

**UNIVERSIDAD NACIONAL SAN ANTONIO
ABAD DEL CUSCO**

**FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS,
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

CARRERA PROFESIONAL DE FÍSICA



**MECÁNICA ESTADÍSTICA Y
TERMODINÁMICA DE UN SISTEMA
ECONÓMICO**

TESIS PRESENTADO POR LOS:

Br. Verónica Loaiza Tacuri.

Br. Fredi Quispe Huaynasi.

**PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL
DE FÍSICO.**

ASESOR: Ph.D. Pastor Raúl Chura Serran

CUSCO – PERÚ

2012

TESIS AUSPICIADA POR EL CONSEJO DE INVESTIGACIÓN UNSAAC

Dedicatorias

Esta tesis está dedicada a:

*Mi madre Basilia Magdalena Tacuri Huarcaya
por todo su esfuerzo, apoyo y por la confianza
que depositó en mí a lo largo del camino
emprendido en mi vida profesional.*

*Mi padre Wilber Loaiza Espinoza por el
esfuerzo y apoyo que me dió al inculcarme
desde niña que todo lo que uno empieza tiene
que terminar.*

*Mis hermanos Frank, Frishiam, Wilber y Lenin
por el apoyo que siempre me brindaron al
recordarme que la meta que uno se traza se logra
por medio del esfuerzo y perseverancia.*

*Una persona especial con la que compartí
no sólo las aulas universitarias sino también
un sentimiento para tí Fredi.*

Agradecimientos

- En primer lugar quiero dar gracias a Dios por permitirme lograr ser profesional y ser una mejor persona.
- Agradezco la paciencia, la dedicación y el tiempo brindado por mi asesor de tesis Ph.D. Pastor Raúl Chura Serrano, quien con esmero siempre nos alentó en cada momento y nunca escatimo su tiempo para despejar nuestras dudas.
- Agradezco el esfuerzo de mis padres por lograr que sus hijos sean profesionales, porque Yo se todo lo que tuvieron que sacrificar para lograr esa meta.
- Agradezco a todas las personas que en algún momento me dieron apoyo, ánimo y compañía en las diferentes etapas de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos. Sin importar en dónde estén o si alguna vez llegan a leer estas palabras quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado.

Dedicatorias

Esta tesis está dedicada a:

Mi madre Florentina Huaynasi Turpo por todo su esfuerzo, apoyo, paciencia y por la confianza que depositó en mí a lo largo del camino emprendido en mi vida profesional.

Mi padre Leocadio Quispe por el esfuerzo, motivación, paciencia y apoyo que me dió a lo largo de la vida y el camino emprendido en mi vida profesional.

Mis hermanos Yovana y Tony y a mi sobrino Jefferson por la paciencia y apoyo que siempre me brindaron en el desarrollo de mi tesis.

Una persona especial que me dió apoyo y sobre todo me tuvo paciencia a lo largo del desarrollo de la tesis, ¡gracias Verónica!

Agradecimientos

- En primer lugar quiero dar gracias a Dios por la vida.
- Agradezco la paciencia, la dedicación y el tiempo brindado por mi asesor de tesis Ph.D. Pastor Raúl Chura Serrano, quien con esmero siempre nos alentó en cada momento y nunca escatimo su tiempo para despejar nuestras dudas.
- Agradezco el esfuerzo de mis padres por toda la ayuda brindada y lograr que Yo sea profesional.
- Agradezco a todas las personas que en algún momento me dieron apoyo, ánimo y compañía en las diferentes etapas de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos. Sin importar en dónde estén o si alguna vez llegan a leer estas palabras quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado.

Índice general

Dedicatorias	I
Agradecimientos	II
Resumen	1
I Generalidades	2
II Marco Teórico	7
1. Resumen de Termodinámica y Mecánica Estadística	8
1.1. Conceptos básicos y definiciones de Termodinámica	8
1.1.1. Leyes de la Termodinámica.	9
1.1.2. Variables termodinámicas.	12
1.1.3. Potenciales termodinámicos.	13
1.1.4. Determinación de las variables termodinámicas mediante los potenciales termodinámicos.	15
1.2. Conceptos básicos de Mecánica Estadística: Teoría de Colectividades	17
1.3. Macroestados y Microestados	18
1.4. Postulados de la Mecánica Estadística	18
1.5. Teoría de las Colectividades	19
1.5.1. Colectividad Microcanónica	19
1.5.2. Colectividad Canónica	22
2. Teoría de la Información de Shannon	31
2.1. Introducción.	31
2.2. Orígenes de la teoría de la información.	32
2.2.1. Aportes de Nyquist.	32
2.2.2. Estudios de Hartley.	33

2.2.3.	Teoría Matemática de las Comunicaciones de Claude E. Shannon (1948).	34
2.2.4.	Cibernética de Norbert Wiener (1948)	35
2.3.	Conceptos básicos de la teoría de la información.	35
2.3.1.	Información:	36
2.3.2.	Elementos de la información	36
2.3.3.	Entropía:	37
2.3.4.	Incertidumbre:	38
2.3.5.	Capacidad del canal de información:	38
2.3.6.	La teoría de la información:	38
2.4.	Teoría matemática de la comunicación	38
2.4.1.	La información y sus fuentes en sistemas discretos sin ruido.	39
2.4.2.	Fuentes de información sin memoria.	39
2.4.3.	Fuentes de información con memoria.	44
2.4.4.	Fuentes de información ergódicas y mixtas.	45
2.5.	Elección, incertidumbre y entropía	47
2.5.1.	Entropía de una fuente de información.	51
2.5.2.	Entropía de algunos sistemas.	53
2.5.3.	Entropía de sistemas equiprobables.	54
2.5.4.	Unidades de medida de la información.	55
2.6.	Teoría de la información y su relación con otros campos.	56
2.6.1.	Aplicación de la teoría de información a la Arqueología	56
3.	Entropía Generalizada-Principio de Máxima Entropía	62
3.1.	Principio de Máxima entropía	63
3.2.	Aplicación a la Mecánica Estadística	65
3.3.	Aplicación a la Estadística Matemática	67
3.3.1.	Distribuciones de probabilidad	68
3.3.2.	Distribuciones de probabilidad continuas y el principio de máxima entropía	70
III	Problema de Investigación	73
4.	Mecánica estadística y termodinámica de un sistema económico simple	74
4.1.	Entropía en un sistema económico	75
4.2.	Sistema económico de tipo 1.	75

4.3. Gas ideal y sistema económico de tipo 1.	76
4.3.1. Parámetros termodinámicos del gas ideal sin considerar el espectro energético de sus partículas constituyentes	81
4.3.2. Determinación de los parámetros “termodinámicos” económicos análogos al gas ideal.	83
4.3.3. Analogías entre el gas ideal y el sistema económico de tipo 1	84
4.3.4. Significado de los parámetros termodinámicos en economía	85
4.4. Sistema de Osciladores Armónicos de Planck y el sistema económico de tipo 1.	86
4.4.1. Osciladores Armónicos Clásicos	87
4.4.2. Determinación de los parámetros termodinámicos del sistema de osciladores clásicos	87
4.4.3. Sistema de osciladores de Planck	89
4.4.4. Parámetros termodinámicos para el sistema de N osciladores de Planck	89
4.4.5. Analogías entre el sistema de osciladores de Planck y el sistema económico de tipo 1.	92
4.4.6. Interpretación de los parámetros termodinámicos en Economía.	93
4.4.7. Relación Energía - Temperatura para los Osciladores de Planck y su aplicación e interpretación al caso del sistema económico de tipo 1.	94
Conclusiones	98
A. Potenciales termodinámicos.	101
B. Glosario económico.	105
Bibliografía	110

Índice de figuras

1.1. Diagrama de la distribución de los potenciales termodinámicos para la obtención de las variables termodinámicas asociadas a estos.	16
1.2. Equilibrio térmico entre el reservorio A' y el sistema A	23
2.1. Claude Elwood Shannon.	35
2.2. Sistema de comunicación con los elementos de la información.	37
2.3. Esquema de una fuente que emite mensajes o en general símbolos.	39
2.4. Representación gráfica del caso 3 b, en el que las probabilidades de aparición de las letras en cuestión no son las mismas así como se muestran en la figura..	45
2.5. Representación gráfica del caso 3 c, pero las probabilidades aquí ya no son como en el caso B sino que las probabilidades depende de la letra precedente es decir estructuras de digram.	45
2.6. Representación gráfica del caso 3 d, en este caso ya no son simples letras sino son palabras y estas con sus respectivas probabilidades de ocurrencia.	46
2.7. Entropía de un sistema con dos posibilidades.	49
2.8. Esquema de como crece la entropía de sistemas equiprobables cuando n se hace cada vez más grande.	55
2.9. Esquema de la relación que existe entre la teoría de la información y diversos campos.	57
2.10. símbolos pictos	58

2.11. Gráfica de la entropía uni-gram F_1 versus $\log_2 N_u$ (número de diferentes uni-gram). El gráfico muestra el 99.9% de línea de confianza para la predicción de datos aleatorios. Esta figura pone a prueba si las piedras corresponden a un tamaño de muestras similar de un alfabeto finito de igual frecuencia relativa de ocurrencia de uni-gram. Es extremadamente poco probable que los valores observados para las piedras pictas ocurran por casualidad. Los cuadrados en blanco son datos aleatorios, los triángulos sombreados son símbolos pictos en piedra, la línea punteada superior representa 99.9% de confianza para la predicción, la línea sólida inferior el 99.9% de confianza para la predicción.	60
4.1. Intercambio de dinero entre dos agentes	76
4.2. Niveles energéticos. Muestran las poblaciones de las partículas que tienen cierta energía	77
4.3. Niveles de dinero. En analogía a los niveles energéticos, muestran la población de agentes económicos que tienen una cierta cantidad de dinero.	78

Índice de cuadros

4.1. Analogías por simple inspección entre los sistemas económicos y los SFE. . .	74
4.2. Analogías preliminares entre el gas ideal y el sistema económico de primer tipo.	77
4.3. Resumen de las analogías existentes entre el gas ideal y el sistema económico de tipo 1.	85
4.4. Analogías entre el sistema de osciladores armónicos de Planck y el sistema económico de tipo 1.	93

Resumen

La investigación tuvo por objetivo aplicar el concepto de entropía generalizada y métodos de la Mecánica Estadística a un sistema económico ideal análogo a sistemas físicos ideales, con la finalidad de obtener una “Termodinámica” de dicho sistema económico, para ello fué preciso definir el sistema económico que fué motivo de estudio.

Una vez definido el sistema económico sólo con redistribución de dinero al que por brevedad llamamos sistema económico de tipo 1; se define la entropía de este sistema con el fin de determinar la “termodinamica económica” de dicho sistema. Para ello se hizo el análisis de dos sistemas físicos (gas ideal y sistema de osciladores de Planck) análogos a este sistema económico con el fin de establecer correspondencias entre las variables o parámetros físicos con las respectivas variables o parámetros económicos y así transferir los resultados obtenidos en los sistemas físicos a el sistema económico de tipo 1. Se observó que el sistema físico que ofrece una analogía más completa con el sistema económico de tipo 1 es el sistema de osciladores de Planck, ya que las relaciones que se obtuvieron en estos dos sistemas muestran una correspondencia natural como se muestra en detalle en la tabla 4.4.

Finalmente del análisis se pudo concluir que el sistema físico que guarda una analogía completa con el sistema económico de tipo 1, es el sistema de osciladores armónicos de Planck (a diferencia de la constante de Boltzmann). Establecer la correspondencia entre estos dos sistemas nos permitió obtener una “Termodinámica económica” de nuestro sistema económico.

Parte I

Generalidades

Presentación, formulación y justificación del problema.

I. Motivación.

El presente trabajo de tesis está basado en el concepto de entropía, el cual apareció dentro del contexto de la Física en la década de 1850 con Rudolf Clausius y posteriormente en los años 1890-1900 con Ludwig Boltzmann. Este concepto permite describir completamente la termodinámica de un sistema físico; sin embargo, en la actualidad la aplicación de este concepto se ha extendido, gracias al trabajo de Claude E. Shannon [1] con el cual la entropía se hace aplicable a muchos campos tales como la Arqueología [21], Biología [18], Matemática [19], Medicina [20], etc. La aplicabilidad de la entropía a otros campos, nos motiva a estudiar su extensión y las importantes implicancias de esa extensión hacia el campo de la Economía; pues, tanto la Física como la Economía estudian sistemas con un gran número de componentes y en los que la impredecibilidad es una característica común.

II. Antecedentes.

Debido a que la Economía es la ciencia que estudia la forma en la que los individuos y la sociedad efectúan elecciones y decisiones para que los recursos disponibles, que son siempre escasos, puedan contribuir de la mejor manera a satisfacer las necesidades individuales y colectivas de la sociedad [40], se formularon modelos económicos empíricos que pretendían explicar estos comportamientos [5]. Como podemos observar, debido a la gran cantidad de variables con las que trabaja la Economía y debido al gran número de agentes involucrados, el comportamiento de estos sistemas económicos es muy complejo y por tanto impredecibles [7],[6] y en consecuencia también los modelos matemáticos introducidos para describirlos. Con la finalidad de tener modelos matemáticos de sistemas económicos, muchos físicos vienen intentando aplicar conceptos de la Física Estadística a estos sistemas en interacción, pues, en ambos casos los sistemas considerados (el económico y el físico) tienen un gran

número de componentes. Es así como surge el área de la Econofísica ¹ que describe fenómenos en desarrollo y dinámicas de sistemas económicos usando métodos de la Física Estadística. Uno de los pioneros en aplicar conceptos de Física a la Economía y a las Ciencias Sociales fue E. Majorana [3] (1942), luego en 1963 B. Mandelbrot [4] propone aplicar métodos de la Mecánica Estadística y teoría de fractales con la finalidad de obtener la ley de distribución potencial o ley de Pareto ². Posteriormente, utilizando procesos estocásticos multiplicativos S. Ispolatov y P. L. Krapivsky, concluyen que para intercambios aleatorios multiplicativos, ocurre una situación estable; mientras que para intercambios aleatorios ambiciosos, se debe desarrollar una ley potencial para la distribución de la riqueza [36], etc.

Dado que es posible aplicar conceptos de Física a la Economía como se mencionó anteriormente, en el presente trabajo veremos cómo la Mecánica Estadística estándar y el concepto de entropía generalizada propuesta por Shannon [1] nos permiten aplicar estos conceptos no sólo a sistemas físicos, sino también a sistemas económicos concretos.

III. Formulación del problema.

Ya que los sistemas que estudia la Física Estadística tienen muchos aspectos en común con los sistemas económicos, debido a que ambos estudian una gran cantidad de partículas y agentes interactuantes, respectivamente, surge la pregunta:

¿Es posible encontrar analogías concretas entre sistemas físicos y sistemas económicos concretos?

Si es así:

¿Qué representan esas analogías en cada campo?

¿Existe algún sistema económico que pueda considerarse completamente análogo a algún sistema físico estándar tratable según los métodos de la Mecánica Estadística?

¿Pueden “transferirse” los resultados para el sistema físico al sistema económico análogo?

¿Cómo se interpretan los resultados transferidos?

Estas son las interrogantes que pretendemos responder en el presente trabajo de investigación.

¹El término Econofísica fue introducido por H. E. Stanley (1992)[2]

²Según V. Pareto, la distribución de riqueza en una sociedad estable posee una forma potencial $y \sim x^{-\nu}$, donde y es el número de personas que tienen un ingreso x ó mayor que x y ν es un exponente característico cuyo valor estimado por Pareto es 1.5 [5].

IV. Objetivos de la investigación.

4.1. Objetivo General.

Aplicar el concepto de entropía generalizada y métodos de la Mecánica Estadística a sistemas económicos ideales análogos a sistemas físicos ideales, con la finalidad de obtener una “ Termodinámica” de dichos sistemas económicos.

4.2. Objetivos Específicos.

- Buscar sistemas físicos análogos a sistemas económicos.
- Definir la entropía en los sistemas económicos concretos.
- Establecer las correspondencias pertinentes entre las variables o parámetros físicos con las variables o parámetros económicos.
- Interpretar los resultados que se obtienen al encontrar la analogía entre sistemas físicos y sistemas económicos.

V. Hipótesis de la investigación.

Es posible aplicar el concepto de entropía generalizada y por tanto encontrar analogías entre sistemas físicos y económicos.

VI. Justificación del problema.

Debido a que la Economía es una ciencia que usualmente es clasificada como una manifestación de sistemas sociales complejos [8], se la dividió en dos ramas muy importantes: La Macroeconomía y la Microeconomía. La macroeconomía es la parte de la Economía encargada del *estudio global* de la economía en términos del *monto total* de bienes y servicios producidos, el total de los ingresos, el nivel de empleo, recursos productivos, y el comportamiento general de los precios; mientras que la microeconomía estudia el comportamiento económico de *agentes individuales*, como son los consumidores, las empresas, los trabajadores e inversores; así como de los mercados; considera las decisiones que toma cada uno para cumplir ciertos objetivos propios. Los elementos básicos en los que se centra el análisis microeconómico son los bienes, los precios, los mercados y los agentes económicos [39].

Debido a la complejidad en la que se enmarcan los sistemas económicos, encontrar sistemas físicos análogos a sistemas económicos nos permitirá obtener modelos matemáticos que describan a dichos sistemas. Además, el aplicar el concepto de entropía generalizada y los métodos de la Mecánica Estadística a sistemas económicos, nos permitiría encontrar no sólo la distribución de probabilidad de dinero en un sistema económico como se puede apreciar en el trabajo de V. Yakovenko [37] sino que también la “Termodinámica” de dicho sistema y así poder interpretar los resultados que son obtenidos primeramente en términos físicos y que luego son transferidos a los sistemas económicos análogos y finalmente observar la relevancia que pueden tener estos resultados en la Economía.

VIII. Tipo de Investigación.

El presente trabajo de tesis se enmarca dentro de los proyectos de investigación de naturaleza teórica aplicada, buscando mostrar la analogía que manifiestan los sistemas físicos con los sistemas económicos.

Parte II

Marco Teórico

Capítulo 1

Resumen de Termodinámica y Mecánica Estadística

En este capítulo haremos un resumen de los conceptos y definiciones más relevantes de Termodinámica y Mecánica Estadística, que serán útiles en la aplicación y comprensión de los resultados que se obtendrán en el presente trabajo de investigación. En primer lugar se hará mención a las leyes de la Termodinámica y la definición de conceptos como: Variables termodinámicas, potenciales termodinámicos y las relaciones que existen entre éstas. En segundo lugar haremos mención de conceptos relacionados a la Mecánica Estadística, sus postulados y haremos un desarrollo de las colectividades microcanónica y canónica que son de interés en el trabajo.

1.1. Conceptos básicos y definiciones de Termodinámica

La Termodinámica es la investigación fenomenológica de las propiedades de los cuerpos materiales que se caracterizan por los parámetros macroscópicos, basándose en leyes generales, denominadas principios de la Termodinámica, sin considerar los mecanismos microscópicos de los fenómenos en cuestión. La Termodinámica se fundamenta en tres principios: El primero es la aplicación del principio de conservación de la energía a los fenómenos que se estudian en la termodinámica. El segundo caracteriza la dirección del desarrollo de los procesos que se examinan en la termodinámica; y el tercero impone restricciones sobre los procesos, estableciendo la imposibilidad de procesos que conducen a la obtención del cero absoluto de temperatura.

1.1.1. Leyes de la Termodinámica.

Ley cero de la Termodinámica

La Ley Cero de la termodinámica, también conocida con el nombre de la Ley del Equilibrio Térmico, fue enunciada en un principio por Maxwell y llevada a ley por Fowler. Esta ley afirma que si dos cuerpos denominados A y B con diferentes temperaturas son puestos en contacto, en un tiempo determinado t alcanzarán la misma temperatura. Si luego un tercer cuerpo, que denominamos C se pone en contacto con A y B, también alcanzará la misma temperatura.

Primera ley de la Termodinámica:

La Termodinámica considera el primer principio como postulado ya que éste no puede ser deducido o demostrado empleando procedimientos lógicos. El contenido del primer principio de la termodinámica emana de la generalización de muchos años de experiencia acumulada por la humanidad como resultado de la actividad práctica.

Este principio afirma que *“no es posible obtener trabajo sin gastar en esto la cantidad correspondiente de energía. En otras palabras el motor perpetuo de primera especie ¹ es imposible”*.

Este principio matemáticamente puede expresarse en la forma:

$$\delta Q = dU + \delta W \quad (1.1)$$

donde δQ es el calor que se añade al sistema, dU es el incremento de energía interna del sistema y δW es el trabajo realizado por el sistema.

Segunda ley de la Termodinámica:

Tal como se vió en la sección anterior, el primer principio de la termodinámica no describe por completo los procesos termodinámicos; permite encontrar exactamente el equilibrio energético de estos procesos termodinámicos; pero no dá ninguna indicación con respecto a la posibilidad de que se realice un proceso u otro. Sin embargo, no todos los procesos pueden efectuarse en la realidad. La ley general que permite establecer la posibilidad o imposibilidad de estos procesos termodinámicos, es el segundo principio de la termodinámica.

El segundo principio de la termodinámica lo mismo que el primero, es resultado de la generalización de muchos años de experiencia y, por consiguiente, se apoya en un enorme material experimental.

¹Es decir, no es posible construir un motor de funcionamiento periódico que produzca en cada ciclo una cantidad de trabajo mayor que la cantidad de energía que percibe del exterior.

En su forma más general el segundo principio de la Termodinámica puede enunciarse del modo siguiente: Todo proceso espontáneo real es irreversible. En el transcurso del tiempo el segundo principio de la termodinámica fue recibiendo cada vez nuevas interpretaciones y sucesivas formulaciones fueron viniendo continuamente hasta hacerse más estrictas.

La primera formulación matemática de las condiciones de la transformación del calor en trabajo mecánico útil fue hecha por Sady Carnot (1824). En los trabajos del físico alemán Clausius (1850) y del físico inglés Thomson (Lord Kelvin) (1854) fueron desarrolladas las ideas, que sobrepasaron los límites propuestos originariamente del problema termotécnico ². Posteriormente Maxwell, Boltzmann y Gibbs establecieron la relación del segundo principio con la dinámica molecular. Esto condujo a la interpretación estadística del segundo principio de la termodinámica.

Según Clausius: “ El calor nunca pasa del cuerpo más frío al más caliente, mientras que el paso inverso transcurre espontáneamente”.

El segundo principio, en la forma dada en los trabajos posteriores de Clausius, incluye la función de estado denominada por él, entropía ³. Este principio afirma que, *“mientras la energía interna de un sistema aislado se conserve invariable, su entropía aumenta durante todos los procesos espontáneos”*. Este principio se formula también como *“la imposibilidad de la creación del motor perpetuo de segunda especie que es una máquina tal, que adopta el calor de un depósito de cierta temperatura y lo transforma en trabajo, enfriando este depósito y no produciendo ninguna otra variación más en los cuerpos circundantes”*.

La naturaleza de la variación de la cantidad denominada entropía, condujo a la división de los procesos en dos clases. A la primera clase pertenecen los así denominados procesos irreversibles en los cuales la entropía aumenta. A la segunda clase pertenecen los procesos reversibles en los cuales la entropía permanece invariable.

Matemáticamente este principio viene expresado como,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \geq 0 \quad (1.2)$$

donde el signo de la igualdad se refiere a los procesos reversibles (ideales) y el signo de la desigualdad, a los procesos irreversibles (espontáneos). Esta expresión fué propuesta por Clausius.

²Los problemas termotécnicos se refieren a problemas cuyo planteamiento se ha debido al desarrollo de la técnica moderna (como por ejemplo, los diversos procedimientos de transformación directa del calor en energía eléctrica, el análisis de la eficiencia del funcionamiento de las máquinas térmicas)

³La palabra entropía procede del griego (*εντροπια*) que significa evolución o transformación [33].

Tercera ley de la Termodinámica:

Esta ley esta relacionada fundamentalmente con el cálculo de valores absolutos de la entropía; según se puede observar de la sección anterior, el concepto de entropía presentado a través de la relación (1.2), nos permite únicamente determinar variaciones de la entropía. Al integrar (1.2) y considerando que $\delta Q = C_x dT$ tenemos que

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{C_x}{T} dT \quad (1.3)$$

donde x puede ser la presión o volumen. De esta última relación se ve que para determinar los valores absolutos de la entropía se debe conocer por lo menos el valor de uno de ellos correspondiente a una temperatura cualquiera medida desde 0°K ; digamos,

$$S_A = \int_0^A \frac{C_x}{T} dT - S_0 \quad (1.4)$$

donde S_0 se refiere a la entropía a la temperatura de 0°K . Para calcular el valor de la entropía haciendo uso de la ecuación (1.4), se debe conocer el caracter de la dependencia del calor específico con respecto a la temperatura cuando $T \rightarrow 0$. Esto se debe a que si $T=0^\circ\text{K}$, y si la capacidad calorífica siguiera siendo una magnitud finita la integral se hará infinitamente grande. Además, se debe conocer el valor S_0 de la ecuación (1.4).

