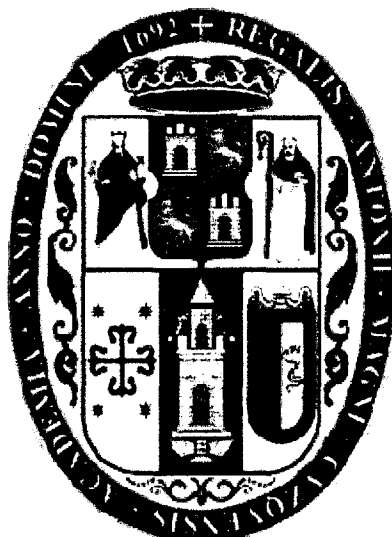


UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

CARRERA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS



**“TEOREMA DE HARTMAN – GROBMAN Y SU
APLICACIÓN A LA PUBLICIDAD DE UNA EMPRESA”**

Tesis presentada por:

- BR. ORLANDO OLIVARES RIVERA
- BR. JOEL ROGELIO PORTADA COACALLE

**Para optar el Título Profesional de Licenciado en
Matemáticas.**

Asesor:

- Mgt. Ignacio Velasquez Hacha

Co – asesor:

- Mgt. Patricio Choque Huamán

CUSCO - PERÚ

2011

TESIS AUSPICIADA POR EL CONSEJO DE INVESTIGACIÓN - UNSAAC

INFORME

AL : SEÑOR DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL
CUSCO

DEL : Mgt. IGNACIO VELASQUEZ HACHA
ASESOR DE TESIS

: Mgt. PATRICIO CHOQUE HUAMÁN
CO-ASESOR DE TESIS

ASUNTO : INFORME SOBRE EL TRABAJO DE TESIS
INTITULADA “TEOREMA DE HARTMAN – GROBMAN Y
SU APLICACIÓN A LA PUBLICIDAD DE UNA EMPRESA”

PRESENTADO POR LOS BACHILLERES:

OLIVARES RIVERA ORLANDO

PORTADA COACALLE JOEL ROGELIO

FECHA : CUSCO, 28 DE JUNIO DEL 2011

Señor Decano:

Los suscritos en la condición de Asesor y Co-asesor del trabajo de tesis intitulada “Teorema de Hartman – Grobman y su Aplicación a la publicidad de una Empresa” según resolución N° D-677-2009-FCQFM de fecha 10 de Setiembre del 2009, desarrollado por los Bachilleres Orlando Olivares Rivera y Joel Rogelio Portada Coacalle; en concordancia al proyecto aprobado cumplimos en informar lo siguiente:

PRIMERO. La tesis intitulada “Teorema de Hartman – Grobman y su Aplicación a la Publicidad de una empresa” desarrollado por los aspirantes al título profesional, el mismo que fue asesorado desde el inicio hasta la culminación por los suscritos; tal es así que, el presente trabajo de investigación consta de tres capítulos los conceptos preliminares utilizados en el presente trabajo y los temas relacionados a los sistemas dinámicos autónomos lineales y no lineales, el segundo capítulo trata del teorema de Hartman - Grobman y el modelo de publicidad y el tercer capítulo referido al estudio de estabilidad e inestabilidad aplicado al modelo de publicidad de una empresa.

SEGUNDO. Los aspirantes al título profesional, han demostrado dedicación y esmero para alcanzar los objetivos trazados para la realización del trabajo en mención, satisfactoriamente.

Por lo informado, consideramos como suficiente, el trabajo mencionado por reunir las condiciones como trabajo de tesis conducente al título profesional correspondiente; salvo mejor parecer de la comisión dictaminadora.

Atentamente

.....
Mgt. VELASQUEZ HACHA, Ignacio
ASESOR

.....
Mgt. CHOQUE HUAMÁN, Patricio
CO - ASESOR

DEDICATORIA

A Dios por guiarme, darme la voluntad y fuerza suficiente para seguir adelante con mis estudios y vencer todos los obstáculos que se me presentan.

Con mucho amor para mi Hijo Andree Eduardo y su madre Mónica quiénes son mi fuerza y me apoyo día a día para seguir luchando.

Con mucho cariño para mis amigos Juca, Efraín, Carmen, Percy, Víctor, Alex en especial al Dr. José Miguel quiénes incansablemente supieron darme la orientación y consejos acertados para lograr mis objetivos.

Mi agradecimiento infinito a mis queridos padres Eulogio y Margarita, quiénes con su apoyo moral y sapiencia, con su ejemplo de vida supieron encaminar incansablemente mis pasos hasta lograr uno de mis objetivos.

Con mucho cariño a mis hermanos Javier, Teodosio, Delia, Norma y Juan José, a mis Tíos y Primos quienes me brindaron su apoyo y confianza en todo momento para seguir adelante con mis estudios.

Orlando Olivares

DEDICATORIA

A Dios, por llevarme a su lado a lo largo de esta vida siempre llenándome de alegría y gozo, por dirigirme por el mejor camino de mi vida, y darme la salud y sabiduría para alcanzar mis metas.

A mi madre Augusta y mi hermana Karina, porque creyeron en mí y porque me sacaron adelante, dándome ejemplos dignos de superación y entrega.

A Elizabeth, una persona especial en mi vida, parte esencial en mis sueños y metas por cumplir.

A mis tíos, primos, y amigos. Gracias por haber fomentado en mí el deseo de superación y el anhelo de triunfo en la vida.

A todas aquellas personas que sin esperar nada a cambio compartieran pláticas, conocimientos y diversión, y que durante el tiempo que continua este sueño logran convertir esto en una realidad.

Joel R. Portada

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, a la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas, en particular a la Carrera Profesional de Matemáticas.

Nuestro agradecimiento especial al Mgt. Ignacio Velásquez Hacha y al Mgt. Patricio Choque Huamán, por el asesoramiento del presente trabajo de tesis; por la disposición de tiempo en la revisión, corrección y sus atinadas sugerencias.

A todos los Docentes del Departamento Académico de Matemática y Estadística de la UNSAAC, que contribuyeron en nuestra formación profesional.

A todos y cada uno de nuestros amigos de la carrera Profesional de Matemáticas y de toda la institución universitaria.

Gracias

RESUMEN

Dentro del estudio de los sistemas dinámicos, se consideran los sistemas dinámicos lineales y los no lineales, siendo estos últimos los que carecen de métodos de resolución exacta, salvo en algunos casos. Para el estudio de los sistemas dinámicos no lineales, la Matemática ha aportado distintos caminos y herramientas para poder estudiar estos sistemas, siendo uno de ellos, el estudio cualitativo de las ecuaciones que representan el sistema. El estudio cualitativo de un sistema dinámico, nos permite observar el comportamiento del mapa de fases asociado al sistema, pudiendo así analizarse el comportamiento y la dirección de sus trayectorias a través del tiempo. Una de las herramientas, que se usa para el estudio cualitativo de un sistema, es el teorema de Hartman - Grobman, el cual nos permite comparar el mapa de fases de un sistema no lineal, con el mapa de fases de un sistema lineal asociado a esta, bajo ciertas condiciones.

En el presente trabajo, utilizamos el teorema de Hartman - Grobman, para estudiar un sistema dinámico en particular, el cual representa un modelo de publicidad, que relaciona la cantidad de usuarios de un determinado servicio y la cantidad de compradores potenciales que podrían ser usuarios en un determinado lapso de tiempo, a la vez estas cantidades están influenciadas por algunos parámetros, uno de estos es el parámetro que viene influenciado por el esfuerzo en la publicidad que se le da a dicho servicio, este será estudiado, analizado y relacionado con el comportamiento del sistema dinámico que representa al modelo de publicidad.

PRESENTACIÓN

Señor Decano de la Facultad de Ciencias Químicas, Físicas y Matemáticas.

Señor Coordinador de la Carrera Profesional de Matemática y Estadística.

Señores Docentes Miembros del Jurado.

Cumpliendo con las normas y lineamientos del reglamento de grados académicos y títulos profesionales de la Carrera Profesional de Matemática de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, presentamos a vuestra consideración la tesis intitulada “TEOREMA DE HARTMAN – GROBMAN Y SU APLICACIÓN A LA PUBLICIDAD DE UNA EMPRESA”, trabajo que al ser evaluado nos permitirá optar al título profesional de Licenciado en Matemática.

El trabajo tiene la finalidad de integrar los principios matemáticos de la teoría de sistemas dinámicos autónomos lineales y no lineales, desarrollando el teorema de Hartman - Grobman y aplicar estos resultados a la publicidad de una empresa.

El presente trabajo de investigación consta de tres capítulos, desarrollándose en el primer capítulo los conceptos preliminares utilizados en el presente trabajo y los temas relacionados a sistemas dinámicos autónomos lineales y no lineales, el segundo capítulo trata del teorema de Hartman – Grobman y el modelo de publicidad de una empresa y el tercer capítulo está referido al estudio de estabilidad e inestabilidad aplicado al modelo de publicidad de una empresa.

Los tesistas.

Br. Orlando Olivares Rivera

Br. Joel Rogelio Portada Coacalle

CONTENIDO

CAPITULO I : CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1	MATRICES Y OPERADORES.....	1
1.1.1	AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.....	1
1.1.2	EXPONENCIAL DE OPERADORES.....	2
1.1.3	FORMA CANÓNICA DE JORDAN.....	11
1.2	SISTEMAS AUTÓNOMOS Y NO AUTÓNOMOS.....	14
1.2.1	SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES.....	15
1.2.2	FLUJO ASOCIADO A UN SISTEMA AUTÓNOMO LINEAL.....	18
1.2.3	CONJUGACIÓN DE LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES.....	21
1.2.4	SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES BIDIMENSIONALES.....	24
1.3	SISTEMAS AUTÓNOMOS NO LINEALES.....	35
1.3.1	FLUJO ASOCIADO A UN SISTEMA AUTÓNOMO NO LINEAL.....	36
1.4	FUNDAMENTOS DE MERCADO.....	38
1.4.1	MERCADO.....	38
1.4.2	EMPRESA.....	38
1.4.3	SERVICIOS.....	39
1.4.4	CLIENTE.....	39
1.4.5	PUBLICIDAD.....	39

CAPITULO II:	TEOREMA DE HARTMAN - GROBMAN – MODELO DE PUBLICIDAD	
2.1	TEOREMA DE HARTMAN – GROBMAN.....	40
2.1.1	TEOREMA (Hartman - Grobman).....	42
2.2	MODELO DE PUBLICIDAD.....	52
2.3	ESTABILIDAD E INESTABILIDAD DEL MODELO MATEMÁTICO DE PUBLICIDAD.....	55
CAPITULO III:	ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD E INESTABILIDAD APLICADO AL MODELO MATEMÁTICO DE PUBLICIDAD DE UNA EMPRESA	
	CONCLUSIONES.....	80
	SUGERENCIAS.....	81
	BIBLIOGRAFÍA.....	82
	ANEXO.....	83

INTRODUCCIÓN

I.- ANTEDECENTES

A finales del siglo XIX Henri Poincaré inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, quien dijo: “Aunque no se tenga expresiones analíticas para las soluciones de una ecuación diferencial, si es posible estudiar propiedades geométricas de estas soluciones, y esto es importante y significativo en sus aplicaciones”.

Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), un matemático Ruso cuyos trabajos, que aparecieron publicados a mediados de 1892, dieron origen al estudio de estabilidad mediante un enfoque teórico que hoy lleva su nombre.

Smale, S. en 1980, determinó que la propiedad más importante de un sistema dinámico es su comportamiento a largo plazo.

En el año 2003, en la Universidad Nacional de San Antonio Abad de Cusco en la CC. PP. de Matemáticas, se presentó el informe de la tesis “Teorema de Poincaré – Bendixon y alguna de sus aplicaciones” desarrollado por los bachilleres Marilú Farfán Latorre y William Gerardo Lavilla Condori, en el cual se desarrolla parte de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

En el año 1992 Feichtinger G. presentó un modelo de publicidad por contacto entre usuarios de una marca y compradores potenciales, el cual lleva su nombre, en su publicación *Journal of Economic Behavior and Organization*.

II.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Diferentes fenómenos vinculados con la Economía, Física, Ingeniería, Química, Biología, Telecomunicaciones, etc. son modelados mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen de una manera adecuada la dinámica de éstos fenómenos a medida que el tiempo transcurre.

Si tuviésemos un sistema autónomo lineal n -dimensional $X' = AX$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con un sólo punto de equilibrio hiperbólico, podemos observar comportamientos dinámicos espiralados, cíclicos, nodos y puntos de silla, todos estos se pueden clasificar según los autovalores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; sin embargo en un sistema autónomo no lineal, describir éstos comportamientos es dificultoso; ya que la dinámica de los sistemas autónomos no lineales presenta ciertos fenómenos que no se evidencian al estudiar los sistemas autónomos lineales. Uno de estos fenómenos es la existencia de múltiples puntos de equilibrio hiperbólico. Un sistema autónomo lineal puede tener un solo punto de equilibrio hiperbólico, y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario si el punto es asintóticamente estable atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas autónomos no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial.

Por otro lado el teorema de Hartman - Grobman afirma que es posible deformar de manera continua todas las órbitas del sistema autónomo no lineal, alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico, en las órbitas de un sistema autónomo lineal, el cual es generado por el primer sistema, vía un homeomorfismo.

En general, es muy dificultoso determinar este homeomorfismo, sin embargo el teorema de Hartman - Grobman indica que el comportamiento cualitativo de un sistema autónomo no lineal alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico es similar al del sistema autónomo linealizado, por ejemplo en el tipo de estabilidad.

2.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Será posible garantizar la existencia de un homeomorfismo entre las órbitas de un sistema autónomo no lineal alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico, y las órbitas de su sistema autónomo lineal asociado, preservando el comportamiento cualitativo de estas?

¿Este resultado permitirá predecir eventos futuros en una empresa en el que influya el modelo de publicidad de Feichtinger?

III.- HIPÓTESIS

La utilización de un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$, con $U, V \in \mathbb{R}^n$ subconjuntos abiertos, permite deformar de manera continua las órbitas de un sistema dinámico autónomo no lineal $X' = f(X); \forall X \in \mathbb{R}^n$ alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico X_0 en órbitas del sistema dinámico autónomo lineal asociado.

IV.- OBJETIVOS

4.1 OBJETIVO GENERAL

Deformar de manera continua todas las órbitas de un sistema autónomo no lineal, alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico en las órbitas del sistema autónomo linealizado, vía un homeomorfismo, y

aplicar este resultado en un sistema dinámico no lineal que representa un modelo de publicidad por contacto en una empresa.

4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Demostrar y analizar el Teorema de Hartman - Grobman
2. Aplicar estos resultados al modelo de publicidad por contacto de una empresa.
3. Analizar la estabilidad del modelo de publicidad al variar el parámetro que determina el esfuerzo en la publicidad de una empresa.
4. Visualizar computacionalmente el mapa de fases de todos estos resultados obtenidos, mediante el software WxMaxima, versión 0.8.6.

V.- IMPORTANCIA

Una de las leyes fundamentales que rige un sistema dinámico, el cual nos ayuda a predecir eventos futuros, es la existencia de los puntos de equilibrio; y el comportamiento de las soluciones alrededor de ésta; como mencionamos en un sistema lineal el análisis de esta es más accesible, mientras que en un sistema no lineal esta se hace dificultosa, es por esta razón que nos encontramos en la necesidad de generar nuevas herramientas Matemáticas para estudiar éstos comportamientos dinámicos fenomenales.

El teorema de Hartman - Grobman es una de ellas, el cual nos permite garantizar la semejanza del comportamiento cualitativo de las órbitas entre el sistema no lineal y su sistema linealizado vía un homeomorfismo.

En este sentido, este trabajo de investigación permite estudiar la estructura cualitativa de los sistemas autónomos no lineales mediante el comportamiento de sus sistemas linealizados, luego aplicar estos resultados a la publicidad de una

empresa, y así enmendar algunos vacios matemáticos existentes en el estudio de los sistemas dinámicos no lineales.

Además será de mucha ayuda comprender éstos comportamientos cualitativos de las órbitas de manera visual mediante el software Wxmaxima versión 0.8.6, que nos permitirá entender mejor esta deformación continua de órbitas, y así dar una nueva tendencia en la curricula vigente, que ayudará una mayor comprensión de los sistemas dinámicos no lineales.

VI.- PROCEDIMIENTO METODOLÓGICO

6.1 MÉTODO

El método a utilizar es el método deductivo puesto que se tratará de un procedimiento que consiste en desarrollar el Teorema de Hartman - Grobman y deducir luego sus consecuencias en la publicidad de una empresa con la ayuda de subyacentes teorías en la misma.

6.1 TÉCNICA

La técnica a utilizar será el análisis, ya que se pretende buscar una manera de deformar las órbitas de un sistema no lineal en su sistema linealizado vía un homeomorfismo.

CAPITULO I

CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1 MATRICES Y OPERADORES

1.1.1 AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

DEFINICIÓN 1.1.1.1

Sea la matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\mathbb{R}^{n \times n}$ es el conjunto de matrices reales cuadradas de orden $n \times n$). Diremos que un escalar $\lambda_j \in K$ (K campo real o complejo) es el j -ésimo autovalor de la matriz A si existe un vector $V_j \in \mathbb{R}^n$, $V_j \neq 0$ tal que $AV_j = \lambda V_j, \forall j = 1, 2, \dots, n$; en cuyo caso se dice que V_j es el j -ésimo autovector de la matriz A asociado al autovalor λ_j .

Para encontrar los autovalores de la matriz A tenemos que encontrar todos los valores de λ , tales que:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

donde I_n es la matriz identidad perteneciente a $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Además al polinomio $\det(A - \lambda I_n)$ de grado n , se le llama polinomio característico $P_A(\lambda)$ de A y a la ecuación

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

se llama ecuación característica de la matriz A .

Una vez encontrado el autovalor λ , los autovectores $V \in \mathbb{R}^n$ correspondientes a λ se determinan resolviendo la ecuación

$$(A - \lambda I_n)V = 0.$$

DEFINICIÓN 1.1.1.2

El espectro para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (con n finito), denotado por $\Sigma(A)$, está definido como el conjunto formado por todos los autovalores de la matriz A , esto es:

$$\Sigma(A) = \{ \lambda \in K / AV = \lambda V, V \neq 0 \}$$

1.1.2 EXPONENCIAL DE OPERADORES

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se dice que T es un operador lineal, si cumple:

i) $T(X + Y) = T(X) + T(Y)$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$.

ii) $T(\alpha X) = \alpha T(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador lineal, entonces $T(0) = 0$, donde $0 \in \mathbb{R}^n$.

En efecto:

$$T(0) = T(0 + 0)$$

$$T(0) = T(0) + T(0)$$

por tanto $T(0) = 0$.

El conjunto de operadores lineales $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotado por $L(\mathbb{R}^n)$, junto con las operaciones de suma $+ : L(\mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$, y multiplicación por un escalar $\cdot : \mathbb{R} \times L(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ definidas por:

$$(T+S)(X) := T(X) + S(X), \forall X \in \mathbb{R}^n$$

$$(\alpha T)(X) := \alpha T(X), \forall X \in \mathbb{R}^n$$

donde $T, S \in L(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{R}$; forman un espacio vectorial. Definimos la norma de un operador $T \in L(\mathbb{R}^n)$ por:

$$\|T\| = \sup_{\|X\|=1} \|T(X)\|$$

donde $\| \cdot \|$ en el segundo miembro denota la norma euclidiana en \mathbb{R}^n . Esto es, si

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \text{ entonces } \|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

DEFINICIÓN 1.1.2.1

Sea una sucesión de operadores (T_k) tal que $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$. Se dice que la sucesión (T_k) converge al operador lineal $T \in L(\mathbb{R}^n)$, denotado por:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{Z}_0^+$, tal que para $k > N$, $\|T - T_k\| < \varepsilon$.

DEFINICIÓN 1.1.2.2

Sea (T_n) una sucesión de operadores lineales en $L(\mathbb{R}^n)$ definidas en un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, U un subconjunto de E , T un operador lineal definido en U . Se dice que la sucesión (T_n) converge uniformemente a T en U si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N(\varepsilon)$, entonces para todo $X \in U$ se verifica que:

$$\|T_n(X) - T(X)\| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 1.1.2.3

Una serie de operadores lineales $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ en $L(\mathbb{R}^n)$ definidas en un conjunto

$E \subset \mathbb{R}^n$, se dice que converge uniformemente a un operador lineal T definida en un conjunto $U \subset E$ cuando la sucesión (s_n) de sus sumas parciales,

$$s_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$$

converge uniformemente a T en el conjunto U .

