

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD
DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS, QUÍMICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



TESIS

**CONTRATERMINO ESCALAR DE AGUJEROS NEGROS CON
CAMPO ESCALAR ASINTÓTICAMENTE AdS**

PRESENTADO POR:

Br. Luis Carlos Desa Salas

**PARA OPTAR AL TÍTULO
PROFESIONAL DE FÍSICO**

ASESOR:

Dr. Edwin Romualdo Benavente Ramírez

CO-ASESOR:

Dr. David Choque Quispe

CUSCO-PERÚ

2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, Asesor del trabajo de investigación/tesis titulada:.....

" *Contraterminos Escalar de Agujeros Negros con Campo Escalar Asintóticamente Ads.*

presentado por: *Luis Carlos Dera Salas* con DNI Nro.: *72525767* presentado

por: con DNI Nro.: para optar el título profesional/grado académico de *Físico*

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por *2* veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de *10*%.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera página del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, *23* de *diciembre* de 20*24*.....

Firma
Post firma... *Dante*: *Eduin Romualdo Benavente Ramirez*

Nro. de DNI... *08135293*

ORCID del Asesor... *0000-0002-3273-8339*

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: oid: *27259:418512524*

Carlos Desa

tesisturnitin.pdf

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:418512524

Fecha de entrega

23 dic 2024, 12:47 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

23 dic 2024, 12:52 p.m. GMT-5

Nombre de archivo

tesisturnitin.pdf

Tamaño de archivo

432.9 KB

67 Páginas

14,639 Palabras

69,980 Caracteres

10% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Exclusiones

- N.º de fuentes excluidas

Fuentes principales

- 9%  Fuentes de Internet
- 1%  Publicaciones
- 3%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
656 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, deseo expresar mi sincero agradecimiento a mis padres y a mi hermano por brindarme su invaluable apoyo a lo largo de mi trayectoria universitaria. Asimismo, extiendo mi gratitud a mis compañeros, con quienes compartí momentos enriquecedores en el ámbito académico, contribuyendo al desarrollo de mis habilidades. Finalmente, no puedo dejar de agradecer a mis respetados docentes, cuya vasta experiencia y orientación fueron fundamentales para mi exitosa formación académica, en especial al profesor David Choque, quien me introdujo por primera vez al área de la física teórica, y al profesor Gonzalo Suárez, por sus valiosas recomendaciones para la mejora de la presente tesis.

Dedico la presente tesis a mis amigos y familia, a todos mis seres amados, quienes han sido un valioso consuelo e inspiración durante estos complicados años.

NOTACIONES

En el contexto de unidades naturales en las que \hbar , c y k_B se fijan igual a 1, siendo \hbar la constante de Planck reducida, c la velocidad de la luz y k_B la constante de Boltzmann. Se deduce que la expresión de la constante de Einstein es $\kappa = 1/8\pi G_N$, donde G_N representa la constante de gravitación de Newton.

El término “acción on-shell” se refiere al cálculo de la integral de la acción considerando las expresiones que satisfacen las ecuaciones de campo derivadas del principio variacional.

En lugar de utilizar la palabra “bolsa”, se emplea el término “bulk” para referirnos al interior de una variedad cuya dinámica está determinada por las ecuaciones de campo de Einstein. Por otro lado, se usa el término “fall-off” en lugar de “caída”, haciendo referencia al comportamiento asintótico en el borde de la teoría.

Las siglas *AdS* corresponden a la expresión “Anti-de Sitter”, haciendo referencia a este espacio-tiempo. Asimismo, se utiliza las siglas *AdS/CFT* para referirse a la dualidad entre un espacio-tiempo *AdS* y la teoría cuántica de campos conformes *CFT*.

Los índices tensoriales de la variedad 3-dimensional \mathcal{M} utilizan el abecedario griego ($\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \rho, \dots$). Mientras que los índices tensoriales de la hiper-superficie Σ utilizan el

abecedario latino (a, b, c, i, j, k, \dots).

Se ha optado la métrica con la signatura $(-+++)$.

Notaciones algebraicas:

- x^α : Coordenadas arbitrarias sobre la variedad \mathcal{M} .
- y^a : Coordenadas arbitrarias sobre la hiper-superficie Σ .
- $g_{\alpha\beta}$: Métrica sobre la variedad \mathcal{M} .
- $h_{ab} = g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta$: Métrica inducida sobre la hiper-superficie Σ .
- $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$: Símbolos de Christoffel contruidos a partir de la métrica $g_{\alpha\beta}$.
- $\phi(r)$: Campo escalar acoplado mínimamente al agujero negro.
- $\psi_{,\alpha} = \partial_\alpha \psi$: Derivada parcial con respecto a x^α .
- $A_{;\beta}^\alpha = \nabla_\beta A^\alpha$: Derivada covariante compatible con la métrica $g_{\alpha\beta}$.
- $\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi]$: Es la acción de la teoría.
- $T_{\mu\nu}$: Es el tensor de energía e impulso.
- $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$: Es el tensor de Einstein.
- $\frac{(\partial\phi)^2}{2} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$: Es el termino cinético para el campo escalar en la densidad lagrangiana.
- $K_{ab} = n_{\alpha;\beta}e_a^\alpha e_b^\beta$: Es el tensor de curvatura extrínseca de la hiper-superficie Σ .

RESUMEN

El presente trabajo estudia un tipo particular de agujero negro con un campo escalar acoplado mínimamente (acoplado únicamente a la determinante de la métrica), conocido como “agujero negro con pelo” (o denominado en inglés como hairy black hole). Se analiza la acción un agujero negro con campo escalar mínimamente acoplado asintóticamente AdS en $2 + 1$ -dimensiones, basada en el estudio de [Desa et al. (2022)]. El objetivo es obtener la expresión algebraica correcta del contratermino escalar tal que la acción de la teoría preserve el principio variacional. Para ello, se examina el comportamiento asintótico de los terminamos de acción de frontera adicionales evidenciando la necesidad de contraterminos para preservar la consistencia teórica. También se estudian las propiedades termodinámicas del sistema, verificando que las magnitudes obtenidas mediante el formalismo teórico satisfagan la primera ley de la termodinámica. Finalmente, se estudia la simetría conforme, emergente en la correspondencia AdS/CFT y evidenciado en los aspectos holográficos de la teoría, verificando su validez.

Palabras Clave: Agujero Negro, Campo Escalar, Contratérmino Escalar, Acción.

ABSTRACT

This work studies a particular type of black hole with a minimally coupled scalar field (coupled only to the determinant of the metric), known as a “hairy black hole.” The action of a black hole with a minimally coupled scalar field in an asymptotically AdS spacetime in $(2 + 1)$ -dimensions is analyzed, based on the study by [Desa et al. (2022)]. The objective is to obtain the correct algebraic expression for the scalar counterterm so that the action of the theory preserves the variational principle. To this end, the asymptotic behavior of additional boundary action terms is examined, highlighting the need for counterterms to maintain theoretical consistency. Furthermore, the thermodynamic properties of the system are studied, verifying that the quantities obtained through the theoretical formalism satisfy the first law of thermodynamics. Finally, conformal symmetry, which emerges in the AdS/CFT correspondence and is evidenced in the holographic aspects of the theory, is analyzed to verify its validity.

Keywords: Black Hole, Escalar Field, Counterterm, Action.

ÍNDICE GENERAL

Índice de figuras	XI
Lista De Figuras	XI
1. Planteamiento del Problema	3
1.1. Problema de Investigación	3
1.2. Formulación del Problema	3
1.2.1. Problema General	3
1.3. Justificación	4
2. Objetivos	5
2.1. Objetivo General	5
2.2. Objetivo Específicos	5
3. Marco Teórico	6
3.1. Relatividad General	6
3.1.1. Herramientas Matemáticas	7
3.1.2. Curvatura	11
3.1.3. Hiper-Superficies	14
3.1.4. Acción de Einstein-Hilbert	19
3.1.5. Agujero Negro en 2 + 1-Dimensiones	22
3.2. Termodinámica de Agujeros Negros	23
3.2.1. Energía libre de Helmholtz y Rotación Wick	23

3.2.2.	Espacio-Tiempo Rindler	24
3.2.3.	Temperatura de Agujeros Negros Estacionarios	25
3.3.	Agujeros Negros con Pelo	26
3.3.1.	Teorema de No-Pelo	28
3.3.2.	Acción y Ecuaciones de Campo	29
3.3.3.	Solución Asintóticamente Anti-de Sitter (<i>AdS</i>)	30
3.3.4.	Potencial Escalar On-Shell	35
3.3.5.	El Limite de No-Pelo	36
3.3.6.	Condiciones Asintóticas de Borde	37
3.3.7.	Relaciones de Transformación Entre el Sistema de Coordenadas r y el Sistema de Coordenadas x	40
3.4.	Hipótesis	41
3.4.1.	Identificación de Variables	41
4.	Metodología	42
4.1.	Diseño y Nivel de Investigación	42
4.2.	Unidad de Análisis	42
4.3.	Método de Validación de la Hipótesis	43
4.4.	Técnicas de Validación de la Hipótesis	43
4.4.1.	Verificación del Principio Variacional	43
4.4.2.	Expresión Algebraica del Contratermino Escalar	46
4.4.3.	Formalismo de Brown-York	47
4.4.4.	Acción On-Shell y Energía Libre de Helmholtz	51
4.4.5.	Primera Ley de La Termodinámica	56
5.	Resultados y Discusiones	58
5.1.	Principio Variacional y Contratermino Escalar	58
5.2.	Energía Gravitacional y Simetría Conforme	59
5.3.	Termodinámica	61

6. Conclusiones y Recomendaciones	63
A. Apéndice A	65
A.1. Convenio de Suma de Einstein	65
A.2. Tensores Covariantes, Contravariantes y La Métrica	65
B. Apéndice B	67
B.1. Constante Cosmológica	67
B.1.1. Curvatura Negativa	67
B.1.2. Espacio-Tiempo con Curvatura Constante en $n + 1$ -Dimensiones	69
C. Apéndice C	70
C.1. Tensor de Curvatura Extrínseca	70
C.1.1. Tensor De Curvatura Extrínseca en Coordenadas x	70
C.1.2. Tensor de Curvatura Extrínseca En Coordenadas r	71
C.2. Tensor de Brown-York	72
D. Apéndice D	74
D.1. Magnitudes Termodinámicas en x -Coordenadas	74
Bibliografía	76
Bibliografía	79

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1.	Representación gráfica de un agujero negro acoplado a un campo escalar. Es importante destacar que esta ilustración es puramente representativa y no se basa rigurosamente en los fundamentos matemáticos de un agujero negro con pelo.	27
3.2.	En el presente gráfico se muestra el comportamiento de la función métrica para cada una de las ramas en función de la coordenada x . Es importante destacar el comportamiento de la función métrica cuando x se aproxima a $x \rightarrow 1$, evidenciando el borde de la teoría en el sistema coordenado x	30
3.3.	En ambas figuras se muestra la existencia del horizonte de sucesos para el agujero negro con pelo. La figura de la izquierda corresponde a la rama positiva y la figura de la derecha a la rama negativa. Para ambos casos se ha fijado el valor de $\alpha L^2 = 9$	34
3.4.	Esta figura ilustra cómo la solución presente evade el teorema de no-pelo analizando el comportamiento del potencial escalar. Se ha fijado el valor de $\alpha L^2 = 9$, cual verifica las condiciones establecidas en (revisar sección 3.3.3).	36

INTRODUCCIÓN

Los agujeros negros han sido un objeto de fascinación desde su primer descubrimiento teórico por Karl Schwarzschild en 1916 [Schwarzschild (1916)]. El estudio de estos objetos ha evolucionado significativamente, convirtiéndose en un campo amplio de análisis que cuenta con una extensa literatura [Abbott (2016); Collaboration et al. (2019)]. La termodinámica de los agujeros negros, por otro lado, ha tenido un impacto considerable en la comunidad científica, ya que inicialmente se pensaba que no era posible que un agujero negro tuviera temperatura o entropía. Sin embargo, Stephen Hawking demostró lo contrario [Hawking (1975, 1976)]. Como sistema termodinámico, un agujero negro debe satisfacer las leyes de la termodinámica, que han sido reformuladas a partir de las propiedades conocidas de estos objetos [Bardeen et al. (1973)].

La investigación de fenómenos físicos en dimensiones inferiores ha facilitado la simplificación y el avance en el entendimiento de diversas áreas de la física. En el caso de los agujeros negros, las simetrías en $2+1$ -dimensiones [Hong (2004)] representan una gran ventaja teórica. Los agujeros negros con campo escalar en $2+1$ -dimensiones han sido estudiados en profundidad en trabajos previos [Henneaux et al. (2002); Correa et al. (2011)]. En este trabajo, se examina un tipo particular de agujero negro con pelo, estudiado en [Desa et al. (2022)], centrando el análisis en el cálculo y validación del contratermino escalar necesario para la teoría, el cual es uno de los principales resultados del artículo.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en el primer capítulo se presentan el problema y su planteamiento. Luego, en el segundo capítulo, se desarrolla el marco teórico de un agujero negro con pelo en $2 + 1$ -dimensiones, asintóticamente *AdS*. Al concluir el capítulo, se expone la hipótesis y la necesidad de un contratermino escalar para la teoría. En el capítulo tercero se detalla la metodología empleada. En el capítulo cuarto se presenta los resultados obtenidos: la forma del contratermino escalar, su importancia para la teoría y la verificación del principio variacional; se calcula el tensor de energía e impulso holográfico mediante el formalismo de Brown-York [Brown and York (1993)]; se obtiene la energía gravitacional y se verifica la simetría conforme [Friedan et al. (1986)], una de las consecuencias principales de la dualidad *AdS/CFT* [Maldacena (1998)]; y se concluye con la verificación de la primera ley de la termodinámica para la teoría. En el último capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Problema de Investigación

La solución de agujero negro acoplado mínimamente a un campo escalar, conocido como “agujero negro con pelo” y estudiado en [Desa et al. (2022)], evade el teorema de no-pelo [Nunez et al. (1996)]. No obstante, al no considerar un contratermino escalar en la teoría, esta no satisface el principio variacional, la simetría conforme y tampoco la primera ley de la termodinámica, resultando en una teoría incompleta e inconsistente. Es necesario, por lo tanto, hallar un contratermino escalar que solucione estos problemas y permita obtener una teoría completa y satisfactoria para un agujero negro con pelo en $2 + 1$ -dimensiones.

1.2 Formulación del Problema

En el contexto del estudio del agujero negro con pelo asintóticamente AdS en $2 + 1$ -dimensiones descrito en [Desa et al. (2022)], los problemas de investigación son:

1.2.1 Problema General

¿Cuál es la expresión algebraica del contratermino escalar necesario para tener una acción completa? ¿Y cómo verifica este contratermino escalar el principio variacional, la simetría conforme y la primera ley de la termodinámica?

1.3 Justificación

Durante la investigación en [Desa et al. (2022)], fue necesario determinar el contra-termino escalar para desarrollar una teoría completa y consistente de un agujero negro con pelo en $2 + 1$ -dimensiones. Este contratermino escalar permite validar el principio variacional, la simetría conforme y la primera ley de la termodinámica. Sin embargo, el trabajo mencionado no detalló su obtención, su impacto teórico ni la motivación de ciertos cálculos. Este trabajo aborda estos aspectos, demostrando que es posible formular teorías consistentes de agujeros negros con pelo en $2 + 1$ -dimensiones.

Socialmente, este estudio contribuye al avance del conocimiento en física fundamental sobre agujeros negros y sus posibles aplicaciones. Teóricamente, mejora los métodos matemáticos para desarrollar teorías gravitacionales. En la práctica, abre la posibilidad de detectar agujeros negros con pelo mediante métodos observacionales, lo que representaría un avance en la comprensión de la naturaleza. Metodológicamente, este trabajo desarrolla técnicas lógico-matemáticas que pueden aplicarse en otros campos de las matemáticas con estructuras similares.

Capítulo 2

OBJETIVOS

2.1 Objetivo General

Encontrar la expresión algebraica del contratermino escalar necesario para una descripción teórica completa y satisfactoria.

2.2 Objetivo Específicos

- Determinar la expresión algebraica correcta del contratermino escalar mediante el formalismo del principio variacional, y así mismo validar este principio.
- Verificar la simetría conforme, y validar la energía gravitacional mediante el formalismo de Brown-York.
- Determinar las magnitudes termodinámicas mediante el formalismo de la acción euclidiana y validar la primera ley de la termodinámica.

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

En el presente capítulo se expone el marco teórico, el cual constituye el sustento y punto de partida para el desarrollo de la presente tesis.

3.1 Relatividad General

A finales del siglo XIX, la comunidad científica se encontraba inmersa en un crucial debate que confrontaba las dos teorías más importantes de la época: la mecánica de Newton y la teoría electromagnética de Maxwell. Esto se debía a que la mecánica de Newton implicaba una velocidad de interacción instantánea, lo cual violaba una de las principales implicaciones de la teoría electromagnética de Maxwell: las interacciones tienen una velocidad límite, siendo esta la rapidez de la luz [Janssen (2013)]. El problema de la mecánica de Newton se puede entender fácilmente a través de su ley de gravitación, que considera que la interacción gravitatoria entre dos cuerpos depende únicamente de la masa de los mismos y de la distancia que los separa [Newton (1987)]

$$\vec{F} = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}. \quad (3.1)$$

Albert Einstein apoyó las implicaciones de la teoría electromagnética mediante su teoría de la relatividad especial [Laserna (2012)], fundamentada en el principio de relatividad: “Las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas inerciales”. Esta nueva

teoría abolió la idea del tiempo absoluto y adoptó la idea del tiempo propio, es decir, la percepción del tiempo de cada observador depende de cuán rápido se mueva. Además, se acepta que el espacio y el tiempo ya no son entidades separadas; se los concibe como una única entidad denominada espacio-tiempo.

