

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL



TESIS

**ANÁLISIS DINÁMICO DE ARMADURAS UTILIZANDO UNA
TÉCNICA AVANZADA DE SUPERPOSICIÓN MODAL**

PRESENTADO POR:

Br. CARLOS ANDRES AGUILAR MARON

**PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO CIVIL**

ASESOR:

Dr. Ing. ADAN WILBERT SOLORZANO
MONTESINOS

CUSCO - PERÚ

2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, Asesor del trabajo de investigación/tesis titulada: ANÁLISIS
DINÁMICO DE ARMADURAS UTILIZANDO UNA
TÉCNICA AVANZADA DE SUPERPOSICIÓN MODAL

presentado por: CARLOS ANDRES AGUILAR MARON con DNI Nro.: 00392050 presentado por: con DNI Nro.: para optar el título profesional/grado académico de INGENIERO CIVIL

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 1 veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 2%.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto la primera página del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 23 de diciembre de 2024



Firma

Post firma Adan Wilbert Salazarza Montesinos

Nro. de DNI 23857089

ORCID del Asesor 0000-0001-7072-618X

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: old: 27259:418356526

CARLOS ANDRÉS AGUILAR MARÓN

ANÁLISIS DINÁMICO DE ARMADURAS UTILIZANDO UNA TÉCNICA AVANZADA DE SUPERPOSICIÓN MODAL

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:418356526

Fecha de entrega

22 dic 2024, 7:20 p.m. GMT-6

Fecha de descarga

22 dic 2024, 7:31 p.m. GMT-6

Nombre de archivo

tesis Carlos Aguilar.pdf

Tamaño de archivo

1.1 MB

70 Páginas

18,090 Palabras

90,306 Caracteres

2% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- ▶ Bibliografía
- ▶ Texto citado
- ▶ Coincidencias menores (menos de 15 palabras)

Fuentes principales

- 2%  Fuentes de Internet
- 0%  Publicaciones
- 1%  Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

-  **Caracteres reemplazados**
127 caracteres sospechosos en N.º de páginas
Las letras son intercambiadas por caracteres similares de otro alfabeto.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

*Dedico el presente trabajo a la memoria
de mis padres: Carlos Aguilar y
Alejandrina Marón.*

Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Ing. Adán Wilbert Solórzano Montesinos por el apoyo incondicional, los consejos impartidos, la amistad y la confianza que me brindó. Muchas gracias.

A los docentes del Departamento de Ingeniería Civil de la UNSAAC por todo el conocimiento compartido durante mis años de estudio, fue muy importante para mi formación académica y profesional.

A los miembros del jurado, por las diversas sugerencias hechas a la redacción final de la tesis.

A mi familia, por el apoyo incondicional en todos esos años, especialmente a mis hermanos Ivan Aguilar y Amilcar Aguilar.

Finalmente, dedico este trabajo a la memoria de mis padres: Carlos y Alejandrina.

Resumen

Las formulaciones matemáticas en ingeniería estructural permiten modelar problemas físicos de la vida real, tradicionalmente resueltos mediante diversos métodos numéricos basados en *principios de equilibrio*. El presente trabajo implementa una metodología innovadora que combina el *Método Híbrido de Elementos Finitos* con la *Técnica Avanzada de Superposición Modal*. La formulación propuesta, desarrollada en el *dominio de la frecuencia* ω , conduce a una *matriz de rigidez efectiva* expresada como una serie de potencias de frecuencias que incorpora *matrices generalizadas* de rigidez, amortiguamiento y masa. La solución del problema de *autovalor no lineal* asociado permite obtener una solución *modal avanzada*. Esta investigación se centra en el análisis de la respuesta dinámica de estructuras compuestas por barras. Se desarrolla un estudio exhaustivo de los fundamentos teóricos necesarios para la formulación del método, aplicándolo específicamente a elementos estructurales unidimensionales (barras y vigas). La implementación principal se realiza mediante un código computacional desarrollado en el sistema MAPLE 15, complementado con una rutina en el lenguaje FORTRAN 90 para la resolución del problema de autovalor. La validación del modelo se efectúa mediante comparación con resultados documentados en la literatura especializada. Posteriormente, se exploran capacidades avanzadas del método, analizando términos de potencias de ω de alto orden, aspecto no abordable mediante metodologías clásicas. Los resultados del análisis dinámico evidencian limitaciones en la convergencia al utilizar discretizaciones convencionales de armaduras, demostrando la necesidad de implementar una discretización más refinada para garantizar la convergencia de la solución.

Palabras clave: métodos numéricos, armadura, dinámica, elementos finitos híbridos, análisis dinámico.

Abstract

Mathematical formulations in structural engineering enable the modeling of real-life physical problems, traditionally solved through various numerical methods based on *equilibrium principles*. This work implements an innovative methodology that combines the *Hybrid Finite Element Method* with the *Advanced Modal Superposition Technique*. The proposed formulation, developed in the *frequency domain* ω , leads to an *effective stiffness matrix* expressed as a frequency power series that incorporates *generalized matrices* of stiffness, damping, and mass. The solution of the associated *nonlinear eigenvalue* problem enables obtaining an *advanced modal* solution. This research focuses on analyzing the dynamic response of structures composed of bars. An exhaustive study of the theoretical foundations necessary for the method's formulation is developed, applying it specifically to one-dimensional structural elements (bars and beams). The main implementation is carried out through computational code developed in the MAPLE 15 system, complemented with a routine in FORTRAN 90 language for solving the eigenvalue problem. The model validation is performed through comparison with results documented in specialized literature. Subsequently, advanced capabilities of the method are explored, analyzing high-order power terms of ω , an aspect not addressable through classical methodologies. The results of the dynamic analysis reveal convergence limitations when using conventional truss discretizations, demonstrating the need to implement more refined discretization to ensure solution convergence.

Keywords: numerical methods, truss, dynamics, hybrid finite elements, dynamic analysis.

Índice general

Índice de tablas	IX
Índice de figuras	X
Capítulo 1 Aspectos Generales de la Tesis	1
1.1 Introducción	1
1.2 Organización de la Tesis	2
1.3 Planteamiento del problema	3
1.4 Formulación del problema	4
1.4.1 Problema General	4
1.4.2 Problema Específico	5
1.5 Justificación	5
1.6 Objetivos de la investigación	6
1.6.1 Objetivo general	6
1.6.2 Objetivos específicos	6
1.7 Metodología	7
Capítulo 2 Marco Teórico.	9
2.1 Antecedentes de la investigación	9

2.2 Bases Teóricas	11
2.2.1 Conceptos básicos de elasticidad lineal	11
2.2.2 Método Híbrido de Elementos Finitos dinámicos	14
2.2.2.1 Formulación en el dominio del tiempo	14
2.2.2.2 Formulación en el dominio de la frecuencia	16
2.2.2.3 Soluciones fundamentales	17
2.2.2.4 Formulación matricial de la ecuación de equilibrio	18
2.2.3 Técnica de Superposición Modal Avanzada	21
2.2.3.1 Método clásico de superposición modal	21
2.2.3.2 Expansión de las matrices en series	23
2.2.3.3 Problema en el dominio del tiempo	26
2.2.3.4 Problema de autovalor no lineal	27
2.2.3.5 Proceso de superposición modal	29
Capítulo 3 Aplicaciones en Elementos Unidimensionales	31
3.1 Barra	31
3.1.1 Ecuación de gobierno	32
3.1.2 Formulación en el dominio de la frecuencia	32
3.1.3 Montaje de la matriz de rigidez efectiva	33
3.2 Viga de Bernoulli	36
3.2.1 Ecuación de gobierno	37
3.2.2 Formulación en el dominio de la frecuencia	37
3.2.3 Matriz de rigidez efectiva con 4 grados de libertad	38

3.2.4 Matriz de rigidez efectiva con 6 grados de libertad	41
3.3 Matriz de Rigidez efectiva para armadura	42
Capítulo 4 Análisis de Resultados y Discusión	45
4.1 Armadura plana	46
Capítulo 5 Conclusiones	57
Bibliografía	58

Índice de tablas

4.1	Pares de tiempo-fuerza que caracterizan la carga dinámica aplicada.	46
4.2	Longitud y área de la sección transversal de cada barras.	47
4.3	Frecuencias naturales de los grados de libertad 1, 3 y 4.	48
4.4	Comparación de los modos de vibración (autovalores).	49
4.5	Geometría de la sección transversal de las barras.	51
4.6	Frecuencias naturales de vibración, donde m es matriz de masa.	52
4.7	Frecuencias naturales de vibración, donde m es la matriz de masa.	54

Índice de figuras

1.1	Tipos de investigación.	7
2.1	Cuerpo elástico lineal en equilibrio sujeto a acciones externas.	12
3.1	Barra unidimensional.	31
3.2	Dominio y condiciones de contorno de la barra.	33
3.3	Coordenadas externas e internas de la barra.	33
3.4	Viga de Bernoulli.	36
3.5	Grados de libertad y convención de signos de las fuerzas internas.	39
3.6	Grados de libertad en coordenadas locales de la viga.	42
3.7	Sistema de coordenadas locales con cuatro grados de libertad.	42
3.8	Grados de libertad e el sistema de coordenadas globales.	43
4.1	Armadura sometida a carga dinámica $P(t)$	46
4.2	Númeración de nudos, barras y grados de libertad de la armadura.	47
4.3	Modos de vibración representados gráficamente.	49
4.4	Desplazamientos con una matriz de masa. Grados de libertad 3 y 4.	50
4.5	Geometría de la sección transversal de las tres barras.	51
4.6	Desplazamientos del grado de libertad 3, donde mm es matriz de masa.	52

ÍNDICE DE FIGURAS

4.7	Sistema de coordenadas global con 5 grados de libertad.	53
4.8	Númeración de nudos, barras y grados de libertad de la armadura discretizada por 6 barras.	54
4.9	Frecuencias naturales de vibración, donde m es matriz de masa.	55
4.10	Respuestas del grado de libertad 3, donde m es el número de matrices de masa.	55
4.11	Respuestas de la armadura discretizada con 3 barras y 6 barras.	56

CAPÍTULO 1 | Aspectos Generales de la Tesis

1.1. Introducción

Diversos problemas de la vida real son representados en la ingeniería por modelos formulados matemáticamente. Dichos modelos conducen a tener que resolver ecuaciones diferenciales, ordinarias o parciales, que envuelven una o más funciones incógnitas bajo ciertas condiciones iniciales y de contorno. Con la evolución exponencial de las herramientas computacionales de los últimos años, diferentes métodos numéricos fueron desenvueltos para la solución de problemas de ingeniería.

