L^n = \begin{cases} \{\lambda\} & , \text{ si } n = 0 \\ L^{n-1} \cdot L & , \text{ si } n > 0 \end{cases}$$

(García et al., 2001, p. 11)

Definición 2.2.2.13. Sea I un alfabeto y L un lenguaje sobre I . Se llama clausura de Kleene o cierre estrella, y se denota por L^* , al lenguaje cuyas cadenas son todas las que se pueden obtener realizando cero o más concatenaciones de cadenas de L . Es decir:

$$L^* = \cup_{i \geq 0} L^i$$

(Brookshear, J., 1993, p. 60)

2.2.3. Máquinas de Aceptación de Moore

De acuerdo a Kolman et al. (1997), “una máquina es un sistema que puede recibir una entrada y tener una memoria interna para registrar información sobre entradas anteriores. La condición interna completa de la máquina y toda su memoria en un momento determinado constituyen el estado de la máquina en ese instante; este estado resume la memoria de las entradas pasadas y determina cómo debe reaccionar a futuras entradas” (p. 391).

Definición 2.2.3.1. Sea S un conjunto finito no vacío e I un alfabeto. Se llama máquina de estados finitos, a una terna denotada como $M = (S, I, \mathcal{F})$, siendo:

$S = \{s_0, \dots, s_m\}$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$, un conjunto finito de estados,

$I = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, un conjunto de símbolos de entrada,

$\mathcal{F} = \{f_a: S \rightarrow S \mid a \in I\}$, un conjunto de funciones de transición de estados sobre S ,

donde $\mathcal{F}(s, a) = f_a(s)$.

(Kolman et al., 1997, p. 391)

Definición 2.2.3.2. Sea $M = (S, I, \mathcal{F})$ una máquina de estados finitos. Se llama máquina de aceptación de Moore o máquina de reconocimiento a la quintupla $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$, siendo:

$S = \{s_0, \dots, s_m\}$, $m \in \mathbb{Z}_0^+$, un conjunto finito de estados,

$I = \{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, un conjunto de símbolos de entrada,

$\mathcal{F} = \{f_a: S \rightarrow S \mid a \in I\}$, un conjunto de funciones de transición de estados sobre S ,

donde $\mathcal{F}(s, a) = f_a(s)$,

$s_0 \in S$ el estado inicial,

$T \subseteq S$, un conjunto de estados finales o de aceptación.

(Liu, 1995, p.234)

2.2.3.1. Representaciones de la Función de Transición de estados

Definición 2.2.3.3. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, s un estado de S , y a un símbolo de I . Se dice que $f_a(s)$ es una transición de s mediante a , si $f_a(s)$ es la definición de la función de transición de estados f_a . Es decir:

$$\begin{aligned} f_a : S &\rightarrow S \\ s &\mapsto f_a(s), \quad a \in I \end{aligned}$$

(Kolman et al., 1997, p. 391)

Definición 2.2.3.4. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore y f_a función de transición de estados. Se llama tabla de transición de estados de M , a una matriz bidimensional cuyos elementos proporcionan el resumen de f_a , en la que cada fila representa un estado de S y cada columna, un símbolo de I . (Brookshear, 1993, p. 22)

Definición 2.2.3.5. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore. Se llama diagrama de transición de estados de M , a un dígrafo que consta de una colección finita de nodos que contienen los estados de S , si dichos nodos están conectados por flechas orientadas que se etiquetan con un símbolo de I . Además, el nodo de partida corresponde al estado inicial y está señalado por una flecha de inicio, y los nodos de doble círculo corresponden a los estados de aceptación. (Brookshear, 1993, p. 22)

Para un mayor entendimiento de la Definición 2.2.3.3., se muestra de forma detallada la definición de la función de transición de estados de una máquina de aceptación de Moore $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$, $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $I = \{a, b\}$ y $T = \{s_1, s_3, s_4, s_5\}$, como sigue:

$$\begin{array}{cccc} f_a(s_0) = s_0, & f_b(s_0) = s_4, & f_a(s_1) = s_4, & f_b(s_1) = s_0, \\ f_a(s_2) = s_2, & f_b(s_2) = s_4, & f_a(s_3) = s_5, & f_b(s_3) = s_2, \\ f_a(s_4) = s_4, & f_b(s_4) = s_3, & f_a(s_5) = s_3, & f_b(s_5) = s_2. \end{array}$$

Asimismo, se presenta sus representaciones en la Tabla 1 y en Figura 3.

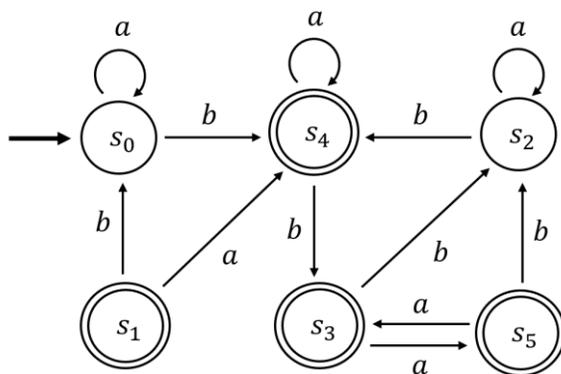
Tabla 1

Tabla de transición de estados de la máquina de aceptación de Moore M

	a	b
s_0	s_0	s_4
s_1	s_4	s_0
s_2	s_2	s_4
s_3	s_5	s_2
s_4	s_4	s_3
s_5	s_3	s_2

Figura 3

Diagrama de transición de estados de la máquina de aceptación de Moore M



Nota. En el dígrafo s_0 es el estado inicial de la máquina de aceptación de Moore M , s_1 , s_3 , s_4 y s_5 son los estados aceptación, y $a, b \in I$ son los símbolos de entrada que transitan de estado en estado mediante las flechas dirigidas. Elaboración propia.

2.2.3.2. Extensión de la Función de Transición a Cadenas

Definición 2.2.3.6. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore y S un conjunto de estados de M . Se dice que S^S es el conjunto de todas las funciones sobre S . Es decir:

$$S^S = \{f: S \rightarrow S\}$$

(Kolman et al., 1997, p. 398)

De acuerdo a Kolman (1997), “la operación interna (\circ) dota al conjunto S^S de estructura monoide con la propiedad asociativa y existencia de su función identidad 1_S ” (p. 398).