Sin embargo, el principal problema aún no había sido resuelto: la nueva teoría de Einstein no consideraba la interacción gravitatoria. Era necesaria una nueva teoría de la gravedad que no violara el principio de relatividad. Es por ello que, fundamentándose en el principio de equivalencia: “Observadores en caída libre en un campo gravitatorio general son localmente equivalentes a observadores inerciales. No hay experimentos locales que puedan distinguir entre esos estados situacionales”, Einstein desarrolló una nueva teoría de la gravedad: la teoría de la relatividad general. En esta teoría, la gravedad es la manifestación de la curvatura del espacio-tiempo en presencia de densidad de energía.

3.1.1 Herramientas Matemáticas

Para estudiar la teoría gravitacional en un espacio-tiempo curvado, se requiere el uso de herramientas matemáticas, tales como el cálculo tensorial y la geometría diferencial. A continuación, se presenta el formalismo matemático inherente a estas herramientas.

3.1.1.1 Variedades

Una variedad n -dimensional \mathcal{M} es un espacio topológico que localmente tiene una estructura euclidiana \mathbb{R}^n . De manera formal, una variedad real, infinitamente continua y diferenciable C^∞ de n -dimensiones \mathcal{M} , es un conjunto unido mediante la compilación de subconjuntos O_α que verifica las siguientes propiedades [Wald (2010)]:

- Cada punto $p \in \mathcal{M}$ cae por lo menos en un subconjunto O_α es decir, O_α cubre \mathcal{M} en su totalidad.

- Para cada α , existe un mapeo uno-a-uno sobre $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$, donde U_α es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .
- Si dos conjuntos O_α y O_β se sobreponen, es decir que $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, se puede contemplar el mapeo $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ cual lleva puntos de $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ hacia puntos en $\psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$.

3.1.1.2 Vectores

Un vector es un objeto matemático que forma parte de un espacio vectorial dotado de su respectiva estructura algebraica. Los espacios vectoriales examinados aquí son los espacios tangentes a un punto p que pertenece a una variedad. Formalmente, si consideramos \mathcal{M} como una variedad n -dimensional y $p \in \mathcal{M}$, se define el espacio tangente V_p en el punto p , de manera que se satisface la condición $\dim V_p = n$. Utilizando el convenio de suma de Einstein (revisar apéndice A.1), se obtiene

$$v = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \partial_\mu = v^\mu \partial_\mu, \quad (3.2)$$

donde ∂_μ representa lo que se define como una base coordenada, la cual es expresada en términos de una nueva base coordenada mediante el uso de

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \partial'_\nu. \quad (3.3)$$

Las componentes v'^μ del vector v en la nueva base coordenada están relacionadas con las componentes v^μ de la antigua base coordenada mediante la ley de transformación de vectores

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (3.4)$$

Las componentes T^μ de un vector tangente a la curva en cualquier base coordenada es

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (3.5)$$

Adicionalmente, un campo vectorial tangencial v en una variedad \mathcal{M} consiste en la asignación de un vector tangente $v|_p \in V_p$ a cada punto $p \in \mathcal{M}$.

3.1.1.3 Tensores

Un tensor es un mapa multilinear de vectores o vectores duales en escalares. Es decir, se mapean todos los vectores en escalares ordenados. Formalmente, considérese un espacio vectorial de dimensión finita V junto con su espacio vectorial dual V^* . Un tensor T de categoría (k, l) sobre V es una aplicación multilinear definida de la siguiente manera

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Por tanto, una manera de construir un tensor es tomando el producto exterior de las bases coordenadas de los vectores y de los vectores duales, este tipo de tensor es denominado tensor simple. Entonces, un tensor de tipo (k, l) puede expresarse de la siguiente manera

$$T = T_{\nu_1, \dots, \nu_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_l}.$$

Los componentes del tensor T de tipo (k, l) obedecen la ley de transformación de tensores

$$T_{\nu'_1, \dots, \nu'_l}^{\mu'_1, \dots, \mu'_k} = T_{\nu_1, \dots, \nu_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}}. \quad (3.7)$$

Adicionalmente, la asignación de un tensor sobre V_p para cada punto p en la variedad \mathcal{M} se denomina un campo tensorial.

3.1.1.4 Métrica

La métrica constituye un instrumento matemático que posibilita la definición de la distancia al cuadrado en relación con un desplazamiento infinitesimal. Estos desplazamientos, de naturaleza infinitesimal, se encuentran asociados a vectores que tienen su lugar en el plano tangente. Los desplazamientos infinitesimales están vinculados a vectores que pertenecen al plano tangente. Por lo tanto, la métrica debe ser un mapeo lineal de $V_p \times V_p$ en números reales, lo que la convierte en un tensor de categoría $(0, 2)$. Las propiedades que satisface este tensor son las siguientes:

- **Simétrico:** La distancia debe ser simétrica, esto quiere decir:

$$g(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = g(\vec{v}_2, \vec{v}_1); \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_p. \quad (3.8)$$

- **No degenerada:** El valor de la métrica debe ser la misma para cualquier observador, esto quiere decir

$$g(\vec{v}, \vec{v}_1) = 0 \iff \vec{v}_1 = 0; \quad \vec{v}, \vec{v}_1 \in V_p. \quad (3.9)$$

En resumen, la métrica representa el producto interno en el espacio tangente en cada punto. Mediante el uso de una base coordenada, podemos expresar la métrica desglosada en función de sus componentes

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (3.10)$$

No obstante, por motivos de practicidad, se utiliza la siguiente expresión

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.11)$$

3.1.2 Curvatura

La diferenciación en un espacio-tiempo curvo difiere de la derivación en un espacio-tiempo plano debido a que los vectores en un punto p y en un punto $p + \delta r$ pertenecen a espacios tangentes distintos. Por esta razón, es necesario introducir un nuevo operador matemático que permite conectar vectores en dos espacios vectoriales diferentes. Este nuevo operador es la derivada covariante, donde la conexión se representa mediante los símbolos de Christoffel. A continuación, se presenta la definición de la derivada covariante para un tensor contravariante [Landau and Lifshitz (1973)]

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} = A^{\mu}_{;\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} A^{\rho}, \quad (3.12)$$

donde $\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}$ son los símbolos de Christoffel. En la teoría de la relatividad general, se recurre al formalismo de Levi-Civita, en el cual la geometría exhibe torsión nula y cumple con las siguientes propiedades:

- La conexión es simétrica:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}. \quad (3.13)$$

- La derivada covariante de la métrica es nula:

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - g_{\rho\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha} \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} = 0. \quad (3.14)$$

Esta conexión es de relevante importancia, ya que permite relacionar el formalismo matemático de la geometría riemanniana con la física. Esta relación se establece a través de la forma de la métrica al considerar esta conexión

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right). \quad (3.15)$$

Se introduce la ecuación que describe el movimiento de una partícula libre en un espacio-tiempo curvo, también conocida como ecuación geodésica

$$u^\rho \nabla_\rho u^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0, \quad (3.16)$$

donde $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ representa un vector tangente a la curva $\gamma(\tau)$ en la variedad, con τ como su parámetro afín. Cabe mencionar que la ecuación geodésica se obtiene al buscar la distancia más corta entre dos puntos en una geometría riemanniana, como es explicado en [Janssen (2013)].

Se analiza el traslado continuo de un vector A^λ a lo largo de un paralelogramo en un espacio-tiempo curvo, con desplazamientos infinitesimales en las direcciones x^μ y x^ν . Específicamente, se calcula la diferencia entre transportar el vector A^λ primero a lo largo de dx^μ y luego a lo largo de dx^ν , y transportarlo primero a lo largo de dx^ν y luego a lo largo de dx^μ . Se tiene entonces

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = R_{\mu\nu\rho}^\lambda A^\rho, \quad (3.17)$$

donde se ha definido $R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}$ como el tensor de Riemann. Como era de esperar, $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ no es nulo debido a la curvatura del espacio-tiempo, la cual está representada por el tensor de Riemann. Este tensor, expresado en términos de los símbolos de Christoffel, es

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\rho}^\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma. \quad (3.18)$$

Considerando la siguiente expresión para el tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda} R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma}. \quad (3.19)$$

Se sigue que el tensor de Riemann satisface las siguientes propiedades [Landau and Lifshitz

(1973)]:

- Asimetría frente al intercambio entre los dos primeros o los dos últimos índices

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (3.20)$$

- Simetría respecto al intercambio del bloque formado por los dos primeros índices con el bloque formado por los últimos índices

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (3.21)$$

- Primera identidad de Bianchi

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0. \quad (3.22)$$

- Segunda identidad de Bianchi

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma\lambda} + \nabla_\sigma R_{\mu\nu\lambda\rho} = 0. \quad (3.23)$$

Contrayendo el primer y segundo índice del tensor de Riemann se define el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}. \quad (3.24)$$

Este tensor, expresado en términos de los símbolos de Christoffel, es

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}. \quad (3.25)$$

Al sumarse las componentes correspondientes de los dos índices del tensor de Ricci, se define

el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Adicionalmente, la aplicación de la métrica a la segunda identidad de Bianchi permite obtener un tensor de suma relevancia en la teoría de la relatividad general

$$g^{\lambda\sigma} g^{\mu\rho} (\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma}) = \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (3.27)$$

Este es el tensor de Einstein, el cual es un tensor simétrico de segundo orden. Cuya definición es la siguiente

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (3.28)$$

3.1.3 Hiper-Superficies

En una variedad espacio-temporal tridimensional, una hiper-superficie es una subvariedad bidimensional que puede ser de tipo-tiempo o tipo-espacio, excluyendo el caso de tipo nula en el presente trabajo. Denotaremos esta hiper-superficie como Σ , la cual se define ya sea imponiendo una restricción en las coordenadas [Poisson (2004)]

$$\Phi(x^\alpha) = 0, \quad (3.29)$$

o bien definiendo ecuaciones paramétricas de la forma

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a), \quad (3.30)$$

donde y^a ($a = 1, 2$) son coordenadas intrínsecas a la hiper-superficie Σ .

3.1.3.1 Vector Normal

El vector $\Phi_{,\alpha}$ es normal a la hiper-superficie. Por lo tanto, si la hiper-superficie no es de tipo nula, se puede introducir un vector unitario normal, cual se define de tal manera que satisface la condición siguiente

$$n^\alpha n_\alpha = \varepsilon \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipo-espacio} \\ +1 & \text{si } \Sigma \text{ es tipo-tiempo.} \end{cases} \quad (3.31)$$

Adicionalmente, se exige que el vector n^α esté dirigido en la dirección de aumento de Φ , es decir, $n^\alpha \Phi_{,\alpha} > 0$. Por lo tanto, el vector unitario cual satisface dichas condiciones se define de la siguiente manera

$$n_\alpha = \frac{\Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|}. \quad (3.32)$$

Cabe destacar que esta definición es válida tanto para hiper-superficies de tipo tiempo como para hiper-superficies de tipo espacio.

3.1.3.2 Métrica Inducida

Se define una métrica intrínseca en la hiper-superficie Σ , la cual se obtiene al restringir el elemento de línea a desplazamientos confinados a la hiper-superficie. Dadas las ecuaciones paramétricas que relacionan la variedad con la subvariedad, se definen los vectores

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \quad (3.33)$$

cuales son tangenciales a las curvas contenidas en Σ (esto implica que $e_a^\alpha n_\alpha = 0$). Por tanto, para desplazamientos dentro de Σ se tiene

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \\ ds_\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right), \\ ds_\Sigma^2 &= h_{ab} dy^a dy^b, \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde se ha definido

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \tag{3.35}$$

Esta es la métrica inducida, o primera forma fundamental de la hiper-superficie. Se establece relaciones análogas para la métrica inversa. Se tiene entonces

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta. \tag{3.36}$$

3.1.3.3 Campos Tensoriales Tangentes

Es posible tener campos tensoriales $A^{\alpha\beta\dots}$ definidos únicamente en Σ , los cuales son puramente tangentes a la hiper-superficie. Estos tensores admiten la siguiente descomposición

$$A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots \tag{3.37}$$

donde e_a^α son vectores base definidos en la hiper-superficie Σ . De acuerdo con la definición (revisar ecuación 3.37), esto implica que $A^{\alpha\beta\dots} n_\alpha = A^{\alpha\beta\dots} n_\beta = \dots = 0$. Se demuestra que cualquier tensor arbitrario $T^{\alpha\beta\dots}$ puede proyectarse en la hiper-superficie Σ de manera que solo se conserven sus componentes tangenciales. El objeto matemático que realiza esta proyección es $h^{\alpha\beta} \equiv h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta = g^{\alpha\beta} - \varepsilon n^\alpha n^\beta$ además, $h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \dots T^{\mu\nu\dots}$ es tangencial a la hiper-superficie.

3.1.3.4 Derivada Covariante Intrínseca

Es factible relacionar la derivada covariante de $A^{\alpha\beta\dots}$ con la derivada covariante de $A^{ab\dots}$ cual es compatible con la métrica inducida h_{ab} . Se examina el caso de un campo vectorial tangente A^α tal que

$$A^\alpha = A^a e_a^\alpha; \quad A^\alpha n_\alpha = 0; \quad A_a = A_\alpha e_a^\alpha. \quad (3.38)$$

La derivada covariante intrínseca de un vector A_a se define como la proyección de $A_{\alpha;\beta}$ en la hiper-superficie Σ

$$A_{a|b} \equiv A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (3.39)$$

Se demuestra que $A_{a|b}$, tal como se ha definido, no es más que la derivada covariante de A_a definida de manera convencional en términos de una conexión Γ_{bc}^a que es compatible con h_{ab} . Dicho esto, considérese la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= (A_\alpha e_a^\alpha)_{;\beta} e_b^\beta - A_\alpha e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta, \\ A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= A_{a,b} e_b^\beta - e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta A^c e_b^\gamma, \\ A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= \frac{\partial A_a}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} - e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta A^c, \\ A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= A_{a,b} - \Gamma_{cab} A^c, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde

$$\Gamma_{cab} = e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta. \quad (3.41)$$

En consecuencia, la expresión para la derivada covariante intrínseca en la hiper-superficie Σ es

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{ab}^c A_c. \quad (3.42)$$

La cual tiene la misma forma que la ya conocida derivada covariante. Se demuestra que la conexión (revisar ecuación 3.41) se expresa como

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(h_{ca,b} + h_{cb,a} - h_{ab,c}). \quad (3.43)$$

3.1.3.5 Tensor de Curvatura Extrínseca

El objeto matemático $A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ corresponde a las componentes tangenciales del vector $A^a_{;b} e_a^b$. Dado esto, se desea determinar la componente normal de este vector. Por lo tanto, se reescribe el vector $A^a_{;b} e_a^b$ como $g_\mu^\alpha A^\mu_{;\beta} e_b^\beta$ y se descompone la métrica en sus componentes tangenciales y normales, lo cual resulta en

$$\begin{aligned} A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta &= g_\mu^\alpha A^\mu_{;\beta} e_b^\beta, \\ A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta &= (\varepsilon n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^\alpha e_{m\mu}) A^\mu_{;\beta} e_b^\beta, \\ A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta &= \varepsilon (n_\mu A^\mu_{;\beta} e_b^\beta) n^\alpha + h^{\alpha m} (A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dado que A^μ es ortogonal al vector normal n_μ , se reescribe la última expresión, obteniendo

$$\begin{aligned} A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta &= -\varepsilon (n_{\mu;\beta} A^\mu e_b^\beta) + h^{am} A_{m|b} e_a^\alpha, \\ A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta &= A^a_{|b} e_a^\alpha - \varepsilon A^a (n_{\mu;\beta} e_a^\mu e_b^\beta) n^\alpha. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Se introduce entonces un nuevo tensor

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (3.46)$$

A este objeto matemático se le denomina tensor de curvatura extrínseca, o segunda forma fundamental de la hiper-superficie Σ . En términos de este nuevo tensor, la expresión 3.45 toma la siguiente forma

$$A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta = A^a_{|b} e_a^\alpha - \varepsilon A^a K_{ab} n^\alpha. \quad (3.47)$$

Como se puede apreciar, el término $A^a_{|b}e^\alpha_a$ corresponde únicamente a la parte tangencial del campo vectorial, mientras que $-\varepsilon A^a K_{ab}n^\alpha$ representa la componente normal. Se demuestra que el tensor de curvatura extrínseca es simétrico

$$K_{ab} = K_{ba}. \quad (3.48)$$

Finalmente, se define la traza del tensor de curvatura extrínseca

$$K \equiv h^{ab}K_{ab} = n^\alpha_{;\alpha}. \quad (3.49)$$

3.1.4 Acción de Einstein-Hilbert

En esta sección, se utiliza el formalismo del principio variacional para deducir las ecuaciones de campo gravitatorio de Einstein. Considérese la acción de Einstein-Hilbert, incluyendo el término de materia en 2 + 1-dimensiones [Janssen (2013)]

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \mathcal{S}_{bulk} = (\mathcal{S}_G + \mathcal{S}_M) = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_M). \quad (3.50)$$

En primer lugar, se realiza la variación del término de curvatura \mathcal{S}_G con respecto a la métrica, lo cual resulta en

$$\delta\mathcal{S}_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \delta(\sqrt{-g}R). \quad (3.51)$$