Una poderosa técnica desenvuelta para resolver una variedad de problemas de ingeniería es el Método de Elementos Finitos. El método se basa en dividir el cuerpo (dominio) en elementos menores (discretización) por medio de una malla de puntos (nudos), quedando la geometría de la estructura más simple, lo que hace posible resolver problemas mediante cálculos numéricos aproximados. Entre los diferentes métodos de elementos finitos, destacamos la formulación de [Pian and Tong \(1969\)](#), basado en principios variacionales. Por otro lado, otra técnica bien sucedida en la solución de problemas de ingeniería es el Método de Elementos de Contorno, para más detalles vea el libro de [Brebbia \(1978\)](#), el método consiste esencialmente en discretizar el contorno (frontera o borde) del cuerpo, permitiendo tratar de manera satisfactoria los mismos problemas que trata el método de elementos finitos. Existen ventajas cuando se discretiza solamente el contorno de un cuerpo, sin embargo, en su forma clásica, formulada por Brebbia, el método no tiene una base variacional. Fue, por tanto, en ese sentido, con la finalidad de dar una base variacional al Método de Elementos de Contorno, que en 1987 – inspirado particularmente en los trabajos de [Hellinger \(1914\)](#), [Reissner \(1950\)](#), [Przemieniecki \(1968\)](#) y [Pian \(1983\)](#) – N. A. Dumont fórmula el Método Híbrido de Elementos de Contorno, para más detalles ver [Dumont \(1987\)](#). A partir de ese trabajo, N. A. Dumont y colaboradores, desenvuelven diversas herramientas matemáticas para dejar el método operativo, inclusive, generalizaciones para resolver problemas de dinámica,

considerando siempre elementos de contorno, dando origen a nuevos abordajes en la solución de problemas de elasticidad y potencial.

En 2005, N. A. Dumont y Prazeres, trasladan algunas herramientas, desarrolladas para el Método Híbrido de Elementos de Contorno, para una variante del método que discretiza el dominio como sucede en los métodos de elementos finitos. Este nuevo abordaje, es de nuestro interés, y tiene como nombre: *Método Híbrido de Elementos Finitos*, para más detalles respecto a la formulación del método vea [Prazeres \(2005\)](#), [Oliveira \(2006\)](#), [Dumont \(2006\)](#) y [Dumont \(2007\)](#). Entre las herramientas matemáticas desarrolladas por N. A. Dumont y colaboradores es, también, de nuestro interés la *Técnica de Superposición Modal Avanzada*, [Dumont \(2005\)](#), que se destaca por ser utilizada para resolver problemas dependientes del tiempo. El presente trabajo de investigación pretende aplicar de manera conjunta ambas formulaciones, el Método Híbrido de Elementos Finitos y la Técnica de Superposición Modal Avanzada, en la solución de problemas propios de la ingeniería estructural.

Conociendo la existencia de esas dos metodologías, nuevas y modernas, como son: el Método Híbrido de Elementos Finitos y la Técnica de Superposición Modal Avanzada, cuyas formulaciones matemáticas son robustas y rigurosas, es natural cuestionarnos si es posible estudiar e implementar ambas técnicas para su uso en problemas de ingeniería civil, por lo menos en algunos casos concretos en esta fase inicial de investigación, de tal forma que sea posible cuantificar las respuestas y comparar los resultados con el clásico método de superposición modal. Responder ese cuestionamiento es justamente el propósito de esta tesis.

1.2. Organización de la Tesis

La tesis consta de cinco capítulos, que a continuación se describen brevemente.

El **capítulo 1** (Aspectos Generales de la Tesis) presenta la introducción y describe aspectos del tema de tesis como: el planteamiento, la formulación del problema, la justificación, los objetivos, etc.

El **capítulo 2** (Marco Teórico) presenta los trabajos que explican aspectos teóricos que motivaron la presente investigación. Seguidamente, se describen brevemente conceptos básicos de elasticidad lineal. Finalmente, se presentan las formulaciones teóricas del *Método Híbrido de Elementos Finitos* y la *Técnica de Superposición Modal*

Avanzada.

El **capítulo 3** (Aplicaciones en Elementos unidimensionales) presenta en detalle la aplicación de la metodología propuesta a dos *elementos estructurales*, barra y viga, en coordenadas locales y globales, que son necesarios para construir la *matriz de rigidez efectiva* del elemento estructural que conforman a las *armaduras*. Es usado un proceso de *condensación dinámica*.

El **capítulo 4** (Análisis de Resultados y Discusión) presenta de manera detallada el estudio de la aplicación de la técnica propuesta en la tesis a una *armadura* sometida a carga dependiente del tiempo. Inicialmente, para validar la codificación se comparan los resultados con resultados de la literatura especializada, seguidamente se analizan situaciones mas avanzadas que no son posibles con las técnicas clásicas.

El **capítulo 5** (Conclusiones) presenta las conclusiones, los principales aportes y sugerencias para trabajos futuros siguiendo la misma temática propuesta.

Finalmente, se presentan los artículos científicos, tesis y libros que componen la **bibliografía** utilizada en el presente tema de tesis.

1.3. Planteamiento del problema

En el presente trabajo de investigación se estudia la respuesta de *armaduras* sometidas a cargas dependientes del tiempo (acciones dinámicas), mas específicamente el comportamiento de las *frecuencias naturales* de vibración (con sus respectivos *modos de vibración* asociados) y los *desplazamientos* dependientes del tiempo. Se estudian *estructuras planas* formadas por elementos rectos unidimensionales aplicando la *Técnica de Superposición Modal Avanzada* (formulación en el dominio del tiempo que tiene inicio en el dominio de la frecuencia). Esta formulación moderna permite resolver el problema utilizando varias *matrices de masa*.

Las *matrices de masa*, a las que se hace referencia en el párrafo anterior, se obtienen a partir de una formulación en el dominio de la frecuencia utilizando el *Método Híbrido de Elementos Finitos*. El cálculo de estas matrices es difícil, cuando se tratan en el dominio del tiempo.

Para tal propósito, se implementa un código computacional que haga uso del *Método Híbrido de Elementos Finitos* y la *Técnica de Superposición Modal Avanzada*.

Los resultados serán comparados con soluciones que usan la *Técnica de Superposición Modal* (solución clásica y conocida en la literatura especializada), que resuelve la ecuación del movimiento,

$$\mathbf{M}_1\ddot{u}(t) + \mathbf{C}_1\dot{u}(t) + \mathbf{K}_0u(t) = \mathbf{F}(t),$$

bajo ciertas hipótesis simplificatorias. Mientras que la *Técnica de Superposición Modal Avanzada* (solución propuesta en el presente trabajo de investigación), resuelve la ecuación del movimiento en su forma generalizada, truncando el sistema de la ecuación diferencial de manera conveniente,

$$\left[\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\mathbf{C}_j \frac{\partial^{2j-1}}{\partial t^{2j-1}} + \mathbf{M}_j \frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}} \right) \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t)^b,$$

donde las matrices de rigidez \mathbf{K}_0 y de masa \mathbf{M}_1 , son iguales en ambas técnicas; $\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots, \mathbf{M}_n$ son matrices compuestas de masa y rigidez que se encuentran presentes solamente en la formulación de la *Técnica de Superposición Modal Avanzada*, que por simplicidad serán llamadas segunda matriz de masa, tercera matriz de masa, etc. La formulación avanzada puede ser fácilmente adaptada para problemas con presencia de amortiguamiento viscoso, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n$.

Se espera, en el presente trabajo de investigación, que la *Técnica de Superposición Modal Avanzada*, por tener *matrices de masa* adicionales, que no aparecen en la *Técnica de Superposición Modal* clásica, represente y explore de mejor manera propiedades intrínsecas de la estructura en estudio. Lo que debe permitir un adecuado estudio de convergencia de las frecuencias naturales; se espera, también, que las respuestas dinámicas del problema, sean más próximas a la realidad y que como consecuencia permitan una mejor comprensión e interpretación de aspectos físicos presentes en el problema.

1.4. Formulación del problema

1.4.1. Problema General

- ¿Es posible determinar y analizar la respuesta dinámica de armaduras al emplear la *Técnica de Superposición Modal Avanzada*?

1.4.2. Problema Específico

- ¿Cómo influye conocer los conceptos teóricos en la formulación de la *Técnica de Superposición Modal Avanzada*?
- ¿Cómo influye conocer los conceptos teóricos en la formulación del *Método Híbrido de Elementos Finitos* aplicado a problemas dependientes del tiempo?
- ¿Es posible implementar un código computacional utilizando el *Método Híbrido de Elementos Finitos* y la *Técnica de Superposición Modal Avanzada* para la solución de estructuras formadas por elementos unidimensionales rotulados (armaduras)?
- ¿Cómo determinar y analizar la convergencia de las frecuencias naturales de armaduras cuando más de una matriz de masa es utilizada?