DEFINICIÓN 1.1.2.4

Se dice que la serie de operadores lineales $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ en $L(\mathbb{R}^n)$ definidas en un

conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|$ es

convergente.

LEMA 1.1.2.1

Para $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $X \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

- 1) $\|T(X)\| \leq \|T\| \|X\|$
- 2) $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$
- 3) $\|T^k\| \leq \|T\|^k$, para $k = 1, 2, \dots$

PRUEBA

- 1) Para $X = 0 \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\|T(0)\| \leq \|T\| \|0\|$$

$$0 \leq 0.$$

Entonces $\|T(X)\| \leq \|T\| \|X\|$.

Para $X \neq 0$ se define un único vector $Y = X / \|X\| \in \mathbb{R}^n$, y además se cumple que $\|Y\| = 1$. De la definición de la norma de un operador, se tiene que:

$$\|T\| = \sup_{\|Y\|=1} \|T(Y)\|$$

$$\|T(Y)\| \leq \|T\|$$

$$\frac{\|T(X)\|}{\|X\|} = \left\| T \left(\frac{X}{\|X\|} \right) \right\| \leq \|T\|$$

entonces $\|T(X)\| \leq \|T\| \|X\|$, $\forall X \neq 0$.

2) Para $\|X\| \leq 1$, de (1) se tiene que:

$$\|T(S(X))\| \leq \|T\| \|S(X)\|$$

$$\|T(S(X))\| \leq \|T\| \|S\| \|X\|$$

$$\|T(S(X))\| \leq \|T\| \|S\|$$

Además,

$$\|TS\| = \sup_{\|X\|=1} \|TS(X)\| \leq \|T\| \|S\|$$

3) Demostraremos por inducción.

Para $k = 1$, se tiene que:

$$\|T^1\| \leq \|T\|^1$$

Para $k = 2$, se tiene que:

$$\|T^2\| = \|TT\| \leq \|T\|\|T\|, \text{ por la parte 2).}$$

Por tanto:
$$\|T^2\| \leq \|T\|^2$$

Suponiendo que la hipótesis de inducción se cumple para $k = 1, 2, \dots, n$, esto es:

$$\|T^n\| \leq \|T\|^n$$

A continuación demostraremos para $k = n + 1$

En efecto:

$$\|T^{n+1}\| = \|T^n T\| \leq \|T^n\|\|T\|, \text{ por la parte 2)}$$

$$\|T^n\|\|T\| \leq \|T\|^n \|T\|, \text{ por hipótesis de inducción}$$

En consecuencia
$$\|T^{n+1}\| \leq \|T\|^{n+1}$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k, \text{ para } k = 1, 2, \dots$$

TEOREMA 1.1.2.1

Dado $T \in L(\mathbb{R}^n)$ y $t_0 > 0$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k T^k}{k!}$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo $t \in \mathbb{R}$ con $|t| \leq t_0$.

PRUEBA:

Sea $\|T\| = a$, del lema anterior se deduce que para todo $t \in \mathbb{R}$ con $|t| \leq t_0$, se tiene que

$$\left\| \frac{t^k T^k}{k!} \right\| \leq \frac{|t|^k \|T\|^k}{k!} \leq \frac{t_0^k a^k}{k!}$$

pero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0^k a^k}{k!} = e^{t_0 a}$$

por lo tanto la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k T^k}{k!}$, es absolutamente e uniformemente convergente para todo $t \in \mathbb{R}$ con $|t| \leq t_0$.

DEFINICIÓN 1.1.2.5

El exponencial de un operador lineal está definido por la serie absolutamente convergente

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Es de observar que e^T es un operador lineal, y además por el lema y el teorema anterior, se prueba que $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$.

En efecto,

$$\|e^T\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T\|^k = e^{\|T\|}.$$

Un operador lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, queda completamente determinada por la relación $T(X) = AX$, donde $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cuyos componentes a_{ij} de ésta matriz, se determinan mediante las siguientes relaciones¹:

$$T(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n$$

$$T(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$T(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

con e_i el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n . A la matriz $A = [a_{ij}]$ se llama matriz asociada al operador lineal T .

Recíprocamente, dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definimos la transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, mediante $T(X) = AX$, $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; es decir

$$T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n).$$

Esto nos permite usar indistintamente operadores lineales y matrices asociadas a éstas, también garantizar las propiedades de operadores lineales antes demostradas usando matrices. Por tanto, esto nos permite definir la exponencial de una matriz de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 1.1.2.6

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$, se define la exponencial de la matriz A como sigue:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

¹ Algebra Lineal; Lages Lima, Elon; Textos del IMCA; pag 46.

TEOREMA 1.1.2.3

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$, entonces se cumple que:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}.$$

PRUEBA:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e^{hA} - I)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\left(I + \frac{hA}{1!} + \frac{h^2 A^2}{2!} + \dots \right) - I \right] = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2 A^3}{3!} + \dots \right)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = e^{tA} \lim_{h \rightarrow 0} A + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2 A^3}{3!} + \dots \right) = Ae^{tA}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$$

TEOREMA 1.1.2.2

Si $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces:

$$e^D = \text{diag}[e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}].$$

PRUEBA

En efecto, si

$$D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$D^j = \text{diag}[\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j] = \begin{bmatrix} \lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^j & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^j \end{bmatrix} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

luego, para cualquier $m \geq 0$ dado suficientemente grande, tenemos que:

$$\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} D^j = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \text{diag}[\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j]$$

$$\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} D^j = \sum_{j=0}^m \text{diag}\left[\frac{1}{j!} \lambda_1^j, \frac{1}{j!} \lambda_2^j, \dots, \frac{1}{j!} \lambda_n^j\right]$$

$$\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} D^j = \text{diag}\left[\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \lambda_1^j, \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \lambda_2^j, \dots, \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \lambda_n^j\right]$$

entonces

$$e^D = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} D^j = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} D^j$$

$$e^D = \text{diag}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_1^j, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_2^j, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda_n^j\right]$$

$$e^D = \text{diag}[e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}]$$

DEFINICIÓN 1.1.2.7

Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \theta_{n_1 \times n_2} & \dots & \theta_{n_1 \times n_m} \\ \theta_{n_2 \times n_1} & A_2 & \dots & \theta_{n_2 \times n_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n_m \times n_1} & \theta_{n_m \times n_2} & \dots & A_m \end{bmatrix}$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \forall 1 \leq i \leq m$, $\theta_{n_i \times n_i}$ es la matriz cero de $\mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$, tales matrices son llamadas matrices diagonales por bloques y las denotaremos por

$$\text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m].$$

Además si $A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m]$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$A^k = \text{diag}[A_1^k, A_2^k, \dots, A_m^k]$$

y de manera análoga que en la prueba del teorema anterior se demuestra que:

$$e^A = \text{diag}[e^{A_1}, e^{A_2}, \dots, e^{A_m}].$$

1.1.3 FORMA CANÓNICA DE JORDAN

TEOREMA 1.1.3.1

Si A es una matriz real con autovalores reales $\lambda_j, j=1, \dots, k$ y autovalores complejos $\lambda_j = a_j + ib_j$ y $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j, j = k+1, \dots, n$. Entonces existe una base $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n\}$ para \mathbb{R}^{2n-k} , donde $v_j, j=1, \dots, k$ y $w_j, j = k+1, \dots, n$ son autovectores generalizados de A , $u_j = \text{Re}(w_j)$ y $v_j = \text{Im}(w_j)$ para $j = k+1, \dots, n$, tal que la matriz $P = [v_1 \dots v_k v_{k+1} u_{k+1} \dots v_n u_n]$ es invertible y

$$P^{-1}AP = J_A = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix}$$

donde los bloques elementales de Jordan $B = B_j, j = 1, \dots, r$ son de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

para λ uno de los autovalores reales de A o de la forma:

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & & D & I_2 \\ 0 & \cdots & & 0 & D \end{bmatrix}$$

con

$$D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para $\lambda = a + ib$ uno de los autovalores complejos de A .²

La matriz $J_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada la Forma Canónica de Jordan (Real) de A y ella es única salvo se altere el orden de los bloques B_j y el signo de la parte imaginaria b de las raíces complejas del polinomio característico de A .

DEFINICIÓN 1.1.3.1

Sea E un subconjunto abierto del espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Un campo vectorial de clase C^r ($1 \leq r \leq \infty$) en E , es una aplicación continuamente diferenciable hasta de orden r en E , i.e., de clase C^r :

²“Differential Equations Dynamical Systems and Linear Algebra”, Hirsh and Smale; pag 331.

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X \mapsto f(X), \quad \forall X \in E.$$

DEFINICIÓN 1.1.3.2

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, una función vectorial de variable vectorial que va del espacio euclidiano n -dimensional a otro espacio euclidiano m -dimensional.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

con sus funciones coordenadas $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, m$ derivables.

La matriz Jacobiana de f está definida por:

$$J_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

En particular, si $n = m = 2$, y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, entonces la matriz jacobiana esta

dada por:

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

1.2 SISTEMAS AUTÓNOMOS Y NO AUTÓNOMOS

Un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es una expresión del tipo:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

En donde t es una variable independiente que denota al tiempo, x_1, x_2, \dots, x_n son variables que dependen de t que toman valores reales y $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}, i=1,2,\dots,n$, son funciones diferenciables de clase $C^r, r \geq 1$, definidas en un subconjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

En diversas ocasiones sucede que las funciones f_1, f_2, \dots, f_n solo dependen de las variables x_1, x_2, \dots, x_n y no de la variable temporal t , en este caso (1) toma la forma:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2)$$

Diremos entonces que (2) es un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Si $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$ y $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ la función vectorial, con funciones coordenadas $f_i, \forall i=1,2,\dots,n$. La ecuación anterior en su forma vectorial se escribe de la forma:

$$X' = f(X) \quad (3)$$

donde f es el campo vectorial asociado a la ecuación diferencial (3).

Un sistema autónomo lineal es una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$X' = AX \quad (4)$$

donde:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; X' = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$X \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

A la ecuación diferencial (4), se le asocia el campo vectorial f , definido por:

$$f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ X \mapsto f(X) = AX.$$

Esto significa que a cada punto $X \in \mathbb{R}^n$ le asignamos el vector AX . Las soluciones de la ecuación (4) son aplicaciones diferenciables, de la forma: $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\varphi'(t) = A\varphi(t), \forall t \in I \subset \mathbb{R}; \varphi \in C^1; 1 \leq r \leq n$, son llamadas curvas integrales ó curvas solución del campo vectorial f ó de la ecuación diferencial (4).

1.2.1 SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES

TEOREMA 1.2.1.1

Sea el sistema autónomo lineal

$$X' = AX, \quad (5)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y condiciones iniciales $X(0) = X_0 = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Este sistema con condiciones iniciales tiene una única solución dada por:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t, c_1) \\ x_2(t, c_2) \\ \vdots \\ x_n(t, c_n) \end{bmatrix} = e^{tA} X_0 \quad (6)$$

PRUEBA

El Teorema 1.1.2.2 muestra que:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} X_0 = \left(\frac{d}{dt} e^{tA} \right) X_0.$$

Como $e^{0A} X_0 = X_0$, se tiene que $X(t) = e^{tA} X_0$ es una solución del sistema. Para ver que no hay otras soluciones, supongamos que $X(t)$ es una solución cualquiera del sistema y pongamos

$$X(t) = e^{tA} Y(t)$$

$$\Rightarrow Y(t) = e^{-tA} X(t).$$

Entonces

$$Y'(t) = \left(\frac{d}{dt} e^{-tA} \right) X(t) + e^{-tA} X'(t)$$

$$Y'(t) = -Ae^{-tA} X(t) + e^{-tA} AX'(t)$$

$$Y'(t) = e^{-tA} (-A + A) X(t)$$

$$Y'(t) = 0$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$, desde que e^{-tA} y A conmutan. Así $Y(t)$ es una constante.

Poniendo $t = 0$ se ve que $Y(0) = X_0$ y además toda solución del problema de valores iniciales está dado por $X(t) = e^{tA} Y(t) = e^{tA} X_0$.

Es de observar que cada punto $X_0 \in \mathbb{R}^n$ se mueve al punto $X(t) \in \mathbb{R}^n$ dado por (6) pasado un tiempo t . Este movimiento puede ser descrito geoméricamente por el gráfico de las familias de curvas que genera la representación paramétrica,

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t, c_1) \\ x_2(t) = x_2(t, c_2) \\ \vdots \\ x_n(t) = x_n(t, c_n) \end{cases} \quad (7)$$

llamada curvas solución, en el espacio \mathbb{R}^n al cual se denominó espacio de fases.

DEFINICIÓN 1.2.1.1

El retrato de fases de un sistema de ecuaciones diferenciales, así como (5), es el conjunto de todas las curvas que genera la representación paramétrica (7), con $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 1.2.1.2

Sea el sistema dinámico autónomo lineal $X' = AX$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^n$. Se dice que A es una matriz hiperbólica (o el sistema lineal $X' = AX$ es hiperbólico) sí y solo si todos sus autovalores tienen parte real distinto de cero.

DEFINICIÓN 1.2.1.3

Si A es una matriz hiperbólica, se define el índice de estabilidad de A , denotado por $i(A)$, como el número de autovalores (incluyendo multiplicidades) con parte real negativa.

DEFINICIÓN 1.2.1.4

Dado el conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^n$, un sistema dinámico es una aplicación de la forma:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (t, X) &\mapsto \varphi(t, X) = \varphi_t(X)\end{aligned}$$

de clase C^1 , y que satisface las siguientes condiciones:

i) $\varphi_0 : E \rightarrow E$ es la aplicación identidad.

ii) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

1.2.2 FLUJO ASOCIADO A UN SISTEMA AUTÓNOMO LINEAL

DEFINICIÓN 1.2.2.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, el flujo asociado al sistema lineal autónomo

$$X' = AX \tag{8}$$

está dado por:

$$\begin{aligned}\varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, X) &\mapsto \varphi_A(t, X) = e^{tA}X.\end{aligned}$$

Es de observar que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ determina un sistema lineal autónomo (8) y recíprocamente, luego podemos decir indistintamente que φ_A es el flujo asociado a la matriz A o es el flujo asociado al sistema lineal autónomo (8).

El flujo asociado al sistema lineal autónomo (8), expresa un sistema dinámico.

En efecto, Sabemos que:

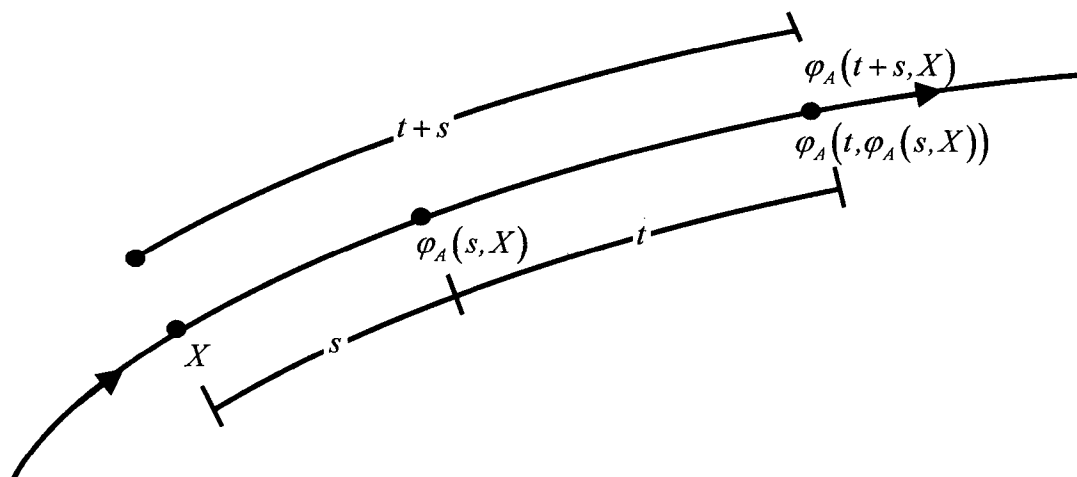
$$\varphi_A(0, X) = e^{0A} X = IX = X, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Por otro lado,

$$\varphi_A(t+s, X) = e^{(t+s)A} X = e^{tA+sA} X = e^{tA} \cdot e^{sA} X$$

$$\varphi_A(t+s, X) = e^{tA} (e^{sA} X) = \varphi_A(t, e^{sA} X) = \varphi_A(t, \varphi_A(s, X)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

El comportamiento geométrico de esta afirmación es la siguiente:



Dado un $X \in \mathbb{R}^n$, la órbita o trayectoria que pasa por el punto X a través del flujo φ_A denotada por $\Phi_A(X)$ se define como el conjunto

$$\Phi_A(X) = \{\varphi_A(t, X); t \in \mathbb{R}\}$$

LEMA 1.2.2.1

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\lambda \in K$ (K es un campo real o complejo) autovalor de A entonces para todo $V \in K^n - \{0\}$ autovector de A asociado a λ se tiene

$$e^{tA} V = e^{\lambda t} V, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

PRUEBA

Dado $V \in K^n - \{0\}$ autovector de A asociada a $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos el camino

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} &\rightarrow K^n \\ t &\mapsto \phi(t) = e^{\lambda t} V\end{aligned}$$

Donde se observa que $\phi'(t) = e^{\lambda t} \lambda V = e^{\lambda t} AV = A(e^{\lambda t} V) = A\phi(t)$ y $\phi(0) = V$.

Entonces ϕ representa una solución del problema de valores iniciales

$$X' = AX$$

$$X(0) = V.$$

La existencia y unicidad de soluciones expresa que se debe cumplir que

$$\phi(t) = e^{tA} V.$$

PROPOSICIÓN 1.2.2.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_A(t, X) = 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, todos los autovalores de A tienen parte real negativo.

PRUEBA

Demostraremos por contradicción. Supongamos que existe un autovalor $\lambda \in K$ (K campo real o complejo) de A , tal que $Re(\lambda) \geq 0$. Sea V un autovector asociado a $\lambda \in K$, del anterior resultado se desprende que:

$$|\varphi_A(t, V)| = |e^{tA} V| = |e^{\lambda t} V| = e^{Re(\lambda)t} |V|.$$

Luego, se tiene que:

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi_A(t, V)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Re(\lambda)t} |V| = \begin{cases} +\infty & , \text{ si } Re(\lambda) > 0 \\ |V| & , \text{ si } Re(\lambda) = 0 \end{cases}$$

Esto indica una contradicción, por lo tanto todos los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa.

1.2.3 CONJUGACIÓN DE LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES

DEFINICIÓN 1.2.3.1

Sean $M, N \subset \mathbb{R}^n$, y $h: M \rightarrow N$ una aplicación.

- Se dice que h es un homeomorfismo si y sólo si h es biyectiva, continua y su inversa $h^{-1}: N \rightarrow M$ también es continua.
- Se dice que h es un difeomorfismo de clase C^r (con $1 \leq r \leq \infty$) si y sólo si h es biyectiva, de clase C^r y su inversa también es de clase C^r .
- Se dice que h es un isomorfismo, si y sólo si es una aplicación lineal y biyectiva.

Por otro lado, M y $N \subset \mathbb{R}^n$ son homeomorfos si existe un homeomorfismo de M sobre N .

DEFINICIÓN 1.2.3.2

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y consideremos sus flujos asociados φ_A y φ_B . Se dice que las matrices A y B (o sus respectivos sistemas asociados $X' = AX$ y $X' = BX$) son topológicamente conjugadas, lo que denotamos $A \equiv_{top} B$ si y sólo si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ llamado conjugación topológica tal que

$$h(\varphi_A(t, X)) = \varphi_B(t, h(X)), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n,$$

o equivalentemente

$$h(e^{tA}X) = e^{tB}h(X), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

En el caso de que h sea un difeomorfismo de clase C^r ($1 \leq r \leq \infty$), entonces decimos que A y B son C^r conjugados, denotado por $A \equiv_{C^r} B$, y h es llamado conjugación C^r . Por último, si h es un isomorfismo lineal, entonces A y B son

linealmente conjugados, denotado por $A \equiv_{lin} B$, y en este caso h es llamado conjugación lineal.