Definición 2.2.3.7. Sean (I^*, \cdot) y (S^S, \circ) dos monoides asociados a la máquina de aceptación de Moore $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$, s un estado de S , w una cadena de I^* , $a_i \in I$, y $f_{a_i} \in \mathcal{F}$ funciones de transición de estados, con $i \in J = \{1, \dots, n\}$. Se dice que f_w es función de transición de estados correspondiente a w o función de transición extendida, sí f_w es la composición de las f_{a_i} . Es decir:

$$f_w : S \rightarrow S, w \in I^*$$

$$s \mapsto f_w(s) = f_{a_1 \dots a_{n-1} a_n}(s) = (f_{a_n} \circ f_{a_{n-1}} \circ \dots \circ f_{a_1})(s) = f_{a_n} \left(f_{a_{n-1}} \left(\dots \left(f_{a_1}(s) \right) \right) \right)$$

Además, se define la función f_λ como la función identidad 1_S , $\lambda \in I^*$. (Epp, 2012, p. 797)

En particular, la transición del estado s_4 , mediante la cadena $w = abb$, en la máquina de aceptación de Moore M dada en la Figura 3, está dada como sigue:

$$\begin{aligned} f_{abb}(s_4) &= f_b \left(f_b \left(f_a(s_4) \right) \right) \\ &= f_b \left(f_b(s_4) \right) \\ &= f_b(s_3) \\ &= s_2 \end{aligned}$$

Teorema 2.2.3.1. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, (I^*, \cdot) y (S^S, \circ) dos monoides asociados a M , \mathcal{U} un subconjunto de S^S , w una cadena de I^* , f_w función de transición extendida y \mathfrak{F} una función definida de I^* en S^S . Si $\mathfrak{F}(w) = f_w$, se cumple que:

- i) Si $w_1, w_2 \in I^*$ entonces $\mathfrak{F}(w_1 \cdot w_2) = \mathfrak{F}(w_2) \circ \mathfrak{F}(w_1)$
- ii) Si $\mathcal{U} = \mathfrak{F}(I^*)$ entonces \mathcal{U} es un submonoide de S^S

(Kolman et al., 1997, p. 400)

Demostración:

- i) Sean $w_1 = a_1 \dots a_{n-1} a_n$, $w_2 = b_1 \dots b_{m-1} b_m$ cadenas de I^* , con $n, m \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}(w_1 \cdot w_2) &= f_{w_1 \cdot w_2} \\
 &= f_{a_1 \dots a_{n-1} a_n b_1 \dots b_{m-1} b_m} \\
 &= f_{b_m} \circ f_{b_{m-1}} \circ \dots \circ f_{b_1} \circ f_{a_n} \circ f_{a_{n-1}} \circ \dots \circ f_{a_1} \\
 &= (f_{b_m} \circ f_{b_{m-1}} \circ \dots \circ f_{b_1}) \circ (f_{a_n} \circ f_{a_{n-1}} \circ \dots \circ f_{a_1}) \\
 &= f_{w_2} \circ f_{w_1} \\
 &= \mathfrak{F}(w_2) \circ \mathfrak{F}(w_1)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathfrak{F}(w_1 \cdot w_2) = \mathfrak{F}(w_2) \circ \mathfrak{F}(w_1)$$

- ii) Por hipótesis, $\mathcal{U} = \mathfrak{F}(I^*) = \{\mathfrak{F}(w) \mid w \in I^*\}$. Para probar que \mathcal{U} es un submonoide de S^S , se debe verificar que cumple con la propiedad de clausura bajo la composición de funciones, la propiedad asociativa y que contiene el elemento neutro de S^S :

- a) Sean $\mathfrak{F}(w_1)$ y $\mathfrak{F}(w_2)$ funciones de \mathcal{U} . Por la parte i), se cumple que $\mathfrak{F}(w_1) \circ \mathfrak{F}(w_2) \in \mathcal{U}$. Por ende, \mathcal{U} cumple con la clausura bajo la composición de funciones.

b) Sean $\mathfrak{Z}(w_1)$, $\mathfrak{Z}(w_2)$ y $\mathfrak{Z}(w_3)$ funciones de \mathfrak{U} , y w_1, w_2, w_3 cadenas de I^* se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{Z}(w_1) \circ [\mathfrak{Z}(w_2) \circ \mathfrak{Z}(w_3)] &= f_{w_1} \circ [f_{w_2} \circ f_{w_3}] \\
 &= f_{w_1} \circ [f_{w_3 \cdot w_2}] \\
 &= f_{(w_3 \cdot w_2) \cdot w_1} \\
 &= f_{w_3 \cdot (w_2 \cdot w_1)} \\
 &= [f_{w_2 \cdot w_1}] \circ f_{w_3} \\
 &= [f_{w_1} \circ f_{w_2}] \circ f_{w_3} \\
 &= [\mathfrak{Z}(w_1) \circ \mathfrak{Z}(w_2)] \circ \mathfrak{Z}(w_3)
 \end{aligned}$$

Por tanto, \mathfrak{U} cumple con la propiedad asociativa.

c) Por definición, la función identidad $1_s = f_\lambda$, $1_s \in S^S$ y $\lambda \in I^*$. Además, por hipótesis,

$\mathfrak{Z}(w) = f_w$ y como $\mathfrak{Z}(w) \in \mathfrak{U}$, entonces se cumple que $\mathfrak{Z}(\lambda) = 1_s \in \mathfrak{U}$. Por tanto, \mathfrak{U} contiene el elemento neutro de S^S .

$\therefore \mathfrak{U}$ es un submonoide de S^S .

Definición 2.2.3.8. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, (I^*, \cdot) y (S^S, \circ) dos monoides asociados a M , \mathfrak{U} un subconjunto de S^S , w una cadena de I^* , f_w función de transición extendida, y \mathfrak{Z} una función definida de I^* en S^S , tal que $\mathfrak{Z}(w) = f_w$. Se dice que \mathfrak{U} es un monoide de la máquina M o monoide de transición, si \mathfrak{Z} es un homomorfismo de monoides y \mathfrak{U} es un submonoide de S^S . (Kolman et al., 1997, p. 400)

Definición 2.2.3.9. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, w una cadena de I^* , $L \subset I^*$ un lenguaje sobre I , y f_w una función de transición correspondiente a w . Se llama lenguaje de M , denotado por $L(M)$, al conjunto de todas las cadenas que, al ser utilizadas como entradas de la máquina, hacen que s_0 se mueva a un estado de aceptación en T ; es decir, cadenas que son aceptadas por M . Esto es:

$$L(M) = \{ w \in I^* \mid f_w(s_0) \in T \}$$

(Epp, 2012, p. 795)

2.2.4. Congruencia de Máquinas y Máquina Cociente

Definición 2.2.4.1. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, f_a función de transición de estados, y R una relación de equivalencia en S . R es llamado congruencia de máquinas en M , para cada $s, t \in S$, tal que $(s, t) \in R$, si $(f_a(s), f_a(t)) \in R$, para todo $a \in I$. Es decir:

$$\text{Para cada } s, t \in S, sRt \Leftrightarrow f_a(s)Rf_a(t), \forall a \in I$$

(Liu, 1995, p. 238)

Siguiendo la Definición 2.2.4.1, se muestra que una relación R sobre S , cuya matriz de adyacencia es:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6},$$

es una congruencia de máquinas de la máquina de aceptación de Moore $M = (S, \Sigma, \mathcal{F}, s_0, T)$, $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $I = \{a, b\}$ y $T = \{s_2, s_3\}$, cuya tabla de transiciones está dada en la Tabla 2.

Tabla 2

Tabla de transición de estados de la máquina de Moore M

	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_3	s_5
s_2	s_2	s_4
s_3	s_3	s_0
s_4	s_4	s_5
s_5	s_2	s_1

Primero, se prueba que R es reflexiva, simétrica y transitiva para ser una relación de equivalencia:

- i) Como en la matriz de adyacencia M_R todas sus entradas diagonales son iguales a 1, por definición se afirma que la relación R es reflexiva.
- ii) Para mostrar que R es simétrica, se verifica que $M_R = [M_R]^t$:

$$[M_R]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6} = M_R,$$

por tanto, la relación R es simétrica.