Se tiene entonces

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}, \quad (3.52)$$

donde la variación del primer término de esta ecuación es

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.53)$$

La variación del tercer término no es sencilla y se necesita recurrir a la expresión de las componentes del tensor de Ricci

$$\int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \oint_{\partial\mathcal{M}} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) d\Sigma_{\sigma}. \quad (3.54)$$

Considerándose estos resultados, la aplicación del principio variacional al término de curvatura de la acción de Einstein-Hilbert resulta en la siguiente expresión

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) d\Sigma_{\sigma}. \quad (3.55)$$

En esta ecuación se observa un término adicional que, si bien no afecta las ecuaciones del campo gravitatorio, indica que la acción de Einstein-Hilbert está incompleta y no satisface el principio variacional. Es entonces necesario realizar un análisis detallado de este término

$$\frac{1}{2\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) d\Sigma_{\sigma} = \frac{1}{2\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} h^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu,\rho} n^{\rho} \sqrt{-h} d^2y, \quad (3.56)$$

donde n^{ρ} es un vector normal a la hiper-superficie tipo-tiempo Σ definida a $r = \text{constante}$, y $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_{\mu}n_{\nu}$ es la métrica inducida a esta hiper-superficie. Se observa que el término adicional es un término de borde. Por lo tanto, es necesario agregar un nuevo término a la acción, que es el término de Gibbons-Hawking [Poisson (2004)], el cual se define como

$$\mathcal{S}_{GH} = \frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} K \sqrt{-h} d^2y, \quad (3.57)$$

donde K es la traza del tensor de curvatura extrínseca de la hiper-superficie Σ . La variación del término de Gibbons-Hawking es

$$\delta\mathcal{S}_{GH} = -\frac{1}{2\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} h^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu,\rho} n^{\rho} \sqrt{-h} d^2y. \quad (3.58)$$

Consecuentemente, la acción completa está compuesta por el término de Einstein-Hilbert y el término de Gibbons-Hawking

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \mathcal{S}_{bulk} + \mathcal{S}_{GH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_M) + \frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\mathcal{M}} K \sqrt{-h} d^2y, \quad (3.59)$$

cuya variación reproduce el tensor de curvatura de Einstein

$$\delta[\mathcal{S}_G + \mathcal{S}_{GH}] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.60)$$

Ahora, considerándose la variación del término de materia con respecto a la métrica, se obtiene

$$\delta\mathcal{S}_M = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.61)$$

donde se ha definido el tensor de energía e impulso como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L}_M g_{\mu\nu}. \quad (3.62)$$

Finalmente, considerando la acción de Einstein-Hilbert, el término de Gibbons-Hawking (revisar ecuación 3.59), y el término de materia, se reproducen las ecuaciones de campo gravitatorio de Einstein

$$\delta\mathcal{S} = \delta(\mathcal{S}_{bulk} + \mathcal{S}_{GH}) = \frac{1}{2\kappa} \int d^3x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (3.63)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.64)$$

Es también posible considerar la contribución de una constante cosmológica en la acción, lo que modifica las ecuaciones de campo gravitatorio. Para mayor detalle revisar el apéndice B.1.

3.1.5 Agujero Negro en 2 + 1-Dimensiones

Se solía pensar que en 2 + 1-dimensiones no existían soluciones de agujeros negros en los exteriores de una fuente de energía $T_{\mu\nu} = 0$. Esto se debe a que el tensor de Riemann $R_{\mu\rho\nu}^{\sigma}(R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$ depende únicamente del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y de la métrica $g_{\mu\nu}$. Sin embargo, Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ) descubrieron una solución que describe un agujero negro en el contexto de una constante cosmológica negativa y con rotación no nula en 2 + 1-dimensiones [Banados et al. (1992)]. En este trabajo, se considera la contribución de una constante cosmológica negativa y un agujero negro sin rotación. La acción para un agujero negro estático con constante cosmológica $\Lambda = -L^{-2}$, es entonces

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \mathcal{S}_{bulk} + \mathcal{S}_{GH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left(R + \frac{2}{L^2} \right) + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} K \sqrt{-h} d^2x. \quad (3.65)$$

Al aplicar el principio variacional respecto a la métrica, se obtienen las siguientes ecuaciones de campo gravitatorio

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{L^2}g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.66)$$

Resolviendo estas ecuaciones, la métrica para el agujero negro en 2 + 1-dimensiones es

$$ds^2 = - \left(-8MG_N + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \left(-8MG_N + \frac{r^2}{L^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (3.67)$$

donde M es la masa del agujero negro y L es el radio de curvatura de anti-de Sitter (AdS). A partir de la componente temporal de la métrica, es posible determinar el radio del horizonte de eventos del agujero negro en 2 + 1-dimensiones

$$g_{tt}(r_h) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_h = L\sqrt{8MG_N}. \quad (3.68)$$

3.2 Termodinámica de Agujeros Negros

Los agujeros negros en un espacio-tiempo AdS desempeñan un papel crucial en la comprensión de la termodinámica de las teorías de campos cuánticos holográficas, según la dualidad AdS/CFT [Maldacena (1998); Natsuume (2014)]. Esta formulación se logra mediante la equivalencia de las funciones de partición de ambas teorías

$$Z_{AdS}(\phi_{0,i}) = Z_{CFT}(\phi_{0,i}). \quad (3.69)$$

En particular, la termodinámica de los agujeros negros está relacionada con los estados termodinámicos de los campos cuánticos en el borde de la teoría. Esto ofrece una herramienta poderosa en física teórica, ya que calcular los estados termodinámicos de los campos cuánticos en el horizonte de los agujeros negros es complejo. El principio holográfico permite simplificar estos cálculos mediante el uso de propiedades geométricas del espacio-tiempo [’t Hooft (2001)].

3.2.1 Energía libre de Helmholtz y Rotación Wick

En teoría cuántica de campos, la rotación de Wick, definida como $t \rightarrow -it_E$ establece una conexión entre la teoría cuántica y la teoría estadística, lo que permite estudiar los estados termodinámicos de los campos cuánticos [Zee (2010); Schlingemann (1999)]. Esta rotación modifica la métrica del espacio-tiempo hacia una métrica euclidiana

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \Rightarrow ds_E^2 = dt_E^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.70)$$

Los cálculos realizados con esta métrica euclidiana se denominan “cálculos en la sección euclidiana”. Debido a la dualidad AdS/CFT , la rotación de Wick en la métrica del espacio-tiempo permite estudiar la termodinámica de la teoría gravitacional dual [York (1986)]. La energía libre de Helmholtz para la teoría gravitacional puede obtenerse calculando la acción

on-shell en la sección euclidiana mediante la siguiente relación

$$\mathcal{S} \Rightarrow -\mathcal{S}^E; \quad F = \beta^{-1} \mathcal{S}^E; \quad \beta = \oint dt_E, \quad (3.71)$$

donde β es la integral cerrada en el tiempo euclidiano. Al calculo de la acción on-shell en la sección euclidiana se denomina como acción euclidiana. Como se muestra más adelante, el tiempo en la sección euclidiana es periódico y está relacionado con la temperatura del agujero negro.

3.2.2 Espacio-Tiempo Rindler

En espacios-tiempos curvos, el principio de equivalencia establece que el espacio-tiempo es localmente plano, es decir, localmente no es posible distinguir entre la aceleración debida a la gravedad y debida a una fuerza externa. Considerándose observadores no inerciales en el espacio-tiempo de Minkowski, lo cual se logra mediante la siguiente transformación de coordenadas [Misner et al. (1973)]

$$t = \rho \sinh(a\tau); \quad x = \rho \cosh(a\tau), \quad (3.72)$$

la cual modifica la métrica de la siguiente manera

$$ds^2 = -a^2 \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.73)$$

donde $a^2 = a_\mu a^\mu$ representa la magnitud de la aceleración, que varía en el rango de $0 < a < \infty$, y τ es la nueva coordenada temporal con un dominio de $-\infty < \tau < \infty$. Estos son los observadores de Rindler, que tienen acceso limitado al espacio-tiempo de Minkowski, ya que el resto del espacio-tiempo les resulta inaccesible localmente debido al horizonte de Rindler. Es importante destacar que si un observador no inercial cesa su aceleración, el horizonte de Rindler desaparece [Quispe (2019)].

El espacio-tiempo de Rindler, al ser analizado en la sección euclidiana, donde se realiza la transformación temporal $t \rightarrow -it_E$, revela una singularidad cónica en $\rho = 0$. Esta singularidad se puede evitar al introducir una periodicidad específica, caracterizada por $\beta = \frac{2\pi}{a}$. La mencionada periodicidad está directamente relacionada con la temperatura medida por los observadores de Rindler, siendo expresada como $T = \beta^{-1} = \frac{a}{2\pi}$. En consecuencia, de acuerdo con el principio de equivalencia, un observador que se encuentre en las inmediaciones de un agujero negro medirá una temperatura local. Este concepto se emplea como base en el trabajo de [Astefanesei et al. (2010)], donde los autores desarrollan un método generalizado que permite calcular la temperatura de agujeros negros estacionarios.

3.2.3 Temperatura de Agujeros Negros Estacionarios

Hawking demostró que los agujeros negros poseen propiedades termodinámicas, empleando cálculos intrincados en las teorías de campos cuánticos que existen en la frontera de un agujero negro [Hawking (1975, 1976)]. No obstante, a través del principio holográfico, se simplifica en gran medida los cálculos requeridos para determinar estas magnitudes termodinámicas. Como se mencionó previamente, la rotación de Wick permite calcular la energía libre de Helmholtz de un agujero negro y, por lo tanto, deducir sus propiedades termodinámicas. En el presente caso, considerándose la métrica de un agujero negro estático en coordenadas radiales en la sección euclidiana, donde se ha realizado la transformación temporal $t \rightarrow -it_E$

$$ds^2 = N(r)dt_E^2 + H(r)dr^2 + r^2d\varphi^2. \quad (3.74)$$

Al realizar la transformación $\rho = \sqrt{N}$, se nota la presencia de una singularidad cónica en $\rho = 0$ en el sector (t_E, r) de la métrica. Para evitar esta singularidad, se requiere que la coordenada temporal sea periódica, es decir, que tome la forma $t_E \in (0, 2\pi)$ [Quispe (2019)]. Reordenando los términos en esta métrica, se obtiene la siguiente expresión que

permite identificar el período de la coordenada temporal

$$ds^2 = g_{rr} \frac{4N}{(N')^2} \left[\rho^2 \frac{(N')^2}{4N g_{rr}} dt_E^2 + d\rho^2 \right] = g_{rr} \frac{4N}{(N')^2} \left[\rho^2 \omega_E^2 dt_E^2 + d\rho^2 \right]. \quad (3.75)$$

De esta manera, se puede relacionar este período de la coordenada temporal con la temperatura del agujero negro

$$\Delta\tau = \beta = \frac{2\pi}{\omega_E} \Rightarrow T = \frac{1}{\beta} = \frac{N'}{4\pi\sqrt{N g_{rr}}} \Big|_{r_h}. \quad (3.76)$$

Usando esta ecuación, se calcula la temperatura para el agujero negro en 2 + 1-dimensiones presentado anteriormente (revisar sección 3.1.5)

$$T = \frac{f'(r)}{4\pi} \Big|_{r_h} = \frac{r_h}{2\pi L^2}. \quad (3.77)$$

3.3 Agujeros Negros con Pelo

Hawking y Bekenstein demostraron que la entropía de un agujero negro es proporcional a su área superficial, como lo establece el teorema del área para agujeros negros [Bekenstein (1972); Hawking (1971, 1974)]. Dado esto, la entropía para un agujero negro es

$$\mathcal{S}_{HB} = \frac{A}{4G_N}. \quad (3.78)$$

Por lo tanto, la entropía de Hawking-Bekenstein para un agujero negro en 2 + 1-dimensiones es

$$A = 2\pi r_h \Rightarrow \mathcal{S}_{HB} = \frac{\pi r_h}{2G_N}. \quad (3.79)$$

Sin embargo, si se considera únicamente este término como la entropía total del sistema, se produce una violación a la segunda ley de la termodinámica debido al fenómeno de evaporación de agujeros negros [Hawking (1974)]. Dando como resultado una disminución del área

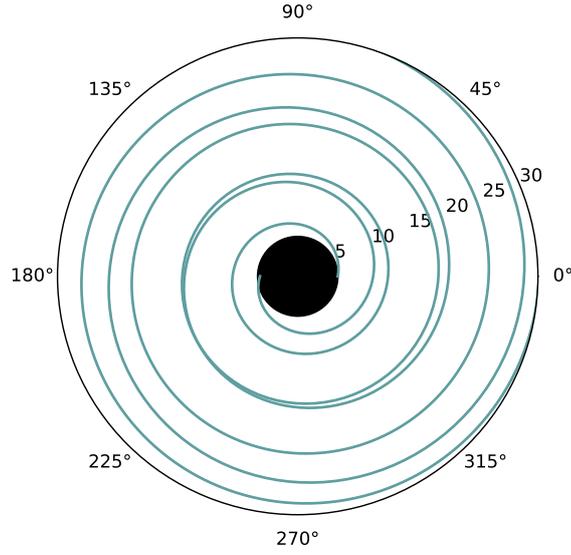


Figura 3.1: Representación gráfica de un agujero negro acoplado a un campo escalar. Es importante destacar que esta ilustración es puramente representativa y no se basa rigurosamente en los fundamentos matemáticos de un agujero negro con pelo.

superficial del agujero negro, lo cual implica una variación negativa de entropía

$$\delta\mathcal{S} = \frac{\pi}{2G_N}\delta r_h; \quad \delta r_h < 0 \Rightarrow \delta\mathcal{S} < 0. \quad (3.80)$$

Por otro lado, es posible acoplar un campo escalar a un agujero negro, y este acoplamiento es mínimo, es decir, está acoplado únicamente a la métrica, en cumplimiento del principio de acoplo mínimo [Janssen (2013)]. Como resultado, al calcular la entropía total, se deben considerar las contribuciones del campo escalar. En este contexto, el campo escalar se convierte en un portador de información. Sin embargo, de adentrarse en el estudio de la entropía de un agujero negro acoplado a un campo escalar, que se conoce como un “agujero negro con pelo”, es necesario establecer una descripción teórica satisfactoria de dicho sistema. Este objetivo inspiró el desarrollo de la investigación [Desa et al. (2022)], y este trabajo pone énfasis en la necesidad del contratermino escalar para la teoría. Acoplar un campo escalar a un agujero negro no es un proceso trivial. El primer obstáculo que debe ser superado es eludir el conocido teorema de “no-pelo”, que establece que no es necesario acoplar un campo escalar a un agujero negro. No obstante, es posible sortear esta restricción.

En la siguiente sección, se presentara los teoremas de no-pelo para agujeros negros. Y se expondrá las condiciones que la teoría debe satisfacer en fin de evitar estos teoremas, con el fin de obtener soluciones de agujeros negros con pelo.

3.3.1 Teorema de No-Pelo

Originalmente, el teorema de “no-pelo” fue propuesto por Bekenstein [Bekenstein (1973)], el cual, en resumen, establece que

- No se encuentran soluciones regulares de agujeros negros con simetría esférica y comportamiento asintótico plano que estén acopladas mínimamente a un campo escalar con potenciales convexos (mínimo): $\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} > 0$.

Este teorema ha sido extendido para abarcar campos escalares no acoplados mínimamente y para potenciales positivos de manera arbitraria [Heusler (1992)]. Adicionalmente, en la literatura más moderna, se han obtenido estos teoremas para agujeros negros asintóticamente *AdS* [Sudarsky and Gonzalez (2003); Hertog (2006)]:

- No existen soluciones de agujeros negros con campo escalar asintóticamente *AdS* cuyo potencial tienda asintóticamente a un mínimo (negativo) del potencial: $\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} > 0$.

Para evadir estos teoremas de no-pelo, es necesario establecer ciertas condiciones en el comportamiento del potencial del campo escalar en la teoría. Considerando la acción gravitatoria acoplada mínimamente a un campo escalar en $2 + 1$ -dimensiones

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left[R - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right]. \quad (3.81)$$

El principio variacional reproduce la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.82)$$

Con el fin de eludir el teorema de no-pelo, el potencial escalar debe satisfacer las siguientes condiciones, las cuales exigen tal que exista la estabilidad del vacío AdS en la región asintótica $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$

$$\left. \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0; \quad V(0) < 0; \quad \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} < 0. \quad (3.83)$$

3.3.2 Acción y Ecuaciones de Campo

En el presente trabajo, se está interesado en la acción modificada de la teoría de la gravitación de Einstein-Hilbert en $2 + 1$ -dimensiones con un campo escalar acoplado mínimamente

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left[R - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right] + \mathcal{S}_{GH} + \mathcal{S}_{ct} + \mathcal{S}_{\phi}, \quad (3.84)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial escalar, el término \mathcal{S}_{GH} corresponde al término de Gibbons-Hawking, el término \mathcal{S}_{ct} corresponde al contratermino geométrico y el último término \mathcal{S}_{ϕ} corresponde al contratermino escalar en el que se está interesado. Aplicando el principio variacional con respecto a la métrica, se obtiene las ecuaciones de campo gravitatorio de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} \Rightarrow E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} = 0, \quad (3.85)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Einstein, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía e impulso, y $E_{\mu\nu}$ es un tensor que facilita obtener las ecuaciones de diferenciales para la teoría. La expresión del tensor de energía e impulso es la siguiente

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[\frac{(\partial\phi)^2}{2} + V(\phi) \right]. \quad (3.86)$$

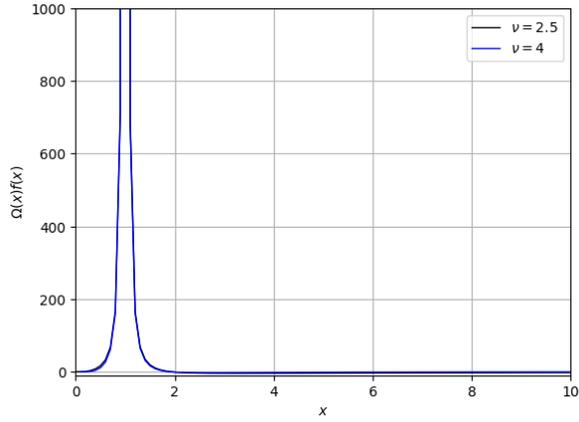


Figura 3.2: En el presente gráfico se muestra el comportamiento de la función métrica para cada una de las ramas en función de la coordenada x . Es importante destacar el comportamiento de la función métrica cuando x se aproxima a $x \rightarrow 1$, evidenciando el borde de la teoría en el sistema coordenado x .