OBSERVACIÓN:

i) Las conjugaciones topológicas, C^r y lineales generan particiones en el espacio de matrices cuadradas, y por ende generan clases de equivalencia.

ii) Las conjugaciones topológicas respetan el parámetro t y por tanto la orientación de las órbitas.

iii) Si fijamos un $X_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces la conjugación $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la siguiente propiedad:

$$h[\Phi_A(X_0)] = \Phi_B(h(X_0)).$$

En efecto, sea $Y \in h[\Phi_A(X_0)]$, entonces existe un $X \in \Phi_A(X_0)$ tal que $Y = h(X)$. Como $X \in \Phi_A(X_0)$, tenemos que existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X = \varphi_A(t_0, X_0)$. Luego

$$Y = h(X) = h(\varphi_A(t_0, X_0)) = \varphi_B(t_0, h(X_0))$$

es decir $Y \in \Phi_B(h(X_0))$, entonces $h[\Phi_A(X_0)] \subset \Phi_B(h(X_0))$.

Por otro lado, sea $Y \in \Phi_B(h(X_0))$, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

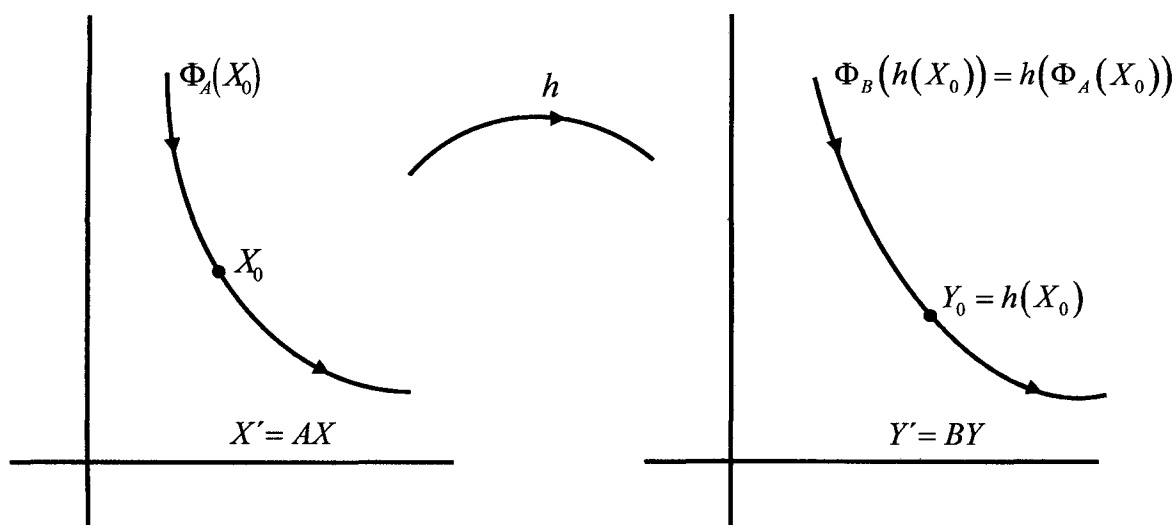
$$Y = \varphi_B(t_0, h(X_0))$$

entonces $h^{-1}(Y) = h^{-1}(\varphi_B(t_0, h(X_0))) = \varphi_A(t_0, X_0) = X \in \Phi_A(X_0)$, así

$Y = h(X) \in h(\Phi_A(X_0))$, por tanto $\Phi_B(h(X_0)) \subset h(\Phi_A(X_0))$.

$\therefore \Phi_B(h(X_0)) = h(\Phi_A(X_0))$

De esta manera, queda demostrado que las conjugaciones llevan órbitas en órbitas, como se muestra en la siguiente figura.



PROPOSICIÓN 1.2.3.1

Sea $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) $A \equiv_{c^1} B$
- b) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son equivalentes, i.e. existe $P \in GL(\mathbb{R}^n)$, tal que $PA = BP$.
- c) $A \equiv_{lin} B$

Por el Teorema de la Forma Canónica de Jordan, sabemos que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es equivalente a su forma canónica de Jordan $J_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Luego cada clase de equivalencia lineal admite como representante a la forma canónica de un elemento de la clase; por lo tanto, el estudio del comportamiento de las órbitas de un sistema autónomo lineal asociado a la matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, quedara resumida al estudio del comportamiento de las órbitas de un sistema autónomo lineal asociado a la matriz $J_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1.2.4 SISTEMAS AUTÓNOMOS LINEALES BIDIMENSIONALES

De acuerdo a la proposición 1.2.3.1, para entender el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema dinámico autónomo asociado a la matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, basta estudiar las soluciones del sistema dinámico autónomo asociado a su Forma Canónica de Jordan $J_A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Sean λ_1 y λ_2 los autovalores de la matriz A , entonces se presentan las siguientes posibilidades:

- i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
- iii) $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = a - ib$.

i) Si las raíces son reales y distintas, la forma canónica de Jordan es dada por:

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Luego el flujo asociado a J_A en cualquier punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, esta dado por:

$$\varphi_{J_A}(t, P_0) = (e^{\lambda_1 t} x_0, e^{\lambda_2 t} y_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es de observar que $\Phi_{J_A}(0,0) = \{(0,0)\}$ y que además ($\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$):

$$\Phi_{J_A}((x_0, 0)) = \begin{cases}]0, +\infty[\times \{0\} & \text{si } x_0 > 0 \\]-\infty, 0[\times \{0\} & \text{si } x_0 < 0 \end{cases},$$

$$\Phi_{J_A}((0, y_0)) = \begin{cases} \{0\} \times]0, +\infty[& \text{si } y_0 > 0 \\ \{0\} \times]-\infty, 0[& \text{si } y_0 < 0 \end{cases}.$$

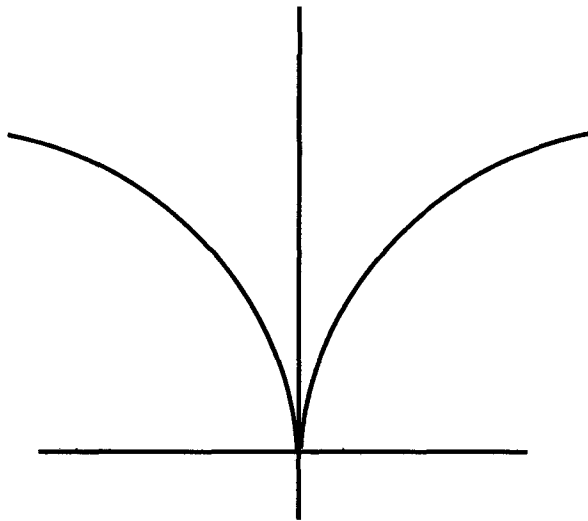
Sea

$$\begin{cases} x = e^{\lambda_1 t} x_0 \\ y = e^{\lambda_2 t} x_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$$

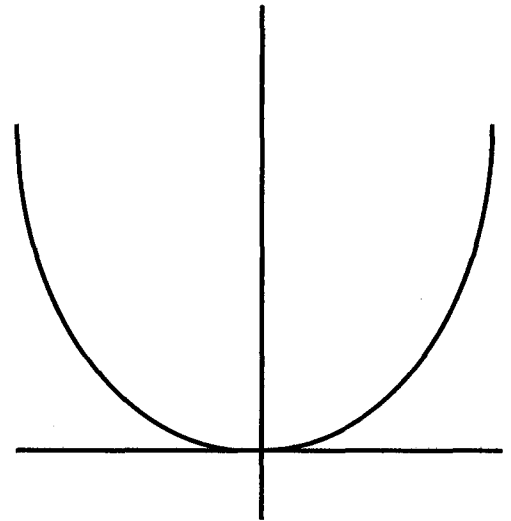
por lo tanto

$$y = y_0 \left| \frac{x}{x_0} \right|^{\lambda_2/\lambda_1} \quad \text{con } \lambda_1 \neq 0, \quad \text{ó} \quad x = x_0 \left| \frac{y}{y_0} \right|^{\lambda_1/\lambda_2} \quad \text{con } \lambda_2 \neq 0.$$

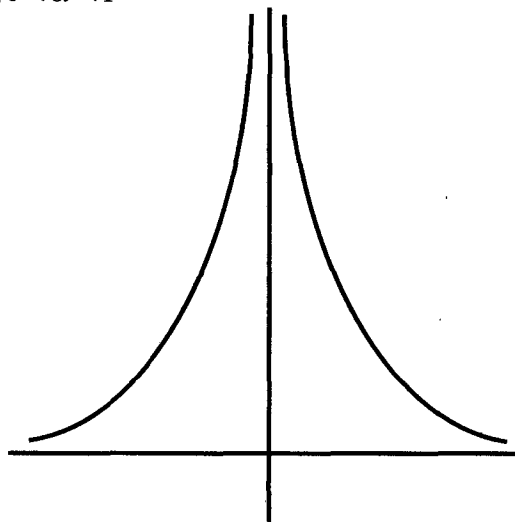
En este caso, las órbitas estarían contenidas en curvas del plano de los tipos:



$$y = C|x|^\alpha, 0 < \alpha < 1$$



$$y = C|x|^\alpha, 1 < \alpha$$



$$y = C|x|^\alpha, \alpha < 0.$$

Ya que el comportamiento geométrico de las órbitas depende de los signos de los autovalores λ_1 y λ_2 , se tienen los siguientes casos:

a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, entonces

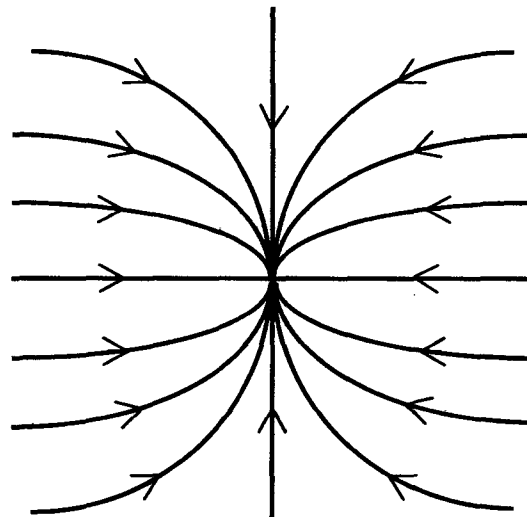
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = (0, 0), \forall P_0 \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Además

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{J_A}(t, y_0) = \begin{cases} (+\infty, +\infty) & \text{si } x_0 > 0, y_0 > 0 \\ (-\infty, +\infty) & \text{si } x_0 < 0, y_0 > 0 \\ (-\infty, -\infty) & \text{si } x_0 < 0, y_0 < 0 \\ (+\infty, -\infty) & \text{si } x_0 > 0, y_0 < 0 \end{cases}$$

Esto quiere decir que las trayectorias se aproximan del infinito hacia el origen cuando $t \rightarrow +\infty$ a excepción de éste que permanece fijo. En este caso se denomina al $0 \in \mathbb{R}^2$ atractor, pozo o sumidero.

Gráficamente las órbitas tendrían este comportamiento:



b) Si $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$, entonces $\Phi_{J_A}(0, y_0) = \{(0, y_0)\}$. Sea $x_0 \neq 0$, luego

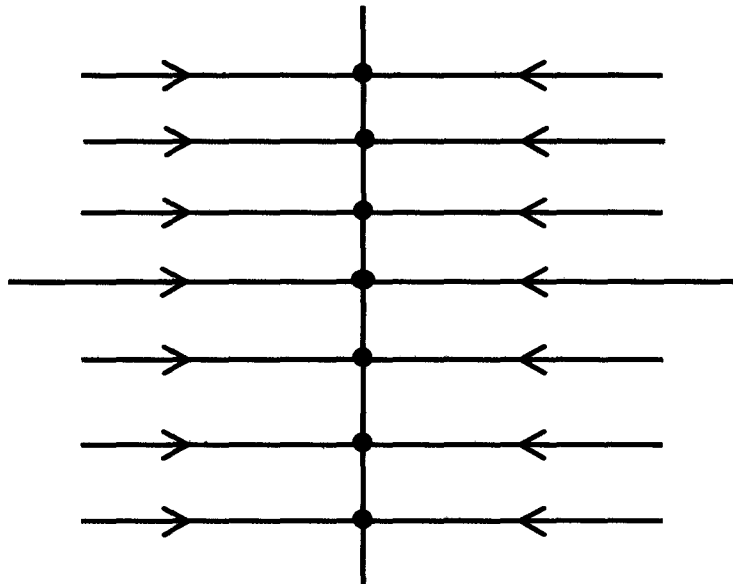
$$\varphi_{J_A}(t, P_0) = (e^{\lambda_1 t} x_0, y_0), \text{ y por tanto}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = (0, y_0).$$

Además

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = \begin{cases} (+\infty, y_0) & \text{si } x_0 > 0 \\ (-\infty, y_0) & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$

Se entiende que las órbitas están contenidas en rectas horizontales que se acercan al eje vertical así como se muestra en la figura:

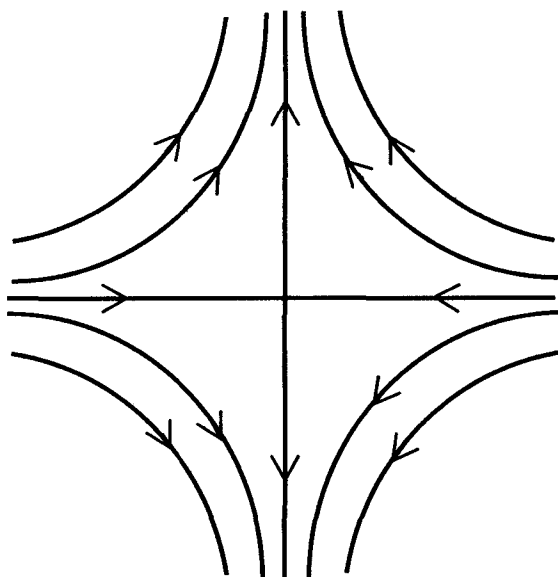


c) Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = \begin{cases} (0, +\infty) & \text{si } y_0 > 0 \\ (0, -\infty) & \text{si } y_0 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = \begin{cases} (+\infty, 0) & \text{si } x_0 > 0 \\ (-\infty, 0) & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}.$$

De este modo las órbitas se asemejan a las curvas que se comportan geoméricamente como las hipérbolas de la siguiente manera:



d) Si $0 = \lambda_1 < \lambda_2$, entonces $\Phi_{J_A}(x_0, 0) = \{(x_0, 0)\}$. Si $y_0 \neq 0$, entonces

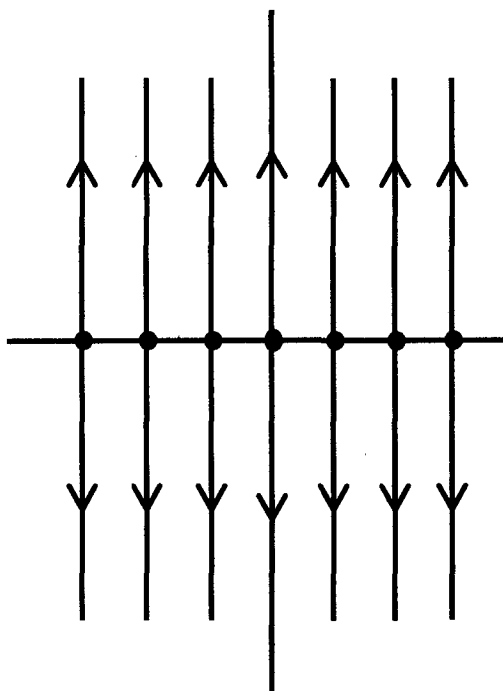
$$\varphi_{J_A}(0, P_0) = (x_0, e^{\lambda_2 t} y_0),$$

por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = (x_0, 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = \begin{cases} (x_0, +\infty) & \text{si } y_0 > 0 \\ (x_0, -\infty) & \text{si } y_0 < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto las órbitas están contenidas en rectas verticales que se alejan del eje horizontal de la siguiente manera:

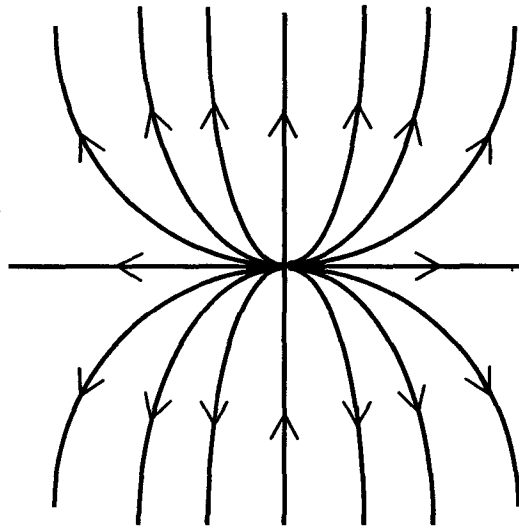


e) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = (0, 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = \begin{cases} (+\infty, +\infty) & \text{si } x_0 > 0, y_0 > 0 \\ (-\infty, +\infty) & \text{si } x_0 < 0, y_0 > 0 \\ (-\infty, -\infty) & \text{si } x_0 < 0, y_0 < 0 \\ (+\infty, -\infty) & \text{si } x_0 > 0, y_0 < 0 \end{cases}$$

De esta forma, las trayectorias parten del origen y tienden al infinito, a excepción de éste que permanece fijo. En este caso se denomina al $0 \in \mathbb{R}^2$ repulsor o fuente. Gráficamente las órbitas tendrían este comportamiento:



2) Si las raíces son reales e iguales, entonces la forma canónica de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{R}^2$ viene dada por:

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ó } J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Analicemos los siguiente casos:

a) Si $J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ y $\lambda < 0$, entonces el flujo en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ está dado

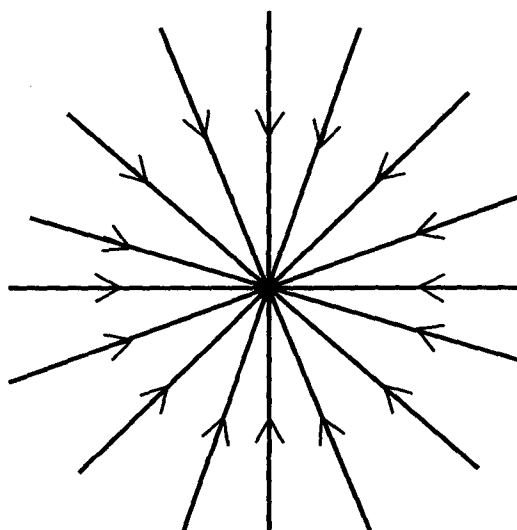
por:

$$\varphi_{J_A}(t, P_0) = (e^{\lambda t} x_0, e^{\lambda t} y_0) = e^{\lambda t} P_0,$$

de este modo $\Phi_{J_A}((0,0)) = \{(0,0)\}$. Además

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = (0,0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |\varphi_{J_A}(t, P_0)| = +\infty.$$

El comportamiento geométrico de las órbitas que no pasan por $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ se asemeja al comportamiento de las rectas que parten del infinito y se aproximan al origen, así como se muestra en la figura.