El mérito a la solución de estos inconvenientes es al químico alemán W. Nernst quien hizo una suposición, después confirmada por la práctica que vino a llamarse principio de Nernst, que permite medir los valores absolutos de la entropía de las sustancias medidas desde 0°K . Nernst llegó a la conclusión de que, *cerca del cero absoluto de temperatura, las entropías de todas las sustancias que se hallan en estado de equilibrio se hacen invariables e iguales entre sí* [28].

Más tarde Planck demostró que los valores S_0 , no sólo son iguales entre sí, sino también iguales a cero.

El principio de Nernst, como se vió, da la posibilidad de calcular los valores absolutos de la entropía; en esto reside su gran importancia práctica.

Pero la importancia del principio de Nernst rebasa los límites de los intereses de cálculo. De la hipótesis acerca de que la entropía de una sustancia, a temperatura próxima al cero absoluto, en cualquier proceso, no puede sufrir variación; se deduce que las sustancias son incapaces de intercambiar calor en esta región. Esto permitió a Nernst enunciar su principio como sigue: *Es imposible enfriar una sustancia hasta la temperatura del cero absoluto extrayéndole calor; por lo tanto, el cero absoluto es inalcanzable.*

1.1.2. Variables termodinámicas.

Las variables termodinámicas se clasifican en tres grupos. El primer grupo al que pertenecen las magnitudes extensivas (aditivas) son la energía, el volumen y el número de partículas. El segundo grupo al que pertenecen las magnitudes intensivas son la temperatura, la presión y el potencial químico; finalmente se encuentran en un tercer grupo las llamadas funciones de respuesta en la que se encuentran por ejemplo la capacidad calorífica a volumen y a presión constante, susceptibilidad magnética, compresibilidad isotérmica.

Energía interna (U)

Esta variable termodinámica está considerada dentro de los potenciales termodinámicos que será mencionada en la siguiente sección.

Volumen (V)

Variable termodinámica que está asociada con los límites del sistema bajo estudio; dicho de otro modo es el espacio tridimensional que ocupa un cuerpo o una sustancia.

Número de partículas (N)

Variable termodinámica que identifica la cantidad de partículas que se encuentran presentes en el sistema bajo estudio.

Temperatura (T)

La temperatura es la medida del equilibrio termodinámico de un sistema. En termodinámica se considera a la temperatura como una medida macroscópica de la actividad interna de las moléculas de un cuerpo; por lo tanto, a mayor temperatura, mayor actividad interna presentan las moléculas. En otras palabras, la temperatura mide el grado de agitación molecular de un cuerpo.

Presión (P)

La presión es una variable que surge como consecuencia de los choques que ejercen las partículas contra las paredes del recipiente. Cada partícula le transmite a la pared un impulso en el que varía el impulso de la misma molécula a causa de la colisión con la pared. Por lo tanto, la presión estadísticamente es la medida del número promedio de colisiones que realizan las partículas sobre las paredes [29].

Esta variable termodinámica está asociada al volumen ya que son variables conjugadas.

Potencial químico (μ)

El potencial químico es la medida de la variación del potencial termodinámico, siendo constantes los parámetros correspondientes y las masas de todas las sustancias, a excepción de la masa de aquel componente, cuya cantidad se cambia en el sistema. El potencial químico desde el punto de vista matemático son derivadas parciales de los potenciales termodinámicos respecto al número de componentes dado del sistema con valores constantes de los parámetros independientes y con las cantidades constantes de todos los componentes restantes. [32].

Capacidad calorífica (C)

Una importante cantidad en termodinámica es la capacidad calorífica ya sea a presión o a volumen constante. Estas vienen a ser funciones de respuesta, debido a que representan la respuesta energética del sistema al calentamiento.

La capacidad calorífica a volumen constante C_V mide el cambio de la energía con respecto a la temperatura a volumen constante; mientras que, la capacidad calorífica a presión constante C_P mide el cambio de la energía respecto a la temperatura pero a presión constante.

Las variables termodinámicas intensivas son obtenidas a partir de los potenciales termodinámicos.

1.1.3. Potenciales termodinámicos.

Los potenciales termodinámicos son funciones de energía obtenidas a partir de transformaciones de Legendre de la energía interna y considerando las diferentes variables termodinámicas (T, P, V, S, μ, N). También podemos decir que un potencial termodinámico es aquella función a partir de la cual podemos determinar la termodinámica de un sistema; es decir, encontrar todos los parámetros o variables termodinámicas del sistema. Los potenciales termodinámicos son:

Energía interna (U)

La energía interna es la energía que tienen las partículas del sistema considerado para moverse ya sea vibrando, rotando o desplazándose. Se denomina energía interna del sistema a la suma de las energías de todas sus partículas. Por ejemplo en un gas ideal las moléculas se considera que solamente tienen energía cinética, los choques entre las moléculas se suponen

perfectamente elásticos, la energía interna solamente depende de la temperatura. Como vimos, este concepto está asociado a la primera ley de la termodinámica.

En termodinámica la energía interna se expresa por una relación funcional del siguiente tipo

$$U = U(N, V, S) \quad (1.5)$$

conocida como ecuación fundamental en representación energética [30]. Esta magnitud termodinámica es extensiva.

Entropía (S)

Esta variable termodinámica mide el grado de aleatoriedad (probabilístico) de un sistema, es considerada como un potencial termodinámico. La entropía es una magnitud extensiva del sistema, y viene expresada por:

$$S = S(E, N, V) \quad (1.6)$$

Frecuentemente el concepto de entropía se emplea como medida de la degradación de la energía, esto se ve matemáticamente mediante la expresión propuesta por R. Clausius,

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

donde δQ viene a ser el calor no transformado en trabajo; dS es la diferencia de la entropías con temperaturas diferentes.

Esta expresión nos dice que cuanto más grande es dS , mayor parte de calor se dispersa en el espacio circundante, sin transformarse en trabajo útil [32].

Energía libre de Helmholtz (A)

También denominada función de Helmholtz, es una magnitud extensiva del sistema, función de estado y potencial termodinámico, y que por tanto, no depende del proceso sufrido, sino del estado final e inicial del sistema. La energía libre de Helmholtz es aquella parte de la energía interna del sistema que puede ser transformada en trabajo útil cuando la temperatura y el volumen se mantienen constantes. Este potencial termodinámico es definido mediante la siguiente transformación de Legendre

$$A(N, V, T) = U(N, V, S) - TS \quad (1.7)$$

Entalpía (\mathbb{H})

Es una función de estado que expresa el calor liberado o absorbido durante un proceso, a presión constante, y está definida por:

$$\mathbb{H}(N, P, S) = U(N, V, S) + PV \quad (1.8)$$

Energía libre de Gibbs (G)

Este potencial termodinámico, es llamado también entalpía libre. La energía libre de Gibbs es una parte de la energía interna que puede ser transformado en trabajo útil cuando la presión y la temperatura son constantes, por esta razón se le conoce también con el nombre de potencial isóbaro-isotérmico [32] y viene definida por:

$$G(N, P, T) = \mathbb{H}(N, P, S) - TS \quad (1.9)$$

1.1.4. Determinación de las variables termodinámicas mediante los potenciales termodinámicos.

Como ya mencionamos anteriormente a partir de los potenciales termodinámicos y sus derivadas podemos encontrar las variables o parámetros termodinámicos que definen a un sistema. Sin embargo, el empleo de uno u otro potencial depende de las condiciones que determinan la elección de las variables termodinámicas y éstas a su vez determinan la elección de los potenciales que se emplea. Las expresiones matemáticas más simples para las diferentes propiedades del sistema se obtienen al examinar:

U como función de N , V y S , es decir, $U = U(N, V, S)$

S como función de N , V y E , es decir, $S = S(N, V, E)$

\mathbb{H} como función de N , P y S , es decir, $\mathbb{H} = \mathbb{H}(N, P, S)$

F como función de N , V y T , es decir, $F = F(N, V, T)$

G como función de N , P y T , es decir, $G = G(N, P, T)$

En la práctica se puede hacer uso del siguiente diagrama, para construir las principales relaciones termodinámicas asociadas a cada potencial.

La distribución de los potenciales termodinámicos (U , F , G , \mathbb{H}) y las variables termodinámicas (S , T , P , V) debe ser como se muestra en el diagrama. Cada potencial termodinámico es flanqueado con las respectivas variables termodinámicas asociadas a estos, por ejemplo, $U = U(S, V)$; las variables termodinámicas tienen sus correspondientes variables conjugadas, tal es el caso de S cuya variable conjugada es T y la variable conjugada de V es P . El diferencial de un potencial está determinado por los diferenciales de las variables termodinámicas que se les asocia, las cuales están multiplicadas por las variables

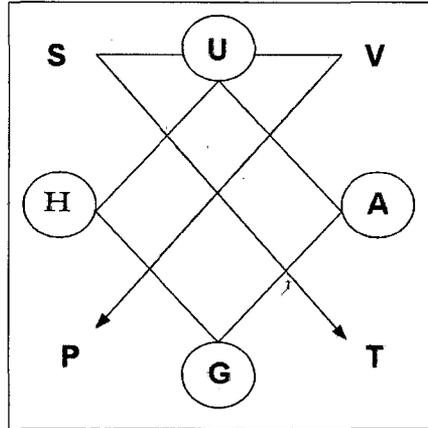


Figura 1.1: Diagrama de la distribución de los potenciales termodinámicos para la obtención de las variables termodinámicas asociadas a estos.

conjugadas que se encuentran en el otro extremo de la diagonal (flecha roja). Si en este camino la flecha de conexión va de derecha a izquierda se coloca un signo negativo y si va de izquierda a derecha un signo positivo [31]. Este diagrama es utilizado cuando los potenciales termodinámicos dependen de dos variables termodinámicas; la variable faltante es el número de partículas (N) y su correspondiente variable conjugada es el potencial químico (μ).

A continuación mostraremos como un ejemplo, la construcción para el potencial U (energía interna) utilizando esta regla práctica.

Las variables termodinámicas asociadas a la energía interna (U) son la entropía (S) y el volumen (V), pero las variables conjugadas a estas dos son la temperatura (T) y la presión respectivamente, por lo tanto, como

$$U = U(V, S)$$

siguiendo el procedimiento mencionado antes,

$$dU = TdS - PdV \tag{1.10}$$

por otro lado se tiene

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV \tag{1.11}$$

comparando las ecuaciones (1.10) y (1.11) obtenemos las siguientes expresiones

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \tag{1.12}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P \tag{1.13}$$

Para determinar las funciones de respuesta mediante este potencial, usamos las siguientes definiciones:

$$C_V \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} \quad (1.14)$$

$$C_P \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,P} \quad (1.15)$$

La determinación de las variables termodinámicas asociadas a los potenciales termodinámicos incluyendo la dependencia del número de partículas N , son mostradas en el apéndice A.

1.2. Conceptos básicos de Mecánica Estadística: Teoría de Colectividades

El propósito de la Mecánica Estadística es determinar las propiedades termodinámicas de los sistemas macroscópicos termodinámico a partir de sus propiedades microscópicas.

La Mecánica Estadística se divide en:

- La Mecánica Estadística del equilibrio.
- La Mecánica Estadística del no equilibrio.

Otra clasificación se refiere a si la formulación tiene en cuenta la Mecánica Cuántica (Mecánica Estadística Cuántica) o no (Mecánica Estadística Clásica).

Existen dos maneras de sustentar teóricamente la Mecánica Estadística:

- La teoría Ergódica, según la cual el sistema físico explora todos sus estados microscópicos posibles, como consecuencia de lo cual el estado macroscópico viene descrito mediante promedios temporales.
- La teoría de las colectividades de Gibbs, según la cual se considera una colección de copias idénticas del sistema, cada una en un estado microscópico diferente. En este caso el estado macroscópico viene dado a través de promedios sobre toda la colectividad.

Ambas formulaciones son equivalentes; pero para los propósitos del presente trabajo sólo desarrollaremos la teoría de colectividades.

1.3. Macroestados y Microestados

A continuación haremos una breve definición de microestado y macroestado, para lo cual consideremos un sistema físico formado por un número de constituyentes suficientemente grande.

- Un *microestado* es un estado del sistema en el que todas las variables microscópicas de interés están especificadas. Sin embargo, Dado el elevadísimo número de éstas, en general un microestado no es accesible experimentalmente.
- Un *macroestado* es el estado del sistema que es definido por una especificación completa de las constricciones externas aplicadas al sistema; es decir, el sistema tiene una cierta cantidad de energía E , número de partículas N y volumen V . EL macroestado es el estado del sistema que observamos experimentalmente y se define por un número pequeño de variables macroscópicas.

El siguiente ejemplo ilustra de mejor manera el concepto de microestado y macroestado.

Gas de Partículas

Consideremos un mol de gas, formado por $N \simeq 6 * 10^{23}$ partículas puntuales.

Un *microestado* del gas en el instante t quedaría especificado si se conociera las $6N$ variables que corresponde a la posición y velocidad de cada una de las partículas, el cual experimentalmente es imposible e irrelevante. Por el contrario, un *macroestado* del gas puede ser especificado por las variables E, V, N (energía, volumen y número de partículas), o por las variables p, V, T (presión, volumen y temperatura), dependiendo de las condiciones en que se encuentre el sistema.

1.4. Postulados de la Mecánica Estadística

Postulado 1 (de Equiprobabilidad a priori). Todos los microestados compatibles con un estado macroscópico de equilibrio de un sistema aislado, son igualmente probables.

Postulado 2 (sobre Ω en equilibrio). Si dos sistemas están en equilibrio termodinámico entre si pero aislados del resto del universo, el número de microestados del sistema compuesto $\Omega(N1, V1, E1; N2, V2, E2)$ es máximo respecto de todas sus variables.

Postulado 3 (de compatibilidad con la termodinámica). Todas las conclusiones y predicciones de la física estadística han de ser compatibles con la termodinámica.

1.5. Teoría de las Colectividades

En la teoría de colectividades se trabaja sobre un gran número de copias del sistema, cada una de ellas en cualquiera de los microestados posibles y compatibles con el estado macroscópico dado del sistema. El conjunto de copias forma la colectividad asociada al sistema. Las propiedades macroscópicas de equilibrio se obtienen como promedios sobre todos los posibles estados microscópicos representados en la colectividad.

Para poder calcular estos promedios, la cuestión básica es determinar en que proporción está representado cada microestado en la colectividad. Es decir, determinar la probabilidad de cada microestado en la colectividad. La respuesta resulta depender de las condiciones que definen al estado de equilibrio del sistema y ello lleva a definir las siguientes colectividades: Microcanónica, Canónica y Gran Canónica.

1.5.1. Colectividad Microcanónica

En esta colectividad el macroestado de un sistema es definido por el número de partículas N , el volumen V y la energía E fijos; es decir, se considera un sistema aislado⁴. Sin embargo, en la realidad no es posible medir la energía con precisión, además cuando se describen sistemas en el que los estados microscópicos accesibles al sistema son discretos (por ejemplo la discretización de los niveles de energía asociados a los estados cuánticos), esto hace que el número de configuraciones sea una función discontinua de E . Para evitar estas dificultades, en lugar de asignar una energía fija E a este sistema, asumiremos que su energía varía entre $E - \frac{\Delta}{2}$ y $E + \frac{\Delta}{2}$ con $\Delta \ll E$.

Según la teoría de las colectividades, para un macroestado especificado, aún existe la posibilidad de que los sistemas de la colectividad puedan ser encontrados en un gran número de posibles microestados. Cada posible microestado en un cierto instante de tiempo es representado por un punto en el espacio de fases, los puntos representativos de la colectividad en este espacio se encontrarán dentro de un hipercasquete definido por la condición

$$E - \frac{\Delta}{2} \leq H(q, p) \leq E + \frac{\Delta}{2} \quad (1.16)$$

El volumen del espacio de fase encerrado dentro de este hipercasquete está dado por

$$\omega = \int' d\omega \equiv \int' d^{3N}q d^{3N}p \quad (1.17)$$

⁴Un sistema es aislado cuando no existen flujos de energía y partículas hacia dentro y fuera del sistema.

donde la integración primada está referida a la parte del espacio de fase compatible con la condición (1.16).

De acuerdo al postulado de equiprobabilidad, para un sistema aislado, cada uno de los microestados son igualmente probables dentro del hipercasquete.

La justificación de este postulado es doble:

- i) En ausencia de información adicional, no existe ninguna razón evidente que ciertas regiones del espacio de fase debieran tener preferencia con respecto a las demás.
- ii) Este postulado concuerda con un resultado básico de la teoría cinética de los gases conocido como el teorema de Liouville, que afirma que la trayectoria de fase debe estar a lo largo de superficies de densidad de puntos constante.

Por lo tanto, la colectividad microcanónica es una colección de sistemas para el cual la función de densidad ρ es en todo momento dado por,

$$\rho(q, p) = \begin{cases} \text{constante} & \text{si } E - \frac{\Delta}{2} \leq H(q, p) \leq E + \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (1.18)$$

Ahora con el fin de establecer una conexión entre la colectividad microcanónica y la termodinámica, observemos que existe una correspondencia directa entre los microestados del sistema y las ubicaciones en el espacio de fase. El volumen ω (región permitida del espacio de fase) es por lo tanto, una medida de la multiplicidad Γ de los microestados accesibles al sistema.

Para establecer una correspondencia numérica entre ω y Γ , se divide el espacio de fase en pequeños elementos de volumen ($\Delta p \Delta q$) de tal forma que cada uno de estos elementos esté en correspondencia con un microestado. Una vez realizado esto, podemos decir que el número de microestados en la región relevante será

$$\Gamma = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (1.19)$$

donde $\omega_0 = h^{3N}$

Luego, la termodinámica sobre los miembros de la colectividad microcanónica será obtenida a través de la relación,

$$S = k_B \ln \Gamma \quad (1.20)$$

conocida como la entropía de Boltzmann.

De lo expuesto podemos afirmar que el problema, de determinar el número de microestados se reduce al cálculo de ω_0 en el espacio de fase.

Entropía Estadística en la Colectividad Microcanónica

En esta subsección mostraremos como la entropía en un sistema aislado puede ser expresada estadísticamente.

Con el fin de lograr dicho objetivo, supongamos que nuestro sistema físico consiste de átomos o moléculas, cada uno de los cuales puede existir en cualquier estado de un conjunto de posibles estados. La formula general para el número de configuraciones (Ω) sobre este sistema estará dada por

$$\Omega = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_M!} \quad (1.21)$$

donde n_1, n_2, \dots, n_M denota el número de partículas (átomos o moléculas) en los estados 1, 2, ..., M respectivamente, y N es el número total de partículas.

Así tenemos que:

$$N = \sum_{i=1}^M n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_M \quad (1.22)$$

y la energía total del sistema será

$$E = \sum_{i=1}^M n_i E_i \quad (1.23)$$

donde E_i es la energía del i-ésimo estado energético.

Para obtener la entropía en una forma estadística reemplacemos la formula general del número de configuraciones (1.21) en la entropía de Boltzmann,

$$S = k_B \ln \Omega = k_B \left(\ln(N!) - \sum_{i=1}^M \ln(n_i!) \right)$$

haciendo uso de la aproximación de Stirling, $\ln(N!) \approx N \ln N - N$ y $\ln(n_i!) \approx n_i \ln n_i - n_i$ la expresión anterior puede ser escrita como sigue

$$S = k_B \ln \Omega \approx k_B \left(N \ln N - \sum_{i=1}^M n_i \ln n_i \right) \quad (1.24)$$

Reemplazando (1.22) en esta última expresión obtenemos,

$$S \approx k_B \sum_{i=1}^M n_i \ln \frac{N}{n_i}$$

Luego la entropía por molécula o por átomo estará dado por

$$S' = -k_B \sum_{i=1}^M p_i \ln p_i \quad (1.25)$$

donde $p_i = \frac{N_i}{N}$ es la probabilidad de encontrar a la partícula en el i -ésimo estado.

De esta última expresión podemos ver que la dependencia es solamente probabilística, a excepción de la constante de Boltzmann que fué introducida con fines de dar dimensión a la entropía.

Es interesante observar que esta expresión que fué determinada usando métodos combinatorios para el cálculo del número de microestados, es también encontrada por Shannon independientemente de la formulación de la Mecánica Estadística [1] como se verá en el capítulo 3.

Cabe indicar que esta expresión que fué determinada siguiendo los métodos de la colectividad microcanónica, también será determinada siguiendo los métodos de la colectividad canónica como se verá en la siguiente sección.

1.5.2. Colectividad Canónica

En la sección anterior, se observó que la colectividad microcanónica, a pesar de su utilidad en la fundamentación de la Mecánica Estadística, presenta dos inconvenientes: El primero, se encuentra en la dificultad de mantener un sistema con energía fija, y el segundo, se debe al cálculo del número de configuraciones, que para la mayoría de sistemas físicos es muy complicado.

La colectividad canónica evita estos inconvenientes, considerando que el macroestado del sistema, se define a través de los parámetros N (número de partículas), V (volumen) y T (temperatura) fijos. La energía E , puede tomar en este caso cualquier valor en el intervalo $(0, \infty)$.

El problema principal en esta colectividad consiste en determinar la probabilidad P_r de que en un instante arbitrario t un sistema de la colectividad sea encontrado en uno de los estados caracterizados por el valor de la energía E_r . Esta probabilidad P_r puede ser determinada en dos formas:

- i) Considerar al sistema bajo estudio dentro de un reservorio en equilibrio térmico con el reservorio y estudiar la estadística del intercambio de energía entre ellos.
- ii) Considerar al sistema bajo estudio como un miembro de la colectividad canónica caracterizada por (N, V, T) en la que la energía total es compartida por todos los miembros de la colectividad, y estudiar la estadística de este proceso de compartimiento de la energía total.

Sin embargo, en el límite termodinámico, los resultados finales obtenidos mediante cualquiera de estas dos formas son equivalentes.

Hagamos uso de la primera forma.

Equilibrio entre un sistema y un reservorio térmico.

Consideremos el sistema A sumergido en un reservorio térmico muy grande A' como se puede apreciar en la figura 1.2.

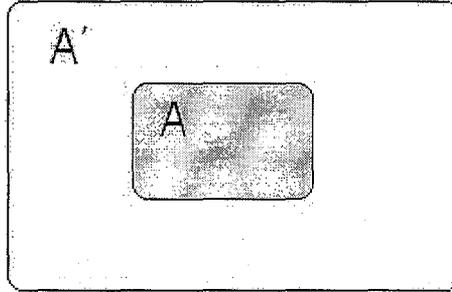


Figura 1.2: Equilibrio térmico entre el reservorio A' y el sistema A .

Una vez que A y A' alcanzan el equilibrio térmico, estos adquieren la misma temperatura T ; las energías de estas son variables en $(0, E^{(0)})$ en el proceso hacia el equilibrio, donde $E^{(0)}$ es la energía total del sistema compuesto $A^{(0)}$, donde

$$A^{(0)} \equiv A + A'$$

Si en un instante t , el sistema A está en uno de los estados caracterizado por la energía propia E_r , entonces el reservorio tendrá la energía E_r tal que:

$$E_r + E_r = E^{(0)} = \text{constante} \quad (1.26)$$

Como A' es considerado mucho más grande que A , entonces $\forall E_r : \frac{E_r}{E^{(0)}} \ll 1$

$$\frac{E_r}{E^{(0)}} = 1 - \frac{E_r}{E^{(0)}} \ll 1 \quad (1.27)$$

Suponiendo que A está en uno de los estados correspondientes a E_r , entonces, A' estará en uno de los posibles estados correspondientes a E_r .

Sea, $\Omega(E_r)$ el número de microestados de A' correspondientes a E_r .

Cuanto más grande sea el valor $\Omega(E_r)$, más grande será la probabilidad de que A' asuma el valor de E_r , y que por lo tanto A asuma el valor de E_r , en virtud de la ecuación (1.26)

Además, ya que los diferentes estados posibles correspondientes a E_r , son igualmente probables, se tiene que:

$$P_r \propto \Omega(E_r) \equiv \Omega(E^{(0)} - E_r) \quad (1.28)$$

donde P_r viene a ser la probabilidad de que en un instante arbitrario t el sistema A se encuentre en uno de los estados caracterizados por el valor de la energía E_r .