Aplicando el principio variacional con respecto al campo escalar, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon en espacios tiempos curvos para el campo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (3.87)$$

3.3.3 Solución Asintóticamente Anti-de Sitter (*AdS*)

Dado el objetivo de hallar las soluciones exactas a las ecuaciones (revisar ecuación 3.85), se utiliza una versión diferente de la métrica que también es estática y radialmente simétrica. La coordenada “radial” de esta métrica es la nueva coordenada abstracta x , la cual es adimensional. Es importante notar que esta coordenada tiene dos “ramas”: una rama negativa $x \in (0, 1)$ y una rama positiva $x \in (1, \infty)$. Ambas ramas tienen sus singularidades en $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow \infty$, respectivamente. Por otro lado, el borde de la teoría para ambas ramas está establecido en $x = 1$ (revisar figura 3.2). La métrica en coordenadas x es la siguiente

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-f(x) dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\varphi^2 \right]. \quad (3.88)$$

Usando esta métrica en las ecuaciones de campo (revisar ecuaciones 3.85), se obtienen las siguientes ecuaciones para la función métrica, el campo y el potencial escalares

$$\begin{aligned}
E_t^t - E_x^x = 0 &\Rightarrow (\phi')^2 = \frac{3\Omega'^2 - 2\Omega\Omega''}{2\Omega^2}, \\
E_t^t - E_\varphi^\varphi = 0 &\Rightarrow (\Omega^{1/2}f')' = 0, \\
E_t^t + E_\varphi^\varphi = 0 &\Rightarrow V = -\frac{1}{4\eta^2\Omega(x)^3} [2\Omega''f\Omega + 2f''\Omega^2 - f\Omega'^2 + 3\Omega\Omega'f'].
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Es posible integrar estas ecuaciones diferenciales y obtener las expresiones para la función métrica $f(x)$, el campo escalar $\phi(x)$ y el potencial escalar $V(\phi)$, considerando el factor conforme $\Omega(x)$, cual ha sido construido y estudiado en [Anabalón and Astefanesei (2013)]

$$\Omega(x) = \frac{\nu^2 x^{\nu-1}}{\eta^2 (x^\nu - 1)^2}, \tag{3.90}$$

donde η es una constante de integración relacionada con la masa del agujero negro con pelo y ν es el parámetro de pelo que define la intensidad del campo escalar. Adicionalmente, este factor conforme diverge en $\Omega(x \rightarrow 1) \rightarrow \infty$. Integrando la segunda ecuación se halla la expresión de la función métrica

$$f(x) = \frac{2c_1\eta}{\nu} \left(\frac{x^{\frac{3+\nu}{2}}}{3+\nu} - \frac{x^{\frac{3-\nu}{2}}}{3-\nu} \right) + c_2. \tag{3.91}$$

Con tal de determinar las constantes de integración c_1 y c_2 , y sabiéndose que la métrica en el borde $x = 1$ debe coincidir con la métrica del espacio-tiempo AdS_2 , se impone la siguiente condición de borde

$$\lim_{x \rightarrow 1} \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\varphi^2 \right] = -\frac{r^2}{L^2} dt^2 + r^2 d\varphi^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{L^2}. \tag{3.92}$$

Esto permite fijar una de las dos constantes de integración

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\nu^2 c_2 + 4c_1 \eta - 9c_2}{\nu^2 - 9} = \frac{1}{L^2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{L^2} - \frac{4c_1 \eta}{\nu^2 - 9}. \tag{3.93}$$

Con lo cual, la función métrica toma la siguiente expresión

$$f(x) = \frac{1}{L^2} - \frac{2c_1\eta}{\nu} \left[\frac{2\nu}{\nu^2 - 9} - \frac{1}{(3 + \nu)} x^{\frac{3+\nu}{2}} + \frac{1}{(3 - \nu)} x^{\frac{3-\nu}{2}} \right]. \quad (3.94)$$

Para determinar el valor de la constante restante c_1 , es necesario conocer la forma del potencial $V(\phi)$. Reemplazando $f(x)$ y $\Omega(x)$ en la tercera ecuación, se obtiene

$$V(x) = -\frac{3}{4\nu^2} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{4c_1\eta}{\nu^2 - 9} \right) x^{-\frac{\sqrt{2\nu^2-2}}{2}} \left[(1+\nu) \left(1 + \frac{\nu}{3}\right) x^{\frac{\sqrt{2\nu^2-2}}{2}} + (1-\nu) \left(1 - \frac{\nu}{3}\right) x^{-\frac{\sqrt{2\nu^2-2}}{2}} - 2(1 - \nu^2) \right] + \frac{4\eta c_1 \cdot x^{\frac{\sqrt{2\nu^2-2}}{4}}}{\nu(\nu^2 - 9)} \left[(1 - \nu) x^{\frac{\sqrt{2\nu^2-2}}{4}} - (1 + \nu) x^{-\frac{\sqrt{2\nu^2-2}}{4}} \right]. \quad (3.95)$$

Como se ha indicado, la constante η está asociada con la masa del agujero negro con pelo; por lo tanto, η no debería tener presencia en el potencial $V(\phi)$. Esto nos permite fijar el valor de la constante c_1 , de manera que tenemos

$$c_1 = -\frac{\alpha}{4\eta}, \quad (3.96)$$

donde α es una constante de la teoría. Considerando esto, la expresión final de la función métrica es la siguiente

$$f(x) = \frac{1}{L^2} + \frac{\alpha}{2\nu} \left[\frac{2\nu}{\nu^2 - 9} - \frac{1}{(3 + \nu)} x^{\frac{3+\nu}{2}} + \frac{1}{(3 - \nu)} x^{\frac{3-\nu}{2}} \right]. \quad (3.97)$$

Finalmente, al integrar la primera ecuación, siendo ya conocido $\Omega(x)$, se obtiene la siguiente expresión para el campo escalar

$$\phi(x) = \ell^{-1} \ln x + d_1 \quad \ell^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\nu^2 - 1}. \quad (3.98)$$

Considerando que el campo escalar debe ser nulo en el fall-off de la teoría $\phi(x=1) = 0$, se determina el valor de la constante d_1 de la siguiente forma

$$\lim_{x \rightarrow 1} \phi(x) = d_1 \Rightarrow d_1 = 0. \quad (3.99)$$

Por lo tanto, la expresión final del campo escalar es

$$\phi(x) = \ell^{-1} \ln x. \quad (3.100)$$

Conocida la expresión de la función métrica $f(x)$, se estudian las condiciones para la existencia del horizonte de sucesos $f(x_h) = 0$, la cual está establecida por la correcta fijación de los parámetros de la teoría α y ν . Adicionalmente, dichas condiciones están relacionadas con las exigidas para eludir el teorema de no-pelo para el potencial escalar de la teoría $V(\phi)$. A continuación, se estudiarán las condiciones de existencia del horizonte para cada rama de la teoría.

Rama Negativa

De acuerdo a la ecuación 3.100 el campo escalar en la región $0 \leq x < 1$ o rama negativa, es negativo $\phi \leq 0$:

- Para: $\nu > 3$ con $x \rightarrow 0$ la existencia del horizonte $f(x_h) = 0$ esta asegurada por $f(x) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sim -\frac{\alpha L^2}{2\nu(\nu-3)} x^{-\frac{(\nu-3)}{2}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha L^2 > 0. \quad (3.101)$$

- Para: $1 \leq \nu < 3$ con $x \rightarrow 0$ la existencia del horizonte $f(x_h) = 0$ esta asegurada por $f(x) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sim \frac{1}{L^2} - \frac{\alpha}{9 - \nu^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < 9 - \nu^2 < \alpha L^2. \quad (3.102)$$

Rama Positiva

Por otro lado, en la región $1 \leq x < \infty$ o rama positiva, el campo escalar es positivo $\phi \geq 0$:

- Para el caso $1 \leq \nu < 3$ y $\nu > 3$ con $x \rightarrow \infty$ la existencia del horizonte $f(x_h) = 0$ esta asegurada por $f(x) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \sim -\frac{\alpha}{2\nu(3+\nu)} x^{\frac{3+\nu}{2}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha L^2 > 0. \quad (3.103)$$

Teniendo en cuenta las restricciones obtenidas aquí para α , es posible visualizar la existencia del horizonte de sucesos (revisar figura 3.3). Para tales figuras se ha utilizado $g_{tt}(x) = -\Omega(x)f(x)$ y $r(x) = \sqrt{\Omega(x)}$.

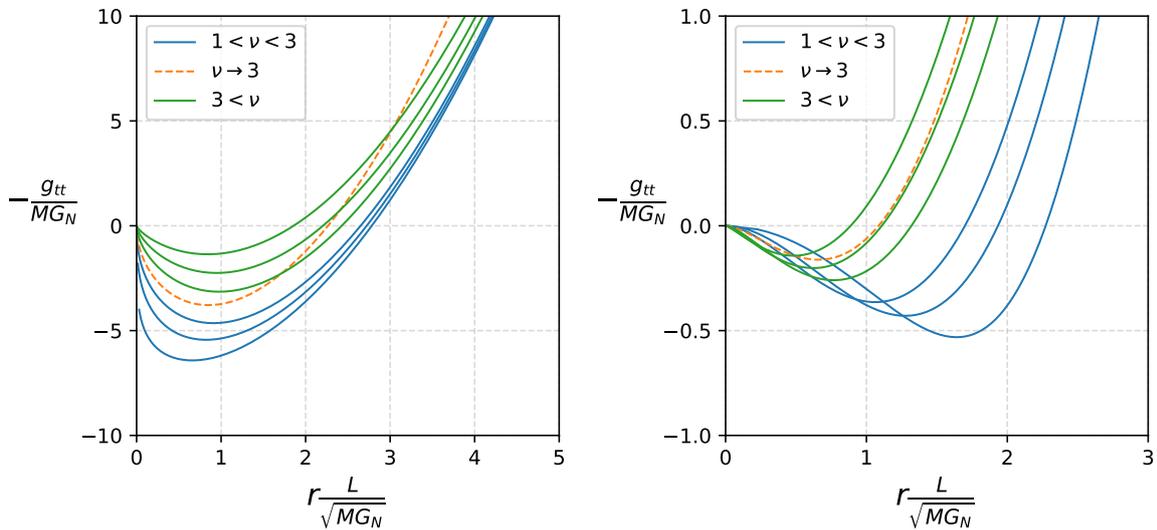


Figura 3.3: En ambas figuras se muestra la existencia del horizonte de sucesos para el agujero negro con pelo. La figura de la izquierda corresponde a la rama positiva y la figura de la derecha a la rama negativa. Para ambos casos se ha fijado el valor de $\alpha L^2 = 9$.

3.3.4 Potencial Escalar On-Shell

En la presente sección, se estudia el potencial escalar en el caso on-shell, es decir, se halla la expresión del potencial escalar utilizando las soluciones de las ecuaciones de campo. Retomando el cálculo realizado en (revisar sección 3.3.3), es importante notar que la forma adecuada del potencial escalar es $V(\phi)$ en lugar de $V(x)$. Esto dado que $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar. Utilizando la expresión de ϕ , se reescribe el potencial $V(\phi)$ en términos del campo escalar ϕ

$$V(\phi) = -\frac{3 \exp(-\phi\ell)}{4\nu^2} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{\alpha}{\nu^2 - 9} \right) \left[(1 + \nu) \left(1 + \frac{\nu}{3}\right) \exp(\phi\ell\nu) + (1 - \nu) \left(1 - \frac{\nu}{3}\right) \exp(-\phi\ell\nu) - 2(1 - \nu^2) \right] - \frac{\alpha \exp(\phi\ell/2)}{\nu(\nu^2 - 9)} \left[(1 - \nu) \exp\left(\frac{\phi\ell\nu}{2}\right) - (1 + \nu) \exp\left(-\frac{\phi\ell\nu}{2}\right) \right]. \quad (3.104)$$

La auto-interacción en el potencial escalar es responsable de mantener al campo escalar fuera del horizonte de sucesos. Dado que el campo escalar es nulo en el borde de la teoría, se deduce su masa conforme asociada. Considerándose la serie de Maclaurin para el potencial escalar en el borde de la teoría, donde $\phi \rightarrow 0$

$$V(\phi \rightarrow 0) = -\frac{2}{L^2} - \frac{1}{2L^2}\phi^2 - \frac{\ell^3(\nu^2 - 1)}{12L^2}\phi^3 + \mathcal{O}(\phi^4) \Rightarrow V(0) < 0, \quad (3.105)$$

$$m^2 = \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = -\frac{1}{L^2}. \quad (3.106)$$

Se nota que el potencial escalar presenta un mínimo en el horizonte de sucesos y un máximo en el borde de la teoría, lo que garantiza la estabilidad del campo escalar

$$\frac{dV}{d\phi} = -\frac{1}{L^2}\phi - \frac{\ell^3(\nu^2 - 1)}{4L^2}\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3) \Rightarrow \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0, \quad (3.107)$$

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = -\frac{1}{L^2} - \frac{\ell^3(\nu^2 - 1)}{2L^2}\phi + \mathcal{O}(\phi^2) \Rightarrow \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} < 0. \quad (3.108)$$

De acuerdo con las condiciones establecidas en (revisar sección 3.3.3), el potencial escalar descrito aquí logra evadir el teorema de no-pelo. Se observa gráficamente el comportamiento del potencial escalar y cómo evade el teorema de no-pelo en (revisar figura 3.4).

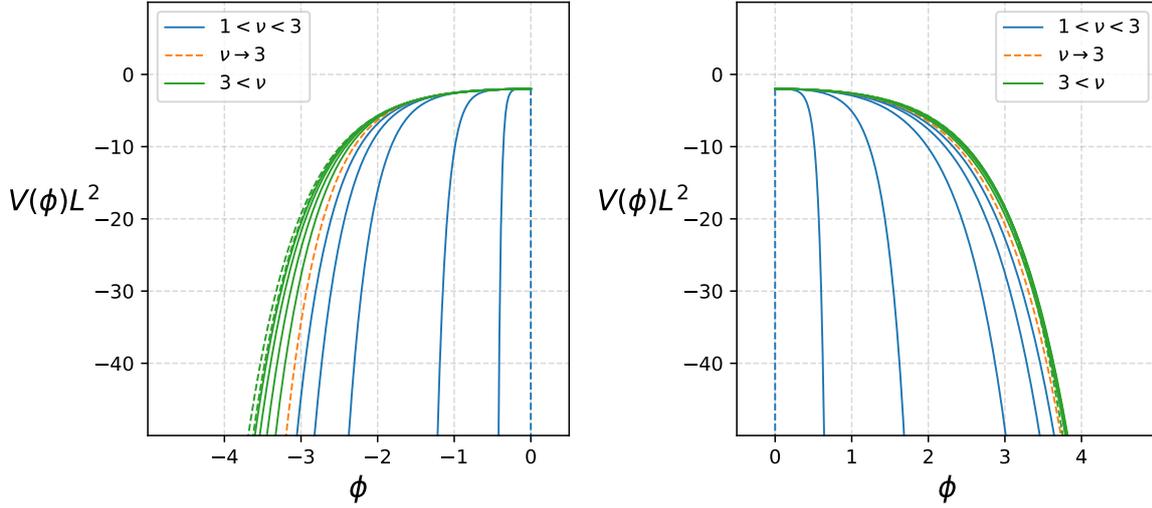


Figura 3.4: Esta figura ilustra cómo la solución presente evade el teorema de no-pelo analizando el comportamiento del potencial escalar. Se ha fijado el valor de $\alpha L^2 = 9$, cual verifica las condiciones establecidas en (revisar sección 3.3.3).