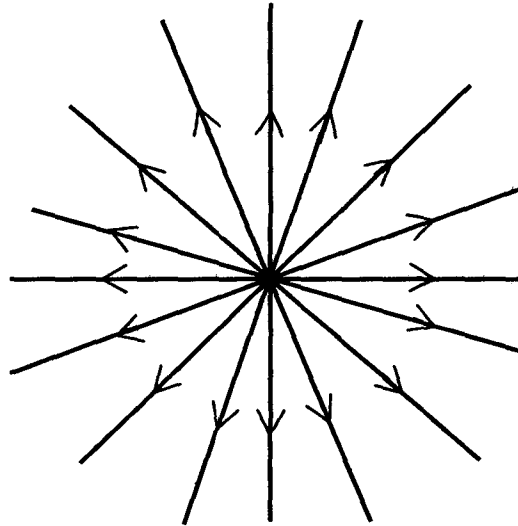
b) Si $J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ y $\lambda > 0$ entonces el flujo queda determinado como en el anterior caso por:

$$\varphi_{J_A}(t, P_0) = e^{\lambda t} P_0.$$

Pero sin embargo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi_{J_A}(t, P_0)| = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = (0,0).$$

Geoméricamente el comportamiento se asemeja a:



c) Si $J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ y $\lambda < 0$ entonces el flujo queda determinado por

$\varphi_{J_A}(t, P_0) = e^{\lambda t}(x_0 + ty_0, y_0)$. Es de observar que $\Phi_{J_A}((0,0)) = \{(0,0)\}$, además

$$\Phi_{J_A}((x_0, 0)) = \begin{cases}]0, +\infty[\times \{0\} & \text{si } x_0 > 0 \\]-\infty, 0[\times \{0\} & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}.$$

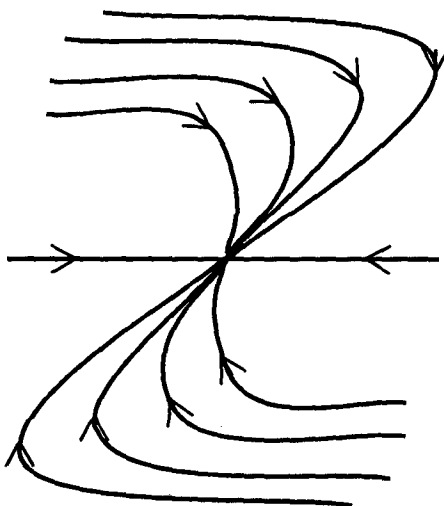
En cuanto a las demás curvas, para $y_0 \neq 0$, las órbitas se encuentran en la curva que tiene por función

$$x = x(y) = x_0 y + \frac{1}{\lambda} y \ln\left(\frac{y}{y_0}\right),$$

de esta última se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = (0,0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |\varphi_{J_A}(t, P_0)| = +\infty.$$

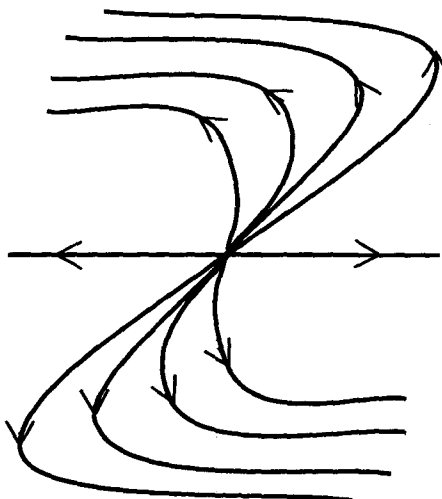
El comportamiento geométrico se asemeja a la siguiente figura:



d) Si $J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ y $\lambda > 0$, entonces el flujo es el mismo que en el caso anterior, pero, en este caso se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = (0, 0) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi_{J_A}(t, P_0)| = +\infty.$$

Geoméricamente se tiene el siguiente comportamiento:



e) Si $\lambda = 0$, entonces $J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, de este se implica que $\Phi_{J_A}(x_0, 0) = \{(x_0, 0)\}$.

Consideremos $y_0 \neq 0$, luego

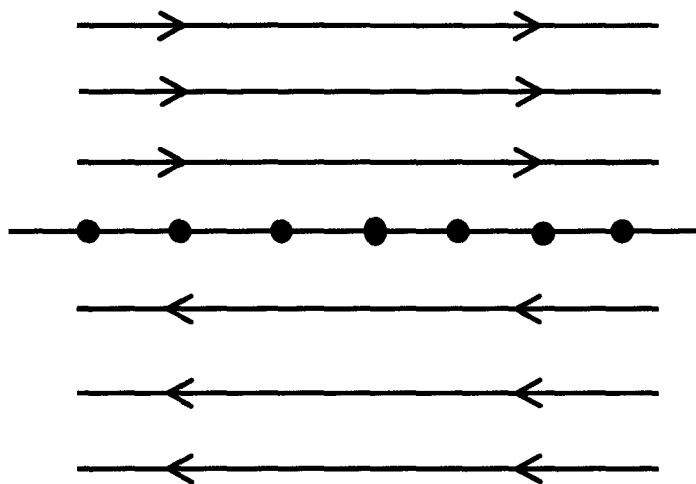
$$\varphi_{J_A}(t, P_0) = (x_0 + ty_0, y_0)$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = \begin{cases} (+\infty, y_0), & \text{si } y_0 > 0 \\ (-\infty, y_0), & \text{si } y_0 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_{J_A}(t, P_0) = \begin{cases} (-\infty, y_0), & \text{si } y_0 > 0 \\ (+\infty, y_0), & \text{si } y_0 < 0 \end{cases}$$

El comportamiento de las órbitas queda reflejada por el siguiente gráfico:



3) Si las raíces son complejas conjugadas $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces la Forma Canónica de Jordan de A viene dado por:

$$J_A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

y el flujo queda determinado por:

$$\varphi_{J_A} = (t, P_0) = e^{at} (x_0 \cos bt - y_0 \operatorname{sen} bt, x_0 \operatorname{sen} bt + y_0 \cos bt).$$

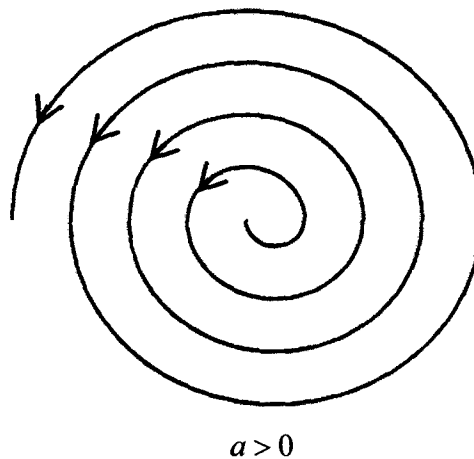
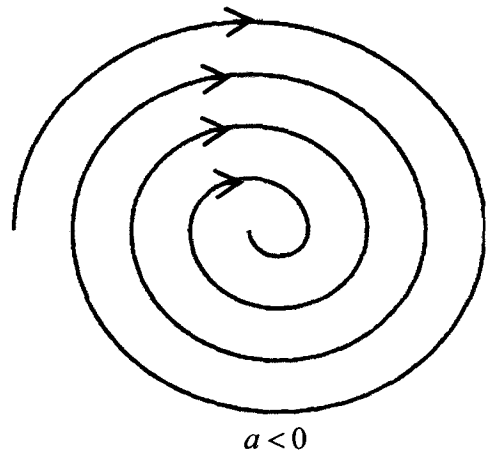
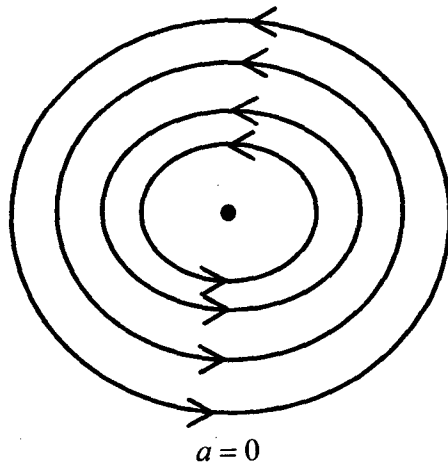
Es de observar que si:

i) $a = 0$, los a valores con imaginarios puros, entonces la órbita $\Phi_{J_A}(P_0)$ es una circunferencia de radio $|P_0|^2 = (x_0)^2 + (y_0)^2$, orientada de acuerdo al signo de b .

En este caso se dice que el origen $(0,0)$ es un centro.

ii) $a < 0$, entonces las órbitas denotan espirales que tienden al origen cuando $t \rightarrow +\infty$.

iii) $a > 0$, entonces las órbitas son espirales que emanan del origen.



1.3 SISTEMAS AUTÓNOMOS NO LINEALES

Un sistema autónomo no lineal es una ecuación diferencial de la forma:

$$X' = f(X) \tag{9}$$

Donde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el campo vectorial asociado al sistema (9) y E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

DEFINICIÓN 1.3.1

Sea $f \in C(E)$, donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Entonces $X(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (9) sobre el intervalo I , si $X(t)$ es diferenciable sobre I , y para todo $t \in I$, $X(t) \in E$ se cumple que

$$X'(t) = f(X(t));$$

y dado un $X_0 \in E$, $X(t)$ es una solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} X' &= f(X) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \tag{10}$$

sobre el intervalo I , si $t_0 \in I$, $X(t_0) = X_0$ y $X(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (9) sobre el intervalo I .

TEOREMA 1.3.1

Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene X_0 , $f \in C^1(E)$. Entonces existe un número real $a > 0$ tal que el problema de valores iniciales (10), tiene una única solución $X(t)$ sobre el intervalo $[-a, a]$ ³.

TEOREMA 1.3.2

Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(E)$. Entonces para todo punto $X_0 \in \mathbb{R}^n$, existe un intervalo abierto máximo $I(X_0) \subset \mathbb{R}$ sobre el cual el problema de valor inicial (10) tiene una única solución $X(t)$; i.e.; si el problema de valor inicial (10) tiene una solución $Y(t)$ sobre un intervalo I , entonces $I \subset I(X_0)$ y $Y(t) = X(t)$ para todo $t \in I$. A $I(X_0) \subset \mathbb{R}$ se denomina intervalo máximo de existencia⁴.

1.3.1 FLUJO ASOCIADO A UN SISTEMA AUTÓNOMO NO LINEAL

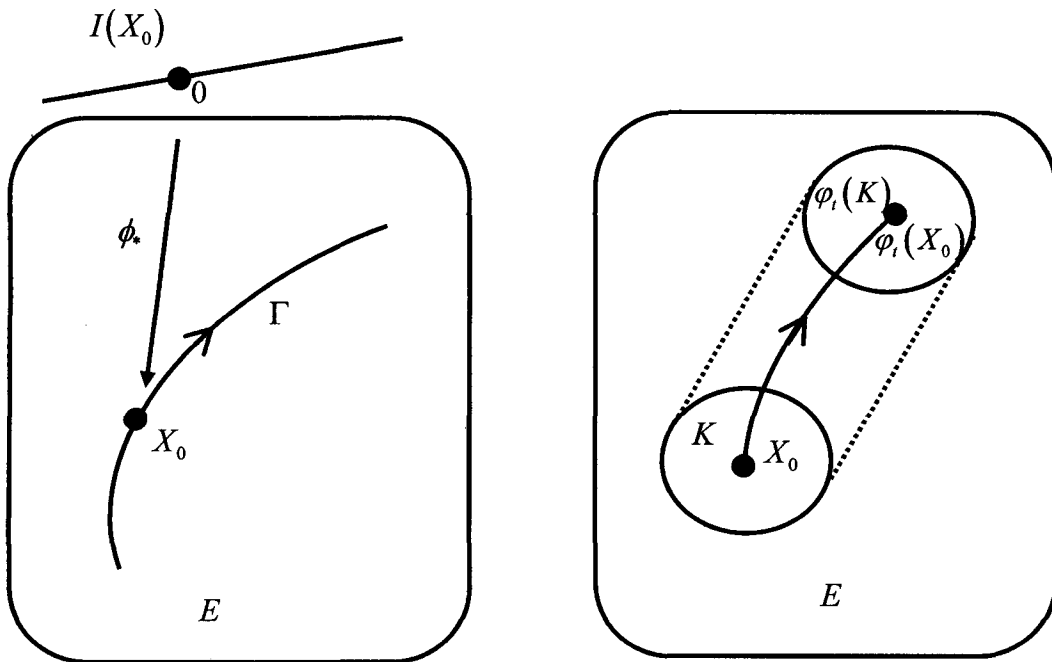
DEFINICIÓN 1.3.1.1

Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $f \in C^1(E)$. Para $X_0 \in E$, si $\phi(t, X_0)$, es la solución del problema de valor inicial (10) definido sobre su intervalo máximo de existencia $I(X_0)$, entonces para todo $t \in I(X_0)$, la función $\varphi_t : E \rightarrow E$ definido por $\varphi_t(X_0) = \phi(t, X_0)$, es llamado el flujo de la ecuación diferencial $X' = f(X)$ o el flujo definido por esta ecuación diferencial; también se hace referencia como el flujo del campo vectorial f .

³ *Differential Equations and Dynamical Systems; Lawrence, Perko; Springer Verlag; pag 73.*

⁴ *Differential Equations and Dynamical Systems; Lawrence, Perko; Springer Verlag; pag 88.*

Si pensamos en X_0 como un punto fijo, entonces la función $\phi_* : I(X_0) \rightarrow E$, definido por $\phi_*(t) = \phi(t, X_0)$, define una curva solución o trayectoria del sistema $X' = f(X)$. Es usual pensar que la función ϕ_* queda identificado con su gráfica en $I(X_0) \times E$, y la trayectoria visualizada como un movimiento a lo largo de una curva Γ que pasa a través del punto X_0 en el subconjunto abierto E del espacio de fases \mathbb{R}^n . Por otro lado, si pensáramos que el punto X_0 variará en un conjunto $K \subset E$, entonces el flujo $\phi_t : K \rightarrow E$, podría ser visto como el movimiento de todos los puntos en el conjunto K .



a) Una trayectoria Γ del sistema

$$X' = f(X)$$

b) El flujo ϕ_t del sistema

$$X' = f(X).$$

DEFINICIÓN 1.3.1.2

Un punto $X_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama punto de equilibrio del sistema (9) si $f(X_0) = 0$. Un punto de equilibrio X_0 se llama punto de equilibrio hiperbólico del sistema $X' = f(X)$ si ninguno de los autovalores de la matriz $Df(X_0)$ tiene parte real

igual a cero. El sistema $X' = \tilde{A}X$, con la matriz $\tilde{A} = Df(X_0)$ se llama linealización del sistema (9) en el punto X_0 .

El número de autovalores de $\tilde{A} = \frac{\partial f}{\partial X}(\tilde{X})$ (incluyendo multiplicidades) que tiene parte real negativa, se llama índice de estabilidad de f en X_0 y se denota por $i(\tilde{A})$.

1.4 FUNDAMENTOS DE MERCADO

1.4.1 MERCADO:

Definimos mercado, como el "conjunto de compradores reales y potenciales de un producto. Estos compradores comparten una necesidad o un deseo particular que puede satisfacerse mediante una relación de intercambio"⁵.

1.4.2 EMPRESA:

Empresa es una "entidad que mediante la organización de elementos humanos, materiales, técnicos y financieros proporciona bienes o servicios a cambio de un precio que le permite la reposición de los recursos empleados y la consecución de unos objetivos determinados"⁶

⁵ *Marketing, Décima Edición, de Kotler, Armstrong, Cámara y Cruz, Prentice Hall, Pág. 10*

⁶ *Prácticas de la Gestión Empresarial, de Julio García del Junco y Cristóbal Casanueva Rocha, Mc Graw Hill, Pág. 3.*

1.4.3 SERVICIOS:

Se definen los servicios "como actividades identificables e intangibles que son el objeto principal de una transacción ideada para brindar a los clientes satisfacción de deseos o necesidades"⁷

1.4.4 CLIENTE:

Se entiende por cliente como "el comprador potencial o real de los productos o servicios"⁸

1.4.5 PUBLICIDAD:

La publicidad es "una comunicación no personal, pagada por un patrocinador claramente identificado, que promueve ideas, organizaciones o productos. Los puntos de venta más habituales para los anuncios son los medios de transmisión por televisión y radio y los impresos (diarios y revistas). Sin embargo, hay muchos otros medios publicitarios, desde los espectaculares playeras impresas y, en fechas más recientes, el internet"⁹

⁷ «Fundamentos de Marketing», 13va. Edición, de Stanton William, Etzel Michael y Walker Bruce, Mc Graw Hill, 2004, Págs. 333 y 334

⁸ «Marketingpower.com», de la American Marketing Association (A.M.A.)

⁹ Fundamentos de Marketing, 13a Edición, de Stanton William, Etzel Michael y Walker Bruce, Mc Graw Hill, Pág. 569

CAPITULO II

TEOREMA DE HARTMAN - GROBMAN - MODELO DE PUBLICIDAD

2.1 TEOREMA DE HARTMAN - GROBMAN

El teorema muestra que cerca de un punto fijo hiperbólico X_0 del sistema dinámico autónomo no lineal

$$X' = f(X) \quad (1)$$

Tiene la misma estructura cualitativa como del sistema dinámico autónomo lineal

$$X' = AX \quad (2)$$

Con $A = Df(X_0) = \frac{\partial f(X_0)}{\partial X}$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

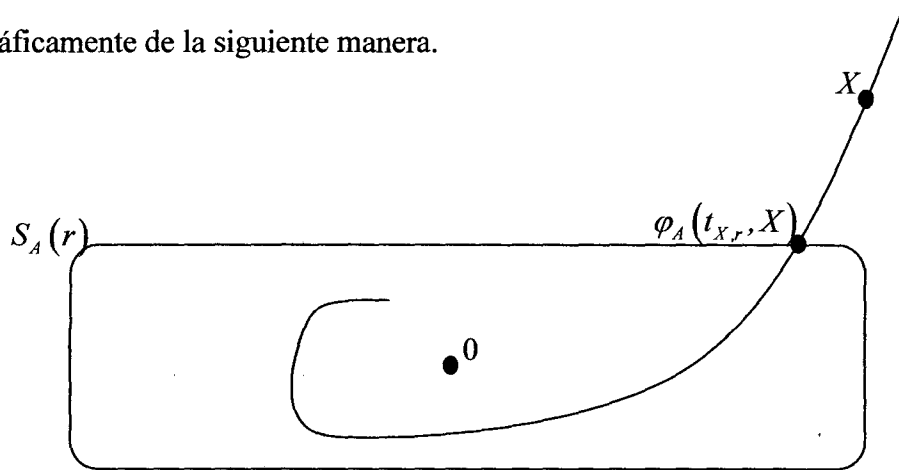
PROPOSICIÓN 2.1.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con autovalores con parte real negativa. Entonces existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ en \mathbb{R}^n tal que la órbita $\Phi_A(X)$ de cualquier punto $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ interseca en un único punto a cada una de las esferas de la familia $\{S_A(r)\}_{r>0}$ donde

$$S_A(r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, x \rangle_A = r^2\}.^{10}$$

¹⁰ *Tópicos en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Renato Benazic; Textos UNI, pag 118.*

Esta proposición, permite afirmar que para todo $X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, existe un único $t_{X,r} \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_A(t_{X,r}, X) \in S_A(r)$. Y recíprocamente dado $t \in \mathbb{R}$ existe algún número $r \in \mathbb{R}$ mayor que cero tal que, $\varphi_A(t, X) \in S_A(r)$. Esto puede observarse gráficamente de la siguiente manera.

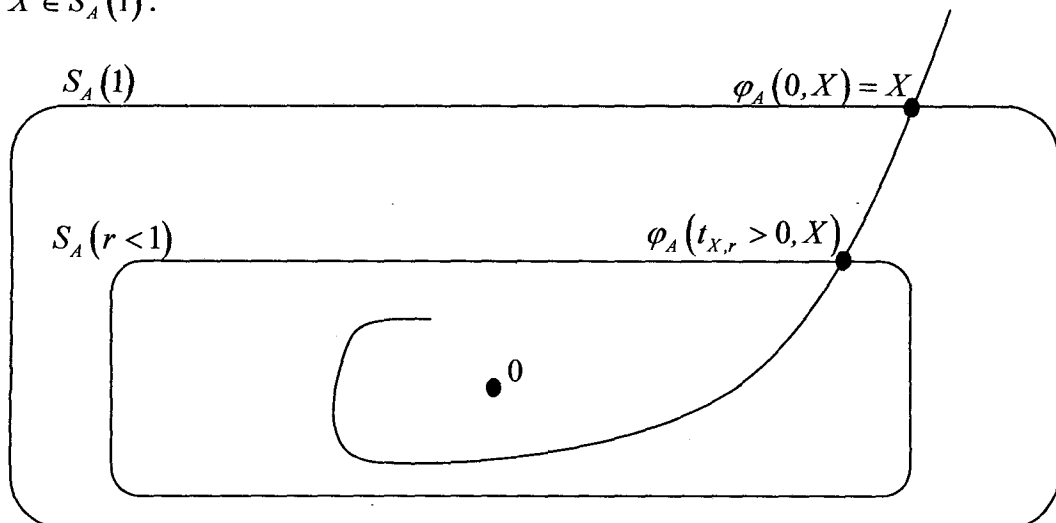


Sea $|\cdot|_A$ la norma definida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

Sea $X \in S_A(1)$, entonces $t_{X,1} = 0$ puesto que

$$|\varphi_A(0, X)|_A = |X|_A = 1.$$

Con esto, es posible afirmar que para todo $X \in S_A(1)$ y para $t_{X,r} > 0$, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_A(t_{X,r}, X) \in S_A(r)$. Dado que si A tiene todos los autovalores con parte real negativa, por la proposición 1.2.2.1 toda órbita $\varphi_A(t, X)$ converge a cero para todo $X \in \mathbb{R}^n$, entonces $r = |\varphi_A(t, X)|_A < 1$ para todo $t_{X,r} > 0$, y todo $X \in S_A(1)$.