- iii) Para mostrar que R es transitiva, se verifica que $R = R^2$, utilizando el Teorema 2.2.1.4,

para $m = 2$, tal que $M_{R^2} = M_{R \circ R} = M_R \odot M_R$:

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

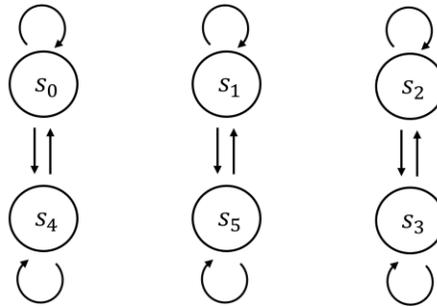
$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6} = M_R$$

Lo que prueba que, la relación R es transitiva.

Por i), ii) y iii), R es una relación de equivalencia, como se muestra en la Figura 4.

Figura 4

Dígrafo de la relación de equivalencia R



Nota. En el dígrafo se observa claramente que la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Elaboración propia.

Finalmente, por la Definición 2.2.4.1:

$$\text{Para cada } s, t \in S, sRt \Leftrightarrow f_a(s)Rf_a(t), \forall a \in I,$$

se verifica que R es una congruencia de máquinas en M , como sigue:

- i) Para $s_0, s_4 \in S, s_0Rs_4$, se cumple que $f_a(s_0)Rf_a(s_4)$ y $f_b(s_0)Rf_b(s_4)$
- ii) Para $s_1, s_5 \in S, s_1Rs_5$, se cumple que $f_a(s_1)Rf_a(s_5)$ y $f_b(s_1)Rf_b(s_5)$
- iii) Para $s_2, s_3 \in S, s_2Rs_3$, se cumple que $f_a(s_2)Rf_a(s_3)$ y $f_b(s_2)Rf_b(s_3)$

De los resultados anteriores, se afirma que R es una congruencia de máquinas.

Definición 2.2.4.2. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, s un estado de S , y R una congruencia de máquinas en M . Se llama conjunto cociente de S mediante la relación R , denotado por \bar{S} , al conjunto de todas las clases de estados de S . Es decir:

$$\bar{S} = S/R = \{ [s] \mid s \in S \}$$

(Kolman et al., 1997, p. 394)

Definición 2.2.4.3. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, $[s]$ una clase de estados de \bar{S} , f_a una función de transición de estados, con $a \in I$, y R una congruencia de máquinas en M . Se dice que \bar{f}_a es una función de transición de estados inducida por f_a y se define como:

$$\begin{aligned} \bar{f}_a: \bar{S} &\rightarrow \bar{S} \\ [s] &\mapsto \bar{f}_a([s]) = [f_a(s)], \forall a \in I \end{aligned}$$

Esta función está bien definida, puesto que, R es una congruencia de máquinas en M , es decir:

$$[s] = [t] \Rightarrow sRt \Rightarrow f_a(s)Rf_a(t) \Rightarrow [f_a(s)] = [f_a(t)].$$

Asimismo, se define el conjunto de funciones de transición de estados inducidas, como sigue:

$$\bar{\mathcal{F}} = \{ \bar{f}_a: \bar{S} \rightarrow \bar{S} \mid a \in I \}, \text{ donde } \bar{\mathcal{F}}([s], a) = \bar{f}_a([s])$$

(Kolman et al., 1997, p. 394)

Definición 2.2.4.4. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, s y s_0 estados de S , y R una congruencia de máquinas en M . Se llama clase del estado inicial s_0 , con respecto a R , al conjunto de todos los elementos relacionados con s_0 y se denota por $[s_0]$. Es decir:

$$[s_0] = \{ s \in S \mid sRs_0 \}$$

(Kolman et al., 1997, p. 396)

Definición 2.2.4.5. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, T conjunto de estados de aceptación de M , t un estado de T , y R una congruencia de máquinas en M . Se llama conjunto cociente de T mediante la relación R , denotado por \overline{T} , al conjunto de todas las clases de equivalencia de los estados de T . Es decir:

$$\overline{T} = T/R = \{ [t] \mid t \in T \}$$

(Kolman et al., 1997, p. 396)

Definición 2.2.4.6. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore y R una congruencia de máquinas en M . Se llama máquina de aceptación de Moore cociente a la quintupla $\overline{M} = M/R = (\overline{S}, I, \overline{\mathcal{F}}, [s_0], \overline{T})$, siendo:

$\overline{S} = S/R = \{ [s] \mid s \in S \}$, el conjunto cociente de clases de estados,

$I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, el conjunto de símbolos de entrada,

$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{f}_a: \overline{S} \rightarrow \overline{S} \mid a \in I\}$, el conjunto de funciones de transición de estados inducidas,

donde $\overline{\mathcal{F}}([s], a) = \overline{f}_a([s])$,

$[s_0]$, clase del estado inicial de M ,

$\overline{T} = T/R = \{ [t] \mid t \in T \}$, un conjunto de clases de estados de aceptación.

(Epp, 2012, p. 814)

Definición 2.2.4.7. Sea $\overline{M} = (\overline{S}, I, \overline{\mathcal{F}}, [s_0], \overline{T})$ una máquina de aceptación de Moore cociente, I^* un conjunto de cadenas sobre I , $w \in I^*$, $L \subset I^*$ un lenguaje sobre I , \overline{f}_w una función inducida por función de transición extendida f_w . Se llama lenguaje de \overline{M} , denotado por $L(\overline{M})$, al conjunto de todas las cadenas que, al ser utilizadas como entradas de la máquina, hacen que $[s_0]$ se mueva a una clase de estados de aceptación en \overline{T} ; es decir, cadenas que son aceptadas por \overline{M} . Esto es:

$$L(\overline{M}) = \{ w \in I^* \mid \overline{f}_w([s_0]) \in \overline{T} \}$$

CAPÍTULO III

OPTIMIZACIÓN DE MÁQUINAS DE ACEPTACIÓN DE MOORE

3.1 Relaciones de Compatibilidad de Estados

Definición 3.1.1. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, s, t estados de S , I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I , f_w una función de transición extendida, y T un conjunto de estados de aceptación de M . Se dice que s, t son compatibles, para toda cadena $w \in I^*$, si $f_w(s)$ y $f_w(t)$ ambos son estados de aceptación de T o ambos no son estados de aceptación de T . Es decir:

$$s \text{ y } t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \Leftrightarrow \begin{cases} f_w(s), f_w(t) \in T \\ f_w(s), f_w(t) \notin T \end{cases}$$

Definición 3.1.2. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I , y S un conjunto de estados de M . Se define sobre S , una relación R en base a compatibilidad de estados, para cada $s, t \in S$, tal que $(s, t) \in R$, si s y t son compatibles, para toda cadena $w \in I^*$. Es decir:

$$\text{Para cada } s, t \in S, sRt \Leftrightarrow s \text{ y } t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^*$$

(Kolman et al., 1997, p. 413)

Teorema 3.1.1. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, S un conjunto de estados de M . Si R es una relación de compatibilidad de estados en S , se cumple que:

- i) R es una relación de equivalencia en S
- ii) R es una congruencia de máquinas en M

Demostración:

i) Para que R sea una relación de equivalencia en S , R debe ser reflexiva, simétrica y transitiva.