1.5. Justificación

Profesionales de ingeniería civil y áreas afines, podemos afirmar, sin dudas, que los sismos en sus diferentes magnitudes y sus consecuencias, acompañarán a nuestro país durante su existencia, porque habitamos una región de alta actividad sísmica. Dependiendo de la magnitud, los sismos provocan daños en las estructuras y alta probabilidad de pérdida de vidas. Los sismos, inclusive, pueden ser comparados con “enemigos invisibles”; que sabemos que “atacarán”, pero no sabemos con exactitud la magnitud del ataque, cuándo y dónde sucederá. Nuestra responsabilidad es estar preparados para minimizar daños, en lo posible, utilizando la ciencia y el conocimiento como principales aliadas. El presente trabajo, aún como fase inicial, pretende aportar al conocimiento en ese sentido, ayudando en la comprensión de aspectos teóricos envueltos.

De manera más técnica, físicamente, los sismos deben ser tratados como problemas particulares de la mecánica aplicada y modelados matemáticamente, para su estudio, por ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo. Los dos métodos numéricos que se utilizan en el presente trabajo para resolver dichas ecuaciones son el *Método Híbrido de Elementos Finitos* (Prazeres-2005) y la *Técnica de Superposición Modal* (Dumont-1987), ambas técnicas son innovadoras y originales como aportes al conocimiento. Su formulación, en todas las etapas, fue desarrollada como investigación básica dentro del grupo de investigación liderado por el profesor N. A. Dumont. El grupo de investigación es parte de la Escuela de Ingeniería Civil de la Pontificia Universidad Católica de Rio de Janeiro, PUC-Rio, Brasil, donde participé, activamente desde el año

2006 hasta el 2020, en la creación de herramientas matemáticas que hacen posible, en la actualidad, su aplicación en diferentes problemas de difícil solución en la ingeniería. Siempre que se utilizan metodologías nuevas, existe la posibilidad de tener soluciones que permitan una mejor comprensión de las interpretaciones físicas envueltas en el problema, que algunas veces no son evidentes con métodos clásicos, solo esa posibilidad ya justificaría la realización del presente trabajo por los aportes que se podrían generar.

La *Técnica de Superposición Modal Avanzada* es una generalización del *método de superposición modal*, ampliamente divulgado en la literatura por su aplicación en diversos problemas de dinámica difíciles de tratar. Las normas técnicas de los diferentes países, bajo ciertas hipótesis, usan formas prácticas, aproximadas y simplificadas del mismo en sus métodos de análisis estructural, lo que aumenta el margen de error en los resultados. En ingeniería es importante estar consciente y tener control, en lo posible, de esos márgenes de error, lo que puede conseguirse entendiendo la física y matemática del modelo estudiado. Por otro lado, el *Método Híbrido de Elementos Finitos* representa mejor los problemas de elasticidad lineal por utilizar dos campos para aproximar las grandezas físicas envueltas, que son: un *campo de esfuerzos* para el dominio y un *campo de desplazamientos* para el contorno, a diferencia del *Método de Elementos Finitos* que utiliza solo un *campo de desplazamientos*. Como consecuencia, parece lógico suponer que en la peor hipótesis los resultados serían iguales a los métodos clásicos, con gran expectativa que los resultados sean mejores, lo que supondría un aporte al conocimiento.

1.6. Objetivos de la investigación

1.6.1. Objetivo general

- Determinar y analizar la respuesta dinámica de armaduras utilizando una Técnica Avanzada de Superposición Modal.

1.6.2. Objetivos específicos

- Conceptuar aspectos teóricos necesarios para la formulación de la Técnica de Superposición Modal Avanzada aplicada a problemas de dinámica.
- Conceptuar aspectos teóricos necesarios para la formulación del Método Híbrido de Elementos Finitos aplicado a problemas dependientes del tiempo.

- Implementar un código computacional utilizando el Método Híbrido de Elementos Finitos y la Técnica de Superposición Modal Avanzada para la solución de estructuras formadas por elementos unidimensionales rotulados en las extremidades (armaduras).
- Determinar y analizar la convergencia de las frecuencias naturales de vibración y respuestas de las armaduras cuando más de una matriz de masa es utilizada.

1.7. Metodología

Una vez definidos, el tema a investigar y los objetivos que se pretende alcanzar, se procede a determinar el paradigma, los tipos y el método de investigación, para seguidamente describir la metodología para lograr responder las preguntas de investigación.

El presente trabajo de investigación se desarrolla desde el paradigma positivista. Este paradigma permite describir, explicar y predecir la temática estudiada de manera adecuada, generando y probando teorías que sustentan la investigación. Asimismo, este paradigma permite explicar las variables y sus cambios según el diseño planteado en Hernandez, et al. 1998.

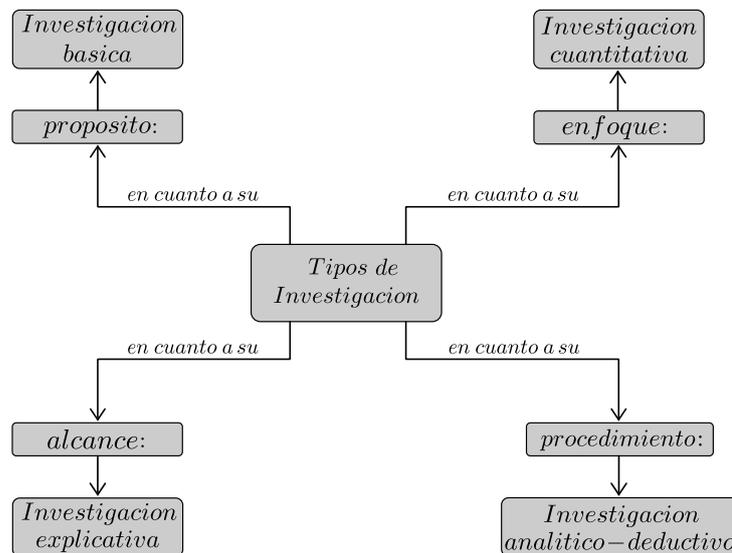


Figura 1.1: Tipos de investigación.

Según su *propósito* fundamental, el presente trabajo corresponde a una investigación *básica*, porque pretende incrementar el conocimiento de principios fundamentales

de la realidad o naturaleza, buscando ampliar aspectos teóricos. Según su *alcance*, la investigación es *explicativa*, porque busca establecer las causas de los fenómenos que se estudian, pretendiendo explicar por qué ocurren y en que condiciones se manifiestan. Según su *enfoque*, la investigación es *cuantitativa*, porque es objetiva y hace uso de la lógica deductiva, la realidad no cambia dependiendo del observador y las mediciones. Según el *procedimiento* aplicado se desarrollan los métodos *analítico* y *deductivo*. Los tipos de investigación utilizados en el presente trabajo se resumen en la [Figura 1.1](#).

La recolección de datos de los ejemplos numéricos que se utilizaron en la presente investigación fueron obtenidos de referencias bibliográficas especializadas, con la finalidad de cumplir requisitos de validez y confiabilidad.

Para cumplir con los objetivos y propósito de la presente investigación, utilizando el *Método Híbrido de Elementos Finitos* y la *Técnica de Superposición Modal Avanzada*, inicialmente se hace un estudio detallado de los principales conceptos teóricos y sus respectivas interpretaciones físicas y matemáticas que envuelven ambas metodologías.

Seguidamente se realiza la implementación computacional del código fuente en el entorno de programación MAPLE 15 que se complementa con una rutina implementada en FORTRAN 90 para resolver el problema de autovalor no lineal asociado al problema. El código fuente debe ser didáctico para que pueda ser utilizado en trabajos futuros de estructuras dinámicas compuestas por elementos unidimensionales.

Finalmente, se realiza la verificación de la convergencia de los resultados comparando las frecuencias naturales de vibración y los desplazamientos dinámicos de armaduras cuando más de una *matriz de masa* es utilizada.

CAPÍTULO 2 | Marco Teórico

2.1. Antecedentes de la investigación

Antecedente N^o 01: Tesis de Doctorado.

Título: O método híbrido simplificado dos elementos de contorno aplicado a problemas dependentes do tempo.

Autor: Chaves, R. A. P., 2003.

Asesor: Dumont, N. A.

Resumen: El trabajo de investigación tiene por objetivo consolidar conceptos importantes de la aplicación de una versión simplificada del método híbrido de elementos de contorno en el dominio del tiempo a materiales con gradación funcional para el análisis general de la respuesta dinámica de sistemas elástico lineales, basado en un método avanzado de superposición modal sin la presencia de amortiguamiento viscoso.

Antecedente N^o 02: Tesis de Maestría.

Título: Desenvolvimento de Elementos Finitos Híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando Superposição Modal Avançada.

Autor: Prazeres, P. G. C., 2005.

Asesor: Dumont, N. A.

Resumen: El trabajo de investigación tiene como objetivo desenvolver una familia de elementos finitos híbridos, como una mejor alternativa a los elementos finitos basados en desplazamientos, tanto para realizar análisis estático y dinámico para problemas sin amortiguamiento viscoso en dominios 2D y 3D; para problemas con gradación funcional, problemas de elasticidad y potencial, etc.

Antecedente N^o 03: Artículo Científico en Beteq IV.

Título: An Advanced mode de superposition technique for general analysis of time dependents problems.

Autor: Dumont, N. A., 2005.

Resumen: El artículo científico tiene como objetivo presentar la formulación generalizada de la técnica avanzada de superposición modal, considerando el amortiguamiento viscoso. Al expandir la matriz de rigidez efectiva en series de frecuencias, las matrices generalizadas de las potencias de frecuencias impares son números complejos, lo que resulta en un problema de autovalor complejo.

Antecedente N^o 04: Artículo Científico en revista.

Título: On the solution of generalized non-linear complex-symmetric eigenvalue problems.

Autor: Dumont, N. A., 2007.

Resumen: El artículo tiene como objetivo la solución del problema de autovalor generalizado, no lineal y complejo-simétrico $(\mathbf{K}_0 - i\omega\mathbf{C}_1 - \omega^2\mathbf{M}_1 - i\omega^3\mathbf{C}_2 - \omega^4\mathbf{M}_2 - \dots)\Phi = 0$, asociado a la ecuaciones dinámicas que gobiernan problemas sometidos a amortiguamiento viscoso, tal como se plantea en el marco de la técnica de superposición modal avanzada. Para resolver el problema, propone una modificación del robusto algoritmo de Jacobi-Davidson. Son presentados ejemplos que ilustran la aplicabilidad del algoritmo.