Luego

$$\|e^A\| = \|e^{1 \cdot A}\| = \sup_{\|X\|_A=1} |e^A X|_A = \sup_{\|X\|_A=1} |\varphi_A(1, X)|_A < 1.$$

En tanto, si A es una matriz con autovalores λ con parte real $Re(\lambda) > 0$.

Entonces la norma $\|(e^A)^{-1}\| = \|e^{-A}\|$ también es estrictamente menor que la unidad, según la métrica existente por la proposición anterior, ya que los autovalores de la matriz $(-A)$, tienen autovalores $(-\lambda)$ con parte real $Re(-\lambda) < 0$.

En lo posterior, para efectos de demostración del teorema de Hartman – Grobman, se considerara las normas aquí establecidas.

2.1.1 TEOREMA (Hartman - Grobman)

Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen, $f \in C^1(E)$ y φ_t el flujo del sistema dinámico autónomo no lineal

$$X' = f(X)$$

Si $f(0) = 0$ y la matriz $A = Df(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial X}$ no tiene autovalores con parte real nula, entonces existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$; donde $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tal que para cada $X_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ tal que:

$$H \circ \varphi_t(X_0) = e^{At} H(X_0), \quad \forall X_0 \in U \text{ y } \forall t \in I_0 \quad (3)$$

DEMOSTRACIÓN:

Sean $X' = f(X)$ el sistema dinámico autónomo no lineal con $f \in C^1(E)$,

$$f(0) = 0 \text{ y } A = Df(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial X}.$$

Por otro lado, supongamos que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, puede escribirse de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

donde los autovalores de P tienen parte real negativa y los autovalores de Q tiene parte real positiva.

Sea φ_t el flujo del sistema dinámico autónomo no lineal (1) y escribamos la solución, de la forma:

$$X(t, X_0) = \varphi_t(X_0) = \begin{bmatrix} y(t, y_0, z_0) \\ z(t, y_0, z_0) \end{bmatrix}$$

Donde:

$$X_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$y_0 \in E^S$ es el subespacio estable de A y $z_0 \in E^U$ es el subespacio inestable de A .

Definiendo las funciones, de la forma:

$$\tilde{Y}(y_0, z_0) = y(1, y_0, z_0) - e^P y_0$$

$$\tilde{Z}(y_0, z_0) = z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0.$$

Donde \tilde{Y} y \tilde{Z} son funciones de la trayectoria con la condición inicial X_0 evaluada en $t = 1$.

Luego

Si $X_0 = 0$, entonces se sigue que:

$y_0 = z_0 = 0$, y también se cumple que:

$\tilde{Y}(0) = \tilde{Z}(0) = 0$ y $D\tilde{Y}(0) = D\tilde{Z}(0) = 0$ puesto que X_0 se encuentra en el punto fijo 0.

Ya que $f \in C^1(E)$, las funciones $\tilde{Y}(Y_0, Z_0)$ y $\tilde{Z}(Y_0, Z_0)$ son continuamente diferenciables en E .

Se sabe que $D\tilde{Y}(0) = D\tilde{Z}(0) = 0$ en el origen y que Y y Z son continuamente diferenciables en E , entonces podemos definir una región sobre el origen, de tal manera que: $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq s_0^2$ para algún $s_0 \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño.

En consecuencia, se tiene las normas de $\|D\tilde{Y}\|$ y $\|D\tilde{Z}\|$, respectivamente:

$$\|D\tilde{Y}(y_0, z_0)\| \leq a$$

$$\|D\tilde{Z}(y_0, z_0)\| \leq a$$

Para todo (y_0, z_0) que pertenezcan al conjunto compacto $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq s_0^2$.

La constante $a \in \mathbb{R}$ puede tomarse tan pequeña como se quiera al escoger s_0 suficientemente pequeño.

Sean $Y = Y(y_0, z_0)$ y $Z = Z(y_0, z_0)$ funciones continuas, tal que si

$|y_0|^2 + |z_0|^2 \geq s_0^2$, entonces $Y = Z = 0$, mientras si $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq \left(\frac{s_0}{2}\right)^2$, entonces

$$Y = \tilde{Y} \text{ y } Z = \tilde{Z}$$

Luego por el teorema del valor medio para derivadas (Teorema de Lagrange), se tiene que:

$$\|Y(y_0, z_0) - Y(0, 0)\| \leq \|DY(y_1, z_1)\| \|(y_0, z_0) - (0, 0)\|, \text{ donde } |y_1|^2 + |z_1|^2 \leq \left(\frac{s_0}{2}\right)^2$$

$$\|Y(y_0, z_0)\| \leq a\sqrt{|y_0|^2 + |z_0|^2} \leq a(|y_0| + |z_0|) \quad \text{y}$$

$$\|Z(y_0, z_0) - Z(0, 0)\| \leq \|DZ(y_1, z_1)\| \|(y_0, z_0) - (0, 0)\|, \text{ donde } |y_1|^2 + |z_1|^2 \leq \left(\frac{s_0}{2}\right)^2$$

$$\|Z(y_0, z_0)\| \leq a\sqrt{|y_0|^2 + |z_0|^2} \leq a(|y_0| + |z_0|), \quad \forall X_0 = (y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n$$

Por otro lado, tenemos que: $B = e^P$ y $C = e^Q$, donde $B \in \mathbb{R}^{k \times k} \wedge C \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ y

se cumple que: $b = \|B\| < 1$ y $c = \|C\| < 1$, esto por la Proposición 2.1.1.

Por otro parte, para:

$$X = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

definamos las transformaciones

$$L(y, z) = \begin{bmatrix} By \\ Cz \end{bmatrix}$$

$$T(y, z) = \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix}$$

Esto es:

Se cumplen que: $L(X) = e^A X$ y $\varphi_1(X) = T(X)$, respectivamente:

En efecto:

$$L(X) = L(y, z) = \begin{bmatrix} By \\ Cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^p y \\ e^q z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^p & 0 \\ 0 & e^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = e^A X \text{ y}$$

$$\varphi_1(X) = \varphi_1(y, z) = \begin{bmatrix} (1, y, z) \\ (1, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}(y, z) + e^p y \\ \tilde{Z}(y, z) + e^q z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix} = T(y, z) = T(X)$$

Ahora probaremos que existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$; con $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos que contienen al origen, tal que se cumple que:

$$H_0 \circ T = L \circ H_0.$$

Sea

$$H_0(X) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix}.$$

Luego

$$H_0 \circ T(X) = H_0 \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \end{bmatrix}$$

$$L \circ H_0(X) = L \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\Phi(y, z) \\ C\Psi(y, z) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $H_0 \circ T = L \circ H_0$ es equivalente al par de ecuaciones

$$B\Phi(y, z) = \Phi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \quad (4)$$

$$C\Psi(y, z) = \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \quad (5)$$

Definamos la siguiente sucesión $\Psi_k(y, z)$, para la ecuación (5) por:

$$\begin{cases} \Psi_0(y, z) = z \\ \Psi_{k+1}(y, z) = C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)). \end{cases} \quad (6)$$

Donde $k = 0, 1, 2, \dots$,

Por otro lado $\Psi_k(y, z)$ es continua, y satisface $\Psi_k(y, z) = z$, para $|y| + |z| \geq 2s_0$.

En efecto:

$$\Psi_1(y, z) = C^{-1}\Psi_0(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))$$

$$\Psi_1(y, z) = C^{-1}(Cz + Z(y, z))$$

$$\Psi_1(y, z) = C^{-1}(Cz), \text{ puesto que } Z(y, z) = 0, \text{ cuando } |y|^2 + |z|^2 \geq s_0^2$$

$$\Psi_1(y, z) = z$$

Por tanto

$$\Psi_1(y, z) = z$$

En general

$$\Psi_k(y, z) = C^{-1}\Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))$$

$$\Psi_k(y, z) = C^{-1}(Cz + Z(y, z))$$

$$\Psi_k(y, z) = C^{-1}(Cz), \text{ puesto que } Z(y, z) = 0, \text{ cuando } |y|^2 + |z|^2 \geq s_0^2$$

$$\Psi_k(y, z) = z$$

En consecuencia $\Psi_k(y, z) = z$, para $|y| + |z| \geq 2s_0$.

A continuación demostraremos por inducción, que se cumple:

$$|\Psi_j(y, z) - \Psi_{j-1}(y, z)| \leq Mr^j (|y| + |z|)^\delta \quad \forall j = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

Donde $r = c[2\max(a, b, c)]^\delta$ con $\delta \in (0, 1)$ escogiendo s_0 suficientemente pequeño tal que $r < 1$ (es posible dado que $c < 1$), y $M = \frac{ac(2s_0)^{1-\delta}}{r}$.

En efecto, si el caso fuera para $(y, z) \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y| + |z| \geq 2s_0$ se cumplirá puesto que $Z(y, z) = 0$; procedemos ahora para $(y, z) \in \mathbb{R}^n$ tales que $|y| + |z| \leq 2s_0$

Para $j = 1$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| = |C^{-1}\Psi_0(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - z|$$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| = |C^{-1}(Cz + Z(y, z)) - z|, \text{ puesto que: } \Psi_0(y, z) = z$$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| = |C^{-1}Cz + C^{-1}(Z(y, z)) - z|$$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| = |Iz + C^{-1}(Z(y, z)) - z|$$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| = |C^{-1}Z(y, z)| \leq \|C^{-1}\| |Z(y, z)|$$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| \leq ca(|y| + |z|)$$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| \leq Mr(2s_0)^{\delta-1} (|y| + |z|), \text{ puesto que: } M = \frac{ac(2s_0)^{1-\delta}}{r}$$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| \leq Mr(|y| + |z|)^{\delta-1} (|y| + |z|)$$

$$|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| \leq Mr(|y| + |z|)^\delta$$

Por lo tanto: $|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| \leq Mr(|y| + |z|)^\delta$.

Suponiendo que la hipótesis de inducción se cumpla para $j = 1, 2, \dots, k$, esto es:

$$|\Psi_k(y, z) - \Psi_{k-1}(y, z)| \leq Mr^k (|y| + |z|)^\delta$$

A continuación demostraremos para $j = k + 1$

En efecto:

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| = \left| C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - C^{-1}\Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \right|$$

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq \left| C^{-1}(\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - \Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))) \right|$$

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq \|C^{-1}\| \left| \Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - \Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \right|$$

Por la hipótesis de inducción se tiene que:

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq cMr^k \left[|By + Y(y, z)| + |Cz + Z(y, z)| \right]^\delta$$

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq cMr^k \left[\|B\||y| + |Y(y, z)| + \|C\||z| + |Z(y, z)| \right]^\delta$$

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq cMr^k \left[b|y| + a(|y| + |z|) + c|z| + a(|y| + |z|) \right]^\delta$$

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq cMr^k \left[b|y| + 2a(|y| + |z|) + c|z| \right]^\delta$$

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq Mr^k c \left[2 \max(a, b, c) \right]^\delta (|y| + |z|)^\delta$$

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| = Mr^k r (|y| + |z|)^\delta, \text{ puesto que: } r = c \left[2 \max(a, b, c) \right]^\delta$$

$$|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq Mr^{k+1} (|y| + |z|)^\delta$$

Lo que muestra que: $|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| \leq Mr^{k+1} (|y| + |z|)^\delta$.

Por lo tanto se cumple que: $|\Psi_j(y, z) - \Psi_{j-1}(y, z)| \leq Mr^j (|y| + |z|)^\delta$, para $j = 1, 2, \dots$

De este último se afirma que $\Psi_k(y, z)$ es una sucesión de Cauchy de funciones continuas que convergen uniformemente a la función continua $\Psi(y, z)$, cuando

$k \mapsto \infty$, por tanto, tomando límites en la ecuación (6), $\Psi(y, z)$ es aproximada por la sucesión $\Psi_k(y, z)$.

La ecuación (4) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$B^{-1}\Phi(y, z) = \Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z)) \quad (8)$$

Donde la función Y_1 y Z_1 son definidos por el inverso de T (existe, ya que la constante a es suficientemente pequeña, esto es, s_0 es suficientemente pequeña) como sigue:

$$T^{-1}(y, z) = \begin{bmatrix} B^{-1}y + Y_1(y, z) \\ C^{-1}z + Z_1(y, z) \end{bmatrix}.$$

Entonces la ecuación (8) puede ser resuelta para $\Phi(y, z)$ de la misma manera que para la ecuación (5) con $\Phi_0(y, z) = y$, donde $b = \|B\| < 1$, $B = e^P$.

Así, obtener la aplicación continua $H_0 : U \rightarrow V$, con $U, V \subset \mathbb{R}^n$ que contienen el origen, definida por:

$$H_0(y, z) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \psi(y, z) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Sean L^t y T^t las familias uni-paramétricas de las transformaciones L y T , definidas por:

$$L^t(X_0) = e^{At} X_0 \text{ y } T^t(X_0) = \varphi_t(X_0), \text{ con } X_0 \in U.$$

Definamos:

$$H = \int_0^1 L^s H_0 T^s ds.$$

Para comprobar (3)

$$H = \left[\int_0^1 L^s H_0 T^{s-t} ds \right] T^t$$

$$L'H = \left[\int_0^1 L L^{-s} H_0 T^{s-t} ds \right] T^t$$

$$L'H = \left[\int_0^1 L^{-(s-t)} H_0 T^{(s-t)} ds \right] T^t$$

si $s-t = u$, entonces $ds = du$

si $s \rightarrow 0$ entonces $u \rightarrow -t$ y si $s \rightarrow 1$ entonces $u \rightarrow 1-t$

Luego:

$$L'H = \left[\int_{-t}^{1-t} L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t$$

$$\left[\int_{-t}^{1-t} L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t = \left[\int_{-t}^0 L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t + \left[\int_0^{1-t} L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t$$

$$L'H = \left[\int_{-t}^0 L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t + \left[\int_0^{1-t} L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t \quad (10)$$

Ahora

$$\left[\int_{-t}^0 L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t = \left[\int_{-t}^0 L^{-u} L^{-1} H_0 T T^u du \right] T^t, \text{ puesto que } H_0 = L^{-1} H_0 T$$

$$\left[\int_{-t}^0 L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t = \left[\int_{-t}^0 L^{-(u+1)} H_0 T^{(u+1)} du \right] T^t$$

si $u+1 = v$, entonces $du = dv$

si $u \rightarrow 0$ entonces $v \rightarrow 1$ y si $u \rightarrow -t$ entonces $v \rightarrow 1-t$, en tanto

$$\left[\int_{-t}^0 L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t = \left[\int_{1-t}^1 L^{-v} H_0 T^v dv \right] T^t = \left[\int_{1-t}^1 L^{-v} H_0 T^v dv \right] T^t$$

$$\left[\int_{-t}^0 L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t = \left[\int_{1-t}^1 L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t \quad (11)$$

Ahora reemplazando (11) en (10), se tiene que:

$$L'H = \left[\int_{-t}^0 L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t + \left[\int_0^{1-t} L^{-u} H_0 T^u du \right] T^t$$

$$L'H = \left[\int_{1-t}^1 L^{-u} H_0 T^u du \right] T' + \left[\int_0^{1-t} L^{-u} H_0 T^u du \right] T'$$

$$L'H = \left[\int_0^1 L^{-u} H_0 T^u du \right] T' = \left[\int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds \right] T'$$

$$L'H = HT'$$

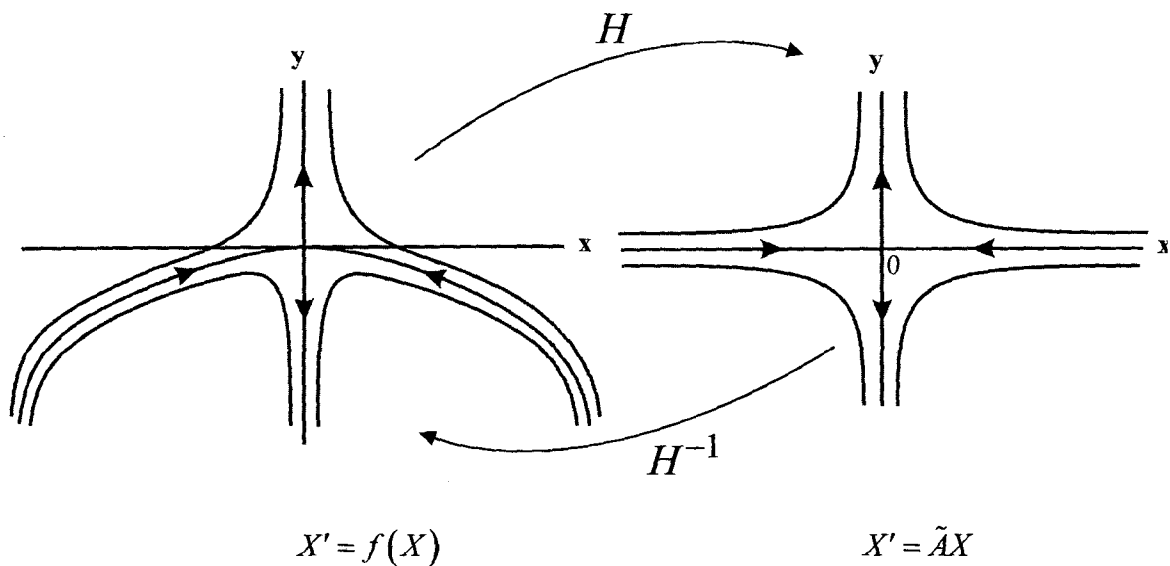
Por tanto

$$HT' = L'H \text{ o equivalentemente } H \circ \varphi_t(X_0) = e^{At} H(X_0).$$

Esto completa la demostración del teorema de Hartman - Grobman. ■

En consecuencia existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ con $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos que contienen al origen que transforma las trayectorias del sistema dinámico autónomo no lineal (1) en las del sistema linealizado preservando la parametrización, o sea el sentido en el que se recorren.

Como se puede observar en la siguiente gráfica, cuando el retrato de fases se encuentra en el plano:



Por lo tanto, es posible deformar las trayectorias del sistema dinámico autónomo no lineal, en las trayectorias del sistema dinámico lineal asociado a esta sin alterar su sentido, mediante el homeomorfismo H .

2.2 MODELO DE PUBLICIDAD

Sea M un conjunto de personas que necesitan de un servicio S , con un número de personas limitado.

Sea E una empresa que brinda el servicio S , y ésta emplea cierta cantidad de ingresos en la publicidad, con la finalidad de conseguir nuevos usuarios que utilicen de su servicio.

Este conjunto de personas se divide en dos grupos “ CP ” y “ U ”, respectivamente. El primero “ CP ”, es el grupo de compradores potenciales que fluyen en el mercado en un instante “ t ”, es decir, el conjunto de personas que podrían convertirse en usuarios del servicio que presta la empresa E , y el segundo “ U ” es el grupo de usuarios del servicio que presta dicha empresa en ese instante.

Sean x e y , el número de personas que integran estos grupos respectivamente.

Luego, supongamos que el número de compradores potenciales que comprarán y además se harán clientes en algún intervalo corto de tiempo (*NuevosUsuarios*), es proporcional al número actual de compradores potenciales y al número de usuarios. Esto es:

$$\text{NuevosUsuarios} = a(t)xy$$

Donde la constante de proporcionalidad $a(t)$ se le llama “tasa de contacto”.

Además, se asume que dicha tasa de contacto se puede incrementar por un aumento en la inversión en los gastos de publicidad y que además esta tasa de publicidad es proporcional al número de usuarios, esto es:

$$a(t) = \alpha y$$

Con lo que se tendría que:

$$\text{NuevosUsuarios} = \alpha xy^2$$

Al parámetro α , le llamaremos “esfuerzo en la publicidad”.

Por otro lado, se supone además que los usuarios actuales cambian a una marca rival (*Usuarios Convertidos a Potenciales*) en una proporción de β , convirtiéndose así en compradores potenciales, esto es:

$$\text{Usuarios Convertidos a Potenciales} = \beta y$$

La subida de ventas de artículos semejantes de otras marcas, empresas afines y la publicidad que se emplea por la empresa E , influye sobre el valor del parámetro β .