Teniendo en cuenta la ecuación (1.27), podemos expandir la ecuación (1.28) alrededor de $E_r = E^{(0)}$; es decir, alrededor de $E_r = 0$. Sin embargo, por razones de convergencia, es más conveniente expandir $\ln \Omega(E_r)$ en vez de $\Omega(E_r)$, por lo tanto

$$\ln \Omega(E_r) = \ln \Omega(E^{(0)}) + \frac{\partial \Omega}{\partial E_r}(E_r - E^{(0)}) + \dots$$

considerando sólo la aproximación al primer orden, tenemos:

$$\ln \Omega(E_r) \simeq \text{const} - \beta E_r \quad (1.29)$$

donde $\beta \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial E}$, además, en el equilibrio térmico $T = T$ y $\beta = \beta = \frac{1}{kT}$

De las ecuaciones (1.28) y (1.29) tenemos

$$P_r \propto e^{-\beta E_r} \quad (1.30)$$

Al normalizar la ecuación (1.30), obtenemos

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\sum_r e^{-\beta E_r}} \quad (1.31)$$

la suma en el denominador de (1.31) corre sobre todos los estados accesibles al sistema A .

Se debe hacer énfasis en el resultado (1.31), ya que es completamente independiente de las características del reservorio A' y sólo depende de A .

Parámetros Termodinámicos de un sistema en la colectividad canónica.

Para encontrar los parámetros termodinámicos del sistema en esta colectividad se hace uso de la función de partición. Ésta se define a partir de la ecuación (1.31), donde la suma que corre sobre todos los estados accesibles es conocida como la función de partición (Q) de la colectividad canónica, es decir

$$Q = \sum_r e^{-\beta E_r} = Q_N(V, T) \quad (1.32)$$

donde la dependencia de Q respecto de N (número de partículas del sistema) y V (el volumen ocupado por el sistema) viene dada a través del espectro de autoenergías del sistema $\{E_r\}$.

Una vez determinada la función de partición, el primer parámetro termodinámico que se obtendrá será la energía libre de Helmholtz (A) que viene dada por,

$$A = -k_B T \ln Q = -k_B T \ln \sum_r e^{-\beta E_r} \quad (1.33)$$

la extensividad de A que depende de N , V y T , implica también la extensividad de $\ln Q_N(V, T)$.

Una vez determinada A , podemos encontrar el resto de los parámetros termodinámicos del sistema. La ecuación (1.33) es el resultado más principal en la colectividad canónica, pues es el puente entre la termodinámica y la estadística.

Los parámetros termodinámicos que resultan de la energía libre de Helmholtz son:

Entropía

$$S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{N,V} \quad (1.34)$$

Potencial químico

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_{V,T} \quad (1.35)$$

Presión

$$P = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_{N,T} \quad (1.36)$$

otro parámetro que podemos encontrar es la energía interna U del sistema como

$$U = A + TS \quad (1.37)$$

pero una ecuación alternativa para U es

$$U = - \frac{\partial \ln Q}{\partial \beta}$$

A también nos permite calcular las otras propiedades de la termodinámica tales como

Capacidad calorífica

$$C_v = -T \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_{N,V} \quad (1.38)$$

La energía libre de Gibbs

$$G(N, P, T) = A - V \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_{N,T}$$

ó

$$G = N\mu = N \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_{V,T} \quad (1.39)$$

Entropía generalizada

La entropía puede ser considerada como un concepto general; es decir, puede salir del contexto físico gracias a que, como hemos visto, en esta colectividad necesitamos encontrar la probabilidad P_r del nivel energético E_r .

Al hallar el valor esperado de $\ln P_r$ se tiene

$$\langle \ln P_r \rangle = \ln \left(\frac{e^{-\beta E_r}}{Q} \right)$$

$$\langle \ln P_r \rangle = -\beta \langle E_r \rangle - \langle \ln Q \rangle$$

$$\langle \ln P_r \rangle = -\beta U - \ln Q$$

por otro lado, de la ecuación (1.33) se tiene

$$\ln Q = -\frac{A}{k_B T}$$

entonces

$$\langle \ln P_r \rangle = -\beta U + \frac{A}{k_B T}$$

$$\langle \ln P_r \rangle = \beta(A - U)$$

además, sabemos que $A = U - TS$, entonces

$$\langle \ln P_r \rangle = -\frac{S}{k_B}$$

osea,

$$S = -k_B \langle \ln P_r \rangle$$

por definición, sabemos que el valor esperado de una cantidad X viene definido por $\langle X \rangle = \sum_i P_i X_i$, por lo tanto

$$S = -k_B \sum_r P_r \ln P_r$$

$$S \propto - \sum_r P_r \ln P_r \quad (1.40)$$

esta expresión define la "entropía generalizada".

De esta ecuación podemos ver que la entropía de un sistema probabilístico (estocástico), está enteramente expresada por las probabilidades de los estados del sistema y es una medida del grado de impredecibilidad del sistema.

Como mencionamos antes, la entropía calculada siguiendo métodos de la colectividad canónica adopta nuevamente un carácter probabilístico. Esta es la característica fundamental que hace que esta relación sea aplicable a sistemas en los que se manifiesta la impredecibilidad (falta de información).

Gas ideal clásico en la colectividad canónica

Este sistema está compuesto por N partículas idénticas, es decir, tenemos un gas monoatómico, confinado en un volumen V y a una temperatura de equilibrio T . Como no existe interacción entre partículas, la energía del sistema simplemente estará dada por

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \quad (1.41)$$

La función de partición de una sola partícula de gas está dada por

$$Q_1 = \frac{1}{h^3} \int \int e^{-\beta H(q,p)} d^3p d^3r \quad (1.42)$$

donde la integración es en el espacio de fases y $H = E = \frac{p^2}{2m}$. Entonces, (1.42) toma la forma

$$Q_1 = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3/2} \quad (1.43)$$

Ahora, como las partículas no interactúan, la función de partición de N partículas del gas será

$$Q_N = \frac{Q_1^N}{N!} \quad (1.44)$$

debido a la característica indistinguible e independiente de las partículas.

Reemplazando (1.43) en (1.44) tenemos

$$Q_N = \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h^3} (2m\pi k_B T)^{3/2} \right]^N \quad (1.45)$$

reemplazando este resultado en (1.33)

$$A = -k_B T \ln \left\{ \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{h^3} (2m\pi k_B T)^{3/2} \right]^N \right\} \quad (1.46)$$

entonces, la energía libre de Helmholtz será

$$A = Nk_B T \left\{ \ln \left[\frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2m\pi k_B T} \right)^{3/2} \right] - 1 \right\} \quad (1.47)$$

Habiendo hallado la función de partición y la energía libre de Helmholtz de este sistema podemos determinar los parámetros termodinámicos usando las ecuaciones mencionadas en la sección correspondiente a los parámetros termodinámicos.

Reemplazando (1.47) en la ecuación (1.34) la entropía para el gas ideal es

$$S = Nk_B \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2m\pi k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right\} \quad (1.48)$$

Reemplazando (1.47) en la ecuación (1.35) referente al potencial químico se tiene

$$\mu = k_B T \ln \left\{ \frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2m\pi k_B T} \right)^{3/2} \right\} \quad (1.49)$$

Reemplazando (1.47) en la ecuación (1.36) la presión es

$$P = \frac{Nk_B T}{V} \quad (1.50)$$

que viene a ser la ecuación de estado del gas ideal.

Para determinar la energía interna del sistema reemplazamos (1.44) en la ecuación alternativa de (1.37) y obtenemos

$$U = \frac{3}{2} Nk_B T \quad (1.51)$$

Para determinar la capacidad calorífica reemplazamos (1.47) en la ecuación (1.38) y obtenemos

$$C_V = \frac{3}{2} Nk_B \quad (1.52)$$

$$C_P = \frac{5}{2} Nk_B \quad (1.53)$$

y finalmente para determinar la energía libre de Gibbs reemplazamos (1.35) en la ecuación (1.39) y obtenemos

$$G = Nk_B T \ln \left\{ \frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2m\pi k_B T} \right)^{3/2} \right\} \quad (1.54)$$

Sistema de Osciladores Armónicos

La función Hamiltoniana de un sistema de osciladores armónicos está dado por $H = \sum_{i=1}^N H_i$ donde,

$$H_i(q_i, p_i) = \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 + \frac{1}{2m} p_i^2$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$

Para obtener la función de partición de un solo oscilador armónico hacemos uso del Hamiltoniano pero de un sólo oscilador usando la forma continua y en el espacio de fases de la función de partición.

$$Q_1(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\beta \left(\frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{1}{2m} p^2 \right) \right\} \frac{dq dp}{h}$$

donde $\beta = \frac{1}{k_B T}$

$$Q_1(\beta) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta m \omega^2 q^2 \right\} dq \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2m} \beta p^2 \right\} dp$$

integrando tenemos

$$Q_1(\beta) = \frac{1}{h} \left(\frac{2\pi}{\beta m \omega^2} \right)^{1/2} \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{1/2}$$

como $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ entonces:

$$Q_1(\beta) = \frac{1}{\hbar \beta \omega}$$

Teniendo este resultado, la función de partición de un sistema de N osciladores será entonces:

$$Q_N(\beta) = \{Q_1(\beta)\}^N$$

debido a que los osciladores son independientes, por lo tanto

$$Q_N(\beta) = \{\hbar \beta \omega\}^{-N} \quad (1.55)$$

Teniendo la función de partición del sistema de osciladores, ahora será posible determinar la termodinámica de este sistema, pero antes debemos determinar la energía libre de Helmholtz ya que de ella se desprenden los demás parámetros termodinámicos.

Reemplazando (1.55) en la ecuación (1.33) obtenemos

$$A = N k_B T \ln \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right) \quad (1.56)$$

El potencial químico obtenemos reemplazando el valor de la energía libre de Helmholtz de la ecuación (1.56) en la ecuación (1.35) y obtenemos:

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right) \quad (1.57)$$

La presión es $P = 0$ ya que el sistema de osciladores es independiente del volumen.

La entropía de este sistema es obtenida reemplazando (1.56) en la ecuación (1.34) y está dada por

$$S = Nk_B \left\{ \ln \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} + 1 \right) \right\} \quad (1.58)$$

Para encontrar la energía interna del sistema, reemplazamos la ecuación (1.55) en la ecuación alternativa de (1.37) y se tiene

$$U = Nk_B T \quad (1.59)$$

Los calores específicos a volumen y presión constante se hallan reemplazando (1.56) en la ecuación (1.38) y se tiene

$$C_p = C_v = Nk_B \quad (1.60)$$

y finalmente la energía libre de Gibbs se obtiene reemplazando (1.57) en la ecuación (1.39) y se tiene

$$G = Nk_B T \ln \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) \quad (1.61)$$

Capítulo 2

Teoría de la Información de Shannon

2.1. Introducción.

La teoría de la información fue introducido en 1948 por C. E. Shannon (1916-2001) [1]. Es una rama de la teoría matemática y de las ciencias de la computación que estudia la información y todo lo relacionado con ella: canales, compresión de datos, criptografía y temas relacionados.

El problema fundamental de un sistema de comunicación en su sentido amplio es la transmisión eficiente de información de un punto denominado ORIGEN, a otro punto denominado DESTINO; es decir, reproducir un mensaje tal y cual es en otro lugar ya que los mensajes tienen un significado debido a que pueden estar relacionados en un sistema conceptual o con alguna entidad física.

La teoría de la información proporciona una serie de conceptos y formulaciones desde el punto de vista matemático, que permiten en última instancia plantear alternativas para el manejo inteligente del proceso de comunicación.

La teoría de la información resuelve desde el punto de vista de la ingeniería, situaciones como:

- a) ¿Cuál es el contenido real de información de un mensaje?
- b) Entre varias formas de expresar un mensaje ¿cuál es la óptima cuando se trata de optimizar parámetros como: tiempo invertido para transmitirlo, ancho de banda, cantidad de símbolos o señales para representarlo?
- c) Si los mensajes se codifican para su almacenamiento y transmisión, ¿cómo seleccionar o diseñar un código óptimo para ello?
- d) ¿Cuál es la capacidad máxima, que un medio ó canal específico de comunicación tiene para transmitir información?

- e) ¿Cómo acoplar el canal de comunicación con la fuente de información a fin de lograr la máxima transferencia de información por el canal, con mínima probabilidad de pérdida de información?
- f) ¿Cómo puede el receptor de la información, procurar que la posibilidad de error sea mínima? ¿Cómo puede darse cuenta de que hay un error y cómo lograr corregirlo?
- g) ¿Cómo lograr introducir cambios a la estructura de una información para:
 - g_1) Facilitar su inmunidad a perturbaciones naturales o artificiales (ruido).
 - g_2) Rescatar la información ante eventuales errores en la transmisión.
 - g_3) Encriptarla para mínima posibilidad de captura por receptores no autorizados.
 - g_4) Minimizar el número de elementos de código necesarios para representar una información (compresión).

2.2. Orígenes de la teoría de la información.

Uno de los precursores de la teoría moderna de la información es el Ingeniero y Matemático Claude E. Shannon, a quien se le considera como el padre de la teoría de la información. Shannon refiere que “el problema fundamental de la comunicación radica en reproducir exactamente o aproximadamente un mensaje seleccionado en otro punto. Frecuentemente los mensajes tienen significado; esto se refiere a que están relacionados de acuerdo a algún sistema con entidad física o conceptual” [1]. Pero no fue Shannon el único que trabajó en este área, a continuación haremos un recuento de cómo es que surgió esta teoría.

2.2.1. Aportes de Nyquist.

El teorema de muestreo de Nyquist-Shannon es un teorema fundamental de la teoría de la información, utilizado en las telecomunicaciones, también conocido como teorema de muestreo de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov, o simplemente criterio de Nyquist.

Fue formulado por primera vez por Harry Nyquist [11] en 1924 (“Certain topics in telegraph transmission theory”) y fue probado por Claude E. Shannon en 1949 (“Communication in the presence of noise”).

Este teorema asegura que cuando se muestra una señal, la frecuencia de muestreo debe ser mayor que el doble del ancho de banda ¹ de la señal de entrada, para poder reconstruir la señal original. Si B es el ancho de banda de la señal y F_m es la frecuencia de muestreo, el teorema puede expresarse del siguiente modo:

$$2B < F_m \quad (2.1)$$

Es decir, debe existir una separación mínima entre impulsos. Esta separación mínima depende del ancho de banda. El criterio de Nyquist establece la separación mínima que debe existir entre dos pulsos, de forma que no se produzca la interferencia intersímbolo.

2.2.2. Estudios de Hartley.

En 1928 Hartley [12] especula con la idea de que el contenido de información debería depender directamente del logaritmo de la probabilidad del mensaje correspondiente. Sin embargo, esos intentos de definir la información en términos probabilísticos tenían algo de extraño, casi de antinatural, ya que en la vida ordinaria, no es la incertidumbre sino la certeza en el conocimiento de determinada materia lo que se asocia con la información, o al menos así parece ser.

Durante ese mismo año, Hartley formuló una manera de cuantificar la información y su tasa de transmisión a través de un canal de comunicaciones. Este método, conocido más adelante como ley de Hartley, se convirtió en un importante precursor para la sofisticada noción de capacidad de un canal, formulada por Shannon.

Hartley indicó que el número máximo de pulsos distintos que se pueden transmitir y recibir, de manera fiable, sobre un canal de comunicaciones está limitado por el rango dinámico de la amplitud de la señal y de la precisión con la cuál el receptor puede distinguir distintos niveles de amplitud.

Tomando la información para ser el logaritmo del número de los mensajes distintos que podrían ser enviados, Hartley después construyó una medida de la información proporcional al ancho de banda del canal y a la duración de su uso. A veces sólo se habla de dicha proporcionalidad cuando se cita a la ley de Hartley.

Posteriormente, Hartley combinó la observación de Nyquist y su propia cuantificación de la calidad o ruido de un canal en términos del número de niveles de pulso que podían ser distinguidos de manera fiable y denotados por M , para llegar a una medida cuantitativa de la tasa de información que se puede obtener.

¹En conexiones a Internet el ancho de banda es la cantidad de información o de datos que se puede enviar a través de una conexión de red en un período dado. El ancho de banda se indica generalmente en bits por segundo (bps), kilobits por segundo (Kbps), o megabits por segundo. Para señales analógicas, el ancho de banda es la longitud, medida en Hz, del rango de frecuencias en el que se concentra la mayor parte de la potencia de la señal.

La ley de Hartley se explica, cuantitativamente, de manera usual, como la tasa de información alcanzable de R bits por segundo, (b / s):

$$R = 2B \log_2 M \quad (2.2)$$

Hartley no resolvió, de manera precisa cómo el parámetro M debe depender de las estadísticas de ruido del canal, o cómo la comunicación podía ser fiable incluso cuando los pulsos individuales correspondientes a símbolos no se pudieran distinguir, de manera fiable, de los niveles de M ; con las estadísticas del ruido gaussiano ².

Los diseñadores de sistemas tienen que elegir un valor muy conservador de M para alcanzar la mínima tasa de error.

El concepto de una capacidad libre de errores aguardó hasta que Claude Shannon investigó sobre las observaciones de Hartley con respecto a la medida logarítmica de la información y las observaciones de Nyquist sobre el efecto de las limitaciones del ancho de banda del canal.

2.2.3. Teoría Matemática de las Comunicaciones de Claude E. Shannon (1948).

Shannon formuló o planteó el siguiente problema: Dado un conjunto de posibles mensajes que una fuente puede producir, no de nuestra elección, ¿Cómo podemos representar de la mejor forma el mensaje para llevar la información a través de un sistema dado con sus limitaciones físicas inherentes?. La consecución de respuestas a esta pregunta le llevo a consolidar su teoría matemática de las comunicaciones con plena validez hoy.

El nombre de Shannon se asocia a dos teoremas que tuvieron una grandísima importancia en el desarrollo de la ciencia de la computación y en las comunicaciones digitales. El primero señala que el número de bits necesarios para describir unívocamente una fuente de información puede aproximarse al correspondiente contenido de información tanto como se desee (teorema de codificación de la fuente). El segundo teorema declara que el radio de errores de los datos transmitidos en un canal confinado y con ruido puede reducirse a una cantidad arbitrariamente pequeña si la velocidad de transmisión es menor que la capacidad del canal (teorema de la codificación del canal). Los dos se dan como resultado del estudio de los trabajos de Hartley y Nyquist. Una introducción a su trabajo se publicó en 1948 en un artículo de la revista Bell System Technical Journal, con un título prometedor: “Una Teoría Matemática de la Comunicación”.

²Ruido gaussiano es únicamente el que presenta una distribución de Gauss, independientemente de que exista una correlación del ruido en el tiempo o no.



Figura 2.1: Claude Elwood Shannon.

2.2.4. Cibernética de Norbert Wiener (1948)

Norbert Wiener [13], el padre de la cibernética ³, era firmemente partidario de la aplicación de la cibernética a las ciencias sociales y la sociedad.

En sus estudios se ocupó del problema de la extracción de la información de señales, que en parte o totalmente, se encontraban fuera del control del diseñador. Con su trabajo dio origen a la teoría de la detección y de la decisión estadística.

Wiener se muestra convencido en sus libros “The Human Use of Human Beings” y “Cybernetics, or the study of control and communication in the animal and machine” de que el comportamiento humano, de animales y de máquinas puede explicarse mediante los principios de la cibernética: comunicación, control de la entropía a través del aprendizaje mediante bucles de retroalimentación, debido a que para él todo está compuesto por patrones. Todo patrón está hecho de elementos colocados en un cierto orden. Wiener menciona que un mensaje no es sino un patrón en el que los elementos están dispuestos en una serie temporal.

2.3. Conceptos básicos de la teoría de la información.

En esta sección definiremos los conceptos que son la parte esencial de la teoría de la información.

³Cibernética es el estudio interdisciplinario de sistemas complejos, especialmente proceso de comunicación, mecanismos de control y principios de retroalimentación [14].

2.3.1. Información:

En sentido general, la información es un conjunto organizado de datos procesados, que constituyen un mensaje que cambia el estado de conocimiento del sujeto o sistema que recibe dicho mensaje [9].

En la teoría de la comunicación de Shannon, la información se asocia con el grado de libertad de elección que tenemos al construir los mensajes.

La información viene ha ser la reducción de la entropía, no solo en un sentido matemático como en la teoría de Shannon, sinó también en un sentido físico [10].

Stonier [17] sostiene que la definición del término información es análoga a la definición que hacen los físicos del término energía. La energía se define como la capacidad para realizar un trabajo; a la información le correspondería la capacidad para organizar los sistemas. Al igual que existen diferentes formas de energía (mecánica, electromagnética, térmica, química, etc.), podemos encontrar información de naturaleza muy diversa (información humana, información biológica, información genética, etc.) y no debemos confundir la realidad de la información en sí misma, con la interpretación de la información en un determinado contexto.

2.3.2. Elementos de la información

Los elementos de la información son:

1. **Fuente de información:** Es aquella que produce un mensaje o secuencia de mensajes que puede ser de varios tipos: (a) Una secuencia de letras como un sistema de telégrafo o teletipo; (b) Una sola función dependiente del tiempo $f(t)$ como en la radio o telefonía; (c) Una función del tiempo y otras variables como en la televisión blanco y negro donde los mensajes pueden ser pensados como una función $f(x, y, t)$ dos coordenadas espaciales y una temporal, la intensidad de un punto (x, y) y el tiempo t sobre un tubo receptor de plata. (d) Dos o más funciones del tiempo, $f(t), g(t), h(t)$ este es el caso en transmisión de sonido tridimensional o si el sistema es destinado a servir varios canales individuales en multiple. (e) varias funciones de varias variables, es el caso de un televisor a colores, los mensajes consisten de tres funciones $f(x, y, t), g(x, y, t), h(x, y, t)$ definidas en tres dimensiones continuas, se puede pensar de estas tres funciones como componentes de un vector de campo definido en la región. Similarmente varios televisores blanco y negro deberian producir "mensajes" que consisten de un número de funciones de tres variables; (f) Varias combinaciones tambien pueden

ocurrir, por ejemplo en televisión con un solo canal de audio asociado [1].

2. Transmisor: Es aquel que opera sobre el mensaje en algún modo para producir una señal disponible para su transmisión sobre el canal. Por ejemplo en telefonía esta operación consiste simplemente en cambiar la presión del sonido en una corriente eléctrica proporcional. En telegrafía tenemos una operación de codificación el cual produce una secuencia de puntos, guiones y espacios sobre el canal correspondiente al mensaje [1].

3. Mensaje: Es aquel que viene formado por la sucesión de una serie de señales y que son ordenadas cronológicamente [15].

4. Canal: Viene ha ser el medio usado para transmitir la señal del transmisor al receptor. Por ejemplo puede ser un par de cables, un cable coaxial, una banda de frecuencias de radio, un rayo de luz, etc. Durante la transmisión, o en uno de los terminales, la señal puede ser perturbada por ruido, esto es indicado esquemáticamente en la Fig. 2.2 [1].

5. Receptor: Ordinariamente representa la operación inversa a la hecha por el transmisor, reconstruir el mensaje de la señal.

6. Destinatario: Viene ha ser la persona o cosa para quien está destinado el mensaje.

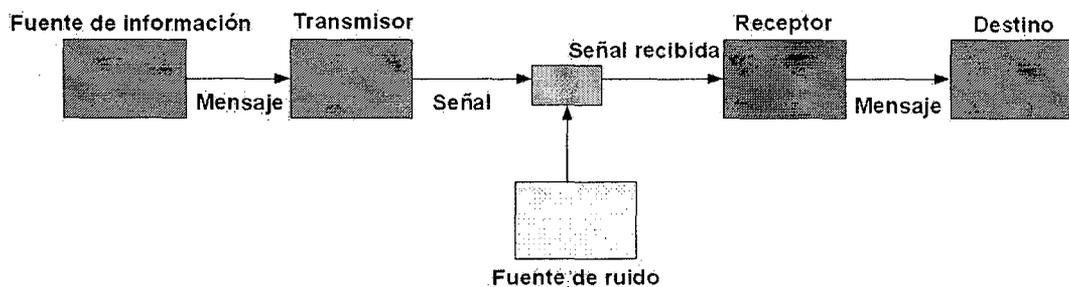


Figura 2.2: Sistema de comunicación con los elementos de la información.

2.3.3. Entropía:

La definición más elemental de este concepto es la siguiente: Entropía es el grado de desorden que tiene un sistema. En física esto se aplica a la segunda ley de la termodinámica, la cual nos dice que los sistemas aislados tienden al desorden, es decir, las cosas tienden al caos a medida que pasa el tiempo (no hay más que fijarse en el organismo de un ser vivo);

mientras que, en la teoría de la comunicación este concepto es empleado como un número que mide el grado de incertidumbre que posee un mensaje.

La entropía es nula cuando la certeza es absoluta, y alcanzará un máximo cuando el sistema se acerca al equilibrio.

Resulta que los conceptos de información y de entropía están íntimamente relacionados entre sí, aunque se necesitaron años de desarrollo de la mecánica estadística y de la teoría de la información antes de que esto fuera percibido.

2.3.4. Incertidumbre:

Expresión del grado de desconocimiento de una condición futura.