Antecedente N^o 05: Artículo científico (publicado como capítulo de libro).

Título: Linear Algebra Issues in a Family of Advanced Hybrid Finite Elements.

Autor: Dumont, N. A., Aguilar, C. A., 2009.

Resumen: El presente artículo fue presentado en un congreso en Eslovaquia, donde fue escogido para publicación como el capítulo 14 del libro *Computational Modelling and Advanced Simulations* por la editora Springer. El artículo presenta alternativas de solución para mejorar la formulación del método híbrido de elementos finitos. Mostrando también como las respuestas dinámicas pueden ser obtenidas en el dominio del tiempo mediante el proceso de superposición modal avanzada o en el dominio de la frecuencia para posteriormente usar transformadas inversas numéricas de Laplace y Fourier. Las

posibilidades de aplicación de la formulación se ilustran mediante ejemplos numéricos.

2.2. Bases Teóricas

El presente capítulo inicia con un breve resumen teórico sobre la teoría de la elasticidad lineal, importante cuando se estudia problemas de ingeniería estructural, para seguidamente mostrar la formulación del método híbrido de elementos finitos dinámicos en la solución de problemas dependientes del tiempo. Son desarrolladas las ecuaciones matriciales de equilibrio, desenvolvimiento que será utilizado junto a la técnica de superposición modal avanzada, que es un análisis realizado en el dominio del tiempo a partir de una formulación inicial en el dominio de la frecuencia como se verá mas adelante.

2.2.1. Conceptos básicos de elasticidad lineal

Sea un cuerpo elástico sujeto a acciones externas que provocan pequeños desplazamientos (absolutos y relativos). Los desplazamientos de un elemento infinitesimal del cuerpo son descritos por la teoría de la elasticidad lineal siguiendo dos sistemas de coordenadas:

- Un sistema global, o externo, donde se tienen desplazamientos absolutos u_i sobre los cuales realizan trabajo dos fuerzas externas, las llamadas fuerzas de masa o cuerpo b_i que actúan en el dominio Ω (interior del cuerpo) y las fuerzas de superficie t_i que actúan en el contorno Γ (superficie del cuerpo).
- Un sistema local, o interno, donde se tienen deformaciones unitarias (o desplazamientos relativos) ε_{ij} e tensiones σ_{ij} (o esfuerzos), que surgen como respuesta a las fuerzas externas en todos los puntos del dominio Ω del cuerpo.

En esta sección y en las próximas, los subíndices i y j asumen los valores 1, 2 ó 3, conforme se refieran a las coordenadas globales x_1 , x_2 o x_3 , respectivamente, ver [Figura 2.1](#). Un subíndice después de una coma representa una derivada en relación a la coordenada correspondiente. Subíndices repetidos indican un sumatorio de tres términos, en el caso general de problemas tridimensionales.

El contorno del cuerpo, $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_u$, se divide en dos partes; en Γ_σ se encuentran las fuerzas de superficie \bar{t}_i que son conocidas y en Γ_u se encuentran los desplazamientos conocidos \bar{u}_i .

La formulación de un problema de elasticidad lineal puede ser resumido como sigue: sea un conjunto de fuerzas externas conocidas, que actúan sobre un cuerpo elástico, los cuales son descritos en el sistema global por las fuerzas de masa b_i actuando en Ω y las fuerzas de superficie t_i actuando en Γ_σ . Un análisis de ese cuerpo consiste en determinar los desplazamientos u_i que ocurren en Ω y en Γ_σ , las reacciones de apoyo que ocurren en Γ_u y las tensiones o esfuerzos σ_{ij} en Ω .

Para determinar los valores desconocidos (incógnitas del problema) causados por las sollicitaciones externas, es necesario establecer relaciones de transformación entre fuerzas y desplazamientos en el sistema global y local. Estas relaciones de transformación constituidas por tres grupos de ecuaciones son: las ecuaciones de equilibrio de fuerzas; las ecuaciones de compatibilidad entre deformaciones unitarias y desplazamientos; y las ecuaciones constitutivas.

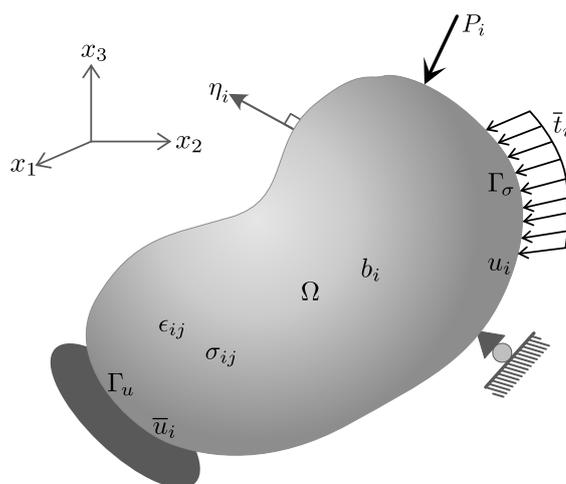


Figura 2.1: Cuerpo elástico lineal en equilibrio sujeto a acciones externas.

Las *ecuaciones de equilibrio de fuerzas* son la relación de equilibrio entre las fuerzas externas descritas en el sistema global y las tensiones (o esfuerzos) descritas en el sistema local mediante la ecuación

$$\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i - \mu \dot{u}_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.1)$$

la relación que expresa la condición de simetría del tensor de tensiones (o esfuerzos) dada por

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{en } \Omega \quad (2.2)$$

y el equilibrio en el contorno del cuerpo sólido entre las fuerzas de superficie y las tensiones (o esfuerzos) infinitamente próximas a la superficie

$$\sigma_{ij}\eta_j = \bar{t}_i \quad \text{en } \Gamma_\sigma, \quad (2.3)$$

donde ρ es la densidad de masa, $\mu = 2\zeta\rho$ es el coeficiente de amortiguamiento en que ζ es un factor de amortiguamiento, η_j son los cosenos directores de un elemento de superficie $d\Gamma$, \dot{u} es la primera derivada del desplazamiento respecto al tiempo (velocidad) y \ddot{u} es la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo (aceleración).

Las *ecuaciones de compatibilidad* en cada punto del dominio entre la deformación unitaria del sistema local y el desplazamiento descrito en el sistema global, llamada también de transformación cinemática, es dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{en } \Omega \quad (2.4)$$

y la condición de contorno

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } \Gamma_u. \quad (2.5)$$

Finalmente, las *ecuaciones constitutivas* que representan a las relaciones existentes entre las tensiones (o esfuerzos) y las deformaciones unitarias en el interior del cuerpo elástico de la [Figura 2.1](#), son dadas por la ecuación

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{en } \Omega \quad (2.6)$$

donde C_{ijkl} es la matriz constitutiva del material, que bajo las hipótesis de material linealmente elástico, continuo, isotrópico y homogéneo es representado por la ecuación

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.7)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson, G es el módulo de elasticidad transversal o de corte y δ_{ij} es el delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.8)$$

Sustituyendo la ecuación (2.7) en (2.6) y seguidamente en la ecuación (2.1), además considerando la condición de simetría de la matriz constitutiva C_{ijkl} y la ecuación (2.4), se obtiene la *ecuación de Navier* en que el problema de elasticidad lineal queda

descrito en función de los desplazamientos como sigue

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,ki} + b_i - \rho\ddot{u}_i - \mu\dot{u}_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.9)$$

la *ecuación de Navier* puede también expresarse como

$$c_2^2 u_{i,kk} + (c_1^2 - c_2^2)u_{k,ki} + \frac{1}{\rho}b_i - \ddot{u}_i - \frac{\mu}{\rho}\dot{u}_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.10)$$

donde c_1 es la velocidad de propagación de las ondas irrotacionales y c_2 es la velocidad de propagación de corte en un medio elástico, siendo dadas por

$$c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} \quad \text{y} \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (2.11)$$

Considerando que la velocidad y la aceleración del cuerpo elástico lineal son nulas en la ecuación (2.9), la *ecuación de Navier* se transforma en su equivalente que modela problemas estáticos, ecuación (2.12), donde continúan siendo válidas todas las transformaciones y relaciones estudiadas en esta sección.

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,ki} + b_i = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.12)$$

2.2.2. Método Híbrido de Elementos Finitos dinámicos

En la sección se desarrollará, paso a paso, los aspectos teóricos generales de la formulación del Método Híbrido de Elementos Finitos resaltando sus principales características.

2.2.2.1. Formulación en el dominio del tiempo

El efecto del tiempo en un problema de dinámica surge debido a acciones externas aplicadas súbitamente, la fuerza de inercia y fuerzas restitutivas del cuerpo elástico (fuerza de amortiguamiento viscoso y fuerza elástica). Para resolver ese problema se busca un campo de desplazamientos u_i , con su correspondiente campo de tensiones (o esfuerzos) σ_{ij} , que satisfacen la ecuación diferencial parcial de equilibrio dinámico

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t)_{ij,j} + b(x_1, x_2, x_3, t)_i - \rho\ddot{u}(x_1, x_2, x_3, t)_i - \mu\dot{u}(x_1, x_2, x_3, t)_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.13)$$

donde x_1, x_2 y x_3 corresponden a las coordenadas x, y y z , respectivamente, del sistema de referencia cartesiano; \ddot{u} y \dot{u} , son la aceleración y velocidad del sistema estructural. El dominio Ω (interior del cuerpo) en la ecuación (2.13) representa una estructura o parte de ella (es decir, un elemento estructural o un elemento finito, dependiendo de la naturaleza del problema).