3.3.5 El Limite de No-Pelo

Se refiere al límite de no-pelo como el proceso de eliminar las contribuciones del campo escalar a las soluciones de un agujero negro con pelo. En el presente caso, el límite de no-pelo reproduce la solución estática BTZ (revisar sección 3.1.5). Este límite está bien definido en $\nu = 1$, donde el campo escalar se anula $\phi = 0$ y el potencial escalar se reduce a la constante cosmológica $V = -2L^{-2}$. La el factor conforme y la función métrica en el límite de no-pelo se reducen a la siguiente expresión para cualquiera de las dos ramas, ya sea positiva o negativa

$$\Omega(x) = \frac{1}{\eta^2(x-1)^2}; \quad f(x) = \frac{1}{L^2} - \frac{\alpha(x-1)^2}{8}. \quad (3.109)$$

Sea la siguiente transformación de coordenadas

$$x = 1 \pm 1/\eta r. \quad (3.110)$$

Se obtiene que el factor conforme y la función métrica toman la siguiente expresión

$$\Omega(x) = r^2; \quad f(r) = \frac{1}{L^2} - \frac{\alpha}{8\eta^2 r^2}. \quad (3.111)$$

A partir de lo cual, es factible definir la constante μ que guarda relación con la masa del agujero negro, y la función métrica se simplifica a la solución estática BTZ

$$-g_{tt} = \Omega(x)f(x)|_{x=1\pm 1/\eta r} = -\mu + \frac{r^2}{L^2}; \quad \mu = \frac{\alpha}{8\eta^2}, \quad (3.112)$$

donde $\mu = 8MG_N$ es un parámetro auxiliar que permite reescribir la masa del agujero negro con pelo y su contribución en la solución. Este resultado demuestra que la teoría investigada en este trabajo es coherente en el límite sin pelo

3.3.6 Condiciones Asintóticas de Borde

La relación entre los sistemas de coordenadas x y r (revisa ecuación 3.110) es válida solo en el caso del límite de no-pelo. Por tanto, es necesaria una ecuación que permita relacionar ambos sistemas de coordenadas para cualquier valor de $\nu > 1$. Dicha transformación de coordenadas ha sido encontrada en [Desa et al. (2022)], y es la siguiente

$$x = 1 \pm \frac{1}{\eta r} \mp \frac{\nu^2 - 1}{24\eta^3 r^3} + \frac{\nu^2 - 1}{24\eta^4 r^4} + \mathcal{O}(r^{-5}), \quad (3.113)$$

donde la elección de los signos corresponde a la elección de la rama, con (+ - +) correspondiendo a la rama positiva y (- + +) a la rama negativa.

El fall-off del campo escalar en el sistema de coordenadas r para ambas ramas, para agujeros negros con pelo en general, muestran que se tiene condiciones de borde de Neumann

$$\phi(r) = \frac{\sigma_1}{r^{\Delta_+}} + \frac{\sigma_2 \ln(r)}{r^{\Delta_-}} + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (3.114)$$

Considerando la transformación de coordenadas y analizando la serie de expansión en el borde de la teoría, se obtiene el siguiente comportamiento para el campo escalar

$$\phi(r) = \mp \frac{1/\eta\ell}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (3.115)$$

Esto demuestra que la presente solución cumple con las condiciones de frontera de Neumann [Cheng and Cheng (2005)]

$$\phi(r) = \mp \frac{1/\eta\ell}{r} + \frac{0}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (3.116)$$

$$\phi < 0 \Rightarrow \sigma_1 = -\frac{1}{\eta\ell}, \quad \sigma_2 = 0, \quad (3.117)$$

$$\phi > 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{\eta\ell}, \quad \sigma_2 = 0. \quad (3.118)$$

El comportamiento asintótico del campo escalar en la teoría muestra que el campo escalar tiene solamente un término de la forma r^{-1} , sin términos logarítmicos

$$\phi(r) = \frac{\sigma_1}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (3.119)$$

En $2+1$ -dimensiones, el límite inferior y superior de Breitenlohner-Freedman [Breitenlohner and Freedman (1982); Henneaux et al. (2007)] están definidos como $-1 \leq m^2 L^2 < 0$. En la presente solución, la masa conforme satura el límite inferior $m^2 L^2 = -1$ (como lo muestra la ecuación 3.106). Por lo tanto, los términos relevantes para el comportamiento asintótico del campo escalar se fijan de la forma $\Delta_+ = \Delta_- = 1$.

Finalmente, es de interés conocer la expresión de la métrica después de aplicar la transformación de coordenadas definida en (revisar ecuación 3.113) y analizar su comportamiento asintótico en el borde de la teoría. Se podría pensar que se recupera la métrica de la solución BTZ, como en el límite de no-pelo. Sin embargo, se encuentra que el campo escalar tiene una contribución en la componente radial de la métrica. Los términos relevantes en el fall-off de la métrica se obtienen a partir de las simetrías asintóticas, $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \mathcal{O}(h_{\mu\nu})$, y teniendo en consideración la métrica AdS_3 . Se ha demostrado en [Anabalon et al. (2016); Henneaux et al. (2007); Brown and Henneaux (1986)] que los términos relevantes de $h_{\mu\nu}$ en $2 + 1$ -dimensiones son los siguientes

$$h_{tt} = \mathcal{O}(1); \quad h_{rr} = \mathcal{O}(r^{-4}). \quad (3.120)$$

El primer resultado relevante es $h_{tt} = \mathcal{O}(1)$, lo que indica que en el límite asintótico, la componente temporal de la métrica es una constante. El segundo resultado relevante es $h_{rr} = \mathcal{O}(r^{-4})$, lo que significa que solo los términos hasta de cuarto orden son relevantes para el comportamiento asintótico de la componente radial de la métrica. Estos términos para cada una de las ramas de la teoría, después de aplicar la transformación de coordenadas (cuyo origen se analizará detenidamente en la sección siguiente), son los siguientes

$$-g_{tt} = \Omega(x)f(x)|_{x=x(r)} = -\mu + \frac{r^2}{L^2} + \mathcal{O}(r^{-2}); \quad \mu = \frac{\alpha}{8\eta^2}, \quad (3.121)$$

$$g_{rr} = \frac{L^2}{r^2} - \frac{L^4}{r^4} \left(-\mu + \frac{\sigma_1^2}{2L^2} \right) + \mathcal{O}(r^{-5}), \quad (3.122)$$

$$g_{\varphi\varphi} = r^2 + \mathcal{O}(r^{-5}), \quad (3.123)$$

donde σ_1 ha sido definido en (revisar ecuación 3.100), y es la contribución del campo escalar en el fall-off de la componente radial de la métrica, cual se denomina como el “back-reaction” del campo escalar [Hack (2010)]. Esta contribución podría obstaculizar el desarrollo teórico actual; sin embargo, el contratermino escalar, que constituye el objetivo de la presente tesis, resuelve este inconveniente.

3.3.7 Relaciones de Transformación Entre el Sistema de Coordenadas r y el Sistema de Coordenadas x

En la sección anterior se exhibió el comportamiento asintótico de las componentes de la métrica. En la presente sección se abordará el origen de dichas expresiones matemáticas. Considérese la métrica en r -coordenadas de la forma

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + H(r)dr^2 + S(r)d\varphi^2. \quad (3.124)$$

Al ser establecida una relación entre las componentes del tensor métrico de esta métrica y la métrica en x -coordenadas, es factible obtener las tres relaciones cuales describen el cambio de sistema de coordenadas. Dichas relaciones son las siguientes

$$ds_{x\text{-coord}}^2 \rightarrow ds_{r\text{-coord}}^2 \Rightarrow \Omega(x)f(x) \rightarrow N(r); \quad \Omega(x) \rightarrow S(r); \quad dx \rightarrow \frac{\sqrt{N(r)H(r)}}{S(r)\eta} dr. \quad (3.125)$$

Estas expresiones han posibilitado la determinación de g_{tt} y $g_{\varphi\varphi}$ en r -coordenadas, como se presentó en la sección anterior. Por otra parte, para obtener la expresión de g_{rr} o $H(r)$, es imperativo examinar las ecuaciones de campo de Einstein en r -coordenadas. A partir de las cuales, en r -coordenadas, se obtiene

$$\begin{aligned} E_t^t - E_r^r = 0 &\Rightarrow \phi'^2 = \frac{1}{2S^2} [S' - 2SS''] + \frac{S'}{2S} \frac{(NH)'}{NH}, \\ E_t^t - E_\varphi^\varphi = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dr} \left[\frac{\sqrt{S^3}}{\sqrt{NH}} \frac{d}{dr} \left(\frac{N}{S} \right) \right] = 0, \\ E_t^t + E_\varphi^\varphi = 0 &\Rightarrow V = -\frac{1}{\sqrt{SNH}} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{\frac{S}{NH}} \frac{dN}{dr} \right). \end{aligned} \quad (3.126)$$

La primera de estas ecuaciones proporciona la capacidad de determinar la componente radial de la métrica $H(r)$, dado que las expresiones para $N(r)$ y $S(r)$ son conocidas. Al aplicar

estas expresiones en dicha ecuación, se obtiene la siguiente ecuación diferencial para $H(r)$

$$\frac{\sigma_1^2}{r^3} - \frac{H'(r)}{H(r)} - \frac{2r}{-\mu L^2 + r^2} = 0. \quad (3.127)$$

La solución a esta ecuación diferencial se presenta de la siguiente manera

$$H(r) = L^2 \exp \left[-\frac{2\sigma_1^2 + 4r^2 \ln(r^2 - \mu L^2)}{4r^2} \right]. \quad (3.128)$$

Cuyo comportamiento asintótico en el borde de la teoría es el siguiente

$$H(r) = \frac{L^2}{r^2} - \frac{L^4}{r^4} \left(-\mu + \frac{\sigma_1^2}{2L^2} \right) + \mathcal{O}(r^{-5}). \quad (3.129)$$

De este modo, se obtiene la expresión de g_{rr} que ha sido ya mostrada en la sección precedente.

3.4 Hipótesis

- Existe un contratermino escalar cuya expresión algebraica completa la acción del sistema físico. Este contratermino verifica el principio variacional, preserva la simetría conforme y la primera ley de la termodinámica.

3.4.1 Identificación de Variables

El contratermino escalar es una variable cuantitativa, dependiente. Se expresa numéricamente y se manipula para regularizar la acción en el modelo teórico. Su valor depende del campo escalar, por tanto del parámetro de pelo ν . Además, es una variable de razón, ya que tiene un valor numérico con un cero absoluto y unidades físicas definidas.

$$\mathcal{S}_\phi[\phi] \quad (3.130)$$

Capítulo 4

METODOLOGÍA

4.1 Diseño y Nivel de Investigación

La presente investigación se clasifica como fundamental, ya que su objetivo principal es ampliar el conocimiento teórico sin una aplicación práctica inmediata. Es de nivel teórico y cuantitativo. Además, se considera pre-experimental, dado que los resultados obtenidos podrían ser utilizados en el futuro para diseños experimentales relacionados con la observación de agujeros negros con pelo.

Siguiendo el marco de Mario Bunge Bunge (2013), el diseño se fundamenta en un enfoque lógico y sistémico, garantizando coherencia interna entre los postulados teóricos y los desarrollos matemáticos. Esto incluye la formulación de hipótesis verificables a través del rigor lógico-matemático.

4.2 Unidad de Análisis

La presente investigación se centra en analizar el contratermino escalar como una variable clave para garantizar la completitud de la acción de un agujero negro con pelo. Asimismo, examina su papel en la preservación de la consistencia de la teoría.

El sistema físico considerado es un agujero negro con pelo en $2 + 1$ dimensiones, acoplado mínimamente a un campo escalar en un espacio-tiempo asintóticamente *AdS*. El contratermino escalar se evalúa cuantitativamente para determinar su impacto en las magnitudes físicas y, en consecuencia, en el desarrollo teórico.

4.3 Método de Validación de la Hipótesis

La validación de la hipótesis se realiza mediante un desarrollo teórico basado en la deducción, partiendo del principio variacional para obtener y validar la existencia del contratermino escalar. Posteriormente, se verifica la preservación de los principios físicos a través de la acción completa, empleando técnicas analíticas fundamentadas en formalismos teóricos, específicamente el formalismo de Brown-York y el formalismo de la acción euclidiana. Este enfoque garantiza una evaluación rigurosa de la validez de la hipótesis.

4.4 Técnicas de Validación de la Hipótesis

En esta sección se detallan las técnicas empleadas para la validación de la hipótesis, siguiendo la metodología previamente presentada.

4.4.1 Verificación del Principio Variacional

Primero, la validación del principio variacional permite identificar si la teoría está completa. Aunque los términos de borde adicionales en la acción no afectan las ecuaciones de campo, tienen un impacto relevante en el cálculo de la acción euclidiana. Este principio es una herramienta directa para identificar la expresión contratermino escalar. A continuación, procede a realizar los pasos para verificar el principio variacional, considerando la acción

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left[R - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right] + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x K \sqrt{-h} + \mathcal{S}_{ct} + \mathcal{S}_{\phi}. \quad (4.1)$$

Si se define la densidad lagrangiana para expresar la contribución del campo escalar como

$$\mathcal{L}_M := -\frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi), \quad (4.2)$$

entonces, la acción de la teoría se puede reescribir como

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} [R + \mathcal{L}_M] + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x K \sqrt{-h} + \mathcal{S}_{ct} + \mathcal{S}_\phi. \quad (4.3)$$

Como es ya sabido, aplicar el principio variacional respecto a la métrica genera las ecuaciones de campo de Einstein. Para detallar este procedimiento, se considera la variación

$$\delta\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}; \quad \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0; \quad \frac{\mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (4.4)$$

donde se define el tensor de energía e impulso como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_M g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[\frac{(\partial\phi)^2}{2} + V(\phi) \right]. \quad (4.5)$$

Dado que los términos adicionales de borde no tienen contribuciones alguna. Por tanto, se puede afirmar que al variar la acción solamente respecto a la métrica se preserva el principio variacional. Las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein se expresan como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Ahora examinando la variación de la acción con respecto al campo escalar se tiene lo siguiente

$$\delta\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \right] \delta\phi + \frac{\delta\mathcal{S}_\phi}{\delta\phi} \delta\phi. \quad (4.7)$$

Aplicando la integración por partes en el segundo término se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = & \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \delta\phi \\ & + \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \partial_\mu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right] + \frac{\delta\mathcal{S}_\phi}{\delta\phi} \delta\phi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

El primer término de esta variación corresponde a las ecuaciones de Euler-Lagrange para una densidad lagrangiana dada. Sea la densidad lagrangiana definida en la ecuación 4.2, se reproduce la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \partial_\nu\phi) - \sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (4.9)$$

Dado que el campo escalar satisface la ecuación de Klein-Gordon, el primer término de esta variación se anula. Por lo tanto, se obtiene el siguiente termino remanente y la variación del contratermino escalar

$$\delta\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \partial_\mu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right] + \frac{\delta\mathcal{S}_\phi}{\delta\phi} \delta\phi, \quad (4.10)$$

que al exigir la preservación del principio variacional, se hallara la variación del contratermino escalar $\delta\mathcal{S}_\phi$. Por lo tanto, se define la siguiente expresión

$$\delta\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = 0 \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{S}_\phi}{\delta\phi} \delta\phi = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \partial_\mu \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right]. \quad (4.11)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a esta última expresión, se obtiene

$$\frac{\delta\mathcal{S}_\phi}{\delta\phi} \delta\phi = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \left[\frac{\partial(\sqrt{-h}\mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right] n_\mu, \quad (4.12)$$

donde n_μ es un vector normal a la hiper-superficie tipo-tiempo Σ , definida a $r = \text{constante}$, y $\sqrt{-h}$ es la determinante de la métrica inducida a dicha hiper-superficie. Al utilizar la definición (revisar ecuación 4.2), la variación del contratermino escalar adopta la siguiente

forma

$$\frac{\delta \mathcal{S}_\phi}{\delta \phi} \delta \phi = \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial \mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h} n^\mu \partial_\mu \phi \delta \phi. \quad (4.13)$$

4.4.2 Expresión Algebraica del Contratermino Escalar

Se ha mostrado en el capítulo anterior que la variación del contratermino escalar tiene la siguiente forma

$$\delta \mathcal{S}_\phi = \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial \mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h} n^\mu \partial_\mu \phi \delta \phi. \quad (4.14)$$

Es necesario conocer su expresión no variada. Para este propósito, es necesario conocer el fall-off de la métrica. Sea entonces, la métrica en r -coordenadas

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N(r) dt^2 + H(r) dr^2 + S(r) d\varphi^2, \quad (4.15)$$

Cuyo fall-off de las componentes de esta métrica ya es conocido (revisar sección 3.3.6)

$$N(r) = -\mu + \frac{r^2}{L^2} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad \mu = \frac{\alpha}{8\eta^2}, \quad (4.16)$$

$$H(r) = \frac{L^2}{r^2} - \frac{L^4}{r^4} \left(-\mu + \frac{\sigma_1^2}{2L^2} \right) + \mathcal{O}(r^{-5}), \quad (4.17)$$

$$S(r) = r^2 + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (4.18)$$

El vector normal a la hiper-superficie tipo-tiempo Σ , definida a $r = \text{constante}$, tiene la siguiente forma

$$n_\mu = \sqrt{H} \delta_\mu^r. \quad (4.19)$$

Sea además la métrica inducida a la hiper-superficie Σ

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \Rightarrow ds^2 = -N(r) dt^2 + S(r) d\varphi^2. \quad (4.20)$$

Considerando el fall-off del campo escalar estudiado en (revisar sección 3.3.6). La variación del campo escalar es de la siguiente forma

$$\phi(r) = \frac{\sigma_1}{r} \Rightarrow \delta\phi = \frac{\delta\sigma_1}{r}. \quad (4.21)$$

Teniendo en cuenta estos resultados, el fall-off de la variación del contratermino escalar es de la siguiente forma

$$\delta\mathcal{S}_\phi = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{\frac{N(r)S(r)}{H(r)}} \frac{\sigma_1}{r^3} \delta\sigma_1 = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \left(\frac{\sigma_1}{L^2}\right) \delta\sigma_1 + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (4.22)$$

Esta misma expresión se obtiene también a partir de la variación de una nueva definición que se da al contratermino escalar. Se propone entonces, que la forma simple del contratermino escalar es la siguiente

$$\mathcal{S}_\phi = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h} \frac{\phi^2}{4L^2}. \quad (4.23)$$

Nótese que la variación de esta nueva definición reproduce el resultado obtenido anteriormente. Por tanto, esta es la expresión algebraica para el contratermino escalar buscada. Finalmente, el fall-off del contratermino escalar es el siguiente

$$\mathcal{S}_\phi = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h} \frac{\phi^2}{4L^2} = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \left(\frac{\sigma_1^2}{4L^2}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (4.24)$$

4.4.3 Formalismo de Brown-York

Segundo, una vez obtenido el contratermino escalar, se calcula la energía gravitacional de la teoría mediante el formalismo de Brown-York y se verificará la simetría conforme, asegurando así, que esta energía obtenida es correcta.