a) Sea $s \in S$, $w \in I^*$, y f_w función de transición extendida, se tiene que:

$$\begin{cases} f_w(s), f_w(s) \in T \\ f_w(s), f_w(s) \notin T \end{cases} \Rightarrow s, s \text{ son compatibles, } \forall w \in I^*$$

$$\Rightarrow s \text{ y } s \in S, sRs$$

$$\Rightarrow (s, s) \in R$$

$\therefore R$ es reflexiva

b) Sean $s, t \in S$, $w \in I^*$, f_w función de transición extendida, se tiene que:

$$(s, t) \in R \Rightarrow s \text{ y } t \in S, sRt$$

$$\Rightarrow s, t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_w(s), f_w(t) \in T \\ f_w(s), f_w(t) \notin T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_w(t), f_w(s) \in T \\ f_w(t), f_w(s) \notin T \end{cases}$$

$$\Rightarrow t, s \text{ son compatibles, } \forall w \in I^*$$

$$\Rightarrow t \text{ y } s \in S, tRs$$

$$\Rightarrow (t, s) \in R$$

$\therefore R$ es simétrica

c) Sean $s, t, u \in S$, $w \in I^*$, f_w función de transición extendida, se tiene que:

$$(s, t) \in R \Rightarrow s \text{ y } t \in S, sRt$$

$$\Rightarrow s, t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_w(s), f_w(t) \in T \\ f_w(s), f_w(t) \notin T \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned}
(t, u) \in R &\Rightarrow t \text{ y } u \in S, tRu \\
&\Rightarrow t, u \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_w(t), f_w(u) \in T \\ f_w(t), f_w(u) \notin T \end{cases}^0 \dots\dots\dots (2)
\end{aligned}$$

De (1) y (2), se tiene:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} f_w(s), f_w(u) \in T \\ f_w(s), f_w(u) \notin T \end{cases}^0 &\Rightarrow s, u \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \\
&\Rightarrow s \text{ y } u \in S, sRu \\
&\Rightarrow (s, u) \in R
\end{aligned}$$

$\therefore R$ es transitiva

Por a), b) y c), R es relación de equivalencia en S .

ii) Sean $s, t \in S$, $a \in I$, $w \text{ y } w' \in I^*$, con $w' = aw$, f_w y $f_{w'}$ funciones de transición extendidas, y $(s, t) \in R$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
s \text{ y } t \in S, sRt &\Rightarrow s, t \text{ son compatibles, } \forall w' \in I^* \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_{w'}(s), f_{w'}(t) \in T \\ f_{w'}(s), f_{w'}(t) \notin T \end{cases}^0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_{a \cdot w}(s), f_{a \cdot w}(t) \in T \\ f_{a \cdot w}(s), f_{a \cdot w}(t) \notin T \end{cases}^0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_w(f_a(s)), f_w(f_a(t)) \in T \\ f_w(f_a(s)), f_w(f_a(t)) \notin T \end{cases}^0 \\
&\Rightarrow f_a(s), f_a(t) \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \\
&\Rightarrow f_a(s) \text{ y } f_a(t) \in S, f_a(s)Rf_a(t), \forall a \in I
\end{aligned}$$

$\therefore R$ es una congruencia de máquinas en M

3.2 Equivalencia de Máquinas

Teorema 3.2.1. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, R una congruencia de máquinas en M , y $\overline{M} = (S/R, I, \overline{\mathcal{F}}, [s_0], T/R)$ una máquina de aceptación de Moore cociente de M . Si $L \subset I^*$ es un lenguaje sobre el alfabeto I , se cumple que:

$$L(M) = L(\overline{M})$$

Demostración:

Se tiene que probar por doble inclusión, como sigue:

- i) (\Rightarrow) Se debe demostrar que $L(M) \subset L(\overline{M})$. Suponiendo que $w \in I^*$ es una cadena aceptada por M . Entonces, por definición de lenguaje de M , se tiene que:

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Rightarrow f_w(s_0) \in T \\ &\Rightarrow [f_w(s_0)] \in \overline{T} \\ &\Rightarrow \overline{f_w}([s_0]) \in \overline{T} \\ &\Rightarrow w \in L(\overline{M}) \end{aligned}$$

$$\therefore L(M) \subset L(\overline{M})$$

- ii) (\Leftarrow) Se debe demostrar que $L(\overline{M}) \subset L(M)$. Suponiendo que $w \in I^*$ es una cadena aceptada por \overline{M} . Entonces, por definición de lenguaje de \overline{M} , se tiene que:

$$\begin{aligned} w \in L(\overline{M}) &\Rightarrow \overline{f_w}([s_0]) \in \overline{T} \\ &\Rightarrow [f_w(s_0)] \in \overline{T} \\ &\Rightarrow f_w(s_0) \in T \\ &\Rightarrow w \in L(M) \end{aligned}$$

$$\therefore L(\overline{M}) \subset L(M)$$

De i) y ii), por el axioma de extensión se cumple que $L(M) = L(\overline{M})$

Definición 3.2.1. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore y su correspondiente máquina cociente $\overline{M} = (\overline{S}, I, \overline{\mathcal{F}}, [s_0], \overline{T})$, y $L \subset I^*$ un lenguaje sobre el alfabeto I . Se dice que M es equivalente a \overline{M} , si el lenguaje de M es igual al lenguaje de \overline{M} .

Es decir:

$$M \equiv \overline{M} \Leftrightarrow L(M) = L(\overline{M})$$

3.3 Particiones Sucesivas

Definición 3.3.1. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, I^* el conjunto de todas las cadenas sobre el alfabeto I , R una congruencia de máquinas en M , y R_k aproximaciones sucesivas a R , con $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Se definen sobre S , las relaciones R_k en base a compatibilidad de estados, para cada $s, t \in S$, tal que $(s, t) \in R_k$, si s y t son compatibles, para toda cadena w de I^* , tal que la longitud de w es menor o igual a k . Es decir:

$$\text{Para cada } s, t \in S, sR_k t \Leftrightarrow s \text{ y } t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+$$

(Kolman et al., 1997, p. 414)

Teorema 3.3.1. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, R una congruencia de máquinas en M , y R_k, R_{k+1} aproximaciones sucesivas a R , con $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Si R_k y R_{k+1} son relaciones de compatibilidad de estados en S , se cumple que:

- i) $R_{k+1} \subseteq R_k, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$
- ii) Toda R_k es una relación de equivalencia
- iii) $R \subseteq R_k, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$

Demostración:

i) Sean $s, t \in S$, $w \in I^*$, y $(s, t) \in R_{k+1}$, con $k \in \mathbb{Z}_0^+$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 (s, t) \in R_{k+1} &\Rightarrow s \text{ y } t \in S, sR_{k+1}t \\
 &\Rightarrow s, t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k + 1, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
 &\Rightarrow s, t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
 &\Rightarrow s \text{ y } t \in S, sR_k t \\
 &\Rightarrow (s, t) \in R_k
 \end{aligned}$$

$$\therefore R_{k+1} \subseteq R_k, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$$

ii) Para que R_k sea una relación de equivalencia en S , debe cumplir con las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

a) Sea $s \in S$, $w \in I^*$, y f_w función de transición extendida, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} f_w(s), f_w(s) \in T \\ f_w(s), f_w(s) \notin T^o \end{cases} &\Rightarrow s, s \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
 &\Rightarrow s \text{ y } s \in S, sR_k s \\
 &\Rightarrow (s, s) \in R_k
 \end{aligned}$$

$\therefore R_k$ es reflexiva.