La incertidumbre puede derivarse de una falta de información o incluso por que exista desacuerdo sobre lo que se sabe o lo que podría saberse. Puede tener varios tipos de origen, desde errores cuantificables en los datos hasta terminología definida de forma ambigua o previsiones inciertas del comportamiento humano. La incertidumbre puede, por lo tanto, ser representada por medidas cuantitativas (por ejemplo, un rango de valores calculados según distintos modelos) o por afirmaciones cualitativas (por ejemplo, al reflejar el juicio de un grupo de expertos).

2.3.5. Capacidad del canal de información:

Es la habilidad que tiene el canal para poder transmitir información (Unidades de información/seg).

Finalmente, vistos estos conceptos, concluiremos esta sección caracterizando el tema central de este capítulo.

2.3.6. La teoría de la información:

Es una teoría cuyo propósito es la cuantificación de la información (medida de la información). Esta se logra mediante métodos de compresión y comunicación de datos sin causar ninguna alteración en los datos.

2.4. Teoría matemática de la comunicación

La parte más importante que nos interesa del artículo de Shannon es aquella en que el autor define la Entropía desde el punto de vista de la teoría de la información y que resulta ser equivalente a la definición obtenida en la teoría de las colectividades propuesta por Gibbs.

2.4.1. La información y sus fuentes en sistemas discretos sin ruido.

Una fuente de información es un objeto, que produce a su salida un evento; dicha salida es seleccionada aleatoriamente de acuerdo a una probabilidad de distribución. En un sistema de comunicación, es un elemento que produce mensajes, y éstos pueden ser analógicos o discretos [9].

Sabiendo que una fuente de información discreta es un generador de mensajes, símbolo por símbolo; la definición de una fuente de información, se puede ilustrar como muestra la figura 2.3

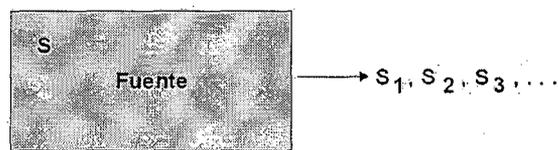


Figura 2.3: Esquema de una fuente que emite mensajes o en general símbolos.

Esta fuente emite una secuencia de símbolos pertenecientes a un alfabeto finito y fijo, $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$. Los símbolos emitidos sucesivamente por la fuente se eligen de acuerdo con una ley fija de probabilidad. Nos referiremos a la fuente misma como S ; sin que esto deba dar lugar a confusión.

Las fuentes de información pueden clasificarse en fuentes con memoria y fuentes sin memoria. Una fuente sin memoria puede especificarse por: la lista de símbolos, la probabilidad de ocurrencia de los símbolos, y la velocidad de emisión de los símbolos de la fuente.

A continuación mencionaremos las fuentes de información utilizadas por Shannon en su trabajo ya que es interesante y útil describir matemáticamente un mecanismo generador de información.

2.4.2. Fuentes de información sin memoria.

Esta es la fuente mas sencilla en la que los símbolos emitidos son estadísticamente independientes, y puede describirse completamente mediante el alfabeto fuente S y las probabilidades con que los símbolos se presentan son:

$$P(S_1), P(S_2), P(S_3), \dots, P(S_n)$$

Fuentes de información discretas.

Una fuente de información discreta es aquella que está formada por un conjunto finito de símbolos.

Al considerar una fuente de información, Shannon plantea lo siguiente: ¿Cómo es descrita matemáticamente una fuente de información? y ¿Cuanta información en bits por segundo es producida en esa fuente?

El punto principal radica en el hecho del conocimiento estadístico acerca de la fuente para reducir la capacidad requerida del canal, por uso propio de la codificación de la información. Un ejemplo de esto es la telegrafía en donde los mensajes serán transmitidos consistentes de las secuencias de letras. Estas secuencias, sin embargo, no son completamente aleatorias. En general, ellas forman oraciones y tienen la estructura estadística de por ejemplo en el idioma inglés, La letra E ocurre mas frecuentemente que Q, la secuencia TH mas frecuentemente que XP, etc., la existencia de esta estructura permite a uno hacer un ahorro en el tiempo (o capacidad del canal) convenientemente codificando las secuencias de los mensajes en secuencia de señales.

Por este motivo Shannon define a la fuente de información discreta como un generador de mensajes símbolo por símbolo. Además se elegirán símbolos sucesivos de acuerdo con ciertas probabilidades, dependiendo, en general, de anteriores elecciones, así como los símbolos en cuestión. Un sistema físico o un modelo matemático que produce tal secuencia de símbolos está gobernado por un conjunto de probabilidades, que es conocido como un proceso estocástico ⁴. Por lo tanto se puede considerar a una fuente discreta como un proceso estocástico. Por el contrario, cualquier proceso estocástico que genera una secuencia discreta de los símbolos escogidos de un conjunto finito se puede considerar una fuente discreta. Esto incluye casos como:

1. Escritos en lenguajes naturales tales como Inglés, alemán, chino.
2. Fuentes continuas de información que han sido discretizados por algún proceso cuantizador. Por ejemplo el idioma cuantizado por de un transmisor PCM ⁵, o una señal cuantizada en la televisión.
3. Los casos matemáticos en los que solo definimos un proceso estocástico abstracto que genera una secuencia de símbolos. Los siguientes son ejemplos de este último tipo de fuente.

3 a Supongamos que tenemos cinco letras A, B, C, D, E cada una de las cuales es elegida con probabilidad 0.2 y además elecciones sucesivas son

⁴Un proceso estocástico es aquel que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.

⁵PCM: Pulse - Code Modulation (Modulación por impulsos codificados).

independientes. Esto conduce a una secuencia de la cual el siguiente es un ejemplo típico.

BDCBCECCCADCBDDAAECEEAAABBDAEECACEEBAEECBCEAD.

ésto fue construido con el uso de la tabla de números aleatorios.⁶

- 3 b** Usando las mismas cinco letras siendo sus probabilidades 0.4, 0.1, 0.2, 0.2, 0.1, respectivamente, con elecciones sucesivas independientes. Un mensaje típico de esta fuente es entonces:

AAACDCBDCEAADADCEDAEADCABEDADDCECAAAAAD.

- 3 c** Una estructura más complicada es obtenida si símbolos sucesivos no son elegidos independientemente pero, sus probabilidades dependen de las letras precedentes. El caso mas simple de este tipo es una elección que depende sólo de la letra precedente y no de otra anterior. La estructura estadística puede ser descrita por un conjunto de probabilidades de transición $p_i(j)$ que viene a ser la probabilidad de que la letra i sea seguida por la letra j . Los índices i y j varían sobre todos los posibles símbolos. Una segunda forma equivalente de especificar la estructura es dada en el "digram" de probabilidades $p(i, j)$ es decir, la frecuencia relativa del digram ij . La frecuencia de la letra $p(i)$, (la probabilidad de la letra i), la probabilidad de transición $p_i(j)$ y la probabilidad del digram $p(i, j)$ están relacionadas por las siguientes formulas:

$$p(i) = \sum_j p(i, j) = \sum_j p(j, i) = \sum_j p(j)p_i(j)$$

$$p(i, j) = p(i)p_i(j)$$

$$\sum_i p_i(j) = \sum_i p(i) = \sum_{i,j} p(j, i) = 1.$$

Como un ejemplo específico supongamos tres letras A, B, C con la tabla de probabilidades:

$p_i(j)$		j	
		A	B
		C	
A	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
i B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

i	$p(i)$
A	$\frac{9}{27}$
B	$\frac{10}{27}$
C	$\frac{2}{27}$

$p(i, j)$		j	
		A	B
		C	
A	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
i B	$\frac{9}{27}$	$\frac{9}{27}$	0
C	$\frac{1}{27}$	$\frac{4}{135}$	$\frac{1}{135}$

⁶Kendall and Smith, Tables of Random Sampling Numbers, Cambridge, 1939.

Un mensaje típico de esta fuente es la siguiente:

ABBABABABABABBBBABBABABABABBBBACACABBAB
BBBABBABACBBBABA.

El siguiente incremento en complejidad involucraría frecuencias de trigram pero no mas. La elección de una letra dependerá de las dos letras precedentes pero no del mensaje antes que el punto. Un conjunto de frecuencias de trigram $p(i, j, k)$ o equivalente de probabilidades de transición $p_{ij}(k)$ sería requerido. Continuando de esto modo se obtiene sucesivamente procesos estocásticos más complicados. En el caso general n-gram, un conjunto de n-gram $p(i_1, i_2, \dots, i_n)$ o de probabilidades de transición $p_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}(i_n)$ es requerido para especificar la estructura estadística.

- 3 d** Un proceso estocástico puede también ser definido como aquel que produce un texto que consiste de una secuencia de “palabras”. Supongamos que tenemos cinco letras A, B, C, D, E y 16 “palabras” en el lenguaje con probabilidades asociadas:

0.10 A	0.16 BEBE	0.11 CABED	0.40 DEB
0.04 ADEB	0.04 BED	0.05 CEED	0.15 DEED
0.05 ADEE	0.02 BEED	0.08 DAB	0.01 EAB
0.01 BADD	0.05 CA	0.04 DAD	0.05 EE

Supongamos que “palabras” sucesivas son elegidas independientemente y son separadas por un espacio. Un mensaje típico podría ser:

DAB EE A BEBE DEED DEB ADEE ADEE EE DEB BEBE BEBE
BEBE ADEE BED DEED CEED ADEE A DEED DEED BEBE
CABED BEBE BED DAB DEED ADEB.

Si todas las palabras son de longitud finita este proceso es equivalente a uno del tipo anterior, pero la descripción puede ser mas simple en términos de la estructura y probabilidades de la palabra. Podríamos también generalizar e introducir la probabilidad de transición entre palabras, etc.

Series de Aproximación al Ingles.

Para tener una idea visual de como esta serie de procesos se aproxima a un lenguaje, secuencias típicas en la aproximación al ingles han sido construidas y son dadas abajo. En todos los casos a un alfabeto de 27 simbolos, 26 letras y un espacio.

1. Aproximación de orden cero (símbolos independientes y equiprobables).
XFOML RXKHRJFFJUJ ZLPWCFWKCYJ FFJEYVKCQSGHYD
QPAAMKBZAACIBZLHJQD.
2. Aproximación de primer orden (símbolos independientes pero con frecuencias de textos en inglés).
OCRO HLI RGWR NMIELWIS EU LL NBNESEBYA TH EEI ALHENHTTPA
OOBTTVA NAH BRL.
3. Aproximación de segundo orden (estructura de digram como en inglés).
ON IE ANTSOUTINYS ARE T INCTORE ST BE S DEAMY ACHIN D ILONASIVE
TUOOWE AT TEASONARE FUSO TIZIN ANDY TOBE SEACE CTISBE.
4. Aproximación de tercer orden (estructura de trigram como en inglés.)
IN NO IST LAT WHEY CRATICT FROURE BIRS GROCID PONDENOME OF
DEMONSTURES OF THE REPTAGIN IS REGOACTIONA OF CRE.
5. Aproximación de palabras de primer orden. En vez de continuar con estructura de tetragram, ..., n-gram es más fácil y mejor saltar en este punto a unidades de palabra. En este caso las palabras son escogidas independientemente pero con sus frecuencias apropiadas.
REPRESENTATING AND SPEEDINLY IS AN GOOD APT OR COME CAN
DIFFERENT NATURAL HERE HE THE AN IN CAME THE TO OF TO EXPERT
GRAY COME TO FURNISHES THE LINE MESSAGE HAD BE THESE.
6. Aproximación de palabras de segundo orden. Las probabilidades de transición de palabras son correctas pero no incluye estructuras adicionales.
THE HEAD AND IN FRONTAL ATTACK ON AN ENGLISH WRITER THAT THE
CHARACTER OF THIS POINT IS THEREFORE ANOTHER METHOD FOR THE
LETTERS THAT THE TIME OF WHO EVER TOLD THE PROBLEM FOR AN
UNEXPECTED.

La semejanza con el texto Inglés ordinario aumenta muy notablemente en cada uno de los pasos anteriores. Hay que tener en cuenta que estas muestras tienen razonablemente buena estructura hasta aproximadamente el doble de alcance que se tiene en cuenta en su construcción. Así, en (3) el proceso estadístico asegura un texto razonable para la secuencia de dos letras, pero la secuencia para cuatro letras de la muestra por lo general se puede ajustar en buenas oraciones. En (6) secuencia de cuatro o más palabras pueden fácilmente ser colocadas fácilmente en oraciones sin construcciones inusuales o forzadas. La

secuencia particular de diez palabras "ATTACK ON AN ENGLISH WRITER THAT THE CHARACTER OF THIS" no es en absoluto no razonable. Parece entonces que un proceso estocástico suficientemente complejo dará una representación satisfactoria de una fuente discreta.

Las dos primeras muestras fueron construidas por el uso de un a tabla de números aleatorios en conjunto con una tabla de frecuencia de letras (para el ejemplo 2). Este método podría haber sido usada para (3), (4) y (5), ya que digram, trigram y tablas de frecuencia de palabras estan disponibles, pero un método equivalente más simple fue utilizado. Para construir (3) por ejemplo, se abre un libro al azar y se selecciona una letra al azar en la página. Esta letra es registrada. El libro es entonces abierto en otra página y se lee hasta encontrar esta letra. La siguiente letra es entonces registrada. De pasar a otra página esta segunda letra es buscada y la siguiente letra es registrada, etc. Un proceso similar fue usado para (4), (5) y (6). Sería interesante si aproximaciones adicionales pudieran ser construídas, pero la labor se vuelve enorme en la siguiente fase.

2.4.3. Fuentes de información con memoria.

Fuentes de información de cadenas de Markov ⁷

Son aquellas en las que la probabilidad de un símbolo cualquiera S_i viene determinada por los m símbolos precedentes [9]. Además como una fuente discreta es considerada como un proceso estocástico, entonces una fuente de información de cadenas de Markov será considerada como un proceso de Markov.

El caso más general de un proceso de Markov puede ser descrito como: Existe un número finito de estados de un sistema; S_1, S_2, \dots, S_n ; en adición hay un conjunto de probabilidades de transición, $p_i(j)$ que viene a ser la probabilidad de que si el sistema esta en el estado S_i el siguiente estado será S_j . Para convertir este proceso en una fuente de información, necesitamos solo asumir que una letra es producida para cada transición de un estado a otro. Los estados corresponderan a la influencia del resto de la letras precedentes.

Esta situación está representada graficamente en las figuras 2.4, 2.5 y 2.6. Para estos casos los estados son los nudos en la gráfica y las probabilidades y letras producidas por una transición están dadas por las correspondientes líneas.

⁷Las cadenas de Markov son una herramienta para analizar el comportamiento y el gobierno de determinados tipos de procesos estocásticos, esto es, procesos que evolucionan de forma no determinista a lo largo del tiempo en torno a un conjunto de estados. Por tanto, una cadena de Markov representa un sistema que varía su estado a lo largo del tiempo, siendo cada cambio una transición del sistema.

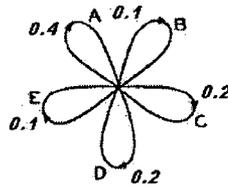


Figura 2.4: Representación gráfica del caso 3 b, en el que las probabilidades de aparición de las letras en cuestión no son las mismas así como se muestran en la figura..

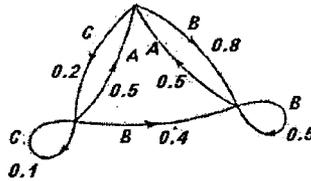


Figura 2.5: Representación gráfica del caso 3 c, pero las probabilidades aquí ya no son como en el caso B sino que las probabilidades depende de la letra precedente es decir estructuras de digram.

2.4.4. Fuentes de información ergódicas y mixtas.

Tal como se vió en una fuente de información discreta, a la que podemos considerar como un proceso estocástico, una fuente de información ergódica también es considerada del mismo modo, pero en este caso será un proceso ergódico. En un proceso ergódico cada secuencia producida por el proceso es la misma en propiedades estadísticas. Así que la frecuencia de letras, frecuencia de digram, etc., obtenida de la secuencia particular, decidirá, como las longitudes de las secuencias crecen, aproximandose a límites definidos independientes de la secuencia particular. En realidad esto no es cierto para todas las secuencias, pero el conjunto para los cuales esto es falso tiene probabilidad cero. A groso modo la propiedad ergódica significa homogeneidad estadística.

Los ejemplos de lenguajes artificiales descritos anteriormente son ergódicos. Shannon menciona que para ser un proceso ergódico debe seguir dos propiedades:

1. Las grafo no consiste de dos partes A y B separadas, así que es imposible ir de la unión de puntos de la parte A a la unión de puntos en la parte B a lo largo de las líneas de la gráfica en la dirección de las flechas y también es imposible ir de las uniones en la parte B a las uniones en la parte A.
2. Una serie cerrada de líneas en el grafo con todas las flechas sobre las líneas apuntando en la misma dirección será denominada un circuito. La longitud de un circuito es el número de líneas en este. Así que en la Figura 1.6 la serie BEBES es un circuito de longitud 5. La segunda propiedad requerida es que el máximo

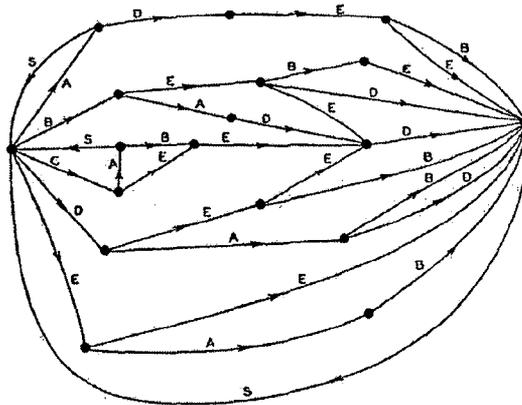


Figura 2.6: Representación gráfica del caso 3 d, en este caso ya no son simples letras sino son palabras y estas con sus respectivas probabilidades de ocurrencia.

común divisor de las longitudes de todos los circuitos en el grafo sea uno.

Usando estas propiedades Shannon define a la longitud total de un grafo como

$$L = p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3 + \dots \quad (2.3)$$

donde los L_i es el i -ésimo sub grafo que representa a la i -ésima fuente componente y p_i es la probabilidad del sub grafo L_i .

Fisicamente la situación representada es la siguiente: Existe una diversidad de distintas fuentes L_1, L_2, L_3, \dots las cuales son cada una de estructura estadística homogénea es decir ellas son ergódicas. No se sabe a priori cual será usada, pero una vez que la secuencia empieza en una componente L_i dada, continua indefinidamente de acuerdo a la estructura estadística de esa componente.

Excepto cuando se indica lo contrario vamos a suponer que una fuente es ergódica. Esta suposición hace posible a uno identificar los promedios a lo largo de una secuencia con un promedio sobre la colectividad de todas las secuencias posibles (la probabilidad de una discrepancia es cero). Por ejemplo, la frecuencia relativa de la letra A en una secuencia infinita en particular será con probabilidad uno, igual a su frecuencia relativa en la colectividad de secuencias.

Si P_i es la probabilidad del estado i y $p_i(j)$ la probabilidad de transición al estado j , entonces para que el proceso sea estacionario, está claro que P_i debe satisfacer la condición de equilibrio:

$$P_i = \sum_j P_j p_j(i) \quad (2.4)$$

En el caso ergódico, puede ser mostrado que para cualesquiera condiciones iniciales, las probabilidades $P_j(N)$ de estar en el estado j después de N símbolos, se aproximan a los valores de equilibrio cuando $N \rightarrow \infty$.

2.5. Elección, incertidumbre y entropía

Después de haber representado a una fuente de información discreta como un proceso estocástico, Shannon define una cantidad que mide la información producida por este proceso o la tasa con que es producida la información.

Para ello se supone un conjunto de posibles eventos con probabilidades de ocurrencia p_1, p_2, \dots, p_n siendo estas probabilidades todo lo que se conoce de la ocurrencia del evento.

Para encontrar una medida de la cantidad de elecciones que implica este evento o para saber cuan incierto es un resultado, entonces se define una cantidad que mida esto, $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ que según Shannon requiere de las siguientes condiciones:

1. H debe ser continua en p_i .
2. Si todos los p_i son iguales, $p_i = \frac{1}{n}$, entonces H debe ser una función monótona creciente de n . Con eventos igualmente probables, hay más elección o incertidumbre, cuando existen más eventos posibles.
3. Si la elección se descompone en dos elecciones sucesivas, el H original debe ser la suma ponderada de los valores individuales de H .

A continuación desarrollaremos la construcción de esta función H en la forma como es mostrado en el apéndice 2 [1].

Sea $H(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \equiv A(n)$, usando la tercera propiedad descomponemos una elección de s^m posibilidades igualmente probables en una serie de m elecciones, cada una de las cuales s de posibilidades igualmente probables obtenemos

$$A(s^m) = mA(s)$$

similarmente podemos tener para la otra elección

$$A(t^n) = nA(t)$$

Podemos elegir n arbitrariamente grande y encontrar un m que satisfaga

$$s^m \leq t^n < s^{(m+1)}$$

por tanto, tomando logaritmos tenemos

$$m \log s \leq n \log t \leq (m + 1) \log s$$

ahora dividiendo por $n \log s$

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\log t}{\log s} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

o escrito de otro modo

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{\log t}{\log s} \right| < \epsilon$$

donde ϵ es arbitrariamente pequeño.

De la propiedad de la monotonía de $A(n)$ resulta ,

$$A(s^m) \leq A(t^n) \leq A(s^{m+1})$$

$$mA(s) \leq nA(t) \leq (m+1)A(s)$$

de donde dividiendo por $nA(s)$ se tiene

$$\frac{m}{n} \leq \frac{A(t)}{A(s)} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

o

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{A(t)}{A(s)} \right| < \epsilon$$

de lo anterior

$$A(t) = -K \log t \tag{2.5}$$

donde K debe ser positivo para satisfacer la condición 2.

Suponiendo que se tiene una elección de n posibilidades con probabilidades commensurables $p_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$ donde los n_i son enteros. Descomponiendo una elección de $\sum n_i$ posibilidades en una elección de n posibilidades con probabilidades p_1, \dots, p_n y luego, si el i -ésimo fue elegido, una elección de n_i con iguales probabilidades. Usando la condición 3 nuevamente, se iguala la elección total de $\sum n_i$ como se calcula por dos métodos, entonces

$$K \log \sum n_i = H(p_1, \dots, p_n) + K \sum p_i \log n_i$$

por lo tanto

$$H = K(\log \sum n_i - \sum p_i \log n_i)$$

finalmente tenemos

$$H = -K \sum p_i \log p_i \tag{2.6}$$

donde K es un coeficiente introducido para determinar la unidad de medida apropiada. ■

A esta ecuación posteriormente se le denomina **entropía de Shannon** ya que como se explicó anteriormente fue construida por él.

Es interesante observar que esta misma expresión es obtenida en Física dentro de la formulación de la Mecánica Estadística (colectividad canónica) y es denominada entropía $S = -K \sum p_i \log p_i$

Para analizar la expresión de la entropía de Shannon se considera el coeficiente $K = 1$ (el rol de este coeficiente es solo definir la unidad apropiada para la entropía) por tanto escribiremos

$$H = - \sum p_i \log p_i \quad (2.7)$$

Esta es la ecuación que se utiliza para determinar la medida de la información.

Ilustraremos la aplicación de ésta ecuación a través del siguiente ejemplo, la entropía en el caso de dos posibilidades con probabilidades p y $q = 1 - p$; será entonces,

$$H = -(p \log p + q \log q)$$

es mostrada en la figura 2.7

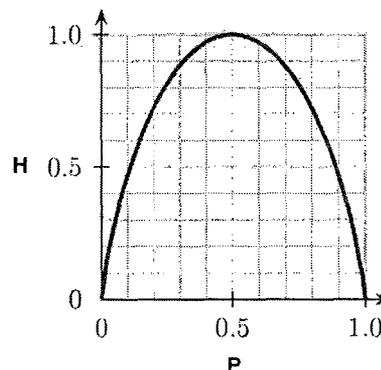


Figura 2.7: Entropía de un sistema con dos posibilidades.

La cantidad H tiene un número de propiedades interesantes las cuales verifican que es una medida razonable de elección o información.

Propiedad 1. $H = 0$ si y solo si, todos los p_i , excepto uno, son ceros, Esta probabilidad no nula sera la unidad. Así que sólo cuando estemos seguros del resultado, H desaparece. De otro modo H es positivo.

Propiedad 2. Para un n dado, H es máximo e igual al $\log n$ cuando todos lo p_i son iguales; es decir, $p_i = \frac{1}{n}$. Esto es también intuitivamente la situación más incierta.