El campo de desplazamientos buscado debe satisfacer las condiciones de contorno del cuerpo elástico. O sea, las condiciones de contorno de Dirichlet

$$u(x_1, x_2, x_3, t)_i = \bar{u}(x_1, x_2, x_3, t)_i \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2.14)$$

y las condiciones de contorno de Neumann

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, t)_{ij}\eta_j = \bar{t}(x_1, x_2, x_3, t)_i \quad \text{en } \Gamma_\sigma, \quad (2.15)$$

donde $\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t)_i$ en la ecuación (2.14) son los desplazamientos conocidos en el contorno Γ_u del cuerpo elástico. En la ecuación (2.15) es importante observar que en puntos tan próximos del contorno Γ_σ como sea posible imaginar, pero dentro del dominio Ω , las tensiones (o esfuerzos) $\sigma(x_1, x_2, x_3, t)_{ij}$ deben estar en equilibrio con las fuerzas de superficie $\bar{t}(x_1, x_2, x_3, t)_i$ aplicadas en el contorno Γ_σ del cuerpo elástico, η_j son los cosenos directores en el contorno Γ representados en el dominio Ω , por coherencia del modelo en estudio.

Ademas de lo expuesto, las condiciones iniciales a que está sometido el cuerpo elástico deben ser conocidos en el instante de tiempo $t = 0$. El desplazamiento inicial u_i es representado como

$$u(x_1, x_2, x_3, t)_i = u(x_1, x_2, x_3, t = 0)_i \quad \text{en } \Omega \quad (2.16)$$

y la velocidad inicial v_i como

$$\dot{u}(x_1, x_2, x_3, t)_i = v(x_1, x_2, x_3, t = 0)_i \quad \text{en } \Omega. \quad (2.17)$$

Soluciones que satisfacen exactamente todas las ecuaciones mencionadas en esta sección, se consiguen en ciertos casos particulares. De manera general, se recurre a diferentes métodos numéricos para aproximar con buena precisión el comportamiento del cuerpo elástico. En el presente trabajo es utilizado el Método Híbrido de Elementos Finitos y la Técnica de Superposición Modal Avanzada.

2.2.2.2. Formulación en el dominio de la frecuencia

El problema de un cuerpo elástico, dependiente del tiempo, propuesto en la sección anterior, alternativamente puede ser resuelto explorando la respuesta armónica para acciones dinámicas, transformando el problema, del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Existen diversas operaciones matemáticas para un análisis en el dominio de la frecuencia, las técnicas más comunes son la transformada de Laplace y la transformada de Fourier.

En el presente trabajo la transformación para el dominio de la frecuencia se realizará variando el tiempo de acuerdo con la función exponencial $e^{-i\omega t}$. Lo que permite expresar el desplazamiento en el tiempo, $u(x_1, x_2, x_3, t)_i$, como una separación de variables, el producto de una parte espacial y otra con la función exponencial, de la siguiente manera

$$u(x_1, x_2, x_3, t)_i = u(x_1, x_2, x_3, \omega)_i \cdot e^{-i\omega t}, \quad (2.18)$$

donde ω es la frecuencia circular de vibración e $i = \sqrt{-1}$ en la parte exponencial es la unidad de los números imaginarios. La ecuación anterior, por simplicidad, a partir de ahora será denotada simplemente como

$$u(x_1, x_2, x_3, t)_i = u_i \cdot e^{-i\omega t}, \quad (2.19)$$

donde las variables independientes (x_1, x_2, x_3, ω) están implícitas en el término de la derecha. Considerando la primera y segunda derivada respecto al tiempo de la ecuación (2.19) y sustituyendo los resultados en la ecuación (2.13) tenemos

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho k^2 u_i = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.20)$$

donde k^2 para una determinada frecuencia circular w es

$$k^2 = \omega^2 + 2i\zeta\omega. \quad (2.21)$$

De las ecuaciones (2.14) y (2.15) tenemos las condiciones de contorno

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } \Gamma_u \quad \text{y} \quad \sigma_{ij}\eta_j = \bar{t}_i \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (2.22)$$

No hace falta transformar las condiciones iniciales del problema al dominio de la frecuencia, porque se requiere de ellas en una fase posterior de la formulación del problema, ya en términos del proceso de superposición modal avanzada, o sea, en el dominio del tiempo.

2.2.2.3. Soluciones fundamentales

De manera general, son llamadas soluciones fundamentales, la familia de funciones de interpolación que satisfacen la ecuación de equilibrio en problemas de potencial o elasticidad, independiente de las condiciones de contorno. En el presente trabajo, se estudian problemas de elasticidad, por tanto, la solución fundamental es un campo de tensiones (o esfuerzos) que satisfacen el equilibrio de la ecuación (2.20).

Reescribiendo por conveniencia la ecuación de equilibrio, ecuación (2.20), de la sección anterior

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho k^2 u_i = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

para calcular su solución fundamental, supongamos un campo de desplazamientos u_i^f , a menos de constantes que representan desplazamientos de cuerpo rígido, y su respectivo campo de tensiones σ_{ij}^f que satisfacen la ecuación (2.20) en todo el dominio Ω , solución que puede ser pensada como la suma de una parte homogénea σ_{ij}^* y una parte particular σ_{ij}^b de la ecuación de la elastodinámica, es decir, el campo de desplazamientos

$$u_i^f = u_i^* + u_i^b \quad \text{en } \Omega \quad (2.23)$$

y su respectivo campo de tensiones

$$\sigma_{ij}^f = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^b \quad \text{en } \Omega \quad (2.24)$$

De esa manera se define una solución homogénea u_i^* , tal que, su respectivo campo de tensiones σ_{ij}^* satisface la ecuación

$$\sigma_{ij,j}^* + \rho k^2 u_i^* = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.25)$$

y una solución particular u_i^b , tal que, su respectivo campo de tensiones σ_{ij}^b satisface la ecuación

$$\sigma_{ij,j}^b + b_i + \rho k^2 u_i^b = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.26)$$

Las funciones u_i^* y σ_{ij}^* representadas en términos de parámetros de fuerzas nodales p_m^* en el dominio de la frecuencia son

$$u_i^* = u_{im}^* \cdot p_m^* \quad \text{y} \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* \cdot p_m^* \quad \text{en } \Omega \quad (2.27)$$

que al ser substituidos en la ecuación (2.25) resulta en la ecuación de equilibrio en su

forma discreta

$$\sigma_{ijm,j}^* + \rho k^2 u_{im}^* = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.28)$$

donde el subíndice m hace referencia a cada uno de los grados de libertad del modelo discreto. Las funciones σ_{ijm}^* que satisfacen a la ecuación (2.28) son llamadas de *soluciones fundamentales* y son caracterizadas por el superíndice (*).

Las soluciones fundamentales se dividen en funciones singulares y no singulares. Las soluciones fundamentales singulares son llamadas de funciones de Green y las soluciones fundamentales no singulares son llamadas de funciones de Trefftz por los investigadores que continuaron el trabajo pionero de [Trefftz \(1926\)](#). Sin embargo, soluciones singulares no serán utilizadas en este trabajo, todas las citaciones en referencia a soluciones fundamentales de aquí hacia adelante siempre serán en referencia a soluciones fundamentales no singulares. Para mayores detalles sobre soluciones fundamentales ver [De Souza \(1992\)](#), [Chaves \(1999\)](#) y [Brebbia \(1978\)](#).

2.2.2.4. Formulación matricial de la ecuación de equilibrio

El punto de partida para la formulación matricial del Método Híbrido de Elementos Finitos, es el potencial de Hellinger-Reissner modificado de manera conveniente para anular algunos términos que dependen del dominio utilizando las soluciones fundamentales no singulares, lo que simplifica el potencial y facilita la discretización numérica de la ecuación (2.29),

$$-\delta\Pi_R = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \delta\sigma_{ij}^f \eta_j (u_i^f - u_i) d\Gamma dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^f \eta_j - \bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma dt = 0, \quad (2.29)$$

donde sustituyendo el campo de desplazamientos u_i^f y el campo de tensiones σ_{ij}^f , respectivamente, calculados en la sección 2.2.2.3 y que son

$$\begin{aligned} u_i^f &= u_i^* + u_i^b \\ \sigma_{ij}^f &= \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^b \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (2.30)$$

tenemos

$$-\delta\Pi_R = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\delta\sigma_{ij}^* + \delta\sigma_{ij}^b) \eta_j (u_i^* + u_i^b - u_i) d\Gamma dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} ([\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^b] \eta_j - \bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma dt = 0. \quad (2.31)$$

Es importante observar que el término σ_{ij}^b presente en la ecuación (2.30) es un

termino constante, por tanto, su variación $\delta\sigma_{ij}^b$ en la ecuación (2.31) es nula.