b) Sea $s, t \in S$, $w \in I^*$, f_w función de transición extendida, y $(s, t) \in R_k$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 s \text{ y } t \in S, sR_k t &\Rightarrow s, t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
 &\Rightarrow \begin{cases} f_w(s), f_w(t) \in T \\ f_w(s), f_w(t) \notin T^o \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} f_w(t), f_w(s) \in T \\ f_w(t), f_w(s) \notin T^o \end{cases} \\
 &\Rightarrow t, s \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t y s \in S, tR_K s$$

$$\Rightarrow (t, s) \in R_K$$

$\therefore R_K$ es simétrica.

c) Sean $s, t, u \in S, w \in I^*$, f_w función de transición extendida, y $(s, t), (t, u) \in R_K$, se tiene que:

$$s y t \in S, sR_K t \Rightarrow s, t \text{ son compatibles}, \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_w(s), f_w(t) \in T \\ f_w(s), f_w(t) \notin T \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$t y u \in S, tR_K u \Rightarrow t, u \text{ son compatibles}, \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_w(t), f_w(u) \in T \\ f_w(t), f_w(u) \notin T \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

De (1) y (2), se tiene:

$$\begin{cases} f_w(s), f_w(u) \in T \\ f_w(s), f_w(u) \notin T \end{cases} \Rightarrow s, u \text{ son compatibles}, \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\Rightarrow s y u \in S, sR_K u$$

$$\Rightarrow (s, u) \in R_K$$

$\therefore R_K$ es transitiva.

Por a), b) y c), R_K es relación de equivalencia

iii) Sean $s, t \in S, w \in I^*$, f_w función de transición extendida y $(s, t) \in R_K$, tal que:

$$s y t \in S, sR t \Rightarrow s, t \text{ son compatibles}, \forall w \in I^*$$

$$\Rightarrow s, t \text{ son compatibles}, \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$$\Rightarrow s y t \in S, sR_K t$$

$$\Rightarrow (s, t) \in R_K$$

$$\therefore R \subseteq R_k, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Teorema 3.3.2. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, s, t estados de S , T^c complemento de T , f_a una función de transición de estados, a un símbolo de I , R una congruencia de máquinas en M , y R_k y R_{k+1} aproximaciones sucesivas de R , con $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Si R_k y R_{k+1} son relaciones de compatibilidad de estados en S , se cumple que:

$$i) \quad S/R_0 = \{T, T^c\}, T^c = S - T$$

$$ii) \quad sR_{k+1}t, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+ \Leftrightarrow \begin{cases} sR_k t \\ f_a(s)R_k f_a(t), \forall a \in I \end{cases}$$

Demostración:

i) Sea $w = \lambda$ una cadena vacía de I^* , con longitud cero. Por hipótesis, S/R_0 , entonces se cumple que:

$$s, t \in S, sR_0 t \Leftrightarrow s \text{ y } t \text{ son compatibles}, \forall w \in I^* \mid |w| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_w(s), f_w(t) \in T \\ f_w(s), f_w(t) \notin T \end{cases}^o$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_\lambda(s), f_\lambda(t) \in T \\ f_\lambda(s), f_\lambda(t) \notin T \end{cases}^o$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s, t \in T \\ s, t \notin T \end{cases}^o$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s, t \in T \\ s, t \in T^c \end{cases}^o$$

$$\therefore S/R_0 = \{T, T^c\}$$

ii) (\Rightarrow) La demostración de $sR_{k+1}t, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces $sR_k t$ ya está comprobado por el Teorema 3.3.1, parte i).

iii) Sean $s, t \in S$, $a \in I$, w y $w' \in I^*$, con $w' = aw$, f_w y $f_{w'}$ funciones de transición extendidas. Se quiere demostrar que $sR_{k+1}t, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces $f_a(s)R_k f_a(t)$.

Por hipótesis, $sR_{k+1}t, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces:

$$\begin{aligned}
s, t \in S, sR_{k+1}t &\Rightarrow s \text{ y } t \text{ son compatibles, } \forall w' \in I^* \mid |w'| \leq k+1, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_{w'}(s), f_{w'}(t) \in T \\ f_{w'}(s), f_{w'}(t) \notin T^0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_{a \cdot w}(s), f_{a \cdot w}(t) \in T \\ f_{a \cdot w}(s), f_{a \cdot w}(t) \notin T^0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_w(f_a(s)), f_w(f_a(t)) \in T \\ f_w(f_a(s)), f_w(f_a(t)) \notin T^0 \end{cases} \\
&\Rightarrow f_a(s), f_a(t) \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
&\Rightarrow f_a(s)R_k f_a(t), \forall a \in I
\end{aligned}$$

(\Leftarrow) Sean $s, t \in S$, $a \in I$, w y $w' \in I^*$, con $w' = aw$, f_w y $f_{w'}$ funciones de transición extendidas. Por hipótesis, $sR_k t$, $\forall k \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces:

$$\begin{aligned}
s, t \in S, sR_k t &\Rightarrow s \text{ y } t \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
&\Rightarrow s \text{ y } t \text{ son compatibles, } \forall w' \in I^* \mid |w'| \leq k+1, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
&\Rightarrow s, t \in S, sR_{k+1}t
\end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que:

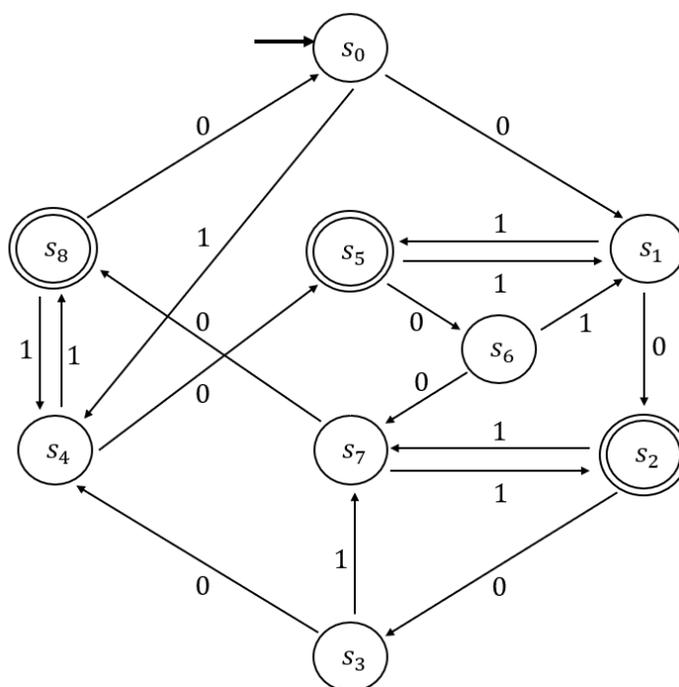
$$\begin{aligned}
f_a(s)R_k f_a(t), \forall a \in I &\Rightarrow f_a(s), f_a(t) \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq k, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_w(f_a(s)), f_w(f_a(t)) \in T \\ f_w(f_a(s)), f_w(f_a(t)) \notin T^0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_{a \cdot w}(s), f_{a \cdot w}(t) \in T \\ f_{a \cdot w}(s), f_{a \cdot w}(t) \notin T^0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} f_{w'}(s), f_{w'}(t) \in T \\ f_{w'}(s), f_{w'}(t) \notin T^0 \end{cases} \\
&\Rightarrow s \text{ y } t \text{ son compatibles, } \forall w' \in I^* \mid |w'| \leq k+1, k \in \mathbb{Z}_0^+ \\
&\Rightarrow s, t \in S, sR_{k+1}t, k \in \mathbb{Z}_0^+
\end{aligned}$$

$$\therefore sR_{k+1}t, \forall k \in \mathbb{Z}_0^+ \Leftrightarrow \begin{cases} sR_k t \\ f_a(s)R_k f_a(t), \forall a \in I \end{cases}$$

Con el fin de ilustrar los teoremas anteriores, se construye algunas relaciones de compatibilidad de estados R_k en S , para la máquina de aceptación de Moore $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$, $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$, $I = \{0,1\}$, $T = \{s_2, s_5, s_8\}$, cuyo dígrafo aparece en el siguiente gráfico:

Figura 5

Dígrafo de la máquina de aceptación de Moore M



Nota. En el dígrafo, s_0 es el estado inicial de la máquina M , s_2, s_5, s_8 son sus estados de aceptación, y 0,1 son los símbolos de entrada que transitan de estado en estado mediante las flechas dirigidas. Elaboración propia.