Propiedad 3. Supongamos que hay dos eventos, x y y , con m posibilidades para el primero y n para el segundo. Sea $p(i, j)$ la probabilidad de la ocurrencia simultanea de i para el primero y j para el segundo. La entropía de la ocurrencia simultanea de ambos eventos es

$$H(x, y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log p(i, j) \quad (2.8)$$

Mientras que las entropías para las ocurrencias individuales de los eventos estarán dadas por

$$H(x) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log \sum_j p(i, j)$$

$$H(y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log \sum_i p(i, j)$$

De donde se puede mostrar que

$$H(x, y) \leq H(x) + H(y) \quad (2.9)$$

Esta relación se reduce a la igualdad cuando los eventos son independientes (es decir $p(i, j) = p(i)p(j)$). La incertidumbre de un evento simultáneo es menor o igual que la suma de las incertidumbres individuales.

Propiedad 4. Cualquier cambio que tienda a uniformizar las probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n incrementa H . Por consiguiente si $p_1 < p_2$ e incrementamos p_1 disminuyendo p_2 en la misma cantidad de tal manera que p_1 y p_2 son más cercanamente próximos, entonces H aumenta. Mas en general, si se realiza cualquier operación de "uniformización" sobre las p_i de la forma

$$p_i' = \sum_j a_{ij} p_j$$

donde $\sum_j a_{ij} = \sum_i a_{ij} = 1$, y todos los $a_{ij} \geq 0$, entonces H aumenta (excepto en el caso especial donde esta transformación equivale a no mas que una permutación de los p_i con H por supuesto permaneciendo igual).

Propiedad 5. Supongamos que hay dos eventos aleatorios x y y como en la propiedad 3, no necesariamente independientes. Para cualquier valor particular i de x puede tomar una probabilidad condicional $p_i(j)$ de que y tenga el valor j . Esta es dada por

$$p_i(j) = \frac{p(i, j)}{\sum_i p(i, j)}$$

Definimos la entropía condicional del evento y como el promedio de la entropía de y para cada valor de x ponderada de acuerdo a la probabilidad de obtener el valor particular de x . Esto es

$$H_x(y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log p_i(j) \quad (2.10)$$

Esta cantidad mide en promedio cuan inciertos estamos de y cuando conocemos x . Sustituyendo el valor de $p_i(j)$ obtenemos

$$H_x(y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log p(i, j) + \sum_{i,j} p(i, j) \log \sum_j p(i, j)$$

es decir,

$$H_x(y) = H(x, y) - H(x)$$

ó

$$H(x, y) = H(x) + H_x(y)$$

La incertidumbre (o entropía) de un evento simultaneo x, y es la incertidumbre de x más la incertidumbre de y cuando x es conocido.

Propiedad 6. De las propiedades 3 y 5 tenemos

$$H(x) + H(y) \geq H(x, y) = H(x) + H_x(y)$$

Por consiguiente

$$H(y) \geq H_x(y)$$

La entropía de y nunca es incrementada por el conocimiento de x . Será decreciente a menos que x y y sean eventos independientes, en tal caso no cambian.

2.5.1. Entropía de una fuente de información.

En lo anterior se observó que la entropía de una fuente discreta de estados finitos es decir, cuando los símbolos son lanzados independientemente uno por uno, en ese caso la entropía es del tipo mostrado en la ecuación (2.7). Ahora veremos como será la entropía

cuando la fuente discreta es considerada como una fuente de Markov; es decir, el caso en que los símbolos emitidos por la fuente dependen de los símbolos precedentes.

La entropía para este tipo de fuente, según Shannon, está definida por:

$$H = \sum_i P_i H_i$$

donde H_i es la entropía del estado i ; entonces

$$H = - \sum_i P_i p_i(j) \log p_i(j)$$

Esta es la entropía de la fuente por símbolo de texto.

Ahora veamos como será la entropía de la aproximación de N-esimo orden mediante los dos siguientes teoremas enunciados en [1].

Teorema 1: Sea $p(B_i)$ la probabilidad de una secuencia de B_i símbolos de la fuente. Se define:

$$G_N = -\frac{1}{N} \sum_i p(B_i) \log p(B_i)$$

donde la suma corre sobre todas la secuencias B_i contenidas en los N símbolos. Entonces G_N es una función monotonamente decreciente de N y $\lim_{N \rightarrow \infty} G_N = H$.

Teorema 2: Sea $p(B_i, S_j)$ la probabilidad de que la secuencia B_i sea seguida por el símbolo S_j y $p_{B_i}(S_j) = p(B_i, S_j)/p(B_i)$ la probabilidad condicional de S_j después de la secuencia B_i . Sea,

$$F_N = - \sum_{i,j} p(B_i, S_j) \log p_{B_i}(S_j) \quad (2.11)$$

donde la suma corre sobre todos los bloques B_i de $N - 1$ símbolos y sobre todos los S_j símbolos. Entonces:

1. F_N es una función monotonamente decreciente de N
2. $F_N = NG_N - (N - 1)G_{N-1}$
3. $G_N = \frac{1}{N} \sum_1^N F_N$
4. $F_N \leq G_N$

y $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N = H$

Donde F_N es la mejor aproximación. De hecho, F_N es la entropía de la aproximación de N-ésimo orden para una fuente de Markov.

entonces:

$$F_N = - \sum_{i,j} p(B_i, S_j) \log p(B_i, S_j) + \sum_i p(B_i) \log p(B_i) \quad (2.12)$$

F_N también puede ser considerada como la entropía de un n-gram; es decir, la medida de la información de un símbolo que depende de otros símbolos precedentes. el uso de ésta relación se verá en la aplicación de la teoría de la información a la Arqueología.

2.5.2. Entropía de algunos sistemas.

Veamos cómo es el valor de la entropía de un sistema cuando las probabilidades de ocurrencia de los estados varían, siendo el espacio muestral el mismo en todos los casos; y está dado por

$$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$$

- **Caso 1:** En este caso supongamos que las probabilidades de cada uno de los estados sean $\frac{1}{6}$. reemplazando en la ecuación (2.7) tenemos

$H = \sum_{i=1}^6 p_i \log p_i$ con $p_i = \frac{1}{6}$, para todos los casos, entonces el valor de la entropía de este sistema es:

$$H = 2,585$$

- **Caso 2:** En este caso supongamos que las probabilidades de los estados sean: $p_1 = p_2 = 0,498$ y $p_i = 0,001$ con ($i = 3, 4, 5, 6$).

Reemplazando en (2.7), el valor de la entropía para este sistema es:

$$H = 1,042$$

- **Caso 3:** Supongamos ahora que las probabilidades de los estados sean: $p_1 = 0,995$ y $p_i = 0,001$ ($i = 2, 3, 4, 5, 6$).

El valor de la entropía para este sistema será entonces:

$$H = 0,057$$

Después de ver cómo es el valor de la entropía de estos sistemas, podemos afirmar lo siguiente: cuanto más sabemos de la ocurrencia de un estado, la entropía es menor, esto se ve en el caso 3. Por otro lado, si sabemos poco de la ocurrencia de un estado, la entropía será mayor, esto es mostrado en el caso 1.

2.5.3. Entropía de sistemas equiprobables.

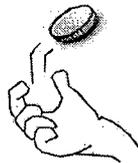
Para sistemas equiprobables la ecuación (2.7) se expresa de la siguiente manera:

$$H = \log n \quad (2.13)$$

donde n representa el número de estados del sistema.

Los sistemas equiprobables más conocidos son la moneda, el dado, los naipes. Ahora determinemos la entropía de estos sistemas.

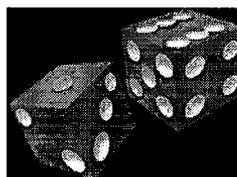
- La moneda, para la cual la probabilidad de ocurrencia de sus estados es $p_i = \frac{1}{2}$ ya que al lanzar solo tiene 2 posibilidades cara o sello.



entonces la entropía de este sistema, usando la expresión (2.13) y con $n = 2$, es:

$$H = 1$$

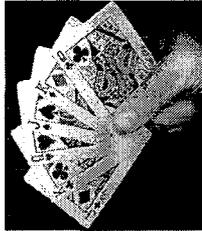
- El dado, para el cual la probabilidad de ocurrencia de sus estados es $p_i = \frac{1}{6}$ debido a que al lanzar el dado este tiene seis posibilidades.



del mismo modo que para el caso anterior, usando la expresión (2.13) y con $n = 6$, la entropía de este sistema es:

$$H = 2,585$$

- Los naipes, para los cuales las probabilidades de ocurrencia de sus estados es $p_i = \frac{1}{52}$ debido a que se tiene 52 estados para escoger



la entropía de este sistema usando la expresión (2.13) y con $n = 52$, es:

$$H = 5,7$$

De estos resultados se puede observar que a medida que aumenta el número de estados del sistema, la entropía crece y lo hace de forma logarítmica. Cuanto más grande sea el número de estados en un sistema equiprobable, éste se hace más impredecible. La figura 2.8 muestra el crecimiento de la entropía a medida que el número de estados crece.

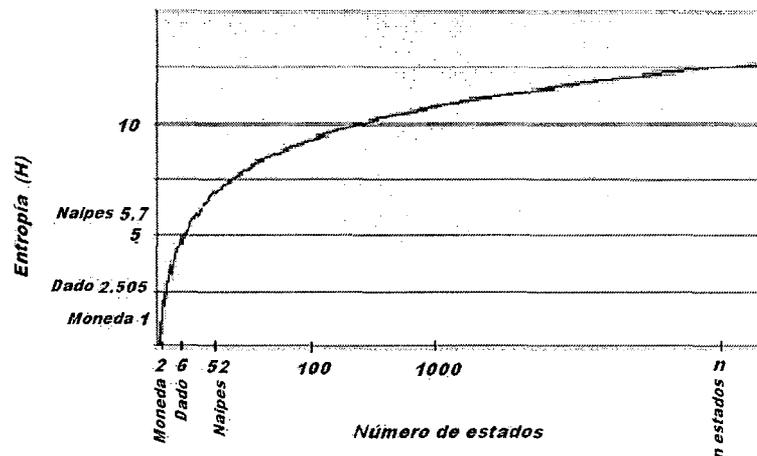


Figura 2.8: Esquema de como crece la entropía de sistemas equiprobables cuando n se hace cada vez más grande.

2.5.4. Unidades de medida de la información.

Las unidades de medida de la información las proporciona la base del logaritmo; es decir:

Si el logaritmo está en base 2, la unidad de medida de la información será el bit.

Si el logaritmo está en base 10, la unidad de medida de la información será el Hartley algunos usan decit.

Si empleamos el logaritmo natural, la unidad de medida de la información será el nat.

Podemos pasar de una base a otra mediante la conocida ecuación de cambio de base

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x \quad (2.14)$$

Las equivalencias entre las bases logarítmicas usando la ecuación (2.14), son:

$$1Hartley = 3,32bits$$

$$1nat = 1,44bits$$

En los ejemplos descritos anteriormente, los calculos fueron hechos usando logaritmos en base dos, por lo tanto la unidad de medida que les corresponde es el bit.

2.6. Teoría de la información y su relación con otros campos.

La teoría de la información tiene relación con diversos campos [16], ya que haciendo uso de la ecuación (2.7) podemos extenderla hacia otras áreas, en efecto:

La Matemática, más específicamente en la teoría de probabilidades y estadística matemática, un ejemplo es ilustrado a través del trabajo “ Estructura periodica y entropia topológica de las implicaciones bimodales” [19].

En Biología a través del trabajo intitulado “Information Theory in Molecular Biology” [18].

En Ciencias de la computación a través del trabajo “Kolmogorov Complexity” [16], mientras que en la Teoría de la Comunicación mediante el trabajo de Shannon.

En Física específicamente dentro en la Termodinámica y la Mecánica Estadística a través de la formalización del Principio de Máxima Entropía y la formulación del concepto de entropía en la colectividad canónica.

En Medicina a través del trabajo “Usos de la entropía en la investigacion médica” [20], en Arqueología cuya aplicación mostraremos en la siguiente subsección, etc.

2.6.1. Aplicación de la teoría de información a la Arqueología

Muchas sociedades prehistóricas han dejado una gran cantidad de símbolos inscritos, para los cuales su significado se han perdido. Entre los objetos duraderos dejados por las sociedades prehistoricas, existen tipos de escrituras enigmáticas. Este tipo de escritos

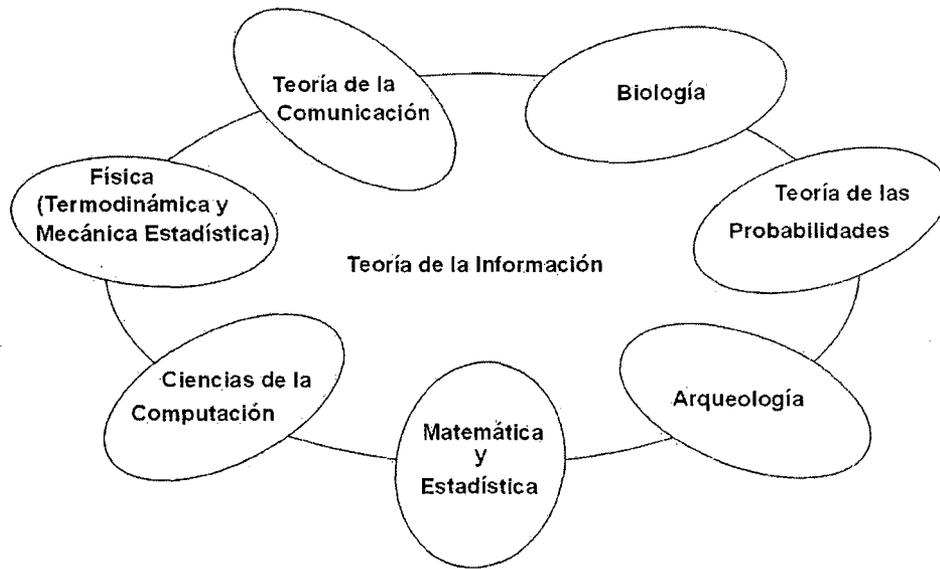


Figura 2.9: Esquema de la relación que existe entre la teoría de la información y diversos campos.

consisten de secuencias muy cortas de símbolos colocados con regularidad (o símbolos individuales) y van desde escritos en cerámica neolítica china, comprimida a través de arcilla con inscripciones, y los sellos del valle Indú, a las piedras inscritas de la cultura escocesa de la edad de hierro (pictos). Uno de los enigmas hasta ahora ha sido determinar si algunos de los conjuntos de símbolos podrían ser un ejemplo de lenguaje escrito.

Como se menciona líneas atrás una de las sociedades que dejaron inscripciones en piedras son los Pictos, quienes dejaron unos pocos cientos de piedras perfectamente talladas con símbolos petroglifos muy estilizados. A pesar de que los símbolos hallados se asumen que sirven para transmitir información; debido al pequeño tamaño (uno o tres símbolos), y en general menos de 1000 símbolos y la naturaleza fragmentada de conjunto de estos símbolos ha sido imposible concluir si esos símbolos representan un lenguaje escrito. Este estudio fue realizado por Rob Lee, Phillip Jonathan y Pauline Ziman Pictish [21], quienes tenían como objetivo verificar si los símbolos pictos representan un lenguaje escrito.

Algunos de los símbolos dejados por los Pictos están mostrados en la figura 2.10.

El problema que plantean los autores para los símbolos pictos se puede descomponer en un par de preguntas.

(i) ¿Son ellos de naturaleza aleatoria?

Lo cual es ciertamente poco probable, ya que parecen haber sido tallados con algún propósito.

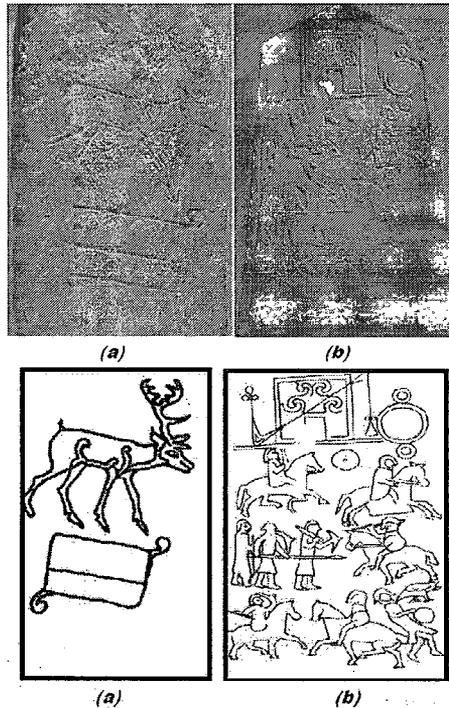


Figura 2.10: simbolos pictos

(ii) Si fuera improbable que ellos son aleatorios, entonces ¿Qué tipo de comunicación ellos transmitían?

Estos tipos de comunicación podrían ser: (a) Sematiography, donde la información es comunicada sin referencia al lenguaje de forma verbal (tal como los caracteres heráldicos que no tienen valor lexigráfico en ellos mismos, pero identifican a una persona, posición y lugar, ó (b) Escritos lexigráficos donde los caracteres encarnan la forma del lenguaje verbal. Un ejemplo de esto son los logogramas que representan palabras y sílabas (no fonéticamente), silabogramas que representan sílabas (foneticamente), signos alfabéticos que representan letras y caracteres de código.

Se menciona también que una característica fundamental de cualquier sistema de comunicación es que existe un grado de incertidumbre (entropía de la información) sobre el caracter particular o mensaje que puede ser transmitido.

Las dificultades que se presentaron en el desarrollo de este trabajo según los autores son:

1. La no disponibilidad de recopilaciones confiables que describan los símbolos específicos.
2. La no definición de los tipos individuales de símbolos.

3. Tamaño de muestra muy pequeño.
4. La naturaleza de las inscripciones (1 ó 3 símbolos en longitud)
5. La ausencia de una técnica para muestras pequeñas.

La razón por la que los autores aplican la técnica de la entropía a estos problemas se debe a la última dificultad mencionada líneas arriba. La entropía de Shannon que viene a ser una medida de la incertidumbre promedio de la ocurrencia de un caracter, vista en la ecuación (2.7), para los autores viene a ser la entropía uni-gram F_1 (un solo caracter). En un conjunto N_u (número de diferentes uni-gram) de diferentes caracteres, la entropía de primer orden (F_1) es dada por

$$F_1 = - \sum_{i=1}^{N_u} p_i \log_2 p_i \quad (2.15)$$

donde p_i es la frecuencia relativa de ocurrencia de un caracter calculado de un conjunto de datos. Como los caracteres aparecen con la misma frecuencia, entonces $p_i = \frac{1}{N_u}$; así la ecuación (2.15) toma la forma:

$$F_1 = \log_2 N_u$$

para esta ecuación los autores obtuvieron la siguiente gráfica.

Sin embargo, en comunicación escrita la medida más simple de la información de caracter a caracter, es la entropía di-gram es decir F_2 , que viene ha ser la medida promedio de incertidumbre del nuevo caracter cuando el caracter precedente es conocido. Shannon define F_2 como

$$F_2 = - \sum_{i,j} p(B_i, S_j) \log_2 p(B_i, S_j) + \sum_i p(B_i) \log_2 p(B_i)$$

esta ecuación viene de (2.12) donde el segundo término es considerado como F_1 ⁸.

Para saber que símbolos tomar como precedentes, y para saber si es o no una escritura lo tallado en las piedras, los autores usan el método del árbol de decisiones ⁹ y así saber si lo que están eligiendo es lo correcto.

⁸Los autores adoptan usar la entropía con F_N como en los teoremas enunciados por Shannon, donde N es el número de caracteres es decir, si $N = 1$ será entropía de uni-gram si $N = 2$ será la entropía de di-grams, etc.

⁹Es un diagrama que representa en forma secuencial condiciones y acciones; muestra que condiciones se consideran en primer lugar, en segundo lugar y así sucesivamente. Este método permite mostrar la relación que existe entre cada condición y el grupo de acciones permisibles a ella.

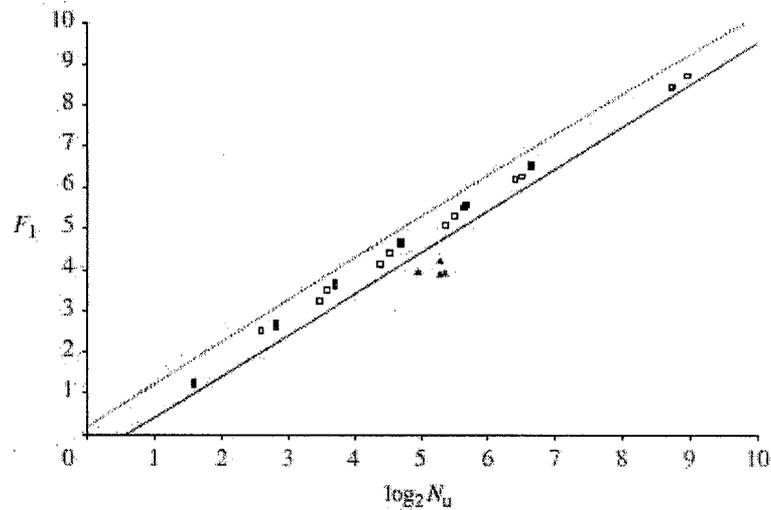


Figura 2.11: Gráfica de la entropía uni-gram F_1 versus $\log_2 N_u$ (número de diferentes uni-gram). El gráfico muestra el 99.9% de línea de confianza para la predicción de datos aleatorios. Esta figura pone a prueba si las piedras corresponden a un tamaño de muestras similar de un alfabeto finito de igual frecuencia relativa de ocurrencia de uni-gram. Es extremadamente poco probable que los valores observados para las piedras pictas ocurran por casualidad. Los cuadrados en blanco son datos aleatorios, los triángulos sombreados son símbolos pictos en piedra, la línea punteada superior representa 99.9% de confianza para la predicción, la línea sólida inferior el 99.9% de confianza para la predicción.

Resultados

Como el objetivo de este trabajo es verificar si los símbolos Pictos representan o no un lenguaje escrito, los autores usando la entropía de Shannon y haciendo uso del método del árbol de decisiones llegan al resultado que se aprecia en la figura 2.11 que muestra el 99,9% de elipse de confianza para la predicción alrededor de 40 conjuntos de datos aleatorios. El conjunto de datos mostrados en la figura 2.11 fueron generados de la siguiente manera:

Los caracteres fueron muestreados de una distribución uniforme (con igual frecuencia relativa) en pequeñas unidades de glifos vistos sobre las piedras. Las propiedades clave (número total de unigrams, número de diferentes unigrams y la subsecuente fracción de unigrams que aparecen sólo una vez) contenían las correspondientes propiedades observadas en las piedras (la regularidad de aparición de los símbolos). La figura 2.11 por lo tanto prueba que las piedras corresponden a muestras de tamaño similar de un alfabeto finito de igual frecuencia relativa de ocurrencia unigram.

Conclusiones.

Los autores concluyen mencionando que la técnica de la entropía para investigar grados de

comunicación en sistemas de escritura muy pequeños e incompletos, es entonces aplicable. Otra conclusión a la que hacen énfasis los autores es que el tamaño de las muestras es muy importante para aplicar el método de la entropía para saber si es un sistema de comunicación.

Capítulo 3

Entropía Generalizada-Principio de Máxima Entropía

Introducción

El principio de Máxima Entropía (PME) con ayuda de la teoría de la información nos proveen de un procedimiento sistemático y objetivo para construir distribuciones de probabilidad sobre las bases de un conocimiento parcial. La formulación de este principio de manera general fue expuesta por primera vez en el artículo de E. T. Jaynes [22]; sin embargo, este fue desarrollado hace muchos años notado por J. W. Gibbs [23] en el área de la Física (Mecánica Estadística) pero que no fue tomado en cuenta considerando que no era esencial dentro de la teoría. No obstante, esto que no era esencial paso a tomar un significado más profundo gracias al trabajo de C. E. Shannon [1] quien demostró que la entropía era un concepto general independiente de la Termodinámica y la Mecánica Estadística (ME). Por lo tanto si consideramos la entropía como punto de partida y bajo la maximización de la misma es posible deducir todas las distribuciones de probabilidad y reescribir todas las ecuaciones de la Mecánica Estadística sin considerar hipótesis adicionales tales como el postulado de la Equiprobabilidad, Ergodicidad y Transitividad Métrica; pero no sólo podremos encontrar estas distribuciones sino también todas las distribuciones de probabilidad que son conocidas en la teoría de la Estadística Matemática.

Debido al carácter general que éste PME presenta en la actualidad es aplicado en innumerables áreas como por ejemplo en Ecología [24], Economía [25], Matemática [26], etc.

En la primera sección desarrollaremos en detalle el procedimiento general y sistemático para determinar las distribuciones de probabilidad aplicando el PME.

En la segunda parte observaremos como la Mecánica Estadística tomando como punto

de partida el concepto de entropía puede ser reescrita a partir de este principio.