Dentro del contexto de la correspondencia *AdS/CFT*, se postula que en el borde de una teoría de gravedad existe una teoría cuántica conforme de campos dual. Por otro lado,

el tensor de Brown-York, cual es un tensor holográfico, se encuentra definido en la hipersuperficie Σ . En consecuencia, el comportamiento asintótico de este tensor en el borde de la teoría guarda relación con el valor de expectación del tensor de energía e impulso de la teoría cuántica conforme de campos dual, y por tanto, con la energía gravitacional. El tensor de Brown-York se halla definido en [Brown and York (1993)]

$$\tau_{ab} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta h^{ab}}. \quad (4.25)$$

El tensor de Brown-York, dada esta definición, para la presente teoría toma la siguiente forma (revisar apéndice C.2)

$$\tau_{ab} = -\frac{1}{\kappa} (K_{ab} - h_{ab}K) - \frac{h_{ab}}{\kappa L} - \frac{h_{ab}\phi^2}{4\kappa L}. \quad (4.26)$$

A continuación, se procederá con el cálculo de la energía gravitacional utilizando el formalismo de Brown-York. Considérese la métrica en r -coordenadas

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + H(r)dr^2 + S(r)d\varphi^2, \quad (4.27)$$

donde el fall-off de las componentes de esta métrica ya es conocido (revisar sección 3.3.6)

$$ds^2 = -\left[-\mu + \frac{r^2}{L^2} + \mathcal{O}(r^{-2})\right]dt^2 + \left[\frac{L^2}{r^2} - \frac{L^4}{r^4} \left(-\mu + \frac{\sigma_1^2}{2L^2}\right) + \mathcal{O}(r^{-5})\right]dr^2 + [r^2 + \mathcal{O}(r^{-5})]d\varphi^2. \quad (4.28)$$

Utilizando la expresión del tensor de curvatura extrínseca (revisar apéndice C.1), el fall-off

de las componentes del tensor de energía e impulso de Brown-York es

$$\begin{aligned}\tau_{tt} &= -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{NS'}{2S\sqrt{H}} - \frac{N}{L} \right) + \frac{N\phi^2}{4\kappa L} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu}{2L} \right) + \mathcal{O}(r^{-2}), \\ \tau_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{SN'}{2\sqrt{HN}} - \frac{S}{L} \right) - \frac{S\phi^2}{4\kappa L} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu L}{2} \right) + \mathcal{O}(r^{-2}).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Como ha sido establecido por Brown y York en [Brown and York (1993)], el tensor de energía e impulso de Brown-York permite calcular la magnitud conservada asociada a los vectores de Killing. Esta magnitud invariante es la energía gravitacional, la cual está dada por la siguiente definición

$$E = \oint_{\Sigma} dx \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b. \quad (4.30)$$

Considerando las siguientes definiciones

$$u^a = \frac{(\partial_t)^a}{\sqrt{N}}; \quad \xi = (\partial_t)^a; \quad \sigma = r^2, \quad (4.31)$$

se obtiene la siguiente expresión

$$E = \oint_{\Sigma} d\varphi \frac{r}{\sqrt{N}} \tau_{tt}. \quad (4.32)$$

Entonces, considerando el fall-off de la teoría, se obtiene que la energía es

$$E = \frac{\mu}{8G_N} = \frac{r_h^2}{8G_N L^2}. \quad (4.33)$$

La energía gravitacional calculada aquí corresponde a la masa del agujero negro con pelo ($M = E$). La validación de la simetría conforme, dada la dualidad *AdS/CFT*, a su vez valida que esta es la energía correcta para la teoría. Sea entonces la métrica en el borde de la teoría

$$ds_{\text{borde}}^2 = -\frac{r^2}{L^2} dt^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + L^2 d\varphi^2). \quad (4.34)$$

Sea además la definición de la métrica de fondo de la teoría cuántica de campos conforme dual [Natsuume (2014)]

$$ds_{dual}^2 = \gamma_{ab} dx^a dx^b = -dt^2 + L^2 d\varphi^2. \quad (4.35)$$

Se hace evidente la relación entre la métrica en el borde de la teoría gravitacional y la métrica de fondo de la teoría cuántica dual. Se ha demostrado que el tensor holográfico de Brown-York está relacionado con el valor de expectación del tensor de energía e impulso de la teoría cuántica dual, $\langle \tau_{ab}^{dual} \rangle$ [Myers (1999)]. Dicha relación esta dada como se muestra a continuación

$$\sqrt{-h} h^{ab} \langle \tau_{bc}^{dual} \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \tau_{bc}. \quad (4.36)$$

Considerando las expresiones de h^{ab} y γ^{ab}

$$\sqrt{-h} = \frac{r^2}{L^2} L; \quad \sqrt{-\gamma} = L, \quad (4.37)$$

se tiene entonces

$$\sqrt{-h} h^{tt} \langle \tau_{tt}^{dual} \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{-\gamma} \gamma^{tt} \tau_{tt} \Rightarrow -\frac{r^2}{L} \frac{L^2}{r^2} \langle \tau_{tt}^{dual} \rangle = -L \lim_{r \rightarrow \infty} \tau_{tt} \Rightarrow \langle \tau_{tt}^{dual} \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \tau_{tt}, \quad (4.38)$$

$$\sqrt{-h} h^{\varphi\varphi} \langle \tau_{\varphi\varphi}^{dual} \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{-\gamma} \gamma^{\varphi\varphi} \tau_{\varphi\varphi} \rightarrow \frac{r^2}{L} \frac{1}{r^2} \langle \tau_{\varphi\varphi}^{dual} \rangle = \frac{1}{L} \lim_{r \rightarrow \infty} \tau_{\varphi\varphi} \rightarrow \langle \tau_{\varphi\varphi}^{dual} \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \tau_{\varphi\varphi}. \quad (4.39)$$

Dado que las componentes del tensor de energía e impulso de Brown-York no dependen en r . Se tiene que el valor de expectación del tensor de energía e impulso de la teoría dual es

$$\langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = \tau_{ab}. \quad (4.40)$$

Por último, se asume que este tensor de energía e impulso describe un fluido perfecto. Por

tanto, se reescribe el tensor como se muestra a continuación

$$\langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = (\rho + p)u_a u_b + p\gamma_{ab}, \quad (4.41)$$

donde p es la presión ejercida por el fluido y ρ es su densidad de energía. Dada las formulaciones (revisar ecuación 4.29), se identifica las siguientes expresiones para la presión y densidad

$$\rho = \frac{\mu}{16\pi G_N l}, \quad p = \frac{\mu}{16\pi G_N l}. \quad (4.42)$$

La simetría conforme exige que la traza de este tensor de energía e impulso sea nula [Friedan et al. (1986)]. Sea entonces la traza

$$\gamma^{ab} \langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = (\rho + p)\gamma^{ab}u_a u_b + p\gamma^{ab}\gamma_{ab}, \quad (4.43)$$

ademas, considerando

$$\gamma^{ab}u_a u_b = -1; \quad \gamma^{ab}\gamma_{ab} = 2. \quad (4.44)$$

Finalmente, tomando en cuenta los valores para la densidad de energía y la presión (revisar ecuación 4.42). Se verifica la simetría conforme

$$\gamma^{ab} \langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = -(\rho + p) + 2p = -\rho + p = 0. \quad (4.45)$$

4.4.4 Acción On-Shell y Energía Libre de Helmholtz

Finalmente, se verifica que la teoría satisface la primera ley de la termodinámica. Para ello, es necesario calcular primero las diferentes magnitudes termodinámicas mediante el formalismo del cálculo de la acción on-shell en la sección euclidiana.

Como se ha mencionado en (revisar sección 3.2), la acción on-shell finita en la sección euclidiana, o simplemente acción euclidiana, permite el cálculo de las magnitudes ter-

modinámicas ya que está vinculada con la energía libre de Helmholtz mediante la rotación de Wick. Por tanto, en la presente sección se procederá a realizar el cálculo de la acción euclidiana y obtener la energía libre. Sea entonces la acción de la teoría (revisar ecuación 4.1)

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left[R - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right] + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x K \sqrt{-h} + \mathcal{S}_{ct} + \mathcal{S}_{\phi}. \quad (4.46)$$

Dado que el cálculo de la acción euclidiana considera todo el espacio-tiempo, es conveniente realizar este procedimiento en el sistema de r -coordenadas. Sea entonces la métrica en la sección euclidiana

$$ds_E^2 = N(r)d\tau^2 + H(r)dr^2 + S(r)d\varphi^2; \Rightarrow \sqrt{g^E} = \sqrt{N(r)H(r)S(r)}, \quad (4.47)$$

cuyo fall-off es

$$ds_E^2 = \left[-\mu + \frac{r^2}{L^2} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] dt_E^2 + \left[\frac{L^2}{r^2} - \frac{L^4}{r^4} \left(-\mu + \frac{\sigma_1^2}{2L^2} \right) + \mathcal{O}(r^{-5}) \right] dr^2 + [r^2 + \mathcal{O}(r^{-5})] d\varphi^2. \quad (4.48)$$

Adicionalmente, la métrica inducida en la hiper-superficie tipo tiempo Σ definida a $r = \text{constante}$ en la sección euclidiana es

$$h_{ab}^E dx^a dx^b = N(r)d\tau^2 + S(r)dt^2; \Rightarrow \sqrt{h^E} = \sqrt{N(r)S(r)}. \quad (4.49)$$

Procediendo con el calculo, la acción en la sección euclidiana es de la siguiente forma

$$\mathcal{S}^E = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{g^E} \left[R - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right] - \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x K \sqrt{h^E} + \mathcal{S}_{ct}^E + \mathcal{S}_{\phi}^E. \quad (4.50)$$

Primero se procede con el termino del bulk

$$\mathcal{S}_{bulk}^E = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g^E} \left[R - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right]. \quad (4.51)$$

En este punto, podría pensarse que la integración de este término es demasiado compleja. Sin embargo, es posible simplificar este cálculo considerando las ecuaciones de campo de Einstein (revisar ecuación 3.85)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2}\left[\frac{(\partial\phi)^2}{2} + V(\phi)\right]. \quad (4.52)$$

Considerando también la forma de la traza

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \Rightarrow R = \frac{(\partial\phi)^2}{2} + 3V. \quad (4.53)$$

Además, considerando la tercera relación presentada en (revisar ecuación 3.126). Se tiene que el término del bulk en la sección euclidiana es de la forma siguiente

$$S_{bulk}^E = -\frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{M}} dr d\varphi dt_E \sqrt{g^E} V = \frac{\beta}{8G_N} \left(\frac{dN}{dr} \sqrt{\frac{S}{NH}} \right)_{r_h}^{r_b}; \quad \oint dt_E = \beta, \quad (4.54)$$

donde la integración se realiza considerando como límite inferior el radio del horizonte de sucesos del agujero negro con pelo y como límite superior el borde de la teoría $r_h < r < r_b$. Se procede ahora con el cálculo del término de Gibbons-Hawking

$$S_{GH}^E = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x K \sqrt{-h}. \quad (4.55)$$

Usando la expresión para la traza de la curvatura extrínseca en r -coordenadas mostrada en (revisar apéndice C.1), se obtiene

$$S_{GH}^E = -\frac{1}{\kappa} \oint d\tau \oint d\varphi \sqrt{h^E} K = -\frac{\beta}{8G_N} \sqrt{\frac{NS}{H}} \left(\frac{N'}{N} + \frac{S'}{S} \right)_{r_b}. \quad (4.56)$$

Continuando, procederemos con el cálculo del contratermino geométrico, el cual se realiza sin muchas complicaciones. Este contratermino cumple el importante papel de regularizar la acción on-shell, es decir, eliminar divergencias [Empanan et al. (1999)]. Sea entonces el

contratermino geométrico

$$\mathcal{S}_{ct}^E = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{h^E} \left(\frac{1}{L} \right) = \frac{1}{\kappa} \oint d\tau \oint d\varphi \sqrt{h^E} \sqrt{h^E} \left(\frac{1}{L} \right) = \frac{\beta}{4G_N} \left(\frac{\sqrt{NS}}{L} \right)_{r_b}. \quad (4.57)$$

Considerando estos términos de la acción euclidiana, los cuales se comprenden como en dos clases: términos evaluados en el horizonte de sucesos del agujero negro r_h y términos evaluados en el borde de la teoría r_b . Sea entonces

$$\mathcal{S}_{bulk}^E + \mathcal{S}_{GH}^E + \mathcal{S}_{ct}^E = -\frac{\beta}{8G_N} \left(N' \sqrt{\frac{S}{NH}} \right)_{r_h} - \frac{\beta}{8G_N} \sqrt{S} \left(\frac{NS'}{\sqrt{NHS}} - \frac{2\sqrt{N}}{L} \right)_{r_b}. \quad (4.58)$$

Dada la definición para la temperatura de un agujero negro en r -coordenadas (revisar ecuación 3.2), y siguiendo la ley de área de Hawking-Bekenstein [Bekenstein (1972); Hawking (1971, 1974)] para la entropía. Se tiene que para la teoría, en r -coordenadas, la temperatura y la entropía son

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{N'}{\sqrt{NH}} \right)_{r_h}; \quad \mathcal{S} = \left(\frac{\sqrt{S}\pi}{2G} \right)_{r_h} \Rightarrow T\mathcal{S} = \frac{1}{8G_N} \left(\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{NH}} N' \right)_{r_h}. \quad (4.59)$$

Considerando unicamente estos tres términos, y no el contratermino escalar, la acción euclidiana toma la siguiente forma

$$\mathcal{S}^E = -\beta T\mathcal{S} - \frac{\beta}{8G_N} \left(\sqrt{\frac{N}{HS}} S' - \frac{2\sqrt{NS}}{L} \right)_{r_b}. \quad (4.60)$$

Ahora, considerando la métrica en r -coordenadas y su comportamiento asintótico (revisar ecuación 4.48). Se tiene que el fall-off de esta acción euclidiana es de la forma siguiente

$$\mathcal{S}^E = -\beta T\mathcal{S} - \frac{\beta}{8G_N} \left(-\mu + \frac{\sigma_1^2}{2L^2} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right). \quad (4.61)$$

Por un momento, considérese que esta es la acción euclidiana final, ignorando la contribución del contratermino escalar. Dado el desarrollo de la sección 3.2, la energía libre de Helmholtz

para la solución sería

$$F = \beta^{-1} \mathcal{S}^E = -T\mathcal{S} - \frac{1}{8G_N} \left(-\mu + \frac{\sigma_1^2}{2L^2} \right). \quad (4.62)$$

Además, dada la relación establecida en la ecuación 3.3.5 para la masa del agujero negro $\mu = 8MG_N$, la energía libre de Helmholtz toma la siguiente forma

$$F = -T\mathcal{S} + M - \frac{\sigma_1^2}{16G_N L^2}. \quad (4.63)$$

Este resultado sugiere que la energía de la teoría incluye una contribución del campo escalar, lo cual es inconsistente con el resultado obtenido mediante el formalismo de Brown-York. De este modo, el contratermino escalar permite eliminar esta contribución no deseada, resaltando su importancia en la teoría. Considérese, entonces, el comportamiento asintótico del contratermino escalar en la sección euclidiana

$$\mathcal{S}_\phi^E = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{h^E} \frac{\phi^2}{4L} = \frac{1}{\kappa} \oint d\tau \oint d\varphi \sqrt{h^E} \frac{\phi^2}{4L} = \frac{\beta}{4G_N} \left(\frac{\sigma_1^2}{4L^2} \right) + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (4.64)$$

Por tanto, considerando esta contribución del contratermino escalar, el fall-off de la acción euclidiana total es el siguiente

$$\mathcal{S}^E = \mathcal{S}_{bulk}^E + \mathcal{S}_{GH}^E + \mathcal{S}_{ct}^E + \mathcal{S}_\phi^E = -\beta T\mathcal{S} - \frac{\beta}{8G_N} [-\mu + \mathcal{O}(r^{-2})]. \quad (4.65)$$

Finalmente, se obtiene una expresión para la energía libre de Helmholtz para la teoría que es consistente con el resultado del formalismo de Brown-York

$$F = M - T\mathcal{S}. \quad (4.66)$$

4.4.5 Primera Ley de La Termodinámica

En la presente sección, se muestra el efecto del contratermino escalar en la preservación de la primera ley de la termodinámica para la teoría. Sean las siguientes expresiones en x -coordenadas para la temperatura, la entropía (revisar apéndice D.1) y la masa

$$T = \left[\frac{f(x)'}{4\pi\eta} \right]_{x_h}; \quad \mathcal{S} = \left[\frac{\sqrt{\Omega(x)}\pi}{2G_N} \right]_{x_h}; \quad M = \frac{\mu}{8G_N} = \frac{\alpha}{64\eta^2 G_N}. \quad (4.67)$$

Siguiendo estas definiciones, la temperatura para la rama negativa y la rama positiva, respectivamente, son

$$T = \frac{\alpha}{16\eta\nu\pi} \left(x_h^{\frac{1-\nu}{2}} - x_h^{\frac{1+\nu}{2}} \right); \quad T = -\frac{\alpha}{16\eta\nu\pi} \left(x_h^{\frac{1-\nu}{2}} - x_h^{\frac{1+\nu}{2}} \right). \quad (4.68)$$

La entropía para la rama negativa y la rama positiva, respectivamente, son

$$\mathcal{S} = \frac{\nu\pi x_h^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\eta G_N(1-x_h^\nu)}; \quad \mathcal{S} = \frac{\nu\pi x_h^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\eta G_N(x_h^\nu-1)}. \quad (4.69)$$

Además, considérese la masa, cuya forma es válida para ambas ramas de la teoría

$$M = \frac{\alpha}{64\eta^2 G_N}. \quad (4.70)$$

Por consiguiente, considerando las derivadas respecto a η de estas magnitudes termodinámicas

$$\frac{dM(\eta)}{d\eta} = -\frac{\alpha}{32\eta^3 G_N}, \quad (4.71)$$

tanto para la rama negativa

$$\frac{d\mathcal{S}(\eta)}{d\eta} = -\frac{\nu\pi x_h^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\eta^2 G_N(1-x_h^\nu)} \Rightarrow T \frac{d\mathcal{S}}{d\eta} = -\frac{\alpha}{32\eta^3 G_N}, \quad (4.72)$$

como para la rama positiva

$$\frac{d\mathcal{S}(\eta)}{d\eta} = -\frac{\nu\pi x_h^{\frac{\nu-1}{2}}}{2\eta^2 G_N(x_h^\nu - 1)} \Rightarrow T \frac{d\mathcal{S}}{d\eta} = -\frac{\alpha}{32\eta^3 G_N}, \quad (4.73)$$

se verifica la primera ley de la termodinámica para ambas ramas de la teoría

$$\left(\frac{dM}{d\eta} - T \frac{d\mathcal{S}}{d\eta} \right) d\eta = \left(-\frac{\alpha}{32\eta^3 G_N} + \frac{\alpha}{32\eta^3 G_N} \right) d\eta = 0. \quad (4.74)$$

Capítulo 5

RESULTADOS Y DISCUSIONES

El presente capítulo se enfoca en presentar los resultados de la tesis y la discusión emergente al respecto.