Como los individuos pueden volver a la marca original entonces permanecen en el grupo de los compradores potenciales.

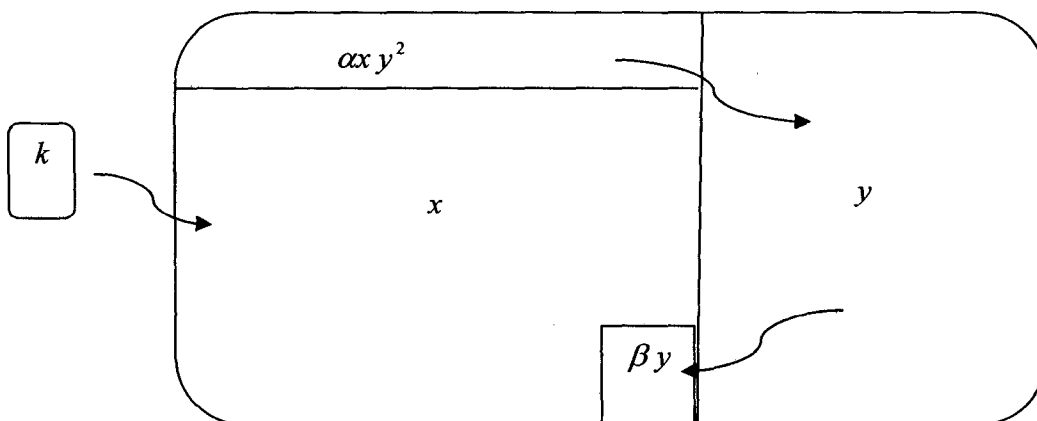
Se supone que un flujo continuo de compradores potenciales entran en el mercado desde alguna fuente, ya sea por un aumento de los ingresos, o cambios demográficos. De este modo, los individuos fluyen dentro del mercado (*Flujo de Input*) con una tasa constante de input k .

$$\text{Flujo de Input} = k$$

Por lo que la variación del número de clientes potenciales “ x ” estará dado por:

$$x' = \text{Flujo de Input} - \text{Nuevos Usuarios} + \text{Usuarios Convertidos a Potenciales}$$

$$x' = k - \alpha x y^2 + \beta y$$



Además existe un parámetro “ ε ” que describe el porcentaje de los usuarios que dejan de ser para siempre usuarios (*NoUsuarios*) ya sea por muerte o inmigración.

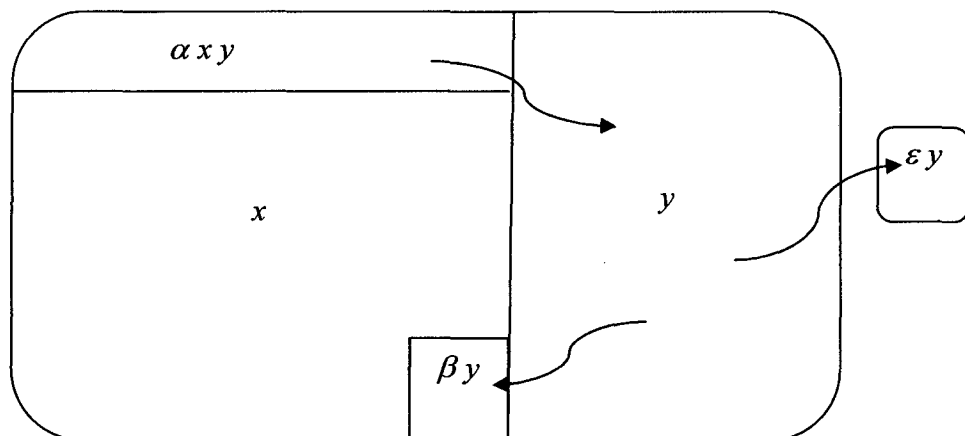
Por lo tanto:

$$\text{NoUsuarios} = \varepsilon y$$

Por lo tanto en lo que respecta a la variación del número de usuarios “ y ”, se tiene que:

$$y' = \text{NuevosUsuarios} - \text{Usuarios Convertidos a Potenciales} - \text{NoUsuarios}$$

$$y' = \alpha x y^2 - (\beta + \varepsilon) y$$



Por tanto el modelo de publicidad a estudiar, para ver la relación entre el esfuerzo en la publicidad, el número de usuarios y el parámetro β , estará dado por:

$$\begin{cases} x' = k - \alpha x y^2 + \beta y \\ y' = \alpha x y^2 - (\beta + \varepsilon) y \end{cases} \quad (1)$$

El sistema (1) representa un sistema dinámico autónomo no lineal, al cual se le conoce como el modelo de publicidad por contacto de Feitchinger, el cual fue presentado en el año 1992.

Para el estudio de este sistema utilizaremos la semejanza del comportamiento de su mapa de fase con el mapa de fases de su sistema linealizado, garantizado por el teorema de Hartman - Grobman.

2.3 ESTABILIDAD E INESTABILIDAD DEL MODELO MATEMÁTICO DE PUBLICIDAD

El modelo matemático o sistema a analizar es:

$$\begin{cases} x' = k - \alpha xy^2 + \beta y \\ y' = \alpha xy^2 - (\beta + \varepsilon)y \end{cases} \quad (1)$$

Primero calculemos los puntos de equilibrio del sistema (1), para luego ver la estabilidad o inestabilidad del sistema en dichos puntos, y el comportamiento de sus trayectorias.

Para ello debemos considerar el campo vectorial f asociado al sistema dinámico autónomo (1), de la forma:

$$\begin{aligned} f : W \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (k - \alpha xy^2 + \beta y, \alpha xy^2 - \beta y - \varepsilon y) \end{aligned}$$

El punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, será un punto de equilibrio del sistema (1) si se cumple que:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$$

entonces:

$$\left. \begin{aligned} k - \alpha \bar{x} \bar{y}^2 + \beta \bar{y} &= 0 \\ \alpha \bar{x} \bar{y}^2 - \beta \bar{y} - \varepsilon \bar{y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{(\varepsilon + \beta)\varepsilon}{\alpha k}, \bar{y} = \frac{k}{\varepsilon}$$

El punto de equilibrio estará dado por:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{(\varepsilon + \beta)\varepsilon}{\alpha k}, \frac{k}{\varepsilon} \right)$$

Calculamos la matriz jacobiana $Df = \frac{\partial f(X)}{\partial X}$ asociada al sistema (1).

$$Df = \frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha y^2 & -\alpha xy + \beta \\ \alpha y^2 & 2\alpha xy - \beta - \varepsilon \end{bmatrix}$$

Luego, el sistema dinámico autónomo lineal asociado al sistema (1), estará dado por:

$$X' = \tilde{A}X, \text{ donde } \tilde{A} = Df \Big|_{(x,y) = \left(\frac{(\varepsilon + \beta)\varepsilon}{\alpha k}, \frac{k}{\varepsilon} \right)}.$$

Entonces:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & -(\beta + 2\varepsilon) \\ \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & \beta + \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Es decir, el sistema dinámico autónomo lineal asociado al sistema (1) es:

$$u' = -\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2}u - (\beta + 2\varepsilon)v$$

$$v' = \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2}u + (\beta + \varepsilon)v$$

Para analizar este sistema, en primer lugar calculamos los autovalores de la matriz \tilde{A} del sistema lineal.

Denotando con p a la traza de la matriz \tilde{A} , es decir:

$$p = (\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2}$$

y con q a la determinante de la matriz \tilde{A} , es decir:

$$q = \frac{\alpha k^2}{\varepsilon}$$

Entonces se tendría la ecuación característica para la matriz \tilde{A} , dada por:

$$r^2 - pr + q = 0.$$

Donde los autovalores se obtienen de acuerdo con la fórmula de las raíces de la ecuación anterior:

$$r = p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \quad (2)$$

Asumamos que los autovalores r , no tienen parte real nula, es decir el punto $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{(\varepsilon + \beta)\varepsilon}{\alpha k}, \frac{k}{\varepsilon} \right)$, es un punto de equilibrio hiperbólico para el sistema dinámico autónomo no lineal (1).

Luego, el teorema de Hartman - Grobman, nos garantiza que el comportamiento de las trayectorias del sistema autónomo no lineal alrededor del punto de equilibrio, es el mismo comportamiento de las trayectorias del sistema lineal asociado, alrededor del origen. Con esto el teorema de Hartman - Grobman nos brinda información sobre la estabilidad del punto de equilibrio, y también permite conocer cualitativamente el comportamiento de las trayectorias en un entorno del mismo.

En el estudio de los autovalores de la matriz \tilde{A} , se tienen los siguientes casos:

1. Para $q < 0$, se tiene que $\frac{\alpha k^2}{\varepsilon} < 0$.

En este caso el radicando de la ecuación (2) siempre es positivo por lo que los autovalores son reales. Como q es el producto de los dos autovalores, ambos han de ser de signos opuestos.

El origen es un punto de silla.

Pero esto no es posible, dado que la determinante $q = \frac{\alpha k^2}{\varepsilon} < 0$, no cumplirá esta condición, puesto que $\varepsilon, \alpha, k > 0$.

2. Para $q > 0$, se tiene que $\frac{\alpha k^2}{\varepsilon} > 0$.

Se presentan los siguientes subcasos:

2.1. Si $p^2 > 4q$, esto es $\left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 > 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon}$. El radicando de la ecuación (2) es positivo, por lo que los autovalores son reales y del mismo signo pues el determinante, q es positivo.

Entonces se tendría lo siguiente:

2.1.1. Para $p > 0$; esto es $\left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} > 0 \right)$. Los autovalores son positivos.

El origen es un nodo inestable.

Además, si:

$$\left(\beta + \varepsilon \right) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} > 0 \wedge \left(\left(\beta + \varepsilon \right) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 > 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon}$$

implica que:

$$\beta > \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} + \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2}$$

luego:

$$\beta \in \left[\frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} + \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2}, +\infty \right[$$

2.1.2. Para $p < 0$; esto es $(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} < 0$. Los autovalores son negativos.

El origen es un nodo estable.

Además:

$$\begin{aligned} (\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} < 0 \wedge \left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 > 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon} \\ \Rightarrow \beta < \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} - \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

$$\beta \in \left] -\infty, \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} - \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right[$$

2.2. Si $p^2 < 4q$, esto es $\left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 < 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon}$. El radicando de la ecuación (2) es negativo, por lo que los autovalores son complejos conjugados.

Se presentan los siguientes subcasos:

2.2.1. Para $p > 0$, esto es $(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} > 0$. En este caso la parte real de los autovalores es positiva. El origen es un punto espiral inestable.

Además, si se tiene que:

$$(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} > 0 \quad \wedge \quad \left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 < 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon}$$

entonces se cumple que:

$$\beta > \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} \quad \wedge \quad \beta < \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} + \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2}$$

luego:

$$\beta \in \left[\frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2}, \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} + \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right]$$

2.2.2. Para $p = 0$, esto es $(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} = 0$. La parte real de los autovalores es nula. El origen es un punto centro. Pero este caso también no ocurrirá, ya que estamos asumiendo que, el punto de equilibrio $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{(\varepsilon + \beta)\varepsilon}{\alpha k}, \frac{k}{\varepsilon} \right)$ es hiperbólico.

2.2.3. Para $p < 0$, esto es $(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} < 0$. La parte real de los autovalores es negativa. El origen es un punto espiral estable.

Además:

$$(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} < 0 \quad \wedge \quad \left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 < 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \beta < \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} \wedge \beta > \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} - \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \beta \in \left[\frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} - \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2}, \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} \right]$$

2.3. Si $p^2 = 4q$, esto es $\left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 = 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon}$.

La ecuación característica de \tilde{A} tendrá un autovalor de multiplicidad dos del signo de p .

Se presentan los siguientes subcasos:

2.3.1. Para $p > 0$, esto es $(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} > 0$. Los dos autovalores son iguales y positivos.

El origen es un nodo propio inestable. Si hay dos autovectores linealmente independientes asociados al autovalor de multiplicidad dos, entonces el origen es un punto manantial o fuente (nodo propio inestable).

Además, si:

$$\left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right) > 0 \wedge \left(\left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 = 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon} \right)$$

implica que:

$$\beta = \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} + \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2}$$

2.3.2. Para $p < 0$, esto es $(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} < 0$. Los dos autovalores son negativos e iguales, por lo tanto el origen es un nodo propio estable. Si hay dos autovectores linealmente independientes asociados al autovalor de multiplicidad dos, entonces el origen es un punto sumidero (nodo propio estable).

Además:

$$(\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} < 0 \wedge \left((\beta + \varepsilon) - \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} \right)^2 = 4 \frac{\alpha k^2}{\varepsilon}$$

luego:

$$\beta = \frac{\alpha k^2 - \varepsilon^3}{\varepsilon^2} - \frac{2k\varepsilon\sqrt{\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^2}$$

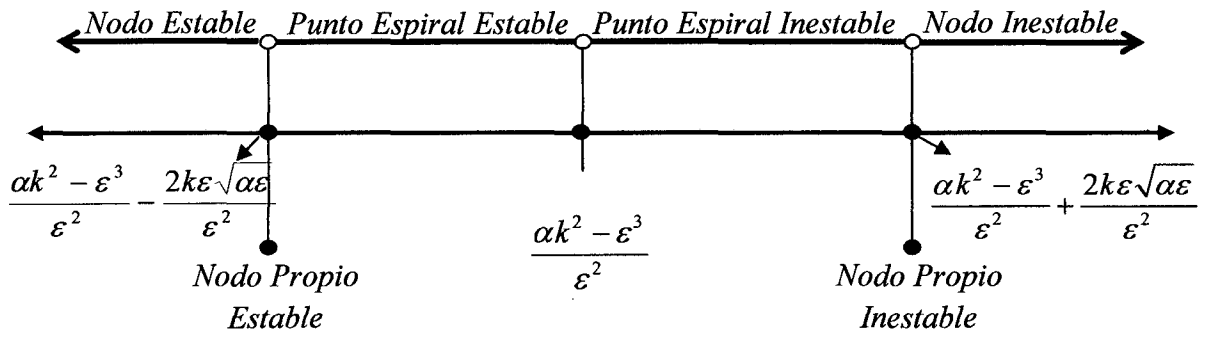
3. Para $q = 0$, se tiene que $\frac{\alpha k^2}{\varepsilon} = 0$. Esto significa que el rango de la matriz \tilde{A} , es la unidad.

Por tanto, los elementos de la segunda fila son múltiplos de la primera, esto es:

$$\frac{\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2}}{-\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2}} = \frac{\beta + \varepsilon}{-(\beta + 2\varepsilon)} = k.$$

Pero esto no es posible, ya que $\varepsilon \neq 0$. Por lo tanto no se considera este caso, además $\frac{\alpha k^2}{\varepsilon} \neq 0$ por consideraciones del modelo dinámico en estudio.

Así, el intervalo que resume la estabilidad e inestabilidad, según los valores del parámetro β , del sistema dinámico no lineal que representa el modelo de publicidad estudiado, es el siguiente:



CAPITULO III

ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD E INESTABILIDAD APLICADO AL MODELO MATEMÁTICO DE PUBLICIDAD DE UNA EMPRESA

Consideremos el siguiente sistema dinámico no lineal, dada por:

$$\begin{aligned}x' &= k - \alpha xy^2 + \beta y \\y' &= \alpha xy^2 - (\beta + \varepsilon) y\end{aligned}$$

que representa el modelo de publicidad por contacto.

La relación que existe entre “ x ” e “ y ” en un punto del sistema, expresa un estado favorable o desfavorable para la empresa. Así por ejemplo si tuviéramos que “ x ” fuera la tercera parte de “ y ”, entenderíamos que el número de usuarios de la empresa excede en gran mayoría a la de los compradores potenciales, esto implicaría un buen ingreso para la empresa, esto da a lugar a un caso favorable; pero si consideramos que dentro de cierto tiempo no se podría llegar a satisfacer a todos estos usuarios entonces éstos optarían por usar el servicio de otra empresa y además por ser un modelo de publicidad por contacto da lugar a la influencia de otros usuarios, y por tanto ocurriría un caso desfavorable.

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es el punto de equilibrio del sistema en estudio, entonces, si el punto de equilibrio representa eventos favorables o desfavorables para una empresa, la estabilidad expresaría una certeza sobre la ocurrencia de estos casos; en cambio la inestabilidad en el punto de equilibrio representa una incertidumbre de estos eventos, como se observará posteriormente.

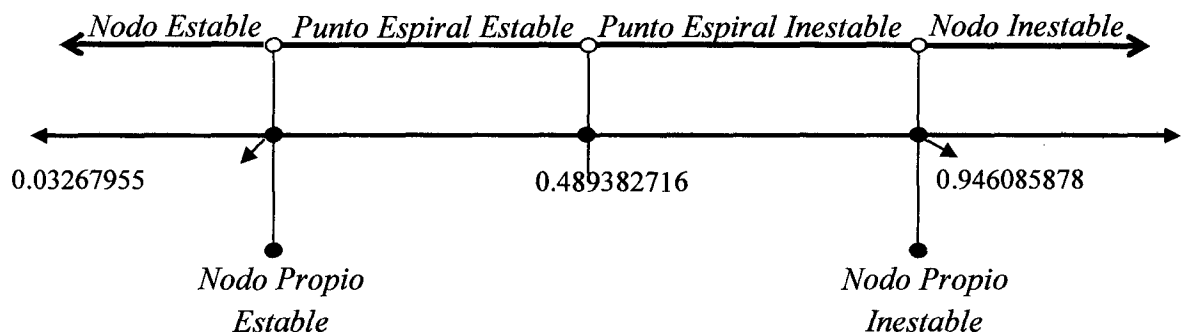
Por otro lado, consideremos los siguientes datos estimados de una empresa en un determinado tiempo:

- Flujo de nuevos clientes potenciales $k = 0.19$, esto significa que un 19% de la cantidad de personas que usan el mismo tipo de servicio que brinda la empresa, entran al mercado para decidirse, usar el producto de la empresa o de otra.
- La tasa de los *NoUsuarios* de la empresa $\varepsilon = 0.09$, esto es, que el 9% de la cantidad de los usuarios del servicio que ofrece la empresa, dejan de serlo, ya sea por muerte, migración o cualquier otro factor que les impida ser usuarios nuevamente.

Luego, la empresa decide invertir el 13% de sus ingresos, en publicidad para el servicio brindado (“esfuerzo en la publicidad: $\alpha = 0.13$ ”).

Además se tiene en cuenta que el 30% del total de consumidores de dicho servicio, son usuarios del servicio que ofrece dicha empresa, y el resto son comparadores potenciales que fluctúan en el mercado.

Así, el intervalo que nos resume la estabilidad e inestabilidad del sistema que representa el modelo de publicidad estudiado, según los valores del parámetro β es el siguiente:



Luego, si hiciéramos un estudio sobre el porcentaje de los usuarios, que se decidieran por usar el servicio de otra empresa, obtendríamos un valor entre cero

y uno; entonces podríamos observar según este valor la estabilidad o inestabilidad del sistema que expresa el modelo, o lo que es equivalente a expresar la ocurrencia o no de ciertos eventos en la empresa; así como veremos a continuación. Para esto utilizaremos el software wxMaxima 0.8.6 y observaremos el mapa de fases que expresa según los diferentes valores del parámetro β , dentro de los intervalos estudiados para éste.

Para los valores de $\beta \in \langle 0, 0.03267955 \rangle$.

Si $\beta = 0.001$, se tiene el siguiente sistema dinámico autónomo no lineal:

$$\begin{aligned} x' &= 0.19 - 0.13xy^2 + 0.001y \\ y' &= 0.13xy^2 - (0.001 + 0.09) \end{aligned} \quad (1)$$

Para estudiar el comportamiento de este sistema; consideremos el sistema lineal asociada.