Por último mostraremos que este principio formulado de forma general, nos permite obtener todas las distribuciones de probabilidad (discretas y continuas) más conocidas de la estadística matemática, incluyendo la distribución de Bernoulli el cual, en la teoría de las probabilidades es tomado como punto de partida para construir todas las demás distribuciones como son: Uniforme, Normal, de Laplace, etc.

3.1. Principio de Máxima entropía

Con la finalidad de mostrar como este principio nos permite obtener diferentes distribuciones de probabilidad consideremos:

Sea X una cantidad discreta que puede tomar los valores x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y en el que no se conocen sus correspondientes probabilidades p_i , todo lo que se conoce es el valor medio de la función $f(x)$:

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \quad (3.1)$$

En base a la información dada ¿será posible obtener el valor medio de otra función $\langle g(x) \rangle$? A simple vista el problema parece no tener solución, ya que la información dada no es suficiente para determinar p_i . La ecuación (3.1) y la condición de normalización

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (3.2)$$

deberan ser complementados por $(n - 2)$ condiciones antes de poder encontrar $\langle g(x) \rangle$.

Este problema de especificación de probabilidades en casos donde poca o ninguna información es disponible, fue resuelta por E. T. Jaynes; quien afirma que la distribución de probabilidad con menos sesgo, sujeta a la información con la que cuenta el sistema, es aquella que maximiza la entropía de Shannon [1] ¹

$$H\{p_i\} = - \sum_i p_i \ln p_i \quad (3.3)$$

es decir,

$$\delta H\{p_i\} = 0 \quad (3.4)$$

Para maximizar la ecuación (3.3) de la entropía, sujeta a las constricciones (3.1) y (3.2), aplicaremos el método de los multiplicadores de Lagrange. Como primer paso introducimos los multiplicadores de Lagrange en la ecuación (3.4) obteniendo la siguiente relación:

¹Esta relación denominada Entropía, también puede ser obtenida en el contexto de la mecánica estadística (colectividad canónica) y es interpretada como una magnitud que mide el grado de desorden molecular en un sistema físico.

$$-\sum_i \delta p_i \ln p_i - \lambda \sum_i \delta p_i - \mu \sum_i \delta p_i f(x_i) = 0$$

luego factorizando δp_i tenemos

$$\sum_i \{-(1 + \ln p_i) - \lambda - \mu f(x_i)\} \delta p_i = 0$$

como las variaciones δp_i son arbitrarias,

$$-(1 + \ln p_i) - \lambda - \mu f(x_i) = 0$$

de donde:

$$p_i = e^{-\lambda_0 - \mu f(x_i)} \quad (3.5)$$

donde $-(1 + \lambda) \equiv \lambda_0$.

Las constantes λ y μ son determinadas al sustituir (1.5) en las ecuaciones (3.2) y (3.1) obteniendo:

$$\lambda_0 = \ln Z(\mu) \quad (3.6)$$

$$\langle f(x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z(\mu) \quad (3.7)$$

donde

$$Z(\mu) = \sum_i e^{-\mu f(x_i)}$$

la cual será llamada la función de partición.

Este método de determinar distribuciones de probabilidad puede ser generalizado a cualquier número de funciones $f(x)$: teniendo en cuenta los promedios

$$\langle f_r(x) \rangle = \sum_i p_i f_r(x_i) \quad (3.8)$$

Para este caso general la distribución de probabilidad de máxima entropía será,

$$p_i = e^{\{-\lambda_0 + \lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_n f_n(x_i)\}} \quad (3.9)$$

y la función de partición tomará la siguiente forma,

$$Z(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_i \{ -[\lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_n f_n(x_i)] \} \quad (3.10)$$

las constantes $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ serán determinadas a través de la siguientes relaciones,

$$\langle f_r(x) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda_r} \ln Z \quad (3.11)$$

$$\lambda_0 = \ln Z. \quad (3.12)$$

Reemplazando la ecuación (3.9) en la ecuación (3.3) la entropía se reduce a

$$S_{max} = \lambda_0 + \lambda_1 \langle f_1(x) \rangle + \dots + \lambda_n \langle f_n(x) \rangle, \quad (3.13)$$

y la varianza de la distribución de $f_r(x)$ estará dada por

$$\Delta^2 f_r = \langle f_r^2 \rangle - \langle f_r \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_r^2} (\ln Z) \quad (3.14)$$

Matemáticamente, la distribución de máxima entropía tiene una importante propiedad: Es la de asignar pesos positivos a cada situación que no es absolutamente excluida por la información dada.

3.2. Aplicación a la Mecánica Estadística

El procedimiento matemático concerniente a la maximización de la entropía tal como se vió en la sección anterior, fue observado hace muchos años por Gibbs [23]. Sin embargo, en el pasado estas propiedades no fueron tomadas en cuenta considerando que no eran esenciales para la teoría, y que no proveían en ellas mismas una justificación para los métodos de la ME. La característica faltante de este procedimiento fue provista por Shannon [1] demostrando que la expresión para la entropía tiene un significado profundo, totalmente independiente de la termodinámica ².

Este descubrimiento hace posible que podamos realizar un procedimiento inverso al usual razonamiento de la (ME), en el que uno previamente construye una teoría basada sobre las ecuaciones de movimiento, complementadas por hipótesis adicionales de ergodicidad, transitividad métrica, o equiprobabilidad a priori, y la identificación de la entropía se hace al final, comparando las ecuaciones resultantes con las leyes de la Termodinámica. Ahora; sin embargo, si consideramos el concepto de entropía como punto de partida, y encontramos una distribución de probabilidad que maximice la entropía, sujeta a ciertas constricciones viene ha ser un hecho esencial el cual justifica el uso de esa distribución para la inferencia.

La consecuencia más importante de este punto de vista inverso es sin duda la simplificación conceptual y matemática.

²La entropía termodinámica es idéntica con la entropía de la teoría de la información excepto por la presencia de la constante de Boltzmann.

Uno de los problemas fundamentales en la (ME) es determinar la distribución de una cantidad dada de energía E constante, sobre N sistemas idénticos los cuales pueden ser encontrados en posibles estados de energía [27].

Específicamente, lo mencionado puede ser resumido a través de las siguientes dos relaciones

$$\sum_i n_i = N \quad (3.15)$$

$$\sum_i n_i \varepsilon_i = E \quad (3.16)$$

estas dos constricciones vienen a ser la información total acerca del sistema.

Con la finalidad de obtener la distribución de probabilidad, aplicaremos el PME tomando en cuenta la entropía obtenida dentro de la colectividad canónica, la cual esta dada por:

$$S = -k_B \sum p_i \ln p_i \quad (3.17)$$

donde k_B es denominada la constante de Boltzmann.

Maximizando (3.17) bajo las restricciones (3.15) y (3.16) se obtiene la siguiente distribución de probabilidad.

$$p_i = C e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (3.18)$$

La cual es análoga a la ecuación (3.5) y es conocida como la distribución de Boltzmann.

Normalizando obtenemos

$$C = \frac{1}{Z(\beta)}$$

donde:

$$Z(\beta) = \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (3.19)$$

es denominada la función de partición.

Al reemplazar la ecuación 3.18 en la relación (3.17) tenemos que la entropía máxima toma la siguiente forma

$$S_{max} = k\beta E + k \ln Z(\beta) \quad (3.20)$$

la cual es análoga a la ecuación (3.13).

De las relaciones termodinámicas se sabe:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \quad (3.21)$$

reemplazando (3.20) en (3.21) obtenemos

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

Al reemplazar la ecuación (3.20) en la expresión de la energía libre de Helmholtz dada por

$$A(N, V, T) = E - TS \quad (3.22)$$

obtenemos,

$$A(N, V, T) = -kT \ln Z(\beta) \quad (3.23)$$

Si reemplazamos (3.18) en la constrictión (3.16), el valor medio de la energía estará dado por:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (3.24)$$

y su correspondiente varianza estará dada por:

$$\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (\ln Z), \quad (3.25)$$

las cuales son análogas a las ecuaciones (3.11) y (3.14).

De lo expuesto podemos afirmar que si consideramos la relación de la entropía como punto de partida, obtenemos todas las ecuaciones que son conocidas en la Mecánica Estadística.

3.3. Aplicación a la Estadística Matemática

En la teoría de la Estadística Matemática, específicamente en la teoría de las probabilidades existe un gran número de distribuciones de probabilidad representativas de experimentos aleatorios que pueden ser descritas razonablemente con ayuda de expresiones matemáticas correspondientes a distribuciones teóricas. Esto tiene la gran ventaja de permitir la aplicación de ciertas propiedades de estas distribuciones a resultados experimentales.

Las principales distribuciones de probabilidad tal como se conocen en la teoría de la Estadística Matemática se originan a partir de la observación de un sencillo experimento

conocido como la prueba de Bernoulli ³. Por lo tanto, podemos afirmar que las distribuciones de probabilidad más conocidas son el resultado de la experiencia y observación; sin embargo, veremos a continuación, cómo estas distribuciones de probabilidad pueden ser obtenidas a través de un principio fundamental, denominado el principio de máxima entropía.

3.3.1. Distribuciones de probabilidad

Las distribuciones de probabilidad son generadas a partir de su correspondientes variables aleatorias. Éstas pueden ser discretas o continuas, esto dependerá de los valores que pueda tomar la variable aleatoria. Si toma valores discretos corresponderá a la distribución de probabilidad discreta, en caso contrario, si la variable aleatoria toma valores continuos, corresponderá a la distribución de probabilidad continua.

Distribuciones de probabilidad discretas y el principio de máxima entropía

Distribución de Bernoulli

La distribución de Bernoulli es una distribución que toma dos valores (1 y 0) con probabilidad p y $q = 1 - p$. Usualmente esta distribución aparece en experimentos donde se identifica el suceso 1 = éxito y 0 = fracaso.

Definición.- Una variable aleatoria x tiene una distribución de Bernoulli, si la correspondiente distribución de probabilidad para algún p con $(0 \leq p \leq 1)$, puede ser escrita como:

$$P(x) = q^{1-x}p^x \quad (3.26)$$

con

$$P(x = 1) = p$$

$$P(x = 0) = q = 1 - p$$

Propiedades.- Las principales propiedades de esta distribución están dadas por

- Media $\mu = p$
- Varianza $\sigma^2 = p(1 - p)$
- $p + q = 1$

³Experimento aleatorio en el que es posible obtener sólo dos posibles resultados (éxito-fracaso) y sus correspondientes probabilidades se mantienen constantes a lo largo de toda la serie de ensayos

Ahora observaremos cómo la ecuación (3.26) puede ser obtenida aplicando el PME.

Las constricciones para obtener esta distribución son:

$$\sum_{x=0}^1 p(x) = 1 \quad (3.27)$$

$$\sum_{x=0}^1 xp(x) = p \quad (3.28)$$

Maximizando la entropía sujeta a las dos constricciones obtenemos,

$$p(x) = e^{-\lambda - \beta x} \quad (3.29)$$

Para calcular λ y β reemplazamos (3.29) en las relaciones de constricción, reemplazando la ecuación (3.29) en la ecuación (3.27) obtenemos,

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{1 + e^{-\beta}} \quad (3.30)$$

donde

$$\lambda = \ln(1 + e^{-\beta})$$

reemplazando (3.29) en (3.28) y haciendo uso de la ecuación (3.30) tenemos

$$e^{-\beta} = \frac{p}{q} \quad (3.31)$$

reemplazando (3.30) y (3.31) en (3.29) obtenemos la famosa distribución de Bernoulli.

$$p(x) = q^{1-x} p^x$$

Distribución Uniforme

Una distribución de probabilidad uniforme,

$$p(x) = \frac{1}{n} \quad (3.32)$$

es aquella para la cual la variable aleatoria puede tomar n valores distintos, x_1, x_2, \dots, x_n , cada uno de ellos con la misma probabilidad $\frac{1}{n}$; es decir, con probabilidad uniforme.

Para obtener esta distribución de probabilidad aplicando el PME la única constricción a considerar será la condición de normalización.

$$\sum_{i=1}^n p(x) = 1 \quad (3.33)$$

maximizando la entropía bajo esta única restricción se tiene:

$$p(x) = e^{-\lambda} \quad (3.34)$$

al reemplazar (3.34) en (3.33) tenemos que

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{n} \quad (3.35)$$

reemplazando en (3.34) obtenemos la distribución de probabilidad uniforme, la cual viene expresada por:

$$p(x) = \frac{1}{n}$$

3.3.2. Distribuciones de probabilidad continuas y el principio de máxima entropía

En lo anterior pudimos observar que las distribuciones de probabilidad discretas pueden ser derivadas aplicando el principio de máxima entropía. Ahora observaremos como también las distribuciones de probabilidad continuas pueden ser deducidas haciendo uso de este mismo principio considerando la versión continua de la expresión para la entropía dada por

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx \quad (3.36)$$

Distribución de Laplace

Las restricciones para obtener esta distribución son:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (3.37)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx = \omega \quad (3.38)$$

maximizando la ecuación (3.36) de la entropía bajo estas restricciones se tiene,

$$p(x) = e^{-\lambda - \mu|x|} \quad (3.39)$$

para encontrar λ y μ reemplazamos (3.39) en (3.37) y (3.38) respectivamente. reemplazando (3.39) en (3.37) tenemos,

$$e^{-\lambda} = \frac{\mu}{2} \quad (3.40)$$

entonces

$$p(x) = \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x|} \quad (3.41)$$

luego reemplazando (3.39) en (3.38) tenemos que

$$\frac{1}{w} = \mu \quad (3.42)$$

Finalmente reemplazando (3.40) y (3.42) en (3.39) obtenemos la conocida distribución de probabilidad de Laplace

$$p(x) = \frac{1}{2w} e^{-\frac{|x|}{w}} \quad (3.43)$$

Distribución normal

Para obtener esta distribución aplicando el PME es necesario considerar las siguientes tres constricciones

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (3.44)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \mu \quad (3.45)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \sigma^2 \quad (3.46)$$

$\forall x \in (-\infty, \infty)$ Maximizando la ecuación (3.36) sujeto a las tres constricciones obtenemos la siguiente distribución,

$$p(x) = e^{-\alpha - \beta x - \gamma(x - \mu)^2} \quad (3.47)$$

reemplazando la ecuación (3.47) en (3.44) tenemos que

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{e^{-\gamma\mu^2} e^{-\gamma(\frac{a}{2\gamma})^2} \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

donde: $a = \beta - 2\gamma\mu$

entonces $p(x)$ toma la siguiente forma

$$p(x) = \frac{e^{-\gamma x^2 - ax}}{e^{-\frac{a^2}{4\gamma}} \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.48)$$

reemplazando (3.48) en (3.45) tenemos que

$$\gamma = \frac{a}{2\mu} \quad (3.49)$$

luego $p(x)$ toma siguiente forma

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{a}{2\mu}x^2 - ax}}{e^{-\frac{a\mu}{2}} \left(\frac{2\mu\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.50)$$

reemplazando (3.50) en (3.46) tenemos que

$$\sigma^2 = \frac{\mu}{a} \quad (3.51)$$

Finalmente $p(x)$ tomara la siguiente forma

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad (3.52)$$

La cual es denominada la distribución normal.

En conclusión de lo desarrollado podemos afirmar que todas las distribuciones de probabilidad discretas y continuas que son conocidas en la teoría de la estadística matemática, pueden ser derivadas aplicando el principio de máxima entropía.

Parte III

Problema de Investigación

Capítulo 4

Mecánica estadística y termodinámica de un sistema económico simple

Las analogías que se observan entre las características de ciertos sistemas físicos estadísticos (SFE) y los sistemas económicos, tales como:

1. Gran número de componentes.
2. Impredecibilidad ¹.
3. Conceptos análogos, como los mostrados en la siguiente tabla

Economía	Física
Macroeconomía	Descripción Macroscópica
Microeconomía	Descripción Microscópica
Sistemas abiertos	Sistemas abiertos
Sistemas cerrados	Sistemas cerrados
Interacciones entre agentes	Interacciones entre partículas

Cuadro 4.1: Analogías por simple inspección entre los sistemas económicos y los SFE.

sugieren aplicar los métodos de la Mecánica Estadística a sistemas económicos con la finalidad de obtener lo que se podría llamar “termodinámica” de dichos sistemas.

Con la finalidad de lograr dicho objetivo, haremos uso de la teoría de las colectividades estadísticas. Dentro de este contexto, es sabido que la termodinámica de un SFE puede ser

¹La impredecibilidad considerada para este caso sólo esta referida a la falta de información completa; mientras que, en el caso de SFE la impredecibilidad es debida a dos factores: uno que es la falta de información completa y la otra que es inherente a la naturaleza microscópica de los SFE (Principio de Incertidumbre de Heisenberg).

determinada a partir de un potencial termodinámico tal como la entropía del sistema.²

Por lo tanto, con el fin de determinar la “termodinámica de un sistema económico” será preciso determinar en primer lugar su “entropía”.

4.1. Entropía en un sistema económico

Como hemos podido observar en la teoría de la comunicación, Shannon propone la expresión (2.7) como una medida de la incertidumbre denominada posteriormente como entropía. Esta relación tiene una característica general con dependencia solamente probabilística. La misma que también es obtenida dentro de la teoría de colectividades propuesta por J. W. Gibbs [23].

De lo mencionado anteriormente y por su carácter probabilístico la expresión denominada entropía puede ser aplicada, en general, a sistemas en los cuales se manifiesta una impredecibilidad.

Por lo tanto, podemos afirmar que es posible definir la entropía en un sistema económico, debido a que los sistemas económicos son altamente impredecibles. La impredecibilidad de los sistemas económicos se debe a la gran cantidad de variables y gran cantidad de agentes con los que opera, lo que consecuentemente hace que no podamos tener una información completa del sistema.

Definir la entropía en este sistema nos permitirá encontrar los análogos económicos de los parámetros termodinámicos, como se mostrará en detalle para el caso de un sistema económico sólo con redistribución de dinero que por brevedad llamaremos “sistema económico de tipo 1”. Existe una clase más general de sistemas económicos que podríamos llamar sistemas de tipo 2 en los cuales, lo que se redistribuye no sólo es el dinero sino en general la riqueza.

En este trabajo haremos un análisis detallado del sistema económico de tipo 1.

4.2. Sistema económico de tipo 1.

Este sistema, tal como es definido por V. Yakovenko [37], está compuesto por N agentes económicos y una cantidad de dinero total D y que cumple con la simetría de tiempo inverso³ en las interacciones, lo que significa que el dinero de dos agentes antes y después

²En efecto, en la colectividad microcanónica el potencial del cual se derivan las variables termodinámicas, es precisamente la entropía.

³El término simetría de tiempo inverso es también utilizado en la Física especialmente en la Física de Partículas para caracterizar colisiones elásticas en el que se conserva la energía cinética antes y después del choque.

del intercambio se conserva; es decir,

$$[m_i, m_j] \rightarrow [m'_i, m'_j] \equiv [m_i - \Delta m, m_j + \Delta m]$$

donde m_i, m_j corresponden a la cantidad de dinero que poseen los agentes i y j antes de la interacción, m'_i, m'_j corresponde a la cantidad de dinero que poseen los agentes después de la interacción y Δm corresponde a la cantidad de dinero que transfiere el agente i al agente j . De la relación anterior se observa que,

$$m_i + m_j = m'_i + m'_j$$

el cual indica que la cantidad de dinero de ambos agentes antes y después de la interacción se conserva ⁴. Esquemáticamente esta interacción es mostrada en la Figura 4.1, en el que uno de los agentes transfiere dinero al otro, una vez realizada la transferencia la suma de los dineros con los que cada agente se retira es la misma antes de realizada la transferencia.

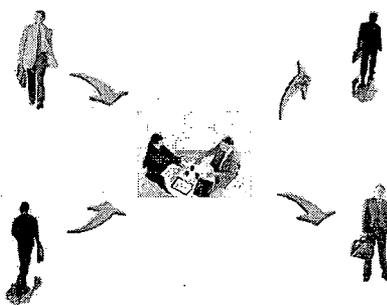


Figura 4.1: Intercambio de dinero entre dos agentes

4.3. Gas ideal y sistema económico de tipo 1.

Las características mencionadas de la redistribución de dinero entre agentes del sistema económico de tipo 1 se ajustan en cierto grado al caso de la redistribución de energía entre las partículas de un gas ideal; sin embargo, debemos notar que la analogía será más estrecha si a los agentes económicos se les impone la condición de no tener deudas ($m_i \geq 0$); puesto que, las partículas de un gas ideal no hacen “prestamos” de energía para interaccionar. No obstante, los agentes económicos y las partículas no son excluidos de poder recibir dinero y energía respectivamente.

Por lo tanto, entre los sistemas se pueden establecer las analogías preliminares mostradas en la siguiente tabla

⁴Esta relación muestra la analogía con la colisión elástica de dos partículas en un gas ideal, en el que la energía cinética antes y después de la colisión es conservada.

Gas ideal	Sistema económico de tipo 1
Energía	Dinero
Número de partículas N	Número de agentes N
Conservación de la energía total E	Conservación del dinero total D
Colisiones elásticas	Simetría de tiempo inverso

Cuadro 4.2: Analogías preliminares entre el gas ideal y el sistema económico de primer tipo.

Para determinar la distribución de la energía del gas ideal, las constricciones que se establecen para este sistema mostrado en la figura 4.2 vienen dadas por

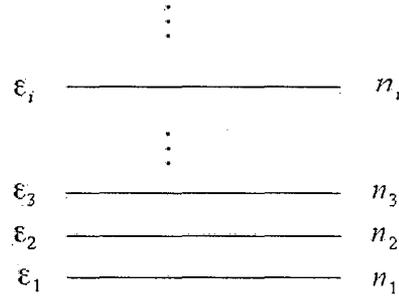


Figura 4.2: Niveles energéticos. Muestran las poblaciones de las partículas que tienen cierta energía

$$\sum_i n_i * \varepsilon_i = E \quad (4.1)$$

$$\sum_i n_i = N \quad (4.2)$$

donde n_i es número de la población de partículas que tienen la energía ε_i .

Similares constricciones se pueden establecer para el sistema económico de tipo 1 mostrado en la figura 4.3, las cuales pueden escribirse en la forma:

$$\sum_i n_i * i = D \quad (4.3)$$

$$\sum_i n_i = N \quad (4.4)$$

donde n_i es el número de agentes que tienen la cantidad de dinero i .

Haciendo uso de la definición de probabilidad $p_i \equiv \frac{n_i}{N}$, las constricciones toman las siguientes formas:

$$\sum_i p_i * i = \frac{D}{N} \quad (4.5)$$

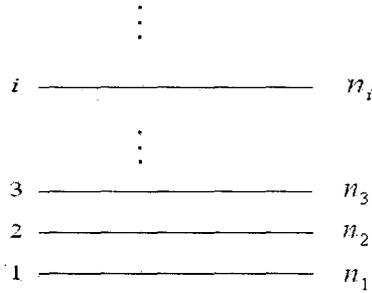


Figura 4.3: Niveles de dinero. En analogía a los niveles energéticos, muestran la población de agentes económicos que tienen una cierta cantidad de dinero.

$$\sum_i p_i = 1 \quad (4.6)$$

donde p_i es la probabilidad de que un agente económico escogido aleatoriamente tenga la cantidad de dinero i .

Para determinar la distribución de probabilidad del dinero, aplicaremos el Principio de la Máxima Entropía tal como fué desarrollado en el capítulo 3.

Como primer paso maximizaremos la ecuación (3.3) sujeta a las constricciones (4.5) y (4.6), aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, como sigue

$$\delta H \{p_i\} = 0 \quad (4.7)$$

Introduciendo los multiplicadores de Lagrange en la ecuación (4.7) obtenemos la siguiente relación

$$-\sum_i \delta (p_i \ln p_i) - \lambda \sum_i \delta p_i - \mu \sum_i \delta p_i * i = 0$$

diferenciando y factorizando δp_i tenemos

$$\sum_i \{-(1 + \ln p_i) - \lambda i - \mu\} \delta p_i = 0$$

como las variaciones δp_i son arbitrarias

$$-(1 + \ln p_i) - \lambda i - \mu = 0$$

Despejando p_i obtenemos la siguiente expresión

$$p_i = e^{-\lambda_0} e^{-\lambda i} \quad (4.8)$$

donde $\lambda_0 \equiv 1 + \mu$.

Para determinar los multiplicadores de Lagrange λ y λ_0 , reemplazamos la ecuación (4.8) en las constricciones del sistema. Reemplazando la ecuación (4.8) en la ecuación (4.6) se tiene:

$$\sum_i e^{-\lambda_0} e^{-\lambda i} = 1$$

de donde

$$e^{-\lambda_0} = \frac{1}{Z(\lambda)} \quad (4.9)$$

donde $Z(\lambda) \equiv \sum_i e^{-\lambda i}$ que podríamos definir como la “función de partición⁵” de nuestro sistema económico.