5.1 Principio Variacional y Contratermino Escalar

La verificación del principio variacional en un procedimiento formal y directo ha permitido hallar la variación del contratermino escalar buscado (revisar sección 4.4.1), que es de la siguiente forma

$$\frac{\delta \mathcal{S}_\phi}{\delta \phi} \delta \phi = \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial \mathcal{M}} d^2 x \sqrt{-h} n^\mu \partial_\mu \phi \delta \phi. \quad (5.1)$$

Sin embargo, esta no constituye la forma requerida del contratermino escalar, ya que se trata de su variación, y es necesaria su forma simple \mathcal{S}_ϕ . No obstante, considerando este resultado, se ha propuesto una forma del contratermino escalar que, al ser variada, toma la forma correspondiente (revisar sección 4.4.2). Por lo tanto, la expresión del contratermino escalar que satisface el principio variacional es la siguiente

$$\mathcal{S}_\phi = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial \mathcal{M}} d^2 x \sqrt{-h} \frac{\phi^2}{4L^2}. \quad (5.2)$$

Esta es la expresión algebraica del contratermino escalar requerida para el desarrollo teórico del presente trabajo. Nótese que depende únicamente del cuadrado del campo escalar y no de ninguna derivada de este. Convenientemente, esta sencillez del contratermino escalar facilita su aplicación teórica. El fall-off, necesario conocer para alcanzar los objetivos adicionales del proyecto, es el siguiente

$$\mathcal{S}_\phi = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \left(\frac{\sigma_1^2}{4L^2} \right) + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (5.3)$$

En esta expresión se aprecia el aporte del campo escalar proveniente del contratermino escalar σ_1 , y es de tal forma que elimina la contribución no deseada del campo escalar proveniente del back-reaction de la teoría.

5.2 Energía Gravitacional y Simetría Conforme

El formalismo de Brown-York es el método formal más adecuado para obtener la energía gravitacional de la teoría. Dado que es un tensor holográfico y, en el contexto de la dualidad *AdS/CFT* este tensor está vinculado con el tensor de energía e impulso de la teoría cuántica dual, el cual, en el contexto de la teoría *CFT* debe satisfacer la simetría conforme. Por lo tanto, validar la simetría conforme, a su vez, valida la energía gravitacional obtenida (revisar sección 4.4.3). El tensor de Brown-York, para la presente teoría, es de la siguiente forma

$$\tau_{ab} = -\frac{1}{\kappa} (K_{ab} - h_{ab}K) - \frac{h_{ab}}{\kappa L} - \frac{h_{ab}\phi^2}{4\kappa L}. \quad (5.4)$$

Nótese que la contribución del contratermino escalar está presente en el cuarto término, de manera que elimina la contribución no deseada del campo escalar. Las componentes del

tensor de Brown-York han sido calculadas, y son de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\tau_{tt} &= -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{NS'}{2S\sqrt{H}} - \frac{N}{L} \right) + \frac{N}{4\kappa} \frac{\phi^2}{L} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu}{2L} \right) + \mathcal{O}(r^{-2}), \\ \tau_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{SN'}{2\sqrt{HN}} - \frac{S}{L} \right) - \frac{S}{4\kappa} \frac{\phi^2}{L} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\mu L}{2} \right) + \mathcal{O}(r^{-2}).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Como se muestra aquí, las componentes de este tensor dependen únicamente de μ , cual esta relacionado con la masa del agujero negro con pelo, y no incluyen ninguna contribución del campo escalar. Como se ha mencionado, el tensor de Brown-York está relacionado con el valor de expectación del tensor de energía e impulso de la teoría cuántica dual

$$\langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = \tau_{ab},\tag{5.6}$$

Este tensor dual, para esta teoría, satisface la simetría conforme. Dado que esta teoría es asintóticamente *AdS* implica que en su borde se ha de validar resultados de la teoría *CFT*, cual tiene implicaciones importantes para el campo escalar. Por tanto, esta simetría es una imposición de la dualidad *AdS/CFT*, y preservarla permite asegurar que el desarrollo teórico es correcto

$$\gamma^{ab} \langle \tau_{ab}^{dual} \rangle = 0.\tag{5.7}$$

La validación de esta simetría asegura que la energía gravitacional obtenida mediante este formalismo es la correcta para la teoría

$$E = \oint_{\Sigma} dx \sqrt{\sigma} u^a \tau_{ab} \xi^b = \frac{\mu}{8G_N}.\tag{5.8}$$

Como se mencionó en (revisar sección 3.3.5), $\mu = 8MG_N$ es un parámetro auxiliar que permite reescribir y simplificar la masa del agujero negro con pelo, así como su contribución en la solución. Además, dada la condición para la existencia del horizonte de sucesos, se

tiene que

$$N(r_h) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{r_h^2}{L^2}. \quad (5.9)$$

Por consiguiente, se obtiene que la energía de la teoría está dada por la siguiente expresión

$$E = \frac{\mu}{8G_N} = \frac{r_h^2}{L^2} = M = \frac{\alpha}{64G_N\eta^2}. \quad (5.10)$$

Finalmente, esta constituye una imposición sobre la energía gravitacional obtenida mediante otros métodos, como el formalismo de la acción euclidiana.

5.3 Termodinámica

El cálculo de la acción euclidiana requiere conocer la acción completa de la teoría. En este proyecto, la acción presentada, junto con el contratermino escalar propuesto, verifica el principio variacional y la simetría conforme. Por lo tanto, esta acción es completa, y se está entonces en posición de calcular las magnitudes termodinámicas correctas y validar la primera ley de la termodinámica. La acción completa es la siguiente

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-g} \left[R - \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi) \right] + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x K \sqrt{-h} + \mathcal{S}_{ct} + \mathcal{S}_{\phi}. \quad (5.11)$$

El calculo de la acción euclidiana, como se ha mostrado en la sección 4.4.4, es entonces

$$\mathcal{S}^E = \mathcal{S}_{bulk}^E + \mathcal{S}_{GH}^E + \mathcal{S}_{ct}^E + \mathcal{S}_{\phi}^E = -\beta T \mathcal{S} - \frac{\beta}{8G_N} [-\mu + \mathcal{O}(r^{-2})], \quad (5.12)$$

a partir de la cual se obtiene la energía libre de Helmholtz

$$F = \beta^{-1} \mathcal{S}^E \Rightarrow F = M - T \mathcal{S}. \quad (5.13)$$

Esta energía libre hallada es consistente con el formalismo de Bronw-York, puesto que la masa obtenida mediante ambos formalismos es la misma. Adicionalmente, este resultado

es consistente con la termodinámica de agujeros negros, puesto que la entropía satisface la ley de área y la temperatura es proporcional a la derivada de la función métrica, siendo que estas magnitudes se identifican de las componentes evaluadas en el radio de horizonte de sucesos de la acción euclidiana. Entonces, se está en posición de verificar la primera ley de la termodinámica. Entonces, estas magnitudes termodinámicas en el sistema de x -coordenadas son

$$T(\eta) = \left[\frac{f(x)'}{4\pi\eta} \right]_{x_h} ; \quad \mathcal{S}(\eta) = \left[\frac{\sqrt{\Omega(x, \eta)\pi}}{2G_N} \right]_{x_h} ; \quad M(\eta) = \frac{\alpha}{64\eta^2 G_N}. \quad (5.14)$$

En este punto, para la verificación de la primera ley de la termodinámica, se podría considerar la diferenciación de las presentes magnitudes termodinámicas con respecto a x_h . Sin embargo, esto conlleva un error, dado que x es una coordenada abstracta, es decir, que no tiene significado físico. Por consiguiente, el parámetro respecto al cual se debe realizar la diferenciación es η , puesto que este sí tiene significado físico al estar vinculada con la masa del agujero negro con pelo. Entonces, dada esta consideración, se verifica la primera ley de la termodinámica (revisar sección 4.4.5)

$$\left(\frac{dM}{d\eta} - T \frac{d\mathcal{S}}{d\eta} \right) d\eta = 0. \quad (5.15)$$

Estos resultados obtenidos, muestran la importancia del contratermino escalar para el desarrollo teórico de un agujero negro con pelo. Por consiguiente, la contribución principal del presente trabajo ha sido demostrar que es posible acoplar un campo escalar a un agujero negro con pelo en $2 + 1$ -dimensiones, asintóticamente AdS , sin violar los principios físicos implicados de la teoría de gravitación.

Capítulo 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusión general: En este trabajo se ha demostrado que, al exigir la preservación del principio variacional de la teoría, lo cual requiere la eliminación del término de borde remanente mediante la proposición de un contratermino, se ha obtenido la expresión algebraica del contratermino escalar. Mediante el formalismo de Brown-York y el formalismo de la acción euclidiana, se han validado tanto la simetría conforme como la primera ley de la termodinámica, logrando así una descripción teórica completa y coherente.

Conclusión específica 1°: En la presente tesis, se ha mostrado la solución exacta de un agujero negro con pelo en $2 + 1$ dimensiones, asintóticamente AdS , la cual evade el teorema de no-pelo. Sin embargo, para llevar a cabo un desarrollo teórico completo y satisfactorio, es necesario un contratermino escalar. En la presente tesis se ha obtenido la siguiente expresión algebraica del contratermino escalar

$$S_\phi = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h} \frac{\phi^2}{4L^2}, \quad (6.1)$$

mediante el formalismo del principio variacional. Cual es el correcto, puesto que ha permitido verificar el principio variacional $\delta\mathcal{S} = 0$.

Conclusión específica 2°: Hallada la expresión del contratermino escalar, se ha

obtenido la acción completa, lo que ha permitido calcular el tensor de energía e impulso holográfico de Brown-York. A partir de este tensor, se ha calculado la energía gravitacional, y, al estar relacionado con el valor de expectación del tensor de energía e impulso de la teoría dual, se ha validado esta energía obtenida mediante la verificación de la simetría conforme, la cual es una imposición de la dualidad AdS/CFT . Así, se ha impuesto este resultado para la energía obtenida mediante el formalismo de la acción euclidiana.

Conclusión específica 3°: Finalmente, conocida la acción completa, se han calculado las magnitudes termodinámicas mediante el formalismo de la acción euclidiana, cuyos resultados son teóricamente consistentes con el formalismo de Brown-York. Así, considerando el parámetro η , el cual tiene sentido físico al estar relacionado con la masa, se ha verificado la primera ley de la termodinámica para el agujero negro con pelo. De esta manera, se ha demostrado que es posible el desarrollo teórico de forma completa y satisfactoria un agujero negro con pelo en $2 + 1$ -dimensiones.

Recomendación: Es recomendable considerar que este contratermino escalar hallado en el presente trabajo podría no ser aplicable a otros tipos de agujeros negros, como aquellos con rotación o carga eléctrica. Por otro lado, es importante contar con un conocimiento considerable en el manejo de software de álgebra simbólica, como Maplesoft, que facilita enormemente los cálculos matemáticos tanto en este trabajo como en investigaciones en el área de la física teórica. Adicionalmente, se sugiere utilizar el libro [Poisson (2004)] como manual de referencia para las herramientas matemáticas necesarias en el desarrollo teórico de investigaciones en relatividad general.

APÉNDICE A

A.1 Convenio de Suma de Einstein

Las operaciones con tensores, incluso las más sencillas, pueden conllevar a rigurosos procedimientos si no se utiliza la notación adecuada. Por tanto, en el presente trabajo haremos uso de los siguientes convenios de notación [Wald (2010); Janssen (2013); Landau and Lifshitz (1973); Poisson (2004)]:

- Se utiliza el convenio de notación de índices abstractos. De acuerdo con este, solo es de interés las componentes de los tensores. Se denominan tensores de componentes contravariantes $(k, 0)$, a los cuales se les asignan índices superiores T^{a_1, \dots, a_k} . Por otro lado, se denominan tensores de componentes covariantes $(0, l)$, a los cuales se les asignan índices inferiores T_{b_1, \dots, b_l} . Asimismo, los tensores de tipo (k, l) se denotan con índices superiores e inferiores $T_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k}$.
- Se emplea el convenio de suma de Einstein, el cual indica que es posible contraer los índices de los tensores cuando estos sean repetidos, y representa una sumatoria

$$A_i B^i = \sum_i A_i B^i. \quad (\text{A.1})$$

A.2 Tensores Covariantes, Contravariantes y La Métrica

Se refiere a los vectores que pertenecen al espacio tangente V_p como covariantes y a los vectores duales que pertenecen al espacio cotangente o espacio dual V_p^* como contravariantes. Por consiguiente, es posible descomponer un vector \vec{v} en los vectores base \hat{e}_i del

espacio vectorial tangente V_p . Sea un vector 3-dimensional

$$\vec{v} = v^1 \hat{e}_1 + v^2 \hat{e}_2 + v^3 \hat{e}_3 = v^i \hat{e}_i. \quad (\text{A.2})$$

Realizando una proyección de este vector, es posible hallar las componentes covariantes del mismo

$$v_j = \vec{v} \cdot \hat{e}_j = v^i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j. \quad (\text{A.3})$$

Como se puede observar, es posible ir de un espacio covariante a un espacio contravariante y viceversa; en general, se pueden subir y bajar los índices de los tensores. El objeto matemático con la capacidad de realizar esta tarea es el tensor métrico, o simplemente la métrica, el cual se define de la siguiente manera

$$g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j; \quad \hat{e}_i, \hat{e}_j \in V_p. \quad (\text{A.4})$$

$$g^{ij} = \hat{e}^i \cdot \hat{e}^j; \quad \hat{e}^i, \hat{e}^j \in V_p^*. \quad (\text{A.5})$$

Más precisamente, el efecto de la métrica en un tensor covariante y en un tensor contravariante es como sigue

$$v_j = v^i g_{ij}, \quad (\text{A.6})$$

$$v^j = v_i g^{ij}. \quad (\text{A.7})$$

Otro rol importante de la métrica es que permite definir el producto interno entre tensores

$$A^i B_i = A^i B^j g_{ij}. \quad (\text{A.8})$$

Por tanto, la norma de un vector se define de la siguiente manera

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^i \hat{e}_i \cdot v^j \hat{e}_j = v^i v^j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = v^i v^j g_{ij}. \quad (\text{A.9})$$

APÉNDICE B

B.1 Constante Cosmológica

Dado que Einstein consideraba un universo estático, era necesario añadir una constante cosmológica a sus ecuaciones de campo gravitatorio, una que contrarrestara la atracción gravitatoria. Sin embargo, con las observaciones de Hubble, se sabe que el universo está en un estado de expansión acelerada. Por consiguiente, en la cosmología moderna se considera una constante cosmológica negativa que representa la expansión acelerada del universo [Weinberg (2008)].