La matriz \tilde{A} asociada al sistema no lineal (1), está dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & -(\beta + 2\varepsilon) \\ \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & \beta + \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.579 & -0.181 \\ 0.579 & 0.091 \end{bmatrix}$$

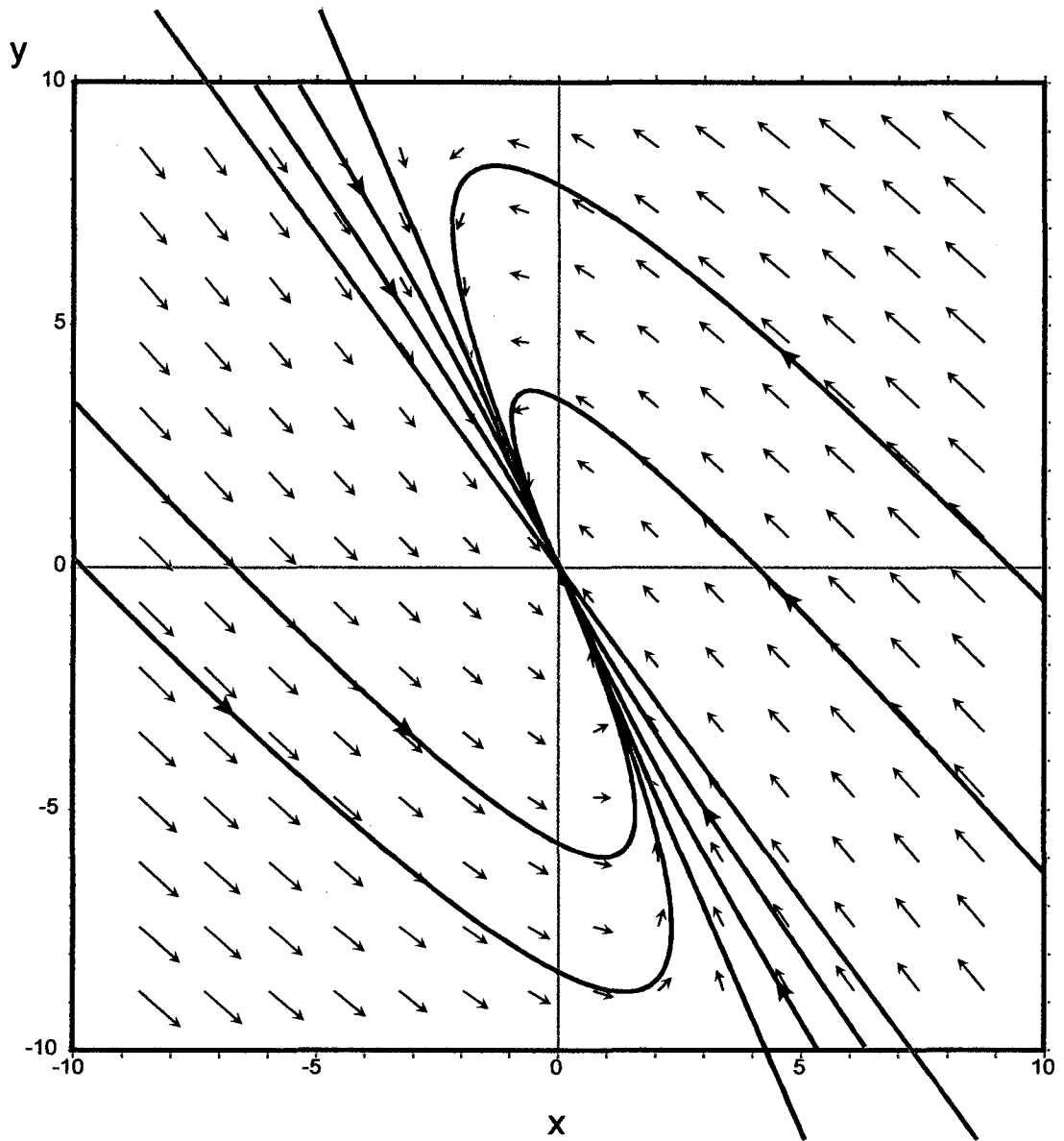
Hallando los autovalores de dicha matriz \tilde{A} :

$$\begin{aligned} P_{\tilde{A}}(\lambda) &= |\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.579 - \lambda & -0.181 \\ 0.579 & 0.091 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &(-0.579 - \lambda)(0.091 - \lambda) - (0.579)(-0.181) = 0 \\ &\lambda^2 + 0.4884\lambda + 0.0521 = 0 \end{aligned}$$

Entonces $\lambda_1 = -0.1577$ y $\lambda_2 = -0.3307$, ésto implica que:

$$\Sigma(\bar{A}) = \{-0.1577, -0.3307\}$$

Luego como los dos autovalores son reales y negativos las órbitas o trayectorias están de entrada al origen de coordenadas a medida que el tiempo transcurra, tal como muestra el mapa de fases del sistema (1) en la Gráfica 1.



Gráfica 1

➤ Para los valores de $\beta \in \langle 0.946, 1 \rangle$

Si $\beta = 0.97$ se tiene el siguiente sistema dinámico autónomo no lineal:

$$\begin{aligned}x' &= 0.19 - 0.13xy^2 + 0.97y \\y' &= 0.13xy^2 - (0.97 + 0.09)y\end{aligned}\tag{2}$$

De manera análoga que en la anterior, se sigue el mismo procedimiento.

La matriz \tilde{A} asociada al sistema no lineal ((2), está dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & -(\beta + 2\varepsilon) \\ \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & \beta + \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.579 & -1.15 \\ 0.579 & 1.06 \end{bmatrix}$$

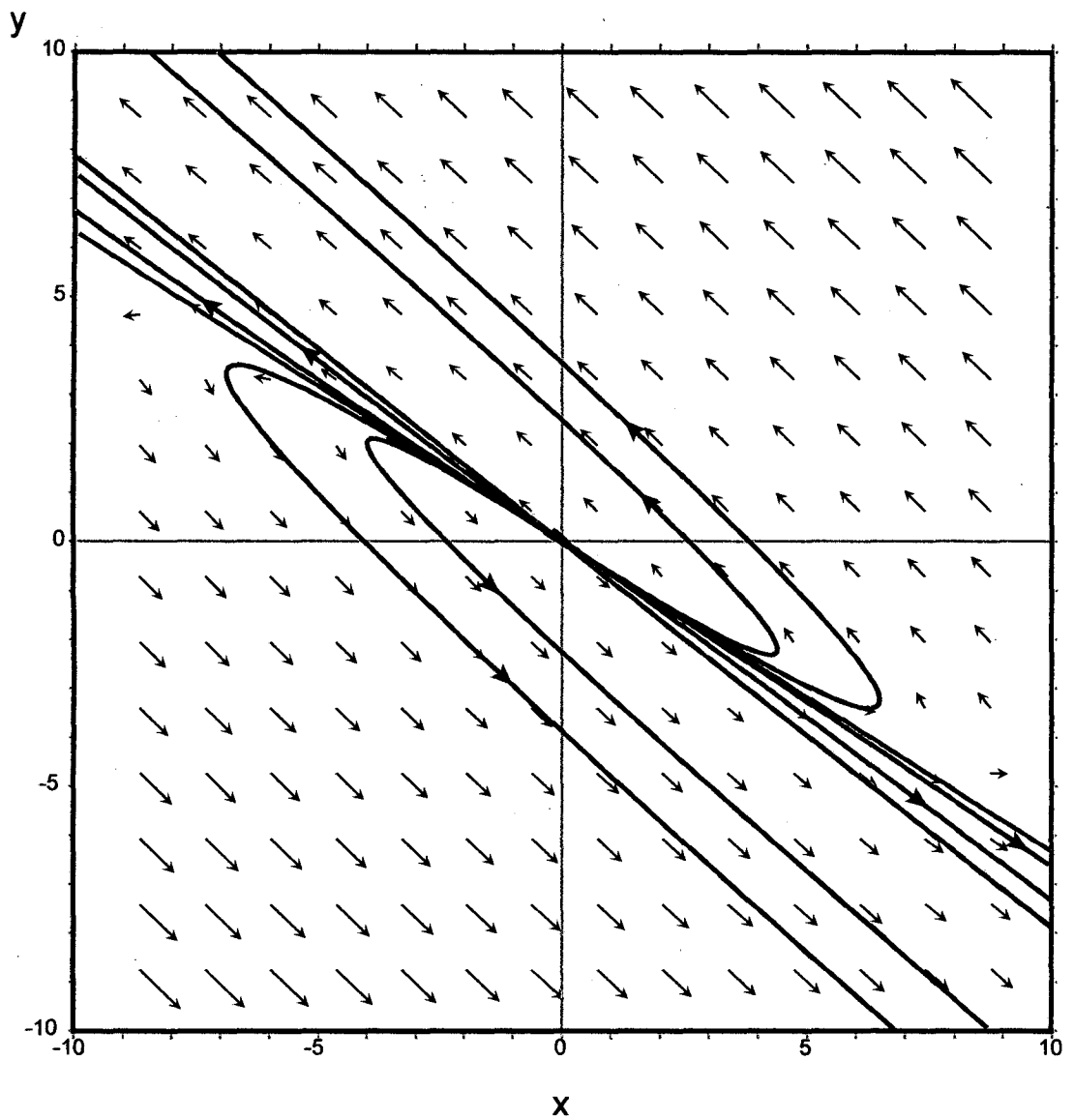
Hallando los autovalores de la matriz \tilde{A} :

$$\begin{aligned}P_{\tilde{A}}(\lambda) &= |\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.579 - \lambda & -1.15 \\ 0.579 & 1.06 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\(-0.579 - \lambda)(1.06 - \lambda) - (0.579)(-1.15) &= 0 \\ \lambda^2 - 0.481\lambda + 0.052 &= 0\end{aligned}$$

Entonces los autovalores de la matriz son $\lambda_1 = 0.3152$ y $\lambda_2 = 0.1655$, por lo tanto:

$$\Sigma(\bar{A}) = \{-0.3152, -0.1655\}$$

Luego como los dos autovalores son reales y positivos las órbitas o trayectorias están de salida del origen de coordenadas a medida que el tiempo avance, tal como muestra el mapa de fases del sistema (2) en la Gráfica 2.



Gráfica 2

➤ Para los valores de $\beta \in (0.0326, 0.489)$

Si $\beta = 0.3$ se tiene el siguiente sistema dinámico autónomo no lineal:

$$\begin{aligned} x' &= 0.19 - 0.13xy^2 + 0.3y \\ y' &= 0.13xy^2 - (0.3 + 0.09)y \end{aligned} \quad (3)$$

Entonces la matriz \tilde{A} , está dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & -(\beta + 2\varepsilon) \\ \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & \beta + \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.579 & -0.48 \\ 0.579 & 0.39 \end{bmatrix}$$

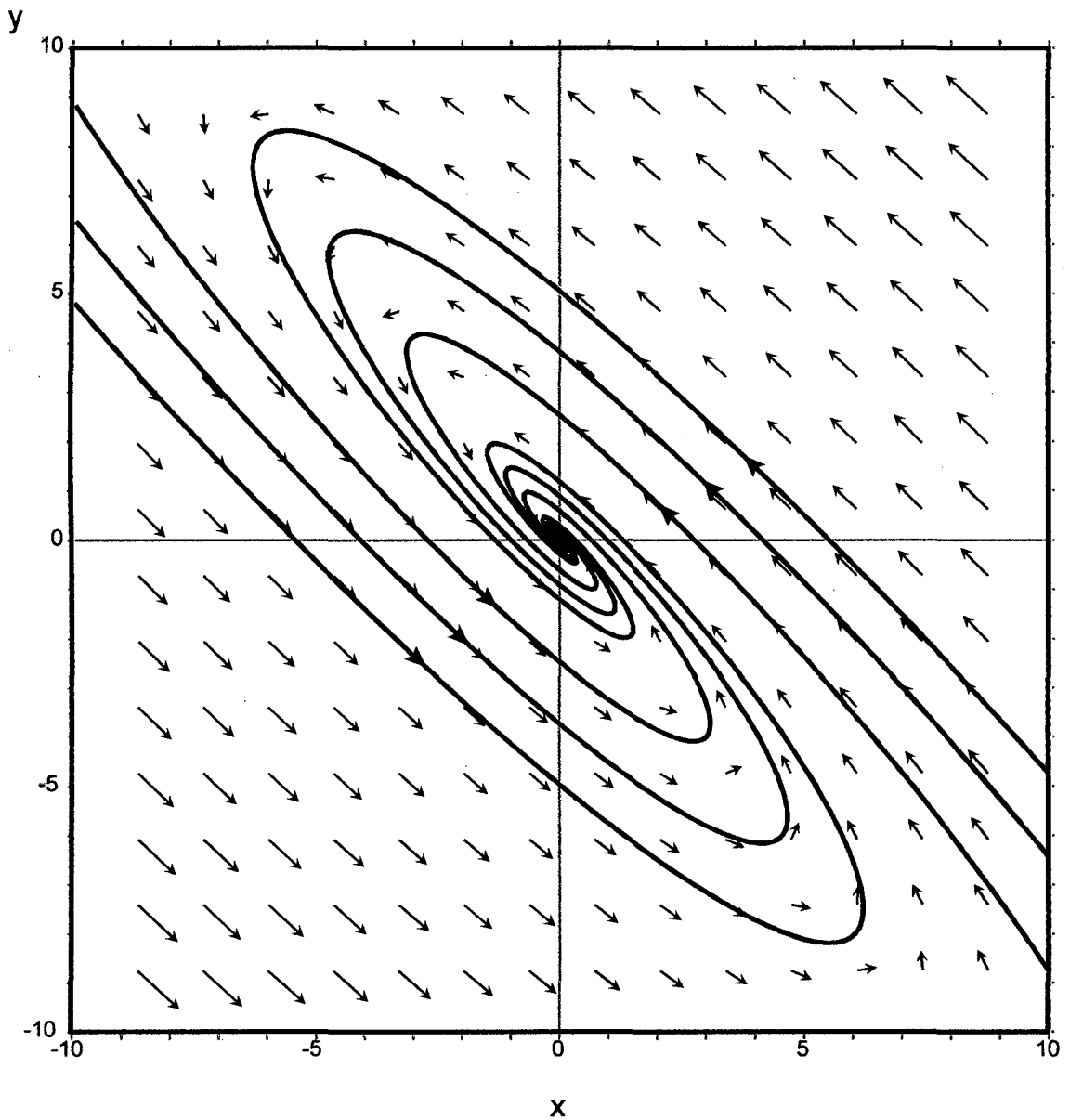
Hallando los autovalores de la matriz \tilde{A} :

$$\begin{aligned} P_{\tilde{A}}(\lambda) &= |\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.579 - \lambda & -0.48 \\ 0.579 & 0.39 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (-0.579 - \lambda)(0.39 - \lambda) - (0.579)(-0.48) &= 0 \\ \lambda^2 + 0.1894\lambda + 0.0521 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los autovalores de la matriz \tilde{A} son $\lambda_1 = -0.0947 + 0.2078i$ y $\lambda_2 = -0.0947 - 0.2078i = \bar{\lambda}_1$, ésto implica que:

$$\Sigma(\bar{A}) = \{-0.0947 + 0.2078i, -0.0947 - 0.2078i\}$$

Luego como los dos autovalores son imaginarios con parte real negativa, las órbitas o trayectorias están de entrada al origen de coordenadas a medida que el tiempo transcurra, tal como muestra el mapa de fases del sistema (3) en la Gráfica 3.



Gráfica 3

➤ Para los valores de $\beta \in (0.4893, 0.9461)$

Si $\beta = 0.7$ se tiene el siguiente sistema dinámico autónomo no lineal:

$$\begin{aligned} x' &= 0.19 - 0.13xy^2 + 0.7y \\ y' &= 0.13xy^2 - (0.7 + 0.09)y \end{aligned} \quad (4)$$

La matriz \tilde{A} asociada al sistema no lineal (4), está dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & -(\beta + 2\varepsilon) \\ \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & \beta + \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.579 & -0.88 \\ 0.579 & 0.79 \end{bmatrix}$$

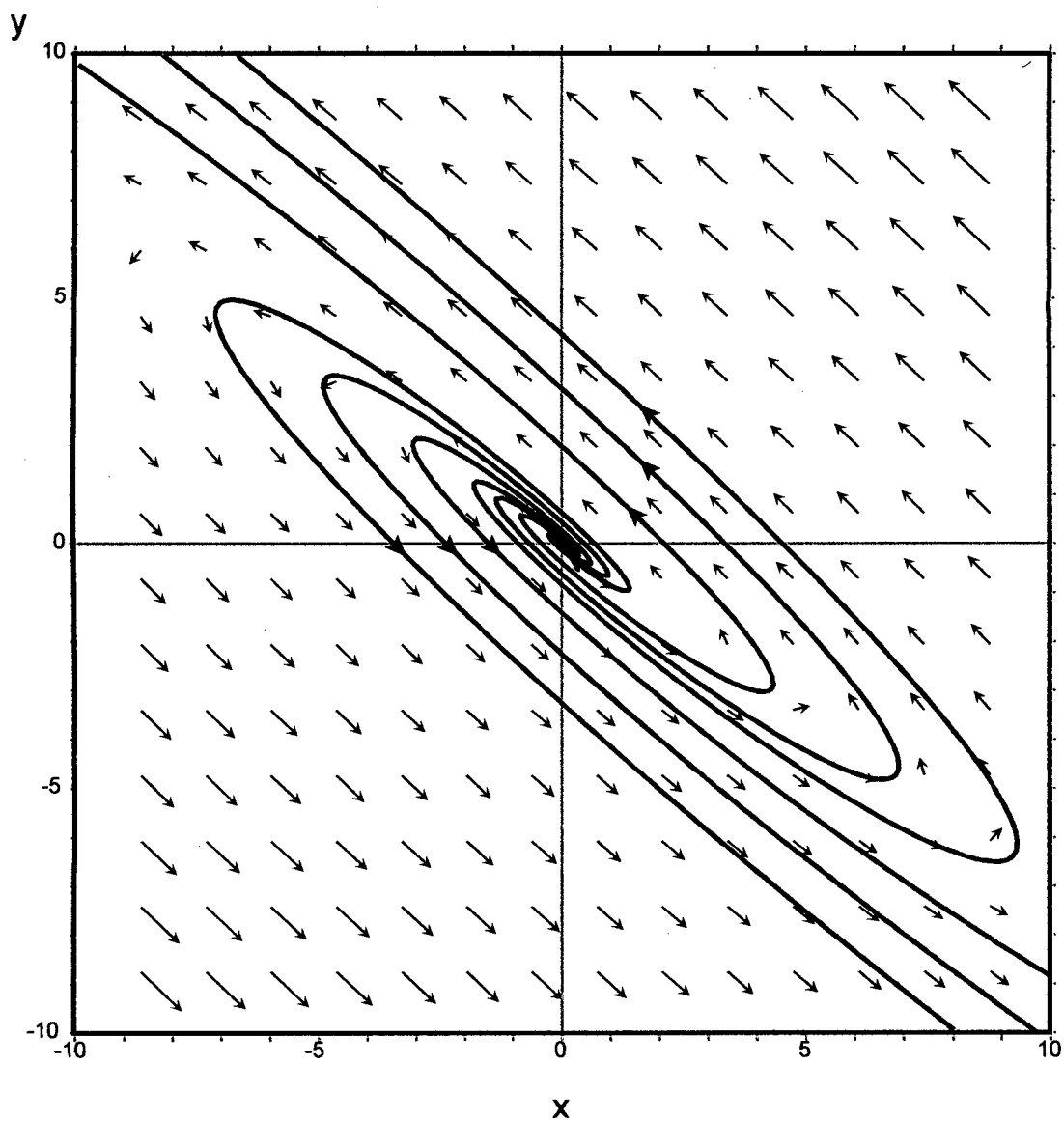
Hallando los autovalores de dicha matriz \tilde{A} :

$$\begin{aligned} P_{\tilde{A}}(\lambda) &= |\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.579 - \lambda & -0.88 \\ 0.579 & 0.79 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ (-0.579 - \lambda)(0.79 - \lambda) - (0.579)(-0.88) &= 0 \\ \lambda^2 - 0.211\lambda + 0.052 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto los autovalores de la matriz \tilde{A} son $\lambda_1 = 0.1053 + 0.2026i$ y $\lambda_2 = 0.1053 - 0.2026i = \bar{\lambda}_1$, por lo tanto:

$$\Sigma(\bar{A}) = \{0.1053 + 0.2026i, 0.1053 - 0.2026i\}$$

Luego como los dos autovalores son imaginarios con parte real positiva, las órbitas o trayectorias están de salida del origen de coordenadas a medida que el tiempo trascorra, tal como muestra el mapa de fases del sistema (4), en la Gráfica 4.