Para conseguir las aproximaciones sucesivas R_k de R , primero se obtiene la relación de equivalencia inicial R_0 . Por el Teorema 2.2.3. parte i), se tiene el conjunto cociente:

$$S/R_0 = \{T, T^c\} = \{ \{s_2, s_5, s_8\}, \{s_0, s_1, s_3, s_4, s_6, s_7\} \},$$

con el cual R_0 es una relación de compatibilidad de estados para toda cadena $w = \lambda \in I^*$, tal que $|w| = 0$. De este modo, se obtiene la relación de equivalencia asociada a la partición $P_0 = S/R_0$:

$$R_0 = \{\{s_2, s_2\}, \{s_5, s_5\}, \{s_8, s_8\}, \{s_0, s_0\}, \{s_1, s_1\}, \{s_3, s_3\}, \{s_4, s_4\}, \{s_6, s_6\}, \{s_7, s_7\}, \{s_2, s_5\}, \{s_2, s_8\}, \\ \{s_5, s_2\}, \{s_5, s_8\}, \{s_8, s_2\}, \{s_8, s_5\}, \{s_0, s_1\}, \{s_0, s_3\}, \{s_0, s_4\}, \{s_0, s_6\}, \{s_0, s_7\}, \{s_1, s_0\}, \{s_1, s_3\}, \\ \{s_1, s_4\}, \{s_1, s_6\}, \{s_1, s_7\}, \{s_4, s_0\}, \{s_4, s_1\}, \{s_4, s_3\}, \{s_4, s_6\}, \{s_4, s_7\}, \{s_6, s_0\}, \{s_6, s_1\}, \{s_6, s_3\}, \\ \{s_6, s_0\}, \{s_6, s_1\}, \{s_6, s_3\}, \{s_6, s_4\}, \{s_6, s_7\}, \{s_6, s_4\}, \{s_7, s_0\}, \{s_7, s_1\}, \{s_7, s_3\}, \{s_7, s_4\}, \{s_7, s_6\}\}$$

Para obtener la relación de equivalencia R_1 , por el Teorema 3.3.2, parte ii), se parte de los elementos de R_0 y se analiza si R_1 es una relación de compatibilidad de estados en S , para toda cadena $w \in I^*$ tal que $w = \lambda, 0, 1$, es decir, aquellas cuya longitud $|w| \leq 1$, como sigue:

$$\text{i) } s_2, s_5 \in T, s_2 R_0 s_5 \Rightarrow \begin{cases} f_0(s_2), f_0(s_5) \notin T \\ f_1(s_2), f_1(s_5) \notin T \end{cases} \text{ y}$$

$$\Rightarrow s_2, s_5 \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq 1$$

$$\Rightarrow s_2 R_1 s_5$$

$$\text{ii) } s_2, s_8 \in T, s_2 R_0 s_8 \Rightarrow \begin{cases} f_0(s_2), f_0(s_8) \notin T \\ f_1(s_2), f_1(s_8) \notin T \end{cases} \text{ y}$$

$$\Rightarrow s_2, s_8 \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq 1$$

$$\Rightarrow s_2 R_1 s_8$$

$$\text{iii) } s_5, s_8 \in T, s_5 R_0 s_8 \Rightarrow \begin{cases} f_0(s_5), f_0(s_8) \notin T \\ f_1(s_5), f_1(s_8) \notin T \end{cases} \text{ y}$$

$$\Rightarrow s_5, s_8 \text{ son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq 1$$

$$\Rightarrow s_5 R_1 s_8$$

$$\text{iv) } s_0, s_1 \in T^c, s_0 R_0 s_1 \Rightarrow f_0(s_0) \notin T, f_0(s_1) \in T$$

$$\Rightarrow s_0, s_1 \text{ no son compatibles, } \forall w \in I^* \mid |w| \leq 1$$

$$\Rightarrow (s_0, s_1) \notin R_1$$

- v) $s_0, s_3 \in T^c, s_0 R_0 s_3 \Rightarrow \begin{cases} f_0(s_0), f_0(s_3) \notin T \\ f_1(s_0), f_1(s_3) \notin T \end{cases} y$
 $\Rightarrow s_0, s_3$ son compatibles, $\forall w \in I^* \mid |w| \leq 1$
 $\Rightarrow s_0 R_1 s_3$
- vi) $s_1, s_3 \in T^c, s_1 R_0 s_3 \Rightarrow f_0(s_1) \in T, f_0(s_3) \notin T$
 $\Rightarrow s_1, s_3$ no son compatibles, $\forall w \in I^* \mid |w| \leq 1$
 $\Rightarrow (s_1, s_3) \notin R_1$
- vii) $s_1, s_4 \in T^c, s_1 R_0 s_4 \Rightarrow \begin{cases} f_0(s_1), f_0(s_4) \in T \\ f_1(s_1), f_1(s_4) \in T \end{cases} y$
 $\Rightarrow s_1, s_4$ son compatibles, $\forall w \in I^* \mid |w| \leq 1$
 $\Rightarrow s_1 R_1 s_4$

A partir de todos los pares pertenecientes a R_0 , que permitieron que R_1 sea una relación de compatibilidad de estados en S , se obtiene el conjunto cociente de S mediante la relación R_1 :

$$S/R_1 = \{ \{s_2, s_5, s_8\}, \{s_0, s_3, s_6\}, \{s_1, s_4, s_7\} \},$$

y la relación de equivalencia asociada a la partición $P_1 = S/R_1$:

$$R_1 = \{ \{s_2, s_2\}, \{s_5, s_5\}, \{s_8, s_8\}, \{s_0, s_0\}, \{s_3, s_3\}, \{s_6, s_6\}, \{s_1, s_1\}, \{s_4, s_4\}, \{s_7, s_7\}, \{s_2, s_5\}, \{s_2, s_8\}, \\ \{s_5, s_2\}, \{s_5, s_8\}, \{s_8, s_2\}, \{s_8, s_5\}, \{s_0, s_3\}, \{s_0, s_6\}, \{s_3, s_0\}, \{s_3, s_6\}, \{s_6, s_0\}, \{s_6, s_3\}, \{s_1, s_4\}, \\ \{s_1, s_7\}, \{s_4, s_1\}, \{s_4, s_7\}, \{s_7, s_1\}, \{s_7, s_4\} \}$$

De manera análoga, se procede para R_2 con $w = \lambda, 0,1,00,01,10,11$ cadenas de I^* , tal que $|w| \leq 2$; para R_3 con $w = \lambda, 0,1,00,01,10,11,000,001,010,100,011,101,110,111$ cadenas de I^* , tal que $|w| \leq 3$; y así sucesivamente, incrementando el valor de k para construir R_k , donde cada relación mantiene la compatibilidad de estados en S respecto a todas las cadenas de longitud menor o igual que k .