B.1.1 Curvatura Negativa

Un ejemplo de un espacio-tiempo con curvatura positiva está representado por la siguiente métrica [Natsuume (2014)]

$$ds^2 = -dt^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{B.1})$$

La parte espacial de esta métrica corresponde a la esfera S^2 con un grupo de simetría $SO(3)$. En consecuencia, el espacio-tiempo en su totalidad tiene la geometría $\mathbb{R} \times S^2$ con un grupo de simetría $SO(1, 3)$. La curvatura escalar de este espacio-tiempo es la siguiente

$$R = \frac{2}{\rho^2}. \quad (\text{B.2})$$

De manera alternativa, se puede describir un espacio-tiempo con curvatura negativa mediante la siguiente métrica

$$ds^2 = -dt^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{B.3})$$

La parte espacial de esta métrica corresponde a la de un espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 , con grupo de simetría $SO(1, 2)$. Por tanto, la geometría total de este espacio-tiempo es $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, con grupo de simetría $SO(2, 2)$. La curvatura escalar de este espacio-tiempo es como se muestra a continuación

$$R = -\frac{2}{\rho^2}. \quad (\text{B.4})$$

Un espacio-tiempo Anti-de Sitter o AdS está caracterizado por tener curvatura escalar negativa. Además, cuenta con dos coordenadas tipo tiempo y una coordenada espacial, que satisfacen la siguiente ecuación

$$-Z^2 - X^2 + Y^2 = -L^2, \quad (\text{B.5})$$

donde L es el radio del espacio AdS . La métrica de este espacio-tiempo es la siguiente

$$ds^2 = -dZ^2 - dX^2 + dY^2. \quad (\text{B.6})$$

El espacio-tiempo AdS_2 tiene el grupo de simetría $SO(2, 1)$. El conjunto de coordenadas que satisfacen la ecuación B.5 es

$$X = L \cosh \rho \cos t; \quad Y = L \cosh \rho \sin t; \quad Z = L \sinh \rho. \quad (\text{B.7})$$

Teniendo en cuenta esta transformación de coordenadas, la métrica adopta de la siguiente forma

$$ds^2 = L^2(-\cosh \rho dt^2 + d\rho^2). \quad (\text{B.8})$$

La curvatura escalar de este espacio-tiempo es la siguiente

$$R = -\frac{2}{L^2}.$$

B.1.2 Espacio-Tiempo con Curvatura Constante en $n + 1$ -Dimensiones

La acción de Einstein-Hilbert, sin considerar la contribución de la energía, más el término de Gibbons–Hawking en $n + 1$ -dimensiones es

$$\mathcal{S}_{bulk} + \mathcal{S}_{GH} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^{n+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^n x \sqrt{-h} K. \quad (\text{B.9})$$

Entonces, las ecuaciones de campo de Einstein, para el vacío, son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.10})$$

donde Λ es la constante cosmológica y su expresión en $n + 1$ -dimensiones es $\Lambda = -\frac{n(n-1)}{2L^2}$.

Por lo tanto, las ecuaciones de campo de Einstein toman la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{n(n-1)}{2L^2}g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Tomando la traza de estos tensores, se obtiene la siguiente expresión

$$g^{\mu\nu} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{n(n-1)}{2L^2}g_{\mu\nu} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad R - \frac{1}{2}(n+1)R - \frac{n(n-1)}{2L^2}(n+1) = 0. \quad (\text{B.12})$$

A partir de la cual, se obtiene la siguiente forma para la curvatura escalar

$$R = -\frac{n(n+1)}{L^2}. \quad (\text{B.13})$$

Por consiguiente, las ecuaciones de Campo de Einstein en $n + 1$ -dimensiones, en un espacio-tiempo curvo considerando una constante cosmológica, y en el vacío, toman la siguiente forma

$$R_{\mu\nu} + \frac{n}{L^2}g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.14})$$

APÉNDICE C

C.1 Tensor de Curvatura Extrínseca

Dada la siguiente definición para el tensor de curvatura extrínseca [Poisson (2004)]

$$K_{ab} = \frac{1}{2}(\mathfrak{L}_n g_{\mu\nu})e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (\text{C.1})$$

donde \mathfrak{L}_n es la derivada de Lie en la dirección del vector n . Utilizando esta definición del tensor de curvatura extrínseca y conociendo el vector normal a la hiper-superficie tipo-tiempo Σ , definida a $r = \text{constante}$, es posible hallar la expresión del tensor de curvatura extrínseca y su traza para ambos sistemas de coordenadas de interés.

C.1.1 Tensor De Curvatura Extrínseca en Coordenadas x

La métrica del espacio-tiempo en x -coordenadas para la teoría es la siguiente

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\varphi^2 \right]. \quad (\text{C.2})$$

La hiper-superficie tipo-tiempo Σ se define a $x = \text{constante}$. Por tanto, el vector normal a esta hiper-superficie es el siguiente

$$n_a = \sqrt{g_{xx}}\delta_a^x \quad \Rightarrow \quad n_x = \eta \sqrt{\frac{\Omega(x)}{f(x)}}. \quad (\text{C.3})$$

Ademas, la métrica inducida a la hiper-superficie Σ es la siguiente

$$h_{ab}dx^a dx^b = \Omega(x) \left[-f(x)dt^2 + d\varphi^2 \right]. \quad (\text{C.4})$$

Dadas estas expresiones para la métrica inducida y el vector normal, la expresión para el tensor de curvatura extrínseca es la siguiente

$$K_{ab} = \frac{\sqrt{g^{xx}}}{2} \partial_x h_{ab}.$$

Finalmente, la traza del tensor de curvatura extrínseca es como se muestra a continuación

$$K = h^{ab} K_{ab} = h^{ab} \frac{\sqrt{g^{xx}}}{2} \partial_x h_{ab} \Rightarrow K = \frac{(\Omega f)' + \Omega' f}{2\eta(\Omega^3 f)^{1/2}}. \quad (\text{C.5})$$

C.1.2 Tensor de Curvatura Extrínseca En Coordenadas r

La métrica del espacio-tiempo en r -coordenadas para la teoría es la siguiente

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N(r) dt^2 + H(r) dr^2 + S(r) d\varphi^2. \quad (\text{C.6})$$

La hiper-superficie tipo-tiempo Σ se define a $r = \text{constante}$. Por tanto, el vector normal a esta hiper-superficie es el siguiente

$$n_a = \sqrt{g_{rr}} \delta_a^r \Rightarrow n_r = \sqrt{H(r)}. \quad (\text{C.7})$$

Ademas, la métrica inducida a la hiper-superficie Σ es la siguiente

$$h_{ab} dx^a dx^b = -N(r) dt^2 + S(r) d\varphi. \quad (\text{C.8})$$

Dadas estas expresiones para la métrica inducida y el vector normal, la expresión para el tensor de curvatura extrínseca es la siguiente

$$K_{ab} = \frac{\sqrt{g^{rr}}}{2} \partial_r h_{ab}. \quad (\text{C.9})$$

Finalmente, la traza del tensor de curvatura extrínseca es como se muestra a continuación

$$K = h^{ab}K_{ab} = h^{ab}\frac{\sqrt{g^{rr}}}{2}\partial_r h_{ab} \Rightarrow K = \frac{1}{2\sqrt{H}}\left[\frac{N'}{N} + \frac{S'}{S}\right]. \quad (\text{C.10})$$

C.2 Tensor de Brown-York

Para la demostración de la expresión del tensor de Brown-York, primero se debe considerar la siguiente expresión para la métrica

$$ds^2 = d\eta^2 + g_{ij}dx^i dx^j \Rightarrow \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} = \sqrt{\det(g_{ij})}. \quad (\text{C.11})$$

Con el objetivo de simplificar el cálculo matemático, se considerara únicamente el término del bulk y el término de Gibbons-Hawking para la acción. Dado que se evalúa el escalar de Ricci en la hiper-superficie Σ [Poisson (2004)], esto permite reescribir la acción de la siguiente manera

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \mathcal{S}_{bulk} + \mathcal{S}_{GH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^2x d\eta \sqrt{-g} (R^{(2)} + K^2 - K_{ij}K^{ij} - 2\Lambda), \quad (\text{C.12})$$

donde $R^{(2)}$ es el escalar de Ricci asociado a la métrica g_{ij} . Entonces, la variación respecto a esta métrica es

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^2x d\eta \{ \sqrt{-g} [\delta R^{(2)} + 2K_{kl}g^{kl}K^{ij}\delta g_{ij} + 2(Kg^{ij} - K^{ij})\delta K_{ij}] \\ + (R^{(2)} + K^2 - K_{ij}K^{ij} - 2\Lambda)\delta\sqrt{-g} \}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

La expresión del tensor de curvatura extrínseca para la métrica estudiada es la siguiente

$$k_{ij} = \frac{1}{2}\partial_\eta g_{ij}. \quad (\text{C.14})$$

Por tanto, el tercer término de la expresión C.13 es un término de diferenciación en g_{ij} . Este término toma la siguiente expresión que permite avanzar en el desarrollo matemático

$$\delta K_{ij} = \delta \left(\frac{1}{2} \partial_\eta g_{ij} \right) = \frac{1}{2} \partial_\eta (\delta g_{ij}). \quad (\text{C.15})$$

Adicionalmente, utilizamos la siguiente relación para reescribir la variación de la acción estudiada

$$(K g^{ij} - K^{ij}) \partial_\eta (\delta g_{ij}) = \partial_\eta [(K g^{ij} - K^{ij}) \delta g_{ij}] - \delta g_{ij} \partial_\eta (K g^{ij} - K^{ij}). \quad (\text{C.16})$$

Aplicada esta relación en la acción estudiada, el término de mayor importancia para fines de la investigación es el siguiente

$$\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^2x d\eta \partial_\eta [(K g^{ij} - K^{ij}) \delta g_{ij}]. \quad (\text{C.17})$$

Este se convierte en un término de borde al aplicar el teorema de la divergencia. Por consiguiente, la variación de la acción se divide en un término de bulk y un término de borde

$$\delta \mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^2x d\eta \sqrt{g} E^{ij} \delta g_{ij} + \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^2x (K g^{ij} - K^{ij}) \delta g_{ij}, \quad (\text{C.18})$$

donde el tensor E^{ij} representa la contribución del bulk en la variación de la acción estudiada. Este término se anula puesto que la teoría satisface las ecuaciones de campo de Einstein. Por tanto, como remanente, se tiene un tensor de borde, que es el tensor de Brown-York

$$\delta \mathcal{S} = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\partial \mathcal{M}} d^2x \sqrt{g} (K^{ij} - g^{ij} K) \delta g_{ij}. \quad (\text{C.19})$$

Finalmente, considerando la acción total para la teoría (revisar ecuación 3.84), y siguiendo la definición del tensor de Brown-York, este, para la teoría, toma la siguiente forma

$$\tau_{ab} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I}{\delta h^{ab}} = -\frac{1}{\kappa} (K_{ab} - h_{ab} K) - \frac{h_{ab}}{\kappa L} - \frac{h_{ab} \phi^2}{4\kappa L}. \quad (\text{C.20})$$

APÉNDICE D

D.1 Magnitudes Termodinámicas en x -Coordenadas

Se ha definido la temperatura para un agujero negro en el sistema de r -coordenadas (revisar sección 3.2). Sin embargo, también es necesario conocer la expresión de esta misma en el sistema de coordenadas x . Sea la métrica en r -coordenadas dada por

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + H(r)dr^2 + S(r)d\Omega^2. \quad (\text{D.1})$$

En el cual la temperatura está definida de la siguiente manera

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{N'(r)}{\sqrt{N(r)H(r)}} \right]_{r_h}. \quad (\text{D.2})$$

Considerando las ecuaciones de relación entre ambos sistemas coordenados estudiadas en (revisar sección 3.3.7), la temperatura en el sistema de x -coordenadas toma la siguiente forma

$$T = \frac{1}{4\pi\eta\Omega(x)} \left[\Omega(x) \frac{df(x)}{dx} + \frac{d\Omega(x)}{dx} f(x) \right]_{x_h}. \quad (\text{D.3})$$

Considerando el hecho de que la métrica evaluada en el borde es nula $f(x_h) = 0$, la expresión para la temperatura en x -coordenadas es la siguiente

$$T = \frac{1}{4\pi\eta} \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x_h}, \quad (\text{D.4})$$

se procede ahora con el análisis para la entropía. Sea la definición para esta siguiendo el teorema de área de Hawking-Bekenstein [Bekenstein (1972); Hawking (1971, 1974)]. Por

consiguiente, la entropía para la teoría en r -coordenadas es la siguiente

$$\mathcal{S} = \frac{\pi \sqrt{S(r_h)}}{2G_N}. \quad (\text{D.5})$$

Una vez más, utilizando las ecuaciones de relación entre ambos sistemas coordenados estudiadas en (revisar sección 3.3.7), la expresión de la entropía en x -coordenadas es la siguiente

$$\mathcal{S} = \frac{\pi \sqrt{\Omega(x_h)}}{2G_N}. \quad (\text{D.6})$$

BIBLIOGRAFÍA

- Abbott, B. P., e. a. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102.
- Anabalón, A. and Astefanesei, D. (2013). On attractor mechanism of AdS_4 black holes. *Phys. Lett. B*, 727:568–572.
- Anabalón, A., Astefanesei, D., Choque, D., and Martínez, C. (2016). Trace Anomaly and Counterterms in Designer Gravity. *JHEP*, 03:117.
- Astefanesei, D., Mann, R. B., Rodríguez, M. J., and Stelea, C. (2010). Quasilocal formalism and thermodynamics of asymptotically flat black objects. *Class. Quant. Grav.*, 27:165004.
- Banados, M., Teitelboim, C., and Zanelli, J. (1992). The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1849–1851.
- Bardeen, J. M., Carter, B., and Hawking, S. W. (1973). The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170.
- Bekenstein, J. D. (1972). Black holes and the second law. *Lett. Nuovo Cim.*, 4:737–740.
- Bekenstein, J. D. (1973). Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346.
- Breitenlohner, P. and Freedman, D. Z. (1982). Positive Energy in anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity. *Phys. Lett. B*, 115:197–201.
- Brown, J. D. and Henneaux, M. (1986). Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity. *Commun. Math. Phys.*, 104:207–226.

- Brown, J. D. and York, Jr., J. W. (1993). Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev. D*, 47:1407–1419.
- Bunge, M. (2013). *Foundations of physics*, volume 10. Springer Science & Business Media.
- Cheng, A. H.-D. and Cheng, D. T. (2005). Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3):268–302.
- Collaboration, E. H. T. et al. (2019). First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11241*.
- Correa, F., Martinez, C., and Troncoso, R. (2011). Scalar solitons and the microscopic entropy of hairy black holes in three dimensions. *JHEP*, 01:034.
- Desa, C., Ccuairo, W., and Choque, D. (2022). Exact hairy black holes asymptotically AdS_{2+1} .
- Emparan, R., Johnson, C. V., and Myers, R. C. (1999). Surface terms as counterterms in the AdS / CFT correspondence. *Phys. Rev. D*, 60:104001.
- Friedan, D., Martinec, E., and Shenker, S. (1986). Conformal invariance, supersymmetry and string theory. *Nuclear Physics B*, 271(1):93–165.
- Hack, T.-P. (2010). On the Backreaction of Scalar and Spinor Quantum Fields in Curved Spacetimes. Other thesis.
- Hawking, S. W. (1971). Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 26:1344–1346.
- Hawking, S. W. (1974). Black hole explosions. *Nature*, 248:30–31.
- Hawking, S. W. (1975). Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)].

- Hawking, S. W. (1976). Black Holes and Thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 13:191–197.
- Henneaux, M., Martinez, C., Troncoso, R., and Zanelli, J. (2002). Black holes and asymptotics of 2+1 gravity coupled to a scalar field. *Phys. Rev. D*, 65:104007.
- Henneaux, M., Martinez, C., Troncoso, R., and Zanelli, J. (2007). Asymptotic behavior and Hamiltonian analysis of anti-de Sitter gravity coupled to scalar fields. *Annals Phys.*, 322:824–848.
- Hertog, T. (2006). Towards a Novel no-hair Theorem for Black Holes. *Phys. Rev. D*, 74:084008.
- Heusler, M. (1992). A No hair theorem for selfgravitating nonlinear sigma models. *J. Math. Phys.*, 33:3497–3502.
- Hong, S.-T. (2004). $SO(3,2) / Sp(2)$ symmetries in BTZ black holes. *Phys. Lett. B*, 578(1-2):187–194. [Erratum: *Phys.Lett.B* 638, 554 (2006)].
- Janssen, B. (2013). Teoría de la relatividad general. *Granada: Universidad de Granada*.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1973). *Teoría clásica de los campos*, volume 2. Reverté.
- Laserna, D. B. (2012). *Einstein. La teoría de la relatividad. El espacio es una cuestión de tiempo*. Grandes Ideas de la Ciencia. RBA.
- Maldacena, J. M. (1998). The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Macmillan.
- Myers, R. C. (1999). Stress tensors and Casimir energies in the AdS / CFT correspondence. *Phys. Rev. D*, 60:046002.
- Natsuume, M. (2014). Ads/cft duality user guide. *arXiv preprint arXiv:1409.3575*, 8(9):20.

- Newton, I. (1987). *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (mathematical principles of natural philosophy). *London (1687)*, 1687:1687.
- Nunez, D., Quevedo, H., and Sudarsky, D. (1996). Black holes have no short hair. *Phys. Rev. Lett.*, 76:571–574.
- Poisson, E. (2004). *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press.
- Quispe, D. C. (2019). Agujeros negros con pelo y dualidad ads/cft. *arXiv preprint arXiv:1906.02891*.
- Schlingemann, D. (1999). From Euclidean field theory to quantum field theory. *Rev. Math. Phys.*, 11:1151–1178.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196.
- Sudarsky, D. and Gonzalez, J. A. (2003). On black hole scalar hair in asymptotically anti-de Sitter space-times. *Phys. Rev. D*, 67:024038.
- ’t Hooft, G. (2001). The Holographic principle: Opening lecture. *Subnucl. Ser.*, 37:72–100.
- Wald, R. M. (2010). *General relativity*. University of Chicago press.
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. OUP Oxford.
- York, Jr., J. W. (1986). Black hole thermodynamics and the Euclidean Einstein action. *Phys. Rev. D*, 33:2092–2099.
- Zee, A. (2010). *Quantum field theory in a nutshell*, volume 7. Princeton university press.