Gráfica 4

Si $\beta = 0.0326795$ se tiene el siguiente sistema dinámico autónomo no lineal:

$$\begin{aligned}
 x' &= 0.19 - 0.13xy^2 + 0.0326795y \\
 y' &= 0.13xy^2 - (0.0326795 + 0.09)y
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Entonces La matriz \tilde{A} , está dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & -(\beta + 2\varepsilon) \\ \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & \beta + \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.579 & -0.2126 \\ 0.579 & 0.1226 \end{bmatrix}$$

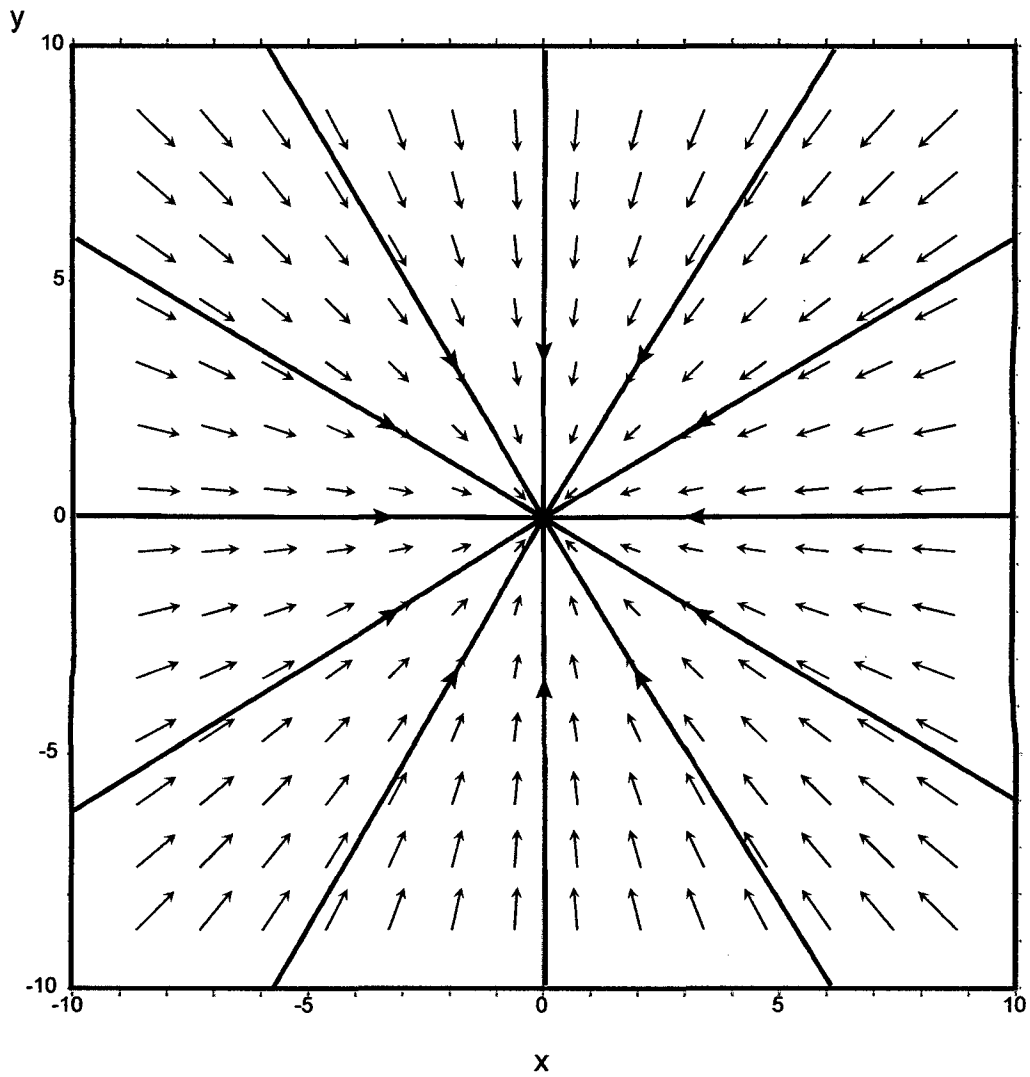
Hallando los autovalores de la matriz \tilde{A} :

$$\begin{aligned} P_{\tilde{A}}(\lambda) &= |\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.579 - \lambda & -0.2126 \\ 0.579 & 0.1226 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &(-0.579 - \lambda)(0.1226 - \lambda) - (0.579)(-0.2126) = 0 \\ &\lambda^2 + 0.4567\lambda + 0.05214 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto los autovalores de la matriz \tilde{A} son los siguientes $\lambda_1 = -0.228$ y $\lambda_2 = -0.228$, ésto implica que:

$$\Sigma(\bar{A}) = \{-0.228, -0.228\}$$

Luego como los dos autovalores son iguales y negativos, las órbitas o trayectorias están de entrada al origen de coordenadas a medida que tiempo avance, tal como muestra el mapa de fases del sistema (5), en la Gráfica 5.



Gráfica 5

Si $\beta = 0.9460859$ se tiene el siguiente sistema dinámico autónomo no lineal:

$$\begin{aligned} x' &= 0.19 - 0.13xy^2 + 0.9460859y \\ y' &= 0.13xy^2 - (0.9460859 + 0.09)y \end{aligned} \quad (6)$$

La matriz \tilde{A} asociada al sistema no lineal (6), está dada por:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & -(\beta + 2\varepsilon) \\ \frac{\alpha k^2}{\varepsilon^2} & \beta + \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.579 & -1.126 \\ 0.579 & 1.036 \end{bmatrix}$$

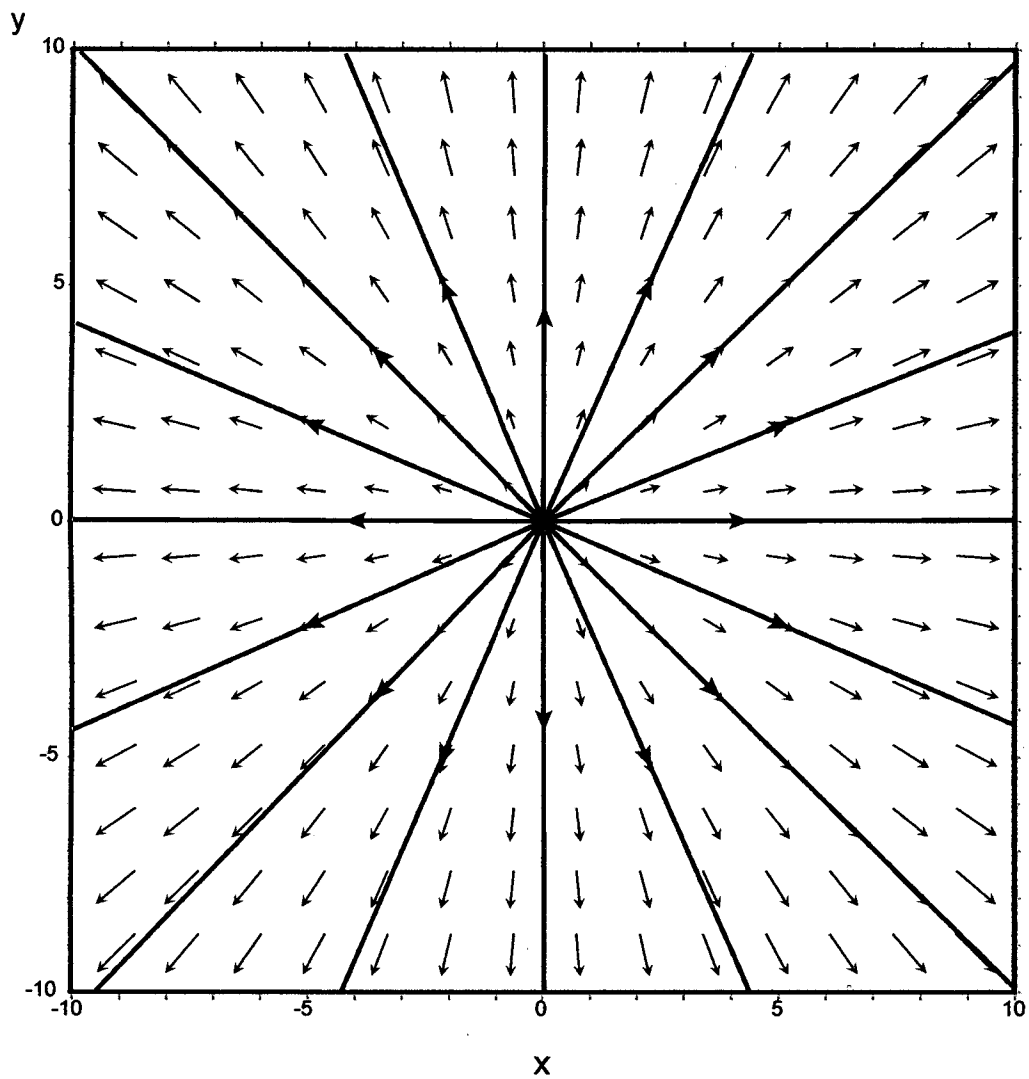
Hallando los autovalores de la matriz \tilde{A} :

$$\begin{aligned} P_{\tilde{A}}(\lambda) &= |\tilde{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.579 - \lambda & -1.126 \\ 0.579 & 1.036 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &(-0.579 - \lambda)(1.036 - \lambda) - (0.579)(-1.126) = 0 \\ &\lambda^2 + -0.4567\lambda + 0.052144 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto los autovalores de la matriz \tilde{A} son los siguientes $\lambda_1 = 0.228$ y $\lambda_2 = 0.228$, por lo tanto:

$$\Sigma(\tilde{A}) = \{0.228, 0.228\}$$

Luego como los dos autovalores son iguales y positivos, las órbitas o trayectorias están de salida del origen de coordenadas a medida que el tiempo transcurra, tal como muestra el mapa de fases del sistema (6), en la Gráfica 6.



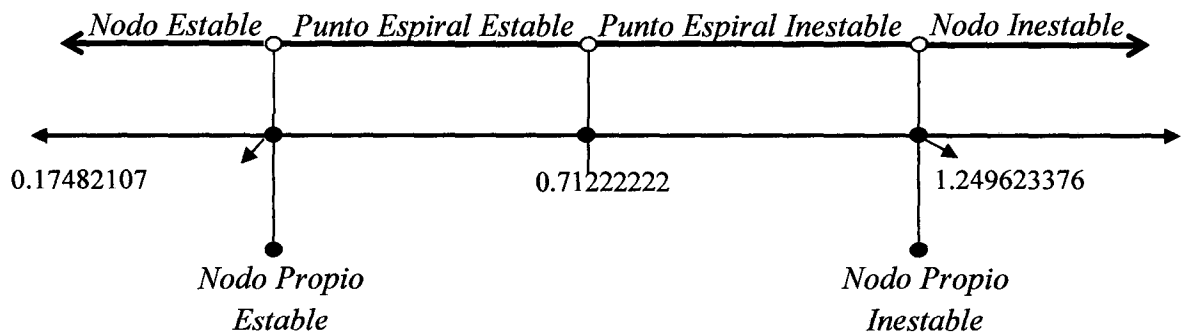
Gráfica 6

Según estas gráficas para los diferentes valores del parámetro β , se puede deducir lo siguiente:

En los casos de estabilidad, dentro del estudio del sistema lineal asociado, se observa que todo estado de cada punto tiende al origen a medida que el tiempo transcurre, luego como el comportamiento cualitativo del sistema no lineal es el mismo, entonces, el estado para cada punto del sistema no lineal tiende al punto de equilibrio a medida que el tiempo transcurre; dado que los estados de cada punto expresan cierto caso favorable o desfavorable para la empresa, entonces es

posible afirmar que en el futuro el caso favorable o desfavorable que determina el estado del punto de equilibrio ocurrirá con certeza. Mientras que en los casos de inestabilidad, el estado para cada punto se aleja del origen de coordenadas a medida que el tiempo transcurra, por lo tanto no se puede afirmar con certeza la ocurrencia de los eventos favorables o desfavorables que determina el estado del punto de equilibrio.

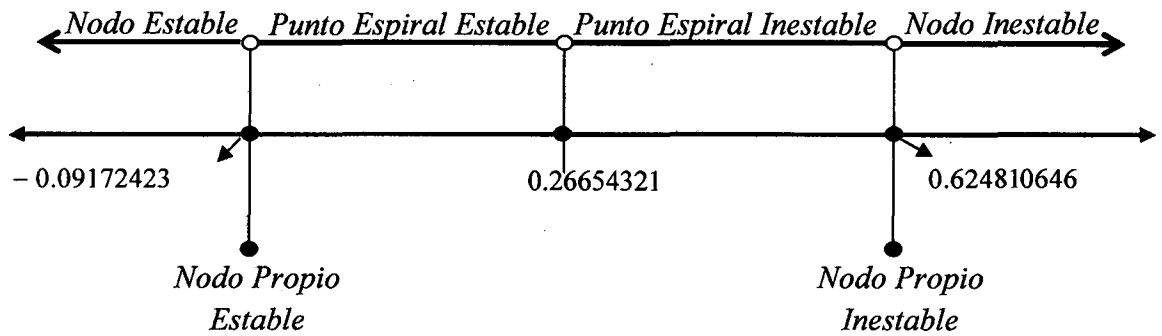
Por otro lado, se observa que para ciertos valores de alfa, se obtienen distintos comportamientos sobre estabilidad e inestabilidad bajo los valores que tome " β ", ahora, si consiguiéramos aumentar el valor de alfa, obtendríamos aun mas oportunidad de encontrar comportamientos de estabilidad, así por ejemplo si $\alpha = 0.18$ obtendríamos el siguiente intervalo que resume la estabilidad e inestabilidad del sistema, según los valores del parámetro β :



Luego es de observar que para valores de beta entre cero y uno, el sistema expresa mayores comportamientos de estabilidad en el sistema, es decir se tendría mayores posibilidades de obtener predicciones sobre la ocurrencia de ciertos en eventos favorables o desfavorables en la empresa.

Mientras que si reducimos el valor del parámetro α a 0.08, obtendría el siguiente intervalo que resume la estabilidad e inestabilidad del sistema, según los valores

del parámetro β , en donde disminuye la posibilidad de predecir eventos favorables.



Por lo tanto, en el sistema considerado es posible ajustar los valores del parámetro alfa, para obtener mayores comportamientos de estabilidad, y así poder predecir la ocurrencia de eventos ya sean favorables o desfavorables; el cual ayuda para tomar decisiones posteriormente.

CONCLUSIONES

- 1) Es posible deformar de manera continua las órbitas de un sistema autónomo lineal alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico, en las órbitas de un sistema autónomo lineal asociado a éste; además este resultado permite conocer el comportamiento cualitativo del sistema dinámico asociado al modelo de publicidad por contacto en una empresa.
- 2) Si se considera un sistema dinámico autónomo no lineal, en donde la matriz Jacobiana del campo vectorial asociado al sistema no lineal aplicada en el punto de equilibrio es hiperbólica, entonces es posible demostrar la existencia de un homeomorfismo que conjuga topológicamente todas las órbitas del sistema autónomo no lineal, alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico en las órbitas del sistema autónomo lineal asociado.
- 3) Como resultado del teorema de Hartman - Grobman es posible comprender el comportamiento cualitativo de las orbitas del sistema autónomo no lineal asociado al modelo de publicidad por contacto, y con esto poder predecir la ocurrencia de eventos favorables o desfavorables en una empresa a lo largo del tiempo.
- 4) En el sistema dinámico autónomo no lineal que representa un modelo de publicidad en una empresa, esto es el modelo de publicidad de Feitchinger, es posible ajustar los valores del esfuerzo de publicidad que considera la empresa para obtener más comportamientos de estabilidad en el sistema, es decir predecir la ocurrencia de ciertos eventos favorables o desfavorables para la empresa.
- 5) El software wxMaxima 0.8.6, permite visualizar el mapa de fases de un sistema dinámico, los diferentes estados que toma un punto así como también su tendencia a lo largo del tiempo.

SUGERENCIAS

- 1) El modelo de publicidad por contacto de Feitchinger solo representa el comportamiento del número de usuarios bajo el número de compradores potenciales, podría agregarse en este modelo la variación de las utilidades que obtendría en la empresa bajo la variación de estos parámetros y variables consideradas.

- 2) Garantizar el Teorema de Hartman – Grobman en el estudio de los sistemas dinámicos discretos.

- 3) Aplicar el Teorema de Hartman - Grobman en otras áreas, así por ejemplo a la Economía, Biología, Electrónica, Telecomunicaciones, Medicina, etc.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) Benazic Tomé, Renato; “Temas en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”, Editorial UNI; Lima – Perú; 2007.
- 2) Choque Huamán, Patricio; “Sistemas Dinámicos”, Editorial Alpha; Cusco – Perú; 2009.
- 3) Hartman, Philip; “Ordinary Differential Equations”; John Wiley and Sons; New York – EE.UU., 1964.
- 4) Hassan K. Khalil, “Nonlinear systems”, Prentice Hall, Mexico, 1996
- 5) J. Guckenheimer and P. Holmes; “Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations”; Springer-Verlag; New York – EE.UU. ; 2002.
- 6) Lima, Elong Lages; “Álgebra Lineal”; IMCA; Lima – Perú; 1998.
- 7) M.W. Hirsh and Smale; “Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra”; Academic Press; New York – EE.UU., 1974.
- 8) Perko L., “Differential Equations and Dynamical Systems”, Springer-Verlag; New York – EE.UU. ; 1991.
- 9) Shankar Sastry, “Nonlinear systems, analysis, stability, and control”, Springer - Verlag, New York – EE.UU., 1999.

LINKOGRAFÍA

www.journals.unam.mx/index.php/cys/article/download/2608/2169

Septiembre 25 del 2001.

ANEXO

1) SOFTWARE WXMAXIMA, VERSIÓN 0.8.6.

El sistema de álgebra computacional Maxima es un motor de cálculo simbólico escrito en lenguaje Lisp publicado bajo licencia GNU GPL.

Cuenta con un amplio conjunto de funciones para hacer manipulación simbólica de polinomios, matrices, funciones racionales, integración, derivación, manejo de gráficos en 2D y 3D, manejo de números de coma flotante muy grandes, expansión en series de potencias y de Fourier, entre otras funcionalidades. Además tiene un depurador a nivel de fuente para el código de Maxima.

Maxima está basado en el sistema original de Macsyma desarrollado por MIT en los años 70. Es bastante fiable, tiene un buen recolector de basura, por lo que no desperdicia memoria. Viene con cientos de auto pruebas (test-suite).

Maxima funciona en modo consola, sin embargo incluye las interfaces gráficas xMaxima y wxMaxima para facilitar su uso.

2) SOBRE LOS GRÁFICOS.

Gráfica 1:

```
plotdf([(-(a*k*k)/(e*e))*x-  
(b+2*e)*y,((a*k*k)/(e*e))*x+(b+e)*y],[parameters,"k=0.19,a=0.13,b=0.001,e=  
0.09"],  
[xfun,"((sqrt(7426)-335)/181)*x;-((sqrt(7426)+335)/181)*x"],[trajectory_at,-  
1,3], [y,-10,10], [x,-10,10]);
```

Gráfica 2:

```
plotdf([(-(a*k*k)/(e*e))*x-  
(b+2*e)*y,((a*k*k)/(e*e))*x+(b+e)*y],[parameters,"k=0.19,a=0.13,b=0.97,e=0  
.09"],
```

```
[xfun,"((sqrt(22921)-1639)/2300)*x;-  
((sqrt(22921)+1639)/2300)*x"],[trajectory_at,-1,3], [y,-10,10], [x,-10,10]);
```

Gráfica 3:

```
plotdf([-((a*k*k)/(e*e))*x-  
(b+2*e)*y,((a*k*k)/(e*e))*x+(b+e)*y],[parameters,"k=0.19,a=0.13,b=0.3,e=0.  
09"],  
[trajectory_at,-1,3], [y,-10,10], [x,-10,10]);
```

Gráfica 4:

```
plotdf([-((a*k*k)/(e*e))*x-  
(b+2*e)*y,((a*k*k)/(e*e))*x+(b+e)*y],[parameters,"k=0.19,a=0.13,b=0.7,e=0.  
09"],  
[trajectory_at,-1,3], [y,-10,10], [x,-10,10]);
```

Gráfica 5:

```
plotdf([-0.2283*x,-0.2283*y],[trajectory_at,-1,3], [y,-10,10], [x,-10,10]);
```

Gráfica 6:

```
plotdf([0.2283*x,0.2283*y],[trajectory_at,-1,3], [y,-10,10], [x,-10,10]);
```