Analizando cada uno de los elementos de las relaciones de equivalencia R_k , se concluye que estas se encuentran relacionadas de la siguiente manera:

$$R_k \subseteq \dots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0,$$

cumpléndose así lo establecido en el Teorema 3.3.1, partes i) y ii).

Este proceso recursivo podría realizarse indefinidamente y conseguir varias máquinas cocientes con cada una de estas relaciones de equivalencia. Sin embargo, lo que se quiere es obtener la partición adecuada para la construir la máquina cociente más óptima y gracias al Teorema que se muestra a continuación, se obtiene un último paso que indica cuándo detenerse.

Teorema 3.3.3. Sea $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$ una máquina de aceptación de Moore, R una congruencia de máquinas en M , y R_k y R_{k+1} relaciones de compatibilidad de estados en S . Si R_k es igual R_{k+1} , para algún $k \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces R_k es igual a R . Es decir:

$$R_k = R_{k+1}, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_0^+ \implies R_k = R$$

Demostración:

Por hipótesis $R_k = R_{k+1}$, para algún $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Sea R_{k+2} una relación de compatibilidad de estados en S , por el Teorema 3.3.2, parte ii), se tiene que:

$$s, t \in S, sR_{k+2}t \iff f_a(s), f_a(t) \in S, f_a(s)R_{k+1}f_a(t), \forall a \in I$$

$$\iff s, t \in S, sR_{k+1}t$$

$$\iff s, t \in S, sR_k t, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Luego:

$$R_{k+2} = R_{k+1} = R_k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Por inducción, se tiene que:

$$R_k = R_n, \forall n \geq k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Por los resultados anteriores y el Teorema 3.3.1, parte i), se cumple:

$$R_{k+1} = R_k \subseteq \dots \subseteq R_2 \subseteq R_1 \subseteq R_0$$

Con los que, se puede afirmar:

$$R = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n \implies \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n = R_k$$

$$\therefore R = R_k$$

3.4 Algoritmo de Optimización

De la definición de lenguaje de una máquina de aceptación de Moore y los Teoremas anteriores, se obtiene el siguiente algoritmo de optimización:

1. Eliminar los estados no accesibles desde s_0 .
2. Eliminar los estados desde los cuales no se llega a un estado de aceptación.
3. Comenzar con la partición inicial $P_0 = S/R_0 = \{T, T^c\}$.
4. Obtener la partición $P_k = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots, \mathcal{A}_n\}$. $k \in \mathbb{Z}_0^+$ para evaluar cada una de las clases de equivalencia \mathcal{A}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, para luego separarlas en partes tales que dos elementos s, t de \mathcal{A}_i estén en la misma parte si todas las entradas $a \in I^*$ llevan a los estados s y $t \in S$ en el mismo subconjunto \mathcal{A}_j , $j = 1, 2, \dots, m$.
5. Definir una nueva partición P_{k+1} de S , al considerar todas las clases de equivalencia de P_k .
6. Construir particiones sucesivas P_1, P_2, \dots correspondientes a las relaciones de equivalencia R_1, R_2, \dots repitiendo los pasos 4 y 5.
7. Si para algún $k \in \mathbb{Z}_0^+$ se cumple que $P_k = P_{k+1}$, entonces el algoritmo culmina. La partición resultante $P_k = P$ corresponde a la relación $R_k = R$.
8. La máquina de aceptación de Moore cociente resultante es equivalente a la máquina de aceptación de Moore dada.

A partir de este algoritmo de optimización, se construirá una máquina de aceptación de Moore cociente para la máquina de aceptación de Moore $M = (S, I, \mathcal{F}, s_0, T)$, $I = \{1, 0\}$, $T = \{s_2, s_5, s_8\}$, $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$, cuya tabla de transiciones aparece en la Tabla 3.

Tabla 3

Tabla de transiciones de la máquina de aceptación de Moore M

	0	1
s_0	s_1	s_4
s_1	s_2	s_5
s_2	s_3	s_7
s_3	s_4	s_7
s_4	s_5	s_8
s_5	s_6	s_1
s_6	s_7	s_1
s_7	s_8	s_2
s_8	s_0	s_4

Para construir una máquina de aceptación de Moore cociente \bar{M} , se sigue el algoritmo de optimización:

En este caso no se elimina ningún estado, puesto que desde el estado s_0 se puede llegar a cualquier estado de S y, además, todos los estados conducen a algún estado de aceptación.

Se comienza con la partición inicial:

$$P_0 = S/R_0 = \{T, T^c\} = \{\{s_2, s_5, s_8\}, \{s_0, s_1, s_3, s_4, s_6, s_7\}\}.$$

Luego, para conseguir la partición $P_1 = S/R_1$, se construye la Tabla 4 a partir de la partición P_0 , como se detalla a continuación:

Tabla 4

Tabla de transiciones de la máquina de aceptación de Moore \mathbf{M} con la partición \mathbf{P}_0 por bloques

	0	1
s_2	T^c	T^c
s_5	T^c	T^c
s_8	T^c	T^c
s_0	T^c	T^c
s_1	T	T
s_3	T^c	T^c
s_4	T	T
s_6	T^c	T^c
s_7	T	T

Así, $P_1 = S/R_1 = \{ \{s_2, s_5, s_8\}, \{s_0, s_3, s_6\}, \{s_1, s_4, s_7\} \}$,

donde, $\mathcal{A}_1 = \{s_2, s_5, s_8\}$, $\mathcal{A}_2 = \{s_0, s_3, s_6\}$, $\mathcal{A}_3 = \{s_1, s_4, s_7\}$.

Ahora, para hallar la partición $P_2 = S/R_2$, se construye la Tabla 5, a partir de la partición P_1 :

Tabla 5

Tabla de transiciones de la máquina de aceptación de Moore \mathbf{M} con la partición \mathbf{P}_1 por bloques

	0	1
s_2	\mathcal{A}_2	\mathcal{A}_3
s_5	\mathcal{A}_2	\mathcal{A}_3
s_8	\mathcal{A}_2	\mathcal{A}_3
s_0	\mathcal{A}_3	\mathcal{A}_3
s_3	\mathcal{A}_3	\mathcal{A}_3
s_6	\mathcal{A}_3	\mathcal{A}_3
s_1	\mathcal{A}_1	\mathcal{A}_1
s_4	\mathcal{A}_1	\mathcal{A}_1
s_7	\mathcal{A}_1	\mathcal{A}_1

Así, $P_2 = S/R_2 = \{ \{s_2, s_5, s_8\}, \{s_0, s_3, s_6\}, \{s_1, s_4, s_7\} \}$ y la relación de equivalencia R_2 es:

$$R_2 = \{ \{s_2, s_2\}, \{s_5, s_5\}, \{s_8, s_8\}, \{s_0, s_0\}, \{s_1, s_1\}, \{s_3, s_3\}, \{s_4, s_4\}, \{s_6, s_6\}, \{s_7, s_7\}, \{s_2, s_5\}, \{s_2, s_8\}, \\ \{s_5, s_2\}, \{s_5, s_8\}, \{s_8, s_2\}, \{s_8, s_5\}, \{s_0, s_3\}, \{s_0, s_6\}, \{s_3, s_0\}, \{s_3, s_6\}, \{s_6, s_0\}, \{s_6, s_3\}, \{s_1, s_4\}, \\ \{s_1, s_7\}, \{s_4, s_1\}, \{s_4, s_7\}, \{s_7, s_1\}, \{s_7, s_4\} \}$$

Como $P_2 = P_1$ y $R_2 = R_1$ entonces $R_2 = R$.