El potencial de Hellinger-Reisner de la ecuación (2.31) que aun es una función continua y equivalente a la ecuación de equilibrio del problema de elasticidad lineal puede ahora ser discretizado con las expresiones

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_{im}^* \cdot p_m^* & \text{en } \Omega \\ \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ijm}^* \cdot p_m^* & \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$u_i = u_{im} \cdot d_m \quad \text{en } \Gamma \quad (2.33)$$

que se sustituyen en la ecuación (2.31) para obtener la forma discreta

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R &= \int_{t_0}^{t_1} \delta p_m^* \left[\int_{\Gamma} (\sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}^* \cdot p_n^* + \sigma_{ijm}^* \eta_j u_i^b - \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} \cdot d_n) d\Gamma \right] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \delta d_n \left[\int_{\Gamma} ([\sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} \cdot p_m^* + \sigma_{ij}^b \eta_j u_{in}] - \bar{t}_i u_{in}) d\Gamma \right] dt = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

en donde el primer término de la primera integral es la matriz de flexibilidad \mathbf{F} , como se observa en la ecuación (2.35), que es simétrica por construcción,

$$\mathbf{F} = [F_{mn}] = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}^* d\Gamma. \quad (2.35)$$

El primer término de la segunda integral es la transpuesta de la matriz de transformación cinemática \mathbf{H} , que se expresa como

$$\mathbf{H}^T = [H_{mn}] = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma. \quad (2.36)$$

El segundo término de la primera integral es un vector vector de desplazamientos nodales \mathbf{b} equivalente a las fuerzas de cuerpo

$$\mathbf{b}^T = \{b_m\} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_i^b d\Gamma. \quad (2.37)$$

El segundo y tercer término de la segunda integral son los vectores de fuerzas nodales equivalentes, \mathbf{p}^b y \mathbf{p} , que corresponden a las fuerzas de cuerpo b_i y a las fuerzas de

superficie t_i , respectivamente,

$$\mathbf{p}^b = \{p_m^b\} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^b \eta_j u_{im} d\Gamma \quad (2.38)$$

$$\mathbf{p} = \{p_m\} = \int_{\Gamma} \bar{t}_i u_{im} d\Gamma. \quad (2.39)$$

Sustituyendo las matrices y vectores de las ecuaciones (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) y (2.39) en la ecuación (2.34) tenemos la forma matricial del potencial de Hellinger-Reissner

$$-\delta\Pi_R = \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathbf{p}^{*\text{T}}(\mathbf{F}\mathbf{p}^* - \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{b})dt - \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathbf{d}^{\text{T}}(\mathbf{H}^{\text{T}}\mathbf{p}^* + \mathbf{p}^b - \mathbf{p})dt = 0. \quad (2.40)$$

El vector \mathbf{b} presente en la ecuación (2.37), puede ser reescrito utilizando funciones de interpolación u_{in} como sigue, por conveniencia, sin perder sus características intrínsecas,

$$\mathbf{b} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_i^b d\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d_n^b d\Gamma = \mathbf{H}\mathbf{d}^b. \quad (2.41)$$

La ecuación (2.40), luego de substituir la ecuación (2.41), para un determinado instante de tiempo y valores arbitrarios diferentes de cero de las variaciones $\delta\mathbf{p}^*$ y $\delta\mathbf{d}$, para evitar soluciones triviales, se descompone en dos nuevas ecuaciones

$$\mathbf{F}\mathbf{p}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{H}^{\text{T}}\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.43)$$

eliminándose \mathbf{p}^* en estas ecuaciones, se tiene finalmente el sistema discreto de ecuaciones algebraico del Método Híbrido de Elementos Finitos

$$\mathbf{K}_e(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.44)$$

donde

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{H}^{\text{T}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H} \quad (2.45)$$

es la matriz de rigidez efectiva que transforma desplazamientos nodales en fuerzas nodales.

Al observar la ecuación (2.44) parece que estamos frente a la ecuación matricial de equilibrio que se usa para resolver problemas de elasticidad lineal estáticos, pero no,

es solo impresión. La matriz \mathbf{K}_e no es la matriz de rigidez inherente a problemas de estática, es una matriz generalizada formulada en el dominio de la frecuencia, ω , que condensa todas las propiedades de masa, amortiguamiento viscoso y rigidez inherentes a las estructuras en problemas de dinámica estructural. En el presente trabajo para diferenciarla de la matriz estática, la denominaremos como *matriz de rigidez efectiva*.

2.2.3. Técnica de Superposición Modal Avanzada

La presente sección tiene como finalidad abordar de manera didáctica el procedimiento y las principales ideas que sustentan la **Técnica de Superposición Modal Avanzada**, como se relaciona con el **Método Híbrido de Elementos finitos** en la solución de problemas dependientes del tiempo, como suceden las transiciones entre el dominio de la frecuencia y el tiempo, etc.

La *técnica de superposición modal avanzada*, cuya formulación es utilizada como herramienta matemática en el presente trabajo, es una generalización del clásico *método de superposición modal*, de donde derivan las principales técnicas utilizadas en problemas de dinámica estructural considerando ciertas simplificaciones. Por tanto, se justifica comenzar realizando una reseña muy breve de dicho método, para seguidamente introducir la *técnica de superposición modal avanzada* y facilitar su comprensión, ya que de manera global tienen aspectos comunes.

2.2.3.1. Método clásico de superposición modal

La presente sección no pretende explicar la formulación clásica del método de superposición modal de manera detallada. La intención es tener un panorama global del método a manera de introducción a las secciones posteriores que abordan el método de superposición modal avanzada.

Las ecuaciones diferenciales parciales que modelan fenómenos físicos dependientes del tiempo, pueden separarse en dos partes: una que depende exclusivamente de la geometría del dominio y otra que depende del tiempo. La segunda, conocida como *ecuación del movimiento*, es de nuestro interés. Para su solución, suponemos a la masa del cuerpo, concentrada en determinados puntos del dominio continuo, escogidos de manera conveniente, que ante la acción de fuerzas externas dependientes del tiempo, el cuerpo reacciona mediante fuerzas inerciales y restitutorias para mantener el equilibrio. Lo expuesto, permite modelar un sistema de dominio continuo, compuesto de infinitos

puntos, como un sistema aproximado de dominio discreto, matemáticamente se traduce como un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales, que de manera general puede ser escrito matricialmente como

$$\mathbf{M}\ddot{u}(t) + \mathbf{C}\dot{u}(t) + \mathbf{K}u(t) = \mathbf{F}(t), \quad (2.46)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} , son las matrices de masa, amortiguamiento viscoso y rigidez, respectivamente. $\ddot{u}(t)$, $\dot{u}(t)$ y $u(t)$ son los vectores con las aceleraciones, las velocidades y las posiciones del sistema discreto. $\mathbf{F}(t)$ es el vector de acciones externas que perturban al sistema, independiente de su naturaleza. La solución de la ecuación (2.46), por el método de superposición modal, no es trivial, envuelve desafíos matemáticos de difícil tratamiento.

La solución del problema, físicamente, consiste en suponer que la respuesta del cuerpo ante la aplicación de cargas súbitas, está compuesta por la acción simultánea de cada movimiento de vibración provocado en el cuerpo por cada una de las partes en que se discretizó el dominio. Por tal razón, una buena estrategia es aislar cada uno de los movimientos para facilitar la solución, para seguidamente superponerlos considerando su grado de participación.

La interpretación física del párrafo anterior, traducido a lenguaje matemático, consiste en usar una técnica de diagonalización de matrices para transformar el sistema **acoplado** de ecuaciones diferenciales en otro sistema **desacoplado** de ecuaciones diferenciales ordinarias de fácil solución mediante métodos analíticos de integración. Para diagonalizar las matrices del sistema, se necesitan los autovectores asociados a los autovalores, que se consiguen resolviendo el problema de **autovalor** inherente a la ecuación (2.46). Ese problema es difícil de tratar, para resolver se realizan hipótesis que llevan a un problema de *autovalor lineal*, que simplifica los cálculos, pero se pierde la coherencia matemática y física del modelo, como veremos mas adelante. Con los resultados (un vector de autovalores y su respectiva matriz de autovectores), se desacopla el sistema, se resuelven las ecuaciones diferenciales ordinarias y los resultados se superponen para obtener la respuesta del sistema.

La matemática de la ecuación (2.46), solicita resolver un problema de **autovalor no lineal**. En el párrafo anterior vimos que la solución se asocia a un problema de **autovalor lineal** que resulta de la ecuación $\mathbf{M}\ddot{u}(t) + \mathbf{K}u(t) = 0$. Las fuerzas de amortiguamiento viscoso $\mathbf{C}\dot{u}(t)$ que es inherente al problema, es aún un tema abierto en la investigación. Actualmente, el cálculo de la matriz \mathbf{C} se realiza de manera indirecta, por separado, como la suma de masa y rigidez en porcentajes convenientes de manera que no se

pierda la compatibilidad de la ecuación (2.46). ¿Cómo influye esa simplificación en los resultados? no lo sabemos.

2.2.3.2. Expansión de las matrices en series

Las matrices y vectores del sistema de ecuaciones algebraico, ecuaciones (2.44) y (2.45), se reescribe por conveniencia

$$\mathbf{K}_e(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b,$$

donde

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}.$$

Las matrices y vectores del sistema algebraico se encuentran en el dominio de la frecuencia, ω . A partir de ahora, por coherencia, para referirnos a la matriz de rigidez efectiva \mathbf{K}_e será como $\mathbf{K}_{e(\omega)}$. Como vimos anteriormente, la matriz de rigidez efectiva contiene de manera compacta todas las propiedades de masa, rigidez y amortiguamiento de los sistemas estructurales. Una forma de separar esas grandezas, es escribiendo la matriz de rigidez efectiva como el sumatorio de una serie infinita de potencias de frecuencias, de manera compacta esa serie seria la ecuación (2.47),

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-i\omega)^j \mathbf{K}_j, \quad (2.47)$$

que podemos expandir, truncando la serie en $2n + 1$ términos, sustituyendo los términos de potencias de frecuencia impar por \mathbf{C}_j y los términos de potencias de frecuencia par por \mathbf{M}_j , como

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - i\omega \mathbf{C}_1 - \omega^2 \mathbf{M}_1 - i\omega^3 \mathbf{C}_2 - \omega^4 \mathbf{M}_2 - \dots - i\omega^{2n-1} \mathbf{C}_n - \omega^{2n} \mathbf{M}_n + O(\omega^{2n+1}). \quad (2.48)$$

Es posible reescribir la ecuación (2.48), dejando en evidencia el primer término de la serie, \mathbf{K}_0 , y los demás términos, para valores de $n \geq 1$, escritos en pares como \mathbf{C}_j y \mathbf{M}_j de manera conveniente, quedando

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (i\omega^{2j-1} \mathbf{C}_j + \omega^{2j} \mathbf{M}_j) + O(\omega^{2n+1}), \quad (2.49)$$

donde $\mathbf{K}_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de rigidez estática, $\mathbf{C}_j, \mathbf{M}_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices generalizadas de amortiguamiento viscoso y masa, $i = \sqrt{-1}$ es el número imaginario.

De este modo, $\mathbf{K}_{e(\omega)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz compleja-simétrica, que representa a un sistema discreto en el dominio de la frecuencia con m grados de libertad.