Con el fin de obtener el valor de λ explícitamente, haremos uso de las versiones continuas de las constricciones; las cuales toman la siguiente forma:

$$\int_0^D P(i) di = 1 \quad (4.10)$$

y

$$\int_0^D P(i) i di = \frac{D}{N} \quad (4.11)$$

reemplazando la ecuación (4.8) en (4.10), tenemos,

$$C \int_0^\infty e^{-\lambda i} di = 1$$

integrando se obtiene

$$C = \lambda \quad (4.12)$$

reemplazando la ecuación (4.8) en (4.11) se tiene,

$$C \int_0^\infty e^{-\lambda i} i di = \frac{D}{N}$$

integrando obtenemos

$$\lambda = \frac{N}{D}.$$

Finalmente la distribución de probabilidad del dinero estará expresada por

$$p_i = \frac{N}{D} e^{-\frac{N}{D} i} \quad (4.13)$$

Al comparar la ecuación (4.13) con la ecuación de Boltzmann - Gibbs obtenida en capítulo 1 ecuación (1.31) (vease también capítulo 3 de R. K. Pathria [34]),

⁵La función de partición que viene a ser la suma sobre los estados nos permite resolver el problema estadístico.

$$P(\varepsilon) = Ce^{-\frac{\varepsilon}{T}} \quad (4.14)$$

donde C es una constante de normalización y viene a ser la inversa de la función de partición mencionada anteriormente.

La última expresión describe la probabilidad de que una partícula en un instante determinado tenga la energía ε .

Es interesante notar que *la temperatura puede ser interpretada como la cantidad promedio de dinero por agente; es decir, $T \equiv \frac{D}{N}$* . (este mismo resultado fué obtenido y mostrado en el artículo de Yakovenko [37]) y como consecuencia, será posible obtener una ecuación de la “equipartición del dinero”

$$D = NT \quad (4.15)$$

análoga a la ecuación de equipartición de la energía para el gas ideal ($E = \frac{3}{2}Nk_B T$).

Sin embargo, debemos notar que no es posible hacer una “interpretación económica” de otros parámetros termodinámicos tales como la presión, el volumen y tampoco magnitudes que estén relacionadas a éstas. El problema radica fundamentalmente en el hecho de que tanto la energía y el dinero no son completamente análogos, puesto que la energía en el caso del gas ideal está sólo expresada en términos de la energía cinética; es decir, $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, esta relación permite obtener la ecuación para la entropía en función del volumen, y partir de ella determinar los demás parámetros termodinámicos como presión, calores específicos, etc. Mientras que para nuestro caso (dinero) no existe tal relación, y por tanto los parámetros como la presión, calores específicos etc. relacionados con el volumen no tienen análogos para el caso económico siguiendo el razonamiento mostrado ⁶.

Reemplazando (4.13) en la expresión (3.3) para la entropía, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(D, N) &= - \sum_{i=0}^D \frac{N}{D} \exp \left\{ -\frac{N}{D} i \right\} \ln \left(\frac{N}{D} \exp \left\{ -\frac{N}{D} i \right\} \right) \\ &= - \sum_{i=0}^D \frac{N}{D} \exp \left\{ -\frac{N}{D} i \right\} \ln \left(\frac{N}{D} \right) + \sum_{i=0}^D \frac{N}{D} \exp \left\{ -\frac{N}{D} i \right\} \frac{N}{D} i \\ &= - \ln \frac{N}{D} \sum_{i=0}^D \frac{N}{D} \exp \left\{ -\frac{N}{D} i \right\} + \frac{N}{D} \sum_{i=0}^D \left(\frac{N}{D} \exp \left\{ -\frac{N}{D} i \right\} \right) * i \end{aligned}$$

reemplazando (4.5) y (4.6) en la última expresión, la entropía toma la forma

⁶Sin embargo, debemos hacer notar que en un contexto económico que va más allá del sistema de tipo 1, J. Minkes [38] define el volumen como el espacio o libertad personal, el cual puede ser modificado debido a la “presión social o económica”; en analogía con el punto de vista puramente termodinámico.

$$\mathcal{H}(D, N) = 1 + \ln \frac{D}{N} \quad (4.16)$$

hacemos notar que (4.16) no es la entropía total del sistema sino más bien la “entropía por agente” (es por esa razón que se usó \mathcal{H} en lugar de H); es decir, “entropía específica” del sistema en cuestión.

La entropía total de este sistema económico deberá verificar la propiedad de extensividad o sea,

$$H(\alpha D, \alpha N) = \alpha H(D, N)$$

donde α es un número real por tanto, a partir de la entropía específica encontrada, la entropía total podría encontrarse multiplicando por N el segundo miembro de la ecuación (4.16), al hacer esto se obtiene

$$H(D, N) = N + N \ln \frac{D}{N} \quad (4.17)$$

Esta ecuación da la entropía total del sistema económico de tipo 1. La característica que se resalta en esta ecuación es que la entropía total depende solamente de la cantidad total de dinero (D) y del número de agentes (N); como corresponde a una cantidad extensiva.

4.3.1. Parámetros termodinámicos del gas ideal sin considerar el espectro energético de sus partículas constituyentes

En el capítulo 1, se determinaron los parámetros termodinámicos para el caso de un gas ideal considerando su espectro energético. Al comparar estas expresiones de los parámetros con las obtenidas para el caso económico, notamos que estructuralmente son análogas; sin embargo, con fines de hacer más evidente la analogía entre este sistema físico y el económico, determinaremos los parámetros termodinámicos del gas ideal sin considerar el espectro energético de sus partículas, de forma similar como fué mostrada en la sección anterior para el sistema económico de tipo 1.

En primer lugar determinamos la distribución de probabilidad aplicando el PME, según el cual maximizamos la ecuación (3.3) sujeta a las constricciones (4.5) y (4.6), obteniendo la siguiente relación para la distribución de probabilidad

$$p_i = C e^{-\frac{\lambda}{k} \epsilon_i} \quad (4.18)$$

Normalizando esta última expresión tenemos que $C = \frac{1}{Z(\lambda)}$, con $Z(\lambda) \equiv \sum_i e^{-\lambda \epsilon_i}$, denominada función de partición.

Con la finalidad de obtener λ explícitamente reemplazaremos la ecuación (4.18) en las versiones continuas de las constricciones (4.5) y (4.6); es decir, en

$$\int_0^{\infty} P(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \quad (4.19)$$

$$\int_0^{\infty} P(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{E}{N} \quad (4.20)$$

de donde integrando obtenemos que:

$$\lambda = \frac{Nk}{E} \quad (4.21)$$

$$C = \frac{N}{E} \quad (4.22)$$

Reemplazando (4.21) y (4.22) en la ec. (4.18) obtenemos la versión completa para la distribución de probabilidad de energía

$$p_i = \frac{N}{E} e^{-\frac{N}{E} \varepsilon_i}. \quad (4.23)$$

Reemplazando este último resultado en la expresión (3.17) para la entropía se obtiene

$$S(N, E) = k_B + k_B \ln \frac{E}{N} \quad (4.24)$$

y nuevamente la entropía debe ser extensiva, es decir: $S(\alpha N, \alpha E) = \alpha S(N, E)$, entonces (4.24) quedará expresada como

$$S(N, E) = Nk_B + Nk_B \ln \frac{E}{N} \quad (4.25)$$

a partir de esta expresión determinamos las variables termodinámicas relacionadas con las variables E y N.

Usando la relación termodinámica $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{N,T}$ y reemplazando la expresión obtenida para la entropía del gas ideal tenemos

$$E = Nk_B T \quad (4.26)$$

conocida como la ecuación de equipartición de energía para el gas ideal, sin considerar el espectro energético ⁷.

Usando la ecuación (4.25) y reemplazando en la siguiente relación termodinámica

$$\frac{\mu}{T} = -\frac{\partial S(N, E)}{\partial N}$$

obtenemos la siguiente expresión para el potencial químico

$$\mu(E, N) = k_B T \ln \frac{N}{E} \quad (4.27)$$

⁷Debemos aclarar que la ecuación de equipartición de la energía al considerar el espectro energético es $E = \frac{3}{2} Nk_B T$.

La energía libre de Helmholtz definida por la ec. (1.7) tomará la siguiente forma al reemplazar (4.25) en (1.7)

$$A = E \ln \frac{N}{E} \quad (4.28)$$

La energía libre de Gibbs definida por

$$G = N\mu$$

al usar (4.27) resulta tener la forma

$$G = Nk_B T \ln \frac{N}{E} \quad (4.29)$$

4.3.2. Determinación de los parámetros “termodinámicos” económicos análogos al gas ideal.

Siguiendo la analogía entre estos dos sistemas (físico y económico) y haciendo uso de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, nuestro “potencial químico económico” sería entonces expresado por

$$\mu_e = -T \frac{\partial H}{\partial N}$$

reemplazando (4.17) en la última expresión, μ_e resulta ser

$$\mu_e(D, N) = T \ln \frac{N}{D} \quad (4.30)$$

A pesar de que no es posible encontrar otros parámetros a parte de los ya identificados por los motivos que ya se hizo notar anteriormente, aún será posible definir el análogo económico de una energía libre de Helmholtz (A) y una energía libre de Gibbs (G) para este sistema como se muestra a continuación:

La definición de la energía libre de Helmholtz dada por $A = E - TS$, en nuestro caso daría lugar al “dinero libre de Helmholtz” y estaría dada por

$$A_e = D - TH \quad (4.31)$$

reemplazando (4.17) en la ecuación (4.31), “el dinero libre de Helmholtz” vendría dado por

$$A_e(D, N) = TN \ln \frac{N}{D} \quad (4.32)$$

La energía libre de Gibbs definida por $G = N\mu$, en nuestro caso daría lugar al “dinero libre de Gibbs” y estaría expresado por

$$G_e = N\mu_e \quad (4.33)$$

reemplazando (4.30) en (4.33), G_e quedaría expresada por

$$G_e(D, N) = NT \ln \frac{N}{D} \quad (4.34)$$

Finalmente, las capacidades caloríficas definidas por $C_V = C_P = \frac{\partial U}{\partial T}$, en nuestro caso vendrían expresadas por

$$C_{V_e} = C_{P_e} = \frac{\partial D}{\partial T} \quad (4.35)$$

reemplazando (4.15) en esta última expresión, $C_{V_e} = C_{P_e}$ quedaría expresada por

$$C_{V_e} = C_{P_e} = N \quad (4.36)$$

Podemos observar que las ecuaciones (4.32) y (4.33) tienen la misma forma, esto no debe sorprendernos ya que el cálculo se obtuvo sin considerar el “espectro de dinero” análogo al “espectro energético del gas ideal”.

Comparando las expresiones termodinámicas del gas ideal sin considerar su espectro de energía con las correspondientes expresiones obtenidas para el sistema económico de tipo 1, se observa claramente la analogía estructural, mencionada antes.

4.3.3. Analogías entre el gas ideal y el sistema económico de tipo 1

En resumen, después de identificar el sistema económico del primer tipo con el gas ideal (sistema físico) mostramos en el siguiente cuadro las analogías que existen entre estos dos sistemas en adición a las analogías preliminares ya mencionadas en la tabla 4.3.

Gas Ideal	Sistema Económico de tipo 1
Estados del sistema de partículas	Estados del sistema económico
Población grande de partículas N	Población grande de agentes N
Energía E	Dinero D
$T = \frac{E}{N}$: Cantidad de energía promedio por partícula.	$T = \frac{D}{N}$: Cantidad promedio de dinero por agente.
Conservación de la energía	Conservación del dinero
En el equilibrio termodinámico: entropía Máxima	En el equilibrio económico: entropía máxima
Distribución de probabilidad de la energía: $P(\epsilon) \propto e^{-\lambda\epsilon}$	Distribución de probabilidad del dinero: $P(i) \propto e^{-\lambda i}$
$E = Nk_B T$ (Equipartición de la energía)	$D = NT$ (Equipartición del dinero)
Energía cinética de la partícula ϵ	Cantidad de dinero del agente i
$\lambda = \frac{1}{k_B T} = \beta$: parámetro estadístico de la temperatura	$\lambda = \frac{1}{T}$: parámetro estadístico de la temperatura económica
$\mu = k_B T \ln \frac{N}{E}$: potencial químico termodinámico	$\mu_e = T \ln \frac{N}{D}$: "potencial químico" económico
Energía libre de Helmholtz: $A = E \ln \frac{N}{E}$	Dinero libre de Helmholtz: $A_e = D \ln \frac{N}{D}$
Energía libre de Gibbs: $G = Nk_B T \ln \frac{N}{E}$	Dinero libre de Gibbs: $G_e = NT \ln \frac{N}{D}$
Función de partición: $\sum_i e^{-\beta\epsilon_i}$	Función de partición: $\sum_i e^{-\lambda i}$

Cuadro 4.3: Resumen de las analogías existentes entre el gas ideal y el sistema económico de tipo 1.

4.3.4. Significado de los parámetros termodinámicos en economía

Vistas las analogías en la tabla 5.3, a continuación interpretamos el significado de cada uno de los parámetros y definiciones físicas identificados en el sistema económico que estamos considerando.

- **Número de partículas:** Puede ser interpretado como el número de agentes económicos.
- **Energía total:** Puede ser interpretado como la cantidad de dinero total en el sistema.
- **Energía cinética de una partícula:** Este parámetro es interpretado como la cantidad de dinero que un agente económico puede intercambiar en un determinado instante.
- **Temperatura o energía media por partícula:** Este parámetro es interpretado como la cantidad media de dinero por agente económico.

- **Distribución de probabilidad de la energía:** Esta vendría a ser para nuestro sistema económico la distribución de probabilidad del dinero, que puede ser interpretada como la probabilidad de que un agente escogido al azar tenga una cantidad de dinero i .
- **Función de partición:** En este sistema económico la función de partición es interpretada como la suma de los factores de Boltzmann ($e^{-\lambda i}$) sobre los estados de dinero ⁸.
- **Presión y Volumen:** Estos dos parámetros en el caso del gas ideal son relevantes, por tanto al comparar nuestro sistema económico al gas ideal, uno pensaría que estos parámetros debieran tener un análogo; sin embargo, debemos notar que la energía cinética no tiene una analogía completa con la cantidad de dinero de cada agente; esto se debe a que la energía cinética de una partícula es aun expresable a través de la relación de dispersión $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ la cual lleva la información sobre el volumen implícitamente; situación que no tiene análogo en el caso del sistema económico considerado.
- **Potencial Químico:** Este parámetro nos permite observar como varía nuestra “entropía económica” cuando el número de agentes aumenta o disminuye.

En conclusión la analogía entre el gas ideal y el sistema económico de tipo 1 no es tan completa, a continuación mostramos otro sistema físico que manifiesta una analogía más completa con el sistema económico de tipo 1.

4.4. Sistema de Osciladores Armónicos de Planck y el sistema económico de tipo 1.

En esta sección mostraremos como el sistema físico constituido por osciladores armónicos de Planck, muestra una mejor analogía con el sistema económico de tipo 1, en comparación con la analogía mostrada por el gas ideal.

Antes de mostrar directamente la analogía que existen entre las relaciones del sistema de osciladores armónicos de Planck con el sistema económico de tipo 1, realizaremos un breve resumen acerca de los osciladores armónicos clásicos y osciladores de Planck haciendo uso de la colectividad canónica, para luego poderlos contrastar con las relaciones obtenidas en la sección anterior para nuestro sistema económico considerado.

⁸Los estados de dinero se refieren a los grupos de agentes económicos que pueden poseer ciertas cantidades de dinero.

4.4.1. Osciladores Armónicos Clásicos

La función Hamiltoniana de un oscilador armónico miembro de un sistema de N osciladores idénticos de masa m y frecuencia ω independientes, está dado por

$$H(q_i, p_i) = \frac{1}{2}m\omega^2 q_i^2 + \frac{1}{2m}p_i^2$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$

Para obtener la función de partición de un sólo oscilador armónico hacemos uso de la correspondiente función Hamiltoniana, usando la forma continua y en el espacio de fases

$$Q_1(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta \left(\frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{1}{2m}p^2\right)\right\} \frac{dq dp}{h}$$

donde $\beta = \frac{1}{k_B T}$

$$Q_1(\beta) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta m\omega^2 q^2\right\} dq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2m}\beta p^2\right\} dp$$

integrando tenemos

$$Q_1(\beta) = \frac{1}{h} \left(\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}\right)^{1/2} \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{1/2}$$

como $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ entonces:

$$Q_1(\beta) = \frac{1}{\hbar\beta\omega}$$

Teniendo este resultado, la función de partición del sistema de N osciladores será:

$$Q_N(\beta) = \{Q_1(\beta)\}^N$$

debido a que los osciladores son idénticos e independientes. por lo tanto

$$Q_N(\beta) = \{\hbar\beta\omega\}^{-N} \quad (4.37)$$

Teniendo la función de partición del sistema de osciladores, ahora será posible determinar la termodinámica de este sistema, siguiendo los métodos de la colectividad canónica.

4.4.2. Determinación de los parámetros termodinámicos del sistema de osciladores clásicos

La energía libre de Helmholtz, definida en términos de la función de partición, está dada por

$$A = -k_B T \ln Q_N(\beta)$$

usando la ecuación (4.37) y reemplazando en la última expresión se tiene

$$A = Nk_B T \ln \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) \quad (4.38)$$

Una vez determinada la energía libre de Helmholtz, ahora estamos en condiciones de determinar el potencial químico a través de la siguiente relación

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_T$$

reemplazando la ecuación (4.38) en esta última expresión, el potencial químico estará dado por

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) \quad (4.39)$$

La presión en este sistema de osciladores clásicos será nula ($P = 0$), puesto que los osciladores se encuentran localizados.

Con la finalidad de determinar la entropía del sistema de osciladores clásicos hacemos uso de la siguiente relación

$$S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{N,U}$$

reemplazando la ecuación (4.38) en esta última relación se tiene

$$S = Nk_B \left\{ \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right) + 1 \right\} \quad (4.40)$$

Ahora con el fin de determinar la energía interna del sistema de osciladores hacemos uso de la siguiente relación

$$U = \frac{\partial \ln Q_N(\beta)}{\partial \beta}$$

reemplazando la ecuación (4.37) en la expresión anterior obtenemos

$$U = Nk_B T \quad (4.41)$$

Para determinar las capacidades caloríficas, tomaremos en cuenta las siguientes relaciones

$$C_p = C_v = \frac{\partial U}{\partial T}$$

usando la ecuación anterior obtenemos la siguiente expresión

$$C_p = C_v = Nk_B \quad (4.42)$$

4.4.3. Sistema de osciladores de Planck

A continuación consideraremos un sistema de osciladores cuánticos. Como se sabe estos pueden ser de dos tipos: De Schrodinger y de Planck, aquí consideraremos los osciladores de Planck.

Como se sabe, los autovalores de la energía del oscilador de Planck en una sola dimensión son:

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega; n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.43)$$

para un solo oscilador, la correspondiente función de partición es

$$Q_1(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}$$

al usar (4.43) la función de partición para un solo oscilador toma la siguiente forma

$$Q_1(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega} \quad (4.44)$$

usando la serie geométrica

$$\sum_{r=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}; |r| < 1$$

la ecuación (4.44) quedará expresada por

$$Q_1(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \quad (4.45)$$

Como la función de partición para N osciladores está dada por $Q_N(\beta) = [Q_1(\beta)]^N$, ya que los osciladores son independientes entre si, entonces se tendrá:

$$Q_N(\beta) = (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-N} \quad (4.46)$$

4.4.4. Parámetros termodinámicos para el sistema de N osciladores de Planck

Para determinar los parámetros termodinámicos correspondientes al sistema de osciladores de Planck, como es usual en la colectividad canónica, haremos uso de la función de partición para el sistema de N osciladores obtenida en la ecuación (4.46).

Energía libre de Helmholtz (A):

Como

$$A = -k_B T \ln Q_N(\beta)$$

haciendo uso de la ecuación (4.46) A tomará la siguiente forma

$$A = Nk_B T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \quad (4.47)$$

Potencial químico (μ):

Como

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N} \right)_T$$

reemplazando (4.47) en esta última relación tenemos que el potencial químico toma la siguiente forma

$$\mu = k_B T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) = \frac{A}{N} \quad (4.48)$$

Presión:

Nuevamente la presión será nula ($P = 0$) por motivos que fueron mencionados anteriormente.

Entropía:

Como

$$S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{N,V}$$

reemplazando (4.47) en esta última relación, la entropía estará dada por

$$S = Nk_B \left\{ \beta\hbar\omega \frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \right\} \quad (4.49)$$

Energía interna:

Como

$$U = \frac{\partial \ln Q_N(\beta)}{\partial \beta}$$

reemplazando (4.47) en esta última relación se tiene que

$$U = \frac{N\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad (4.50)$$

La energía libre de Gibbs:

Como

$$G = N\mu$$

reemplazando (4.48) en la expresión anterior tenemos que

$$G = Nk_B T \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \quad (4.51)$$

Debemos notar que la energía libre de Helmholtz y la energía libre de Gibbs son iguales.

Capacidades caloríficas:

Como

$$c_p = c_v = \frac{\partial U}{\partial T}$$

reemplazando (4.50) en esta última expresión obtenemos que

$$c_p = c_v = Nk_B(\beta\hbar\omega)^2 \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \quad (4.52)$$

Ahora observaremos cómo estas relaciones en el límite clásico; es decir, cuando $kT \gg \hbar\omega$, se reducen a las relaciones ya obtenidas en la sección 5.4.2.

Haciendo uso de la expansión en serie de potencias para e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

y aproximándola al primer orden

$$e^x \approx 1 + x$$

para nuestro caso $x = \beta\hbar\omega$, haciendo la aproximación al primer orden en T , $e^{\beta\hbar\omega}$ podremos escribir

$$e^{\beta\hbar\omega} \approx 1 + \beta\hbar\omega$$

$$e^{-\beta\hbar\omega} \approx 1 - \beta\hbar\omega$$

Reemplazando estas aproximaciones en las relaciones obtenidas para los osciladores de Planck se obtiene que la energía libre de Helmholtz (de la ecuación (4.47)) estará dada por

$$A = G = Nk_B T \ln \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)$$

El potencial químico (de la ecuación (4.48)) , estará dado por

$$\mu = k_B T \ln \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)$$

La ecuación (4.49) referida a la entropía, al reemplazar la aproximación tomará la siguiente forma

$$S = Nk_B \left\{ \ln \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right) + 1 \right\}$$

La ecuación (4.50) referida a la energía interna quedara expresada por

$$U = Nk_B T$$

La ecuación (4.52) referida a las capacidades caloríficas a presión y volumen constantes toman la siguiente forma

$$C_V = C_P = Nk_B$$

De lo expuesto se puede observar que efectivamente las relaciones obtenidas para los sistema de osciladores de Planck, en el límite clásico ($k_B T \gg \hbar\omega$), se corresponden con las relaciones obtenidas para los osciladores clásicos.

4.4.5. Analogías entre el sistema de osciladores de Planck y el sistema económico de tipo 1.

En la sección 4.3 vimos que al realizar la comparación entre el gas ideal y el sistema económico de tipo 1, la analogía no era completa debido a que el volumen en el caso económico era irrelevante, mientras que para el caso del gas ideal si es relevante y por ello hicimos ciertas consideraciones para encontrar las relaciones análogas al caso económico. En contraste, el sistema de osciladores de Planck ofrece una analogía más completa con nuestro sistema económico, puesto que este sistema físico es independiente del volumen (como lo es nuestro sistema económico) debido a que los osciladores están localizados. Además, el espectro energético de cada oscilador la Planck que esta dado por

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega \quad (4.53)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ ($\hbar\omega =$ quantum de energía), se corresponde plenamente con lo que podría llamarse “espectro económico” de cada agente económico

$$\delta_n = ns \quad (4.54)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ ($s =$ “quantum” de dinero: cantidad mínima de dinero que puede ser intercambiado entre los agentes). Esta es la razón por la que las relaciones obtenidas para el sistema de osciladores de Planck se corresponden de forma más completa con las del sistema económico de tipo 1. A continuación resumimos esta analogía más completa en la tabla 4.4.

Sistema de Osciladores de Planck	Sistema Económico de tipo 1
Estados energéticos del sistema de osciladores	Estados de dinero del sistema de agentes
Población grande de osciladores N	Población grande de agentes N
Energía E	Dinero D
Intercambio de energía $\varepsilon_n = n\hbar\omega$ (fotones)	Intercambio de dinero $\delta_n = ns$
En el equilibrio entropía máxima	En el equilibrio entropía máxima
Energía mínima de intercambio $\hbar\omega$	Dinero mínimo de intercambio $s = 1sol$
$\mu = k_B T \ln \frac{\hbar\omega}{k_B T}$	$\mu_e(N, D) = T \ln \frac{N}{D}$ (4.30)
$A = Nk_B T \ln \frac{\hbar\omega}{k_B T}$	$A_e(N, D) = NT \ln \frac{N}{D}$ (4.32)
$E = U = Nk_B T$	$D = NT$ (4.15)
$G = Nk_B T \ln \frac{\hbar\omega}{k_B T}$	$G_e(N, D) = NT \ln \frac{N}{D}$ (4.34)
$C_p = C_v = Nk_B$	$C_{P_e} = C_{V_e} = N$ (4.36)
Función de partición: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}$	Función de partición: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda\delta_n}$

Cuadro 4.4: Analogías entre el sistema de osciladores armónicos de Planck y el sistema económico de tipo 1.