Seguidamente, se obtiene la máquina de aceptación de Moore cociente $\overline{M} = (\overline{S}, I, \overline{\mathcal{F}}, [s_0], \overline{T})$, cuyas representaciones se presentan en Tabla 6 y Figura 6, siendo:

$$\overline{S} = S/R = \{[s_0], [s_2], [s_1]\}, \text{ donde,}$$

$$[s_0] = \{s_0, s_3, s_6\} = [s_3] = [s_6],$$

$$[s_1] = \{s_1, s_4, s_7\} = [s_4] = [s_7] \text{ y}$$

$$[s_2] = \{s_2, s_5, s_8\} = [s_5] = [s_8].$$

$$I = \{0,1\},$$

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{F}}([s_i], 0) = \overline{f_0}([s_i]) = [f_0(s_i)] \\ \overline{\mathcal{F}}([s_i], 1) = \overline{f_1}([s_i]) = [f_1(s_i)] \end{cases} \quad i = 0,1,2.$$

$$\overline{T} = T/R = \{[s_2]\}.$$

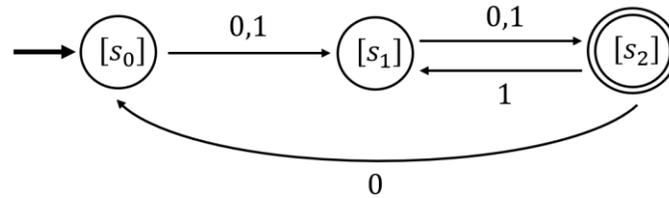
Tabla 6

Tabla de transiciones de la máquina de aceptación de Moore cociente \overline{M}

	0	1
$[s_0]$	$[s_1]$	$[s_1]$
$[s_1]$	$[s_2]$	$[s_2]$
$[s_2]$	$[s_0]$	$[s_1]$

Figura 6

Dígrafo de la máquina de aceptación de Moore cociente \overline{M}



Nota. $[s_0]$ es el estado inicial de la máquina cociente \overline{M} , $[s_2]$ es su estado de aceptación, y 0,1 son los símbolos de entrada que transitan de estado en estado mediante las flechas dirigidas. Elaboración propia.

Finalmente, como la máquina de aceptación de Moore M de la Figura 5 y la máquina de aceptación de Moore cociente \overline{M} de la Figura 6 aceptan el mismo lenguaje, entonces por el Teorema 3.2.1 y la Definición 3.2.1, estas máquinas son equivalentes. De esta manera se obtuvo la máquina más óptima para M .

CONCLUSIONES

Al culminar el presente trabajo de investigación, se ha obtenido las siguientes conclusiones:

- 1) Se desarrolló la teoría de relaciones de equivalencia.
- 2) Es posible analizar la teoría de máquinas de aceptación de Moore y de congruencia de máquinas.
- 3) Es factible obtener máquinas de aceptación de Moore cociente a partir de relaciones de compatibilidad de estados.
- 4) Se logró optimizar las máquinas de aceptación de Moore mediante teoremas que establecen la equivalencia entre la máquina de aceptación de Moore y su máquina cociente, garantizando que la máquina resultante mantenga la misma funcionalidad que la inicial, pero con una estructura simplificada.

RECOMENDACIONES

Para posteriores trabajos de investigación relacionados a máquinas de aceptación de Moore, se sugiere:

- 1) Realizar un análisis más amplio sobre optimización de máquinas de Moore con entradas y salidas, considerando los resultados obtenidos en el presente trabajo.
- 2) Aplicar las teorías desarrolladas a lenguajes formales, para así ampliar los conocimientos sobre estructuras de matemáticas discretas.
- 3) Explorar si es posible la aplicación de vecindades de Moore en máquinas de Moore, como vecindades extendidas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Avedillo, M. (1992). *Tesis: Una Aproximación al Diseño Óptimo de Máquinas de Estados Finitos*. Universidad de Sevilla.
- Brookshear, J. (1993). *Teoría de la Computación, Lenguajes Formales, Autómatas y de Complejidad*. México: Addison Wesley Iberoamericana.
- Epp, S. (2012). *Matemáticas Discretas con Aplicaciones* (4° ed.). México: Cengage Learning.
- Espinoza, R. (2017). *Matemáticas Discretas* (2° ed.). México: Alfaomega.
- García, P., P. T., Ruiz, J., Segarra, E., Sempere, J. y Vázquez de Parga, M. (2001). *Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales*. Ciudad Federal, México: Alfaomega.
- Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas Discreta y Combinatoria* (3° ed.). Madrid, España: Addison Wesley Iberoamericana.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6° ed.). México: McGraw-Hill.
- Herrera, V. (2017). *Tesis: Minimización de Autómatas Finitos*. Universidad San Antonio Abad del Cusco.
- Hopcroft, J., Motwani, R. y Ullman, J. (2007). *Teoría de Autómatas, Lenguajes y Computación* (3° ed.). Madrid, España: Addison Wesley.
- Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas* (6° ed.). México: Prentice Hall.
- Kolman, B., Busby, R. y Ross, S. (1997). *Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación* (3° ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Liu, C. (1995). *Elementos de Matemáticas Discreta* (2° ed.). México: McGraw-Hill.

Rodríguez, G. (2023). *Tesis: Desarrollo de Técnicas de Optimización de Máquinas de Estados Finitos para su Implementación Basada en un FPGA*. Universidad de Chile.

Rosen, K. (2004). *Matemáticas Discretas y sus Aplicaciones* (5° ed.). Madrid, España: McGraw-Hill Iberoamericana.

ANEXOS

ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA

TÍTULO: "OPTIMIZACIÓN DE MÁQUINAS DE ACEPTACIÓN DE MOORE"

Tabla 7

PROBLEMAS	OBJETIVOS	METODOLOGÍA
<p>PROBLEMA GENERAL: ¿Será posible optimizar una máquina de aceptación de Moore?</p> <p>PROBLEMAS ESPECÍFICOS:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) ¿Se podrá desarrollar la teoría de relaciones de equivalencia? 2) ¿Será posible analizar la teoría de máquinas de aceptación de Moore y de congruencia de máquinas? 3) ¿Será factible obtener máquinas de aceptación de Moore cociente mediante relaciones de compatibilidad de estados? 	<p>OBJETIVO GENERAL: Optimizar una máquina de aceptación de Moore.</p> <p>OBJETIVOS ESPECÍFICOS:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Desarrollar la teoría de relaciones de equivalencia. 2) Analizar la teoría de máquinas de aceptación de Moore y de congruencia de máquinas. 3) Obtener máquinas de aceptación de Moore cociente mediante relaciones de compatibilidad de estados. 	<p>TIPO DE INVESTIGACIÓN: Pura o Básica</p> <p>NIVEL DE INVESTIGACIÓN: Exploratorio descriptivo</p> <p>DISEÑO METODOLÓGICO: No experimental</p> <p>TÉCNICAS: Revisión bibliográfica</p>