La ecuación (2.49), expandida para $n = 1$ resulta en los tres primeros términos de la serie como sigue

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - i\omega\mathbf{C}_1 - \omega^2\mathbf{M}_1, \quad (2.50)$$

donde las matrices \mathbf{K}_0 y \mathbf{M}_1 son equivalentes en valores a las matrices de rigidez y masa calculadas utilizando las formulaciones clásicas que se encuentran en libros de dinámica estructural. La matriz \mathbf{C}_1 es la matriz de amortiguamiento viscoso calculada de manera natural como parte de la serie de frecuencias en la ecuación (2.50), esta matriz es difícil de tratar en el dominio del tiempo, no se calcula enfrentando los desafíos matemáticos de la ecuación que modela el problema, ver ecuación (2.46). En el ejemplo se evidencian las ventajas de trabajar en el dominio de la frecuencia, calcular pares de matrices \mathbf{C}_j y \mathbf{M}_j se reduce, simplemente, a una expansión de la serie de potencias de frecuencias de la ecuación (2.49) modificando el valor de n . Por ejemplo, para $n = 2$, tenemos la serie

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - i\omega\mathbf{C}_1 - \omega^2\mathbf{M}_1 - i\omega^3\mathbf{C}_2 - \omega^4\mathbf{M}_2. \quad (2.51)$$

Podemos escribir la ecuación (2.49) dejando la serie con el sumatorio para valores de $n \geq 2$, como sigue

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - i\omega\mathbf{C}_1 - \omega^2\mathbf{M}_1 - \sum_{j=2}^n (i\omega^{2j-1}\mathbf{C}_j + \omega^{2j}\mathbf{M}_j) + O(\omega^{2n+1}). \quad (2.52)$$

En la ecuación (2.52), como mencionado anteriormente, las matrices \mathbf{K}_0 , \mathbf{C}_1 y \mathbf{M}_1 son las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa presentes en la clásica ecuación del movimiento como podemos ver en la ecuación (2.46). Todos los demás términos dentro del sumatorio son ignorados por los métodos clásicos.

La formulación propuesta en el presente trabajo permite utilizar los pares de matrices \mathbf{M}_j y \mathbf{C}_j , que de aquí en adelante serán denominadas de la siguiente manera: cuando $j = 2$ las matrices \mathbf{M}_2 y \mathbf{C}_2 serán llamadas de segunda matriz de masa y segunda matriz de amortiguamiento; si $j = 3$ las matrices \mathbf{M}_3 y \mathbf{C}_3 serán llamadas tercera matriz de masa y tercera matriz de amortiguamiento; así sucesivamente. De manera general para valores de $2 \leq j \leq n$, las matrices \mathbf{M}_j y \mathbf{C}_j , serán denominadas de j -ésima matriz de masa y de amortiguamiento. Una característica física importante en la serie de la ecuación (2.52), es que la matriz \mathbf{M}_1 está ligada exclusivamente a la masa, las demás matrices \mathbf{M}_j , son denominadas matrices generalizadas de masa por simplicidad,

físicamente, estas matrices se componen de porciones de masa y rigidez.

Cuando tratamos con problemas de dinámica, sin la presencia de amortiguamiento viscoso, la expansión en serie de frecuencias de la matriz de rigidez efectiva es

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \sum_{j=0}^{\infty} (\omega^{2j} \mathbf{K}_j), \quad (2.53)$$

o de manera expandida, truncando la serie en $2n + 2$ términos es

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 - \omega^4 \mathbf{M}_2 - \dots - \omega^{2n} \mathbf{M}_n + O(\omega^{2n+2}), \quad (2.54)$$

que puede ser reescrita dejando en evidencia el primer término de la serie \mathbf{K}_0 y los demás términos para valores pares de $n \geq 1$, escritos como \mathbf{M}_j de manera conveniente, quedando

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (\omega^{2j} \mathbf{M}_j) + O(\omega^{2n+2}). \quad (2.55)$$

Una característica que se observa en la ecuación (2.55) y que muestra la consistencia del método híbrido de elementos finitos, es que, cuando la matriz de rigidez efectiva es expandida en serie de potencias de frecuencias en problemas sin amortiguamiento, naturalmente no aparecen los términos de la serie con potencias impares que corresponden al amortiguamiento viscoso. Por ejemplo, para $n = 4$ tendremos la serie siguiente

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 - \omega^4 \mathbf{M}_2 - \omega^6 \mathbf{M}_3 - \omega^8 \mathbf{M}_4 \quad (2.56)$$

donde \mathbf{K}_0 es la matriz de rigidez estática; \mathbf{M}_1 es la matriz de masa; ambas presentes en los métodos clásicos, y las matrices \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 , \mathbf{M}_4 son la segunda, tercera y cuarta matriz de masa, respectivamente.

Aquí podemos citar a [Przemieniecki \(1968\)](#) que consigue escribir la ecuación (2.57), desde la formulación de elementos finitos, para problemas de vibración libre como serie de potencias de frecuencias

$$[\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 - \omega^4 (\mathbf{M}_2^* - \mathbf{K}_4^*) - \dots] \mathbf{d} = 0. \quad (2.57)$$

El autor indica que los términos con ω^4 y superiores presentan algunas dificultades computacionales, motivo por el cual, normalmente, se utilizan términos con ω^2 para calcular las frecuencias y modos de vibración. Ese trabajo pionero de [Przemieniecki](#)

(1968), sin considerar el amortiguamiento, ya indicaba que había una serie infinita, aún sin conseguir calcular las matrices, terminó motivando, años después, la generalización que resultó en la Técnica de Superposición Modal Avanzada, que usa las matrices generadas por expansión en series de frecuencias de la matriz de rigidez efectiva, $\mathbf{K}_{e(\omega)}$, obtenida mediante la formulación híbrida de elementos finitos, ver ecuación (2.45), técnicas que se proponen utilizar en el presente trabajo. Podemos observar, comparando las ecuaciones (2.56) y (2.57), que \mathbf{M}_2 es igual $\mathbf{M}_2^* - \mathbf{K}_4^*$, lo que refuerza la afirmación que las matrices generalizadas de masa se componen en realidad de masa y rigidez.

2.2.3.3. Problema en el dominio del tiempo

Sustituyendo la ecuación (2.49) truncada en n términos, en la ecuación (2.45) tenemos la ecuación generalizada de la ecuación del movimiento en el dominio de la frecuencia

$$\left[\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (i\omega^{2j-1} \mathbf{C}_j + \omega^{2j} \mathbf{M}_j) \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)_\omega = \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{p}(\omega)^b. \quad (2.58)$$

En la ausencia de amortiguamiento viscoso, podemos sustituir la ecuación (2.55) truncada en n términos, en la ecuación (2.45) resultando en

$$\left[\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (\omega^{2j} \mathbf{M}_j) \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)_\omega = \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{p}(\omega)^b. \quad (2.59)$$

Observe que se puede obtener la ecuación (2.59) a partir de la ecuación (2.58) considerando $\mathbf{C}_j = 0$, lo que muestra la coherencia de los cálculos.

Alternativamente, como se demuestra en Dumont and Oliveira (2001), Dumont and Chaves (2003) y Dumont (2005), la ecuación (2.58) puede escribirse en el dominio del tiempo como

$$\left[\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\mathbf{C}_j \frac{\partial^{2j-1}}{\partial t^{2j-1}} + \mathbf{M}_j \frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}} \right) \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t)^b, \quad (2.60)$$

que es un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales de alto orden. En estructuras sin amortiguamiento, $\mathbf{C}_j = 0$, la ecuación (2.60) se escribe como

$$\left[\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\mathbf{M}_j \frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}} \right) \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t)^b, \quad (2.61)$$

donde el vector de desplazamientos \mathbf{d} , de las ecuaciones (2.60) y (2.61), son las incógnitas del problema para determinadas condiciones de contorno y condiciones iniciales, en términos de fuerza, velocidad y desplazamientos.

Es importante resaltar que las matrices de masa \mathbf{M}_j , amortiguamiento \mathbf{K}_j y rigidez \mathbf{K}_0 son las mismas en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo, eso sucede porque son invariantes, es intuitivo pensar que las propiedades físicas y geométricas de determinada estructura no dependen de la variable tiempo y frecuencia. Entender eso es importante, permite intuir que las matrices \mathbf{M}_j , \mathbf{C}_j y \mathbf{K}_0 pueden ser calculadas en el dominio de la frecuencia con mucha facilidad para, posteriormente, usarlas en el dominio del tiempo, donde es muy difícil calcularlas.

Esa idea simple, resulta en la generalización del método de superposición modal dando lugar a la Técnica de Superposición Modal Avanzada

2.2.3.4. Problema de autovalor no lineal

El problema de autovalor no lineal con valores complejos, al considerar el amortiguamiento, asociado a la ecuación (2.58) es

$$\mathbf{K}_{e(\omega)}\Phi = \left[\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (i\omega^{2j-1}\mathbf{C}_j + \omega^{2j}\mathbf{M}_j) \right] \Phi = 0. \quad (2.62)$$

La solución del problema de autovalor de la ecuación (2.62) fue dada por Dumont (2007), para mayores detalles ver el artículo científico de referencia. Consiste en una generalización del problema de autovalor no lineal con números reales para incluir números complejos, la idea consiste en transformar el problema no lineal en lineal construyendo una matriz aumentada con las matrices \mathbf{M}_j , \mathbf{C}_j y \mathbf{K}_0 . En resumen, inicia reescribiendo la ecuación (2.62) en la forma

$$\mathbf{K}_0\Phi - \sum_{j=1}^n (i\mathbf{C}_j\Omega^{2j-1} + \mathbf{M}_j\Phi\Omega^{2j}) = 0, \quad (2.63)$$

donde Ω es una matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores ω que representan a las frecuencias naturales de la estructura, con tantas frecuencias naturales cuanto grados de libertad de la estructura, y Φ es una matriz cuyas columnas son los autovectores que representan los modos de vibración. Este problema de autovalor no lineal es de tratamiento difícil porque la convergencia numérica no puede ser fácilmente asegurada

y errores de redondeo ocurren inevitablemente.