4.4.6. Interpretación de los parámetros termodinámicos en Economía.

Después de haber realizado el cálculo de los parámetros termodinámicos del sistema de osciladores armónicos de Planck y comparado con los parámetros “termodinámicos” del sistema económico de tipo 1, la interpretación de los parámetros del sistema físico en términos económicos podría establecerse del siguiente modo:

- **Número de Osciladores:** Puede ser interpretado como el número de agentes económicos.
- **Energía interna total:** Puede ser interpretado como la cantidad de dinero total en el sistema.
- **Espectro energético de un oscilador de Planck:** Este parámetro puede ser interpretado como el “espectro” de dinero de un agente económico, que en analogía con el espectro energético de Planck esta dado por

$$\delta_n = ns$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$ y s es la cantidad mínima de dinero que un agente puede intercambiar (la unidad fundamental de dinero).

- **Temperatura:** Este parámetro es interpretado como la cantidad media de dinero por agente económico, correspondiente a la energía media por oscilador.

- **Distribución de probabilidad de energía:** Esta vendría a ser para nuestro sistema económico la distribución de probabilidad del dinero, que puede ser interpretada como la probabilidad de que un agente escogido al azar tenga una cantidad de dinero s .
- **Función de partición:** En este sistema económico la función de partición es interpretada como la suma de los factores de Boltzmann ($e^{-\lambda s}$) sobre estados de dinero.
- **Presión y Volumen:** Estos dos parámetros en el caso del sistema económico son irrelevantes, y en el caso de los osciladores por estar éstos localizados estos parámetros también son irrelevantes.
- **Potencial Químico:** Este parámetro nos permite observar como varía nuestra “entropía económica” cuando el número de agentes aumenta o disminuye.
- **Energía Libre:** Debido a que existe una correspondencia entre el dinero y la energía, este parámetro podría ser denominado como “dinero libre”. Sin embargo, con la finalidad de dar una interpretación económica a este parámetro, recordemos que la energía libre como fue definida en el capítulo 1, está relacionada con parte de la energía interna del sistema que puede ser convertida en trabajo útil. Haciendo corresponder al caso económico este parámetro vendría a ser el “dinero libre” del sistema económico que podría interpretarse como el dinero que podría ser utilizado para realizar inversiones u otras actividades económicas.

4.4.7. Relación Energía - Temperatura para los Osciladores de Planck y su aplicación e interpretación al caso del sistema económico de tipo 1.

Como una ilustración adicional de la analogía entre los dos sistemas considerados; a continuación mostramos en detalle el cálculo de la entropía a partir de la determinación del número de microestados del sistema de osciladores de Planck, con la finalidad de obtener la relación entre la energía y la temperatura.

Consideremos un sistema de osciladores de Planck formado por N osciladores independientes, cuyo estado macroscópico está caracterizado por $E = Rh\nu$, donde R es un entero. Los niveles energéticos de cada uno de los osciladores independientes que conforman este sistema están dados por $\varepsilon_n = nh\nu$, con $n = 0, 1, 2, \dots$ ν es la frecuencia lineal.

Para encontrar la relación Energía - Temperatura primero calculamos la correspondiente entropía usando la expresión que define a la entropía de Boltzmann

$$S = k_B \ln \Omega \quad (4.55)$$

Para ello determinamos primero el número de microestados Ω . Como los osciladores son independientes, entonces

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad (4.56)$$

donde, E_i viene a ser la energía del i -ésimo oscilador, además como cada oscilador tiene el espectro energético $\varepsilon_n = nh\nu$, entonces el i -ésimo oscilador tendrá la energía

$$E_i = n_i h\nu \quad (4.57)$$

con $n_i = 0, 1, 2, \dots$

reemplazando (4.57) en (4.56)

$$E = h\nu \sum_{i=1}^N n_i \quad (4.58)$$

igualando (4.58) con $E = Rh\nu$ se tiene

$$\sum_{i=1}^N n_i = R \quad (4.59)$$

donde,

R , representa el número de quanta de energía en el sistema.

n_i , corresponde al número de quanta de energía en el i -ésimo oscilador (un número no prefijado).

De lo anterior, el cálculo de Ω se reduce a determinar el número de formas en que R quanta pueden ser distribuidos entre M osciladores. De tal manera que se cumpla la ecuación (4.59), donde n_i no es fijo en cada oscilador. El resultado bajo estas condiciones (ver R. K. Pathria) está dado por

$$\Omega = \frac{(R + N - 1)!}{R! (N - 1)!} \quad (4.60)$$

reemplazando (4.60) en (4.55) se tiene

$$S(N, R) \approx k_B \ln \left\{ \frac{(R + N - 1)!}{R! (N - 1)!} \right\} \quad (4.61)$$

aplicando el logaritmo del cociente tenemos que

$$\ln \left\{ \frac{(R + N - 1)!}{R! (N - 1)!} \right\} = \ln(R + N - 1)! - \ln R! - \ln(N - 1)!$$

aplicando la aproximación de Stirling ($\ln p! \approx p \ln p - p$) en cada uno de los términos de la última ecuación, dado que $N \gg 1$ y $R \gg 1$, tenemos que

$$\ln \Omega \approx (R + N) \ln(R + N) - R \ln R - N \ln N$$

reemplazando esta última ecuación en (4.61), la entropía del sistema de osciladores de Planck estará dada por

$$S(N, R) \approx k_B \left[R \ln \left(\frac{R + N}{R} \right) + N \left(\frac{R + N}{N} \right) \right] \quad (4.62)$$

Este es el potencial termodinámico que nos permite calcular la termodinámica del sistema; como nuestra finalidad es obtener la relación entre la energía y la temperatura, hacemos uso de la relación termodinámica

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{N, V} \quad (4.63)$$

Como los osciladores están localizados no hay dependencia del volumen, el número de osciladores del sistema es N y además como $E = h\nu R$, aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial R} \right)_N \frac{\partial R}{\partial E} \quad (4.64)$$

de donde se obtiene que la temperatura para el sistema de osciladores de Planck viene expresada por

$$T = \frac{h\nu}{k_B \ln \left(1 + \frac{Nh\nu}{E} \right)} \quad (4.65)$$

por lo tanto la relación Energía-Temperatura viene dada por:

$$E(T) = \frac{Nh\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (4.66)$$

En el límite clásico; es decir, cuando $k_B T \gg h\nu$, y tomando la aproximación al primer orden en T de la expansión en series de potencia de la función $e^{\frac{h\nu}{k_B T}}$ se obtiene

$$E(T) = Nk_B T \quad (4.67)$$

Esta ecuación viene a ser la energía interna del sistema de osciladores de Planck que fue obtenida anteriormente haciendo uso de la colectividad canónica (Ver sección 5.4.4).

Cabe notar que este último resultado que en el límite clásico para el sistema de osciladores de Planck, se corresponde casi completamente con la ecuación del dinero (4.15), con la obvia excepción de la constante de Boltzmann. Esta analogía más completa es explicable ya que

el sistema de osciladores de Planck tiene un espectro energético (4.57) que es similar a la ecuación (4.54) que sería la análoga económica del espectro energético que se ha considerado.

Este resultado nos lleva a la conclusión de que los agentes económicos del sistema económico de tipo 1 pueden ser identificados de mejor manera con los osciladores de Planck; por lo tanto, en el sistema económico de tipo 1, el problema se reduce al cálculo de determinar el número de maneras diferentes de distribuir una cantidad total de dinero D entre N agentes económicos, que intercambian múltiplos enteros de una cantidad mínima de dinero s (digamos $s = 1$ nuevo sol); exactamente en la misma forma en que los osciladores de Planck intercambian múltiplos enteros de una cantidad mínima de energía $\hbar\omega$ (fotón).

De la ecuación (4.67) se puede observar que existe una proporcionalidad entre la energía y la temperatura; es decir, a medida que aumenta la temperatura la energía interna aumentará. Por lo tanto para nuestro sistema económico de tipo 1, dado que existe una correspondencia entre el dinero y la energía, al aumentar la “temperatura económica” ($T = \frac{D}{N}$) la cantidad total de dinero aumentará.

De lo mencionado se puede observar que existe una analogía más completa entre el sistema de osciladores de Planck con el sistema económico de tipo 1.

Conclusiones

Después de haber realizado el presente trabajo de tesis, hemos arribado a las siguientes conclusiones.

1. De las relaciones obtenidas en los sistemas físicos (gas ideal y sistema de osciladores armónicos de Planck) análogos al sistema económico de tipo 1; se concluye que el sistema de osciladores de Planck muestra *una analogía más completa* con el sistema económico de tipo 1.
2. Uno de los aspectos más relevantes para considerar que el sistema económico de tipo 1 y el sistema de osciladores armónicos de Planck son análogos es que la cantidad de dinero con la que cuentan los agentes $\delta_n = ns$ se identifica con el espectro energético de cada uno de los osciladores armónicos de Planck $\varepsilon_n = nh\omega$. La mínima cantidad de dinero con la que un agente puede contar es de 1 nuevo sol mientras que la mínima energía con la que puede contar un oscilador armónico de Planck es la que corresponde a un fotón $\hbar\omega$. Las demás analogías que existen entre el sistema económico de tipo 1 y el sistema de osciladores de Planck son:
 - a) Las cantidades μ, A, U, G, C_P, C_V del caso físico, tienen sus correspondientes cantidades análogas en el sistema económico identificadas como $\mu_e, A_e, U_e, G_e, C_{P_e}, C_{V_e}$. (sección 4.4.5)
 - b) La temperatura T del sistema de osciladores armónicos de Planck en el sistema económico de tipo 1 viene a ser $T = \frac{D}{N}$ denominada “temperatura económica”. (sección 4.4.6)
 - c) En el sistema de osciladores de Planck lo que se intercambia son múltiplos de una unidad energética, mientras que en el sistema económico de tipo 1 lo que se intercambia son múltiplos enteros de una unidad monetaria.
3. Dado que es posible definir una entropía en todo sistema probabilístico, como es el caso del sistema económico de tipo 1, ha sido posible aplicar métodos de la Mecánica

Estadística a este sistema para determinar la “termodinámica económica” del sistema económico considerado.

4. *Se ha encontrado un sistema físico (el sistema de osciladores de Planck) completamente análogo al sistema económico de tipo 1 (un sistema sólo con intercambio de dinero).*

Sugerencias

El desarrollo del presente trabajo de tesis sugiere futuras investigaciones de tesis como:

1. Utilizando la entropía de Shannon, como se observó en el capítulo 2, es posible hacer un análisis sobre símbolos dejados por las antiguas culturas y verificar si estos símbolos representan o no un lenguaje escrito como se puede ver en el artículo [21]. Esto sugiere hacer una aplicación de la entropía de Shannon a los símbolos encontrados en los restos arqueológicos de la cultura Inca y verificar si estos símbolos representan o no, un lenguaje escrito.
2. Así como fué posible encontrar un sistema físico (Osciladores armónicos de Planck) análogo al sistema económico de tipo 1 (redistribución de dinero) ¿Será posible encontrar algún sistema físico análogo al sistema económico de tipo 2 (distribución de riqueza)? el cual es caracterizado por una distribución potencial o ley de distribución de Pareto.

Apéndice A

Potenciales termodinámicos.

En este apéndice mostramos como las diferentes cantidades termodinámicas son obtenidas a partir de los potenciales termodinámicos.

Energía interna $U(N,V,S)$

La energía interna describe a un sistema cerrado, isócoro, adiabático, por lo que está en función de la entropía, volumen y el número de partículas:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \quad (\text{A.1})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{N,V} = T \quad (\text{A.2})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{N,S} = -P \quad (\text{A.3})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{N,S} = \mu \quad (\text{A.4})$$

Entropía $S(N,V,U)$

La entropía describe a un sistema cerrado, isócoro, adiabático, por lo que está en función de la energía interna, volumen y el número de partículas:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN \quad (\text{A.5})$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{N,V} = \frac{1}{T} \quad (\text{A.6})$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,E} = \frac{P}{T} \quad (\text{A.7})$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E} = -\frac{\mu}{T} \quad (\text{A.8})$$

Energía libre de Helmholtz $A(N, V, T) = U - TS$

Este potencial termodinámico describe a un sistema cerrado, isócoro, isotérmico, por lo que está en función de la temperatura, el volumen y el número de partículas:

$$dA = -SdT - PdV + \mu dN \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{N,V} = -S \quad (\text{A.10})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{N,T} = -P \quad (\text{A.11})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T} = \mu, \quad (\text{A.12})$$

Energía libre de Gibbs $G(N, P, T) = A + PV = U - TS + PV = \mu N$

La energía libre de Gibbs describe un sistema cerrado, isobárico, isotérmico, por lo que es función de la temperatura, la presión y el número de partículas:

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN \quad (\text{A.13})$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{N,P} = -S \quad (\text{A.14})$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{N,T} = V \quad (\text{A.15})$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{P,T} = \mu \quad (\text{A.16})$$

Entalpía $\mathbb{H}(N, P, S) = U + PV$

La entalpía describe a un sistema cerrado, isobárico, adiabático, por lo que está en función de la entropía, la presión y el número de partículas.

$$d\mathbb{H} = TdS + VdP + \mu dN \quad (\text{A.17})$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{N,P} = T \quad (\text{A.18})$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{N,S} = V \quad (\text{A.19})$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial N}\right)_{P,S} = \mu \quad (\text{A.20})$$

Las funciones de respuesta asociadas a los correspondientes potenciales termodinámicos están dados por:

Usando la energía interna (U) tenemos:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} \equiv C_V \quad (\text{A.21})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,P} \equiv C_P \quad (\text{A.22})$$

que vienen a ser la variación de la energía interna a presión y volumen constante.

Usando la energía entropía (S) tenemos:

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{N,V} \equiv C_V \quad (\text{A.23})$$

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{N,P} \equiv C_P \quad (\text{A.24})$$

que vienen a ser la variación de la entropía cuando el volumen y la presión son constantes.

Usando la energía interna libre de Helmholtz (A) tenemos:

$$C_V \equiv -T \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}\right)_{N,V} \quad (\text{A.25})$$

$$C_P \equiv -T \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2}\right)_{N,P} \quad (\text{A.26})$$

que vienen a ser la variación de la energía libre cuando el volumen y la presión se mantienen constantes.

Usando la entalpía (H) tenemos:

$$C_V \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{N,V} \quad (\text{A.27})$$

$$C_P \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_{N,P} \quad (\text{A.28})$$

que viene a ser la variación de la entalpía a volumen y presión constantes.

Apéndice B

Glosario económico.

Activo: Es la suma de las propiedades físicas (bienes tangibles) que tengan valor económico, con los ingresos financieros (derechos intangibles)

Agentes económicos: Se denominan agentes económicos a las unidades que participan en la actividad o interacción económica de un país y que integran su sistema económico. Por interacciones económicas podemos mencionar a intercambio de dinero, compra y venta de bienes, transacciones bancarias, etc.

Bien: Se denomina así a toda mercancía capaz de satisfacer una necesidad.

Dinero: Denominación genérica al medio de pago más común practicado por todos los países para la compra o la venta de bienes o servicios.

Economía: se ocupa de la manera en que se administran los recursos escasos, con el objeto de producir diversos bienes y distribuirlos para su consumo entre los miembros de la sociedad. Por eso es denominada por algunos como la ciencia de la elección.

Equilibrio económico: El equilibrio económico indica una situación de armonía en razón a la compensación y nivelación de fuerzas entre los distintos factores económicos. Los efectos y situaciones varían según sea el punto de vista desde el que es contemplado. Desde un punto de vista individual, situación en la que se encuentra una persona que obtiene los recursos suficientes para cubrir sus necesidades ordinarias.

En el ámbito económico, supone el equilibrio entre la oferta y la demanda. En su aspecto financiero, situación presupuestaria en que los gastos se equilibran con los ingresos. En contabilidad, igualdad entre el debe y el haber.

Macroeconomía: Es una rama de la economía encargada del estudio global de la economía en términos del monto total de bienes y servicios producidos, el total de los ingresos, el nivel de empleo, recursos productivos, y el comportamiento general de los precios.

Microeconomía: Es una rama de la economía que estudia el comportamiento económico de agentes individuales, como son los consumidores, las empresas, los trabajadores e inversores;

así como de los mercados. Considera las decisiones que toma cada uno para cumplir ciertos objetivos propios.

Pasivo: Equivale a todas las deudas que puedan restarle patrimonio al consumidor.

Préstamo: Entrega de un capital a un individuo que tiene la obligación de devolverlo a quien se lo prestó junto con los intereses acordados.

Riqueza: Es el valor total de todo lo que una persona o empresa posee, en un instante dado de tiempo, menos el valor total de todo lo adeudado; es decir, el activo menos el pasivo determinado en un momento dado del tiempo.

Servicio: Un servicio es el conjunto de actividades realizadas por una empresa para responder a las necesidades del cliente. De esta forma, el servicio podría definirse como un bien no material. Por lo tanto, los proveedores de servicios no suelen manejar grandes materias primas y cuentan con pocas restricciones físicas. Por el otro lado, su principal valor es la experiencia. Cabe destacar que los proveedores de servicios forman lo que se conoce como el sector terciario de la industria.

Sistema económico: Es un mecanismo complejo, a través del cual las sociedades se organizan para producir, intercambiar y consumir bienes económicos. Por sistema económico podríamos entender a un individuo consumidor, o también a un conjunto de agentes económicos que realizan interacciones económicas.

Utilidad: Es el placer o satisfacción obtenida por el consumo de bienes y servicios.

Bibliografía

- [1] C. E. Shannon The Mathematical Theory of Communication. The University of Illinois (1948).
- [2] H. E. Stanley, L. A. N. Amaral, D. Canning, P. Gopikrishnan, Y. Leea, Y. Liua, Physica A 269 (1999), p. 156–169
- [3] E. Majorana, ‘Il Valore delle Leggi Statistiche nella Fisica e nelle Scienze Sociali’, Scientia **36**, 58-66 (1942)
- [4] B. B. Mandelbrot, ‘The Variation of Certain Speculative Prices’, J. Business **36**, 394-419 (1963)
- [5] V. Pareto ‘Cours d’ Economie Politique’(Lausanne and Paris, 1897)
- [6] R. N. Mantegna Introduction Econophysics: Correlations Complexity Finance. Cambridge University Press. Cambridge UK (2000)
- [7] R. L. Dewar, F. Detering. Complex Physical, Biophysical and Econophysical Systems
- [8] M. Schulz, Statistical Physics and Economics Concepts, Tools and Application Springer Verlag, New York Inc. (2003)
- [9] N. Abranson Teoría de la Información y Codificación. Paraninfo S. A. Madrid; Sexta Edición (1986).
- [10] J. Chen The Physical Foundation of Economics an Analytical Thermodynamics. World Scientific Published (2005).
- [11] , H. Nyquist, “Certain Factors Affecting Telegraph Speed”, Bell System Technical Journal, 1924, p. 324; “Certain Topics in Telegraph Transmission Theory,” A. I. E. E. Ttans., v. 47, 1928, p. 617.
- [12] Hartley, R. V. L., “Transmission of Information” Bell System Technical Jour nal 1928, p. 535.

- [13] N. Wiener *Cybernetics, or the Study of Control and Communication in the Animal and Machine* The MIT Press Cambridge, Massachusetts. 2nd Edition (1948)
- [14] Y. M. Korshunov *Fundamentos Matemáticos de la Cibernética* Editorial Mir Moscú (1985)
- [15] P. Cossa *Cibernética* Editorial Reverté, S. A. Barcelona (1963)
- [16] T. M. Cover; Joy A. Thomas *Elements of Information Theory* Wiley-Interscience publication United States of America 2nd ed.p. cm. (2006)
- [17] T. Stonier *La información y la estructura interna del universo. Una exploración en la física informacional*: Editorial Hacer (1996)
- [18] C. Adami; *Information Theory in Molecular Biology* (KGL, Caltech) arXiv:q-bio/0405004v1 [q-bio.BM]. Vol. 1; ISSUE 1; 3-22 (2004).
- [19] P. Mumbrú Rodríguez. *Estructura periodica y entropia topológica de las implicaciones bimodales*. Universidad Autónoma de Barcelona - España. Tesis Doctoral (1988).
- [20] N. Alexander, Parra Henao Gabriel Jaime. *Usos de la entropía en la investigación médica*. CES Medicina; Vol. 21 N° 1: 65-75 (2007).
- [21] R. Lee; P. Jonathan; P. Ziman, *Pictish Symbols Revealed as a Written Language through Application of Shannon Entropy* Proc. R. Soc. A 2010
- [22] E. T. Jaynes *Information Theory and Statistical Mechanics*. Physical Review. vol. 106, No 4, 620-630 (1957)
- [23] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in statistical Mechanics* (Longmans Green and Company, New York, 1928), Vol. II of collected works.
- [24] Jayanth R. Banavar Amos Maritan and Igor Volkov. *Applications of the Principle of Maximum Entropy: from Physics to Ecology*. J. Phys.: Condens. Matter 22 (2010) 063101 (13pp)
- [25] X. Wu. *Calculation of maximum entropy densities with application to income distribution*. Journal of Econometrics 115 (2003) 347 – 354
- [26] K. Jakobsen and V. V. Lychagin. *Stochastic Relations and the Problem of Prior in the Principle of Maximum Entropy* . Acta Applicandae Mathematicae Volume 101, Numbers 1-3, 133-143, DOI: 10.1007/s10440-008-9196-4

- [27] E. Schrödinger Statistical Thermodynamics 2nd edition Cambridge At the University Press(1962)
- [28] V. A. Kirillin, V. V. Sichev, A. E. Sheindlin. Termodinámica Técnica Editorial Mir Moscú (1976)
- [29] A. N. Matvéev Física Molecular Editorial Mir Moscú (1987)
- [30] W. Greiner, L. Neise, H. Stoker Thermodynamics and Statistical Mechanics Springer-Verlag New York Inc. (1995)
- [31] K. Huang Statistical Mechanics John Wiley & Sons, Inc. (1928)
- [32] A. N. Krestóvnikov, V. N. Vigdoróvich Termodinámica Química Editorial Mir Moscú (1980)
- [33] M. V. Volkenstein Entropy and Information Birkhäuser Verlag AG (2009)
- [34] R. K. Pathria Statistical Mechanics. Laser Words, Madras, India. 2da Edición (1996).
- [35] J. Ortin, J. M. Sancho Curso de Física Estadística Universidad de Barcelona (2001)
- [36] S. Ispolatov, P.L. Krapivsky, and S. Rednerb. Wealth distributions in asset exchange models Eur. Phys. J. B 2, 267-276 (1998)
- [37] A. Dragulescu, V. M Yakovenko Statistical mechanics of money. Eur. Phys. J. B 17, 723-729 (2000)
- [38] (a) Chakrabarti, Bikas K. Chakraborti, Anirban, and Chatterjee, Arnab. (2006). Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives, (“A Thermodynamic Formulation of Economics” (PDF) [ch. 1] and “A Thermodynamic Formulation of Social Science” [ch. 10]). Wiley-VCH. (b) Mimkes, Jürgen. (2006). “A Thermodynamic Formulation of Social Science”, In: Econophysics and Sociophysics: Trends and Perspectives (pgs. 277 – 308). Bikas K. Chakrabarti, Anirban Chakraborti, Arnab Chatterjee (Eds.). WILEY-VCH Verlag, Weinheim, Germany.
- [39] R. E. Hall, M. Lieberman Economics Principles and Applications. UPDATED. Fourth Edition (2005)
- [40] F. Mochon Morcillo, V. A. Beker. Economía Principios y Aplicaciones. McGraw-Hill Interamericana S.A. de C.V. Cuarta Edición (1995).
- [41] Novissimo Dicionario de Economía, Organização e supervisão de PAULO SANDRONI. Editora Best Seller (1999)

Webgrafía

Definición de entalpía: <http://es.wikipedia.org/wiki/Entalpía>

Teoría de la información: http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_la_información

Ancho de banda: http://es.wikipedia.org/wiki/Ancho_de_banda

Ruido gaussiano: http://es.wikipedia.org/wiki/Ruido_gaussiano

Definición de Servicio: <http://definicion.de/servicio/>

Ley Cero de la Termodinámica: fluidos.eia.edu.co/fluidos/principios/termodinamica0.html