De manera general, la diferencia, entre tener o no amortiguamiento, está en los resultados, el tratamiento en lo que respecta al álgebra lineal es igual. Básicamente, los autovalores y autovectores son todos reales cuando se tiene una estructura sin la presencia de amortiguamiento y complejos cuando es considerado el amortiguamiento.

Una solución adecuada de Φ en la ecuación (2.63) debe satisfacer las siguientes condiciones de ortogonalidad, según Dumont (2007),

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=2}^{2j} \Omega^{k-2} \Phi^T i \mathbf{C}_j \Phi \omega^{2j-k} + \sum_{k=1}^{2j} \Omega^{k-1} \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2j-k} \right] = \mathbf{I} \quad (2.64)$$

$$\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{2j-2} \Omega^k \Phi^T i \mathbf{C}_j \Phi \omega^{2j-k-1} + \sum_{k=1}^{2j-1} \Omega^k \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2j-k} \right] = \Omega. \quad (2.65)$$

El caso de problemas sin amortiguamiento, puede ser pensado como un caso particular de la ecuación (2.62) cuando $\mathbf{C}_j = 0$,

$$\mathbf{K}_{\epsilon(\omega)} \Phi = \left[\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (\omega^{2j} \mathbf{M}_j) \right] \Phi = 0, \quad (2.66)$$

que se puede reescribir, sustituyendo $\omega = \Omega$, como

$$\mathbf{K}_0 \Phi - \sum_{j=1}^n (\mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2j}) = 0. \quad (2.67)$$

La ecuación (2.67), requiere que los autovectores deben cumplir la condición de ortogonalidad que sigue

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{2j} \Omega^{k-1} \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2j-k} \right] = \mathbf{I}, \quad (2.68)$$

$$\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{2j-1} \Omega^k \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2j-k} \right] = \Omega. \quad (2.69)$$

El problema de autovalor, de la presente sección, puede ser programado computacionalmente utilizando cualquier lenguaje de programación, en el artículo de Dumont (2007) es presentado un algoritmo que puede usarse en problemas con y sin amortigua-

miento.

2.2.3.5. Proceso de superposición modal

Partiendo de la ecuación (2.60), a pesar de la complejidad que envuelve su solución por ser un sistema de ecuaciones diferenciales de alto orden, ecuación reescrita para facilitar el desenvolvimiento,

$$\left[\mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (-1)^j \left(\mathbf{C}_j \frac{\partial^{2j-1}}{\partial t^{2j-1}} + \mathbf{M}_j \frac{\partial^{2j}}{\partial t^{2j}} \right) \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t)^b,$$

aun es posible valerse de un proceso de superposición modal para su solución. Con ese propósito se introduce un conjunto de desplazamientos auxiliares $\mathbf{d}_j(t)$,

$$\mathbf{d}_j(t) = (i)^j \frac{\partial^j \mathbf{d}(t)}{\partial t^j} \quad \text{para} \quad j = 1 \dots 2n, \quad (2.70)$$

tal que, de acuerdo con las ecuaciones (2.70) y (2.60), puede escribirse un sistema aumentado de ecuaciones diferenciales como se observa en Dumont (2007),

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ 0 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{M}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1^b \\ \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_2^b \\ \mathbf{d}_3 - \mathbf{d}_3^b \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{2n} - \mathbf{d}_{2n}^b \end{pmatrix} \\ - \omega & \begin{bmatrix} i\mathbf{C}_1 & \mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_1 & i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & 0 \\ i\mathbf{C}_2 & \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{M}_2 & i\mathbf{C}_3 & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{d}}^b \\ \dot{\mathbf{d}}_1 - \dot{\mathbf{d}}_1^b \\ \dot{\mathbf{d}}_2 - \dot{\mathbf{d}}_2^b \\ \dot{\mathbf{d}}_3 - \dot{\mathbf{d}}_3^b \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{d}}_{2n} - \dot{\mathbf{d}}_{2n}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Utilizando conceptos de superposición modal, igual que el método clásico de superposición modal, puede aproximarse los desplazamientos \mathbf{d} , dependientes del tiempo, mediante un cambio de variable de la suma finita de contribuciones, dadas por el producto

$$\mathbf{d} = \Phi \eta(t), \quad (2.72)$$

donde Φ es la matriz de autovectores normalizados y $\eta_{(t)}$ es un vector de amplitudes, que resultan siendo las incógnitas del nuevo sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias, luego de aplicar esa expresión a la ecuación (2.71).

Para el caso de estructuras con amortiguamiento viscoso se obtiene la ecuación (2.73),

$$\Omega(\eta - \eta^b) - i(\dot{\eta} - \dot{\eta}^b) = \Phi^T(p - p^b), \quad (2.73)$$

que corresponde a un sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales de primer orden y que pueden ser resueltos por métodos tradicionales de integración. Finalmente, el vector de desplazamientos nodales \mathbf{d} puede recuperarse utilizando la ecuación (2.74), que representa el proceso de superposición de modos de vibración,

$$\mathbf{d} = \Phi\eta + \bar{\Phi}\bar{\eta}, \quad (2.74)$$

donde η son las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de la ecuación (2.73), representando el vector temporal de amplitudes, y $\bar{\eta}$ es su conjugado complejo; Φ es la matriz de autovectores y $\bar{\Phi}$ su respectiva matriz conjugada compleja.

En caso de estructuras sin la presencia de amortiguamiento viscoso, el sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias resultante es de segundo orden como se observa en la ecuación (2.75),

$$\Omega^2(\eta - \eta^b) + (\ddot{\eta} - \ddot{\eta}^b) = \Phi^T(p - p^b). \quad (2.75)$$

El vector de desplazamientos nodales \mathbf{d} se recupera utilizando la ecuación (2.76), que representa el proceso de superposición de modos de vibración,

$$\mathbf{d} = \Phi\eta. \quad (2.76)$$

CAPÍTULO 3 | Aplicaciones en Elementos Unidimensionales

En el presente capítulo es mostrado el desenvolvimiento de la formulación híbrida de elementos finitos para su aplicación en problemas dependientes del tiempo. Es aplicada a dos elementos estructurales: barra y viga de Bernoulli, considerando la presencia de amortiguamiento viscoso. Son mostradas las soluciones de las ecuaciones matriciales de equilibrio de ambos elementos estructurales, porque son necesarias para el montaje de la matriz de rigidez efectiva $\mathbf{K}_{e(\omega)}$, en el dominio de la frecuencia ω , para una barra en coordenadas globales y el uso en problemas de dinámica. El desenvolvimiento es importante para posteriormente realizar la implementación computacional de la técnica de superposición modal aplicada a *armaduras*.

3.1. Barra

El elemento estructural denominado como barra y que se muestra en la [Figura 3.1](#), es el elemento mas simple de la ingeniería estructural, son llamados unidimensionales porque su geometría tiene una dirección que predomina sobre las otras dos y se caracterizan, básicamente, por trabajar exclusivamente bajo cargas axiales de tracción o compresión en el sentido longitudinal.

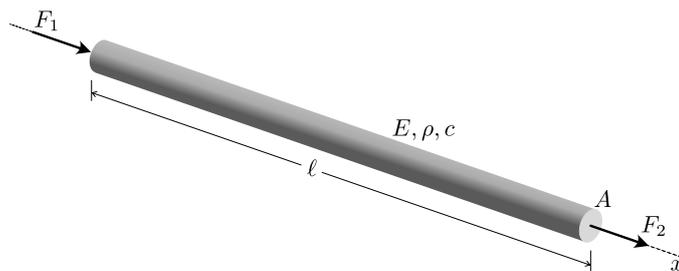


Figura 3.1: Barra unidimensional.

En la barra de la [Figura 3.1](#), F_1 y F_2 indican el sentido positivo en que actúan las fuerzas externas; la geometría está representada por la longitud ℓ y el área de la sección transversal A ; las propiedades del material que caracterizan al elemento son el módulo de elasticidad longitudinal E , el peso específico ρ y el coeficiente de amortiguamiento viscoso c . La barra de la [Figura 3.1](#) puede representar un elemento estructural o una pequeña porción del mismo, dependiendo de la naturaleza del problema.

3.1.1. Ecuación de gobierno

La ecuación diferencial parcial dependiente del tiempo que gobierna el movimiento vibratorio de una barra con amortiguamiento viscoso y que puede vibrar solamente en su sentido longitudinal por acción de fuerzas externas actuando en la misma dirección es dada por la ecuación (3.1),

$$E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (3.1)$$

donde la función $u(x, t)$ es el desplazamiento longitudinal que varía en el tiempo desde su posición de equilibrio inicial. La barra es definida para valores de tiempo $t > 0$ y dominio $0 \leq x \leq \ell$ como se observa en la [Figura 3.1](#). El coeficiente de amortiguamiento viscoso es $c = 2\zeta\rho$ que es caracterizado por el factor de amortiguamiento ζ .

3.1.2. Formulación en el dominio de la frecuencia

Suponiendo que el desplazamiento $u(x, t)$ de la ecuación (3.1) admite una solución por separación de variables espaciales y temporales como la ecuación

$$u(x, t) = u^*(x) \cdot e^{-i\omega t},$$

donde luego de las derivadas correspondientes y siendo los resultados sustituidos en la ecuación (3.1), está se expresa como

$$E \frac{d^2 u^*(x)}{dx^2} + \rho(\omega^2 + 2i\zeta\omega)u^*(x) = 0. \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) puede ser reescrita, de manera conveniente para la formulación del problema, como

$$\frac{d^2 u^*(x)}{dx^2} + k^2 u^*(x) = 0, \quad (3.3)$$

donde

$$k^2 = \frac{\rho}{E}(\omega^2 + 2i\zeta\omega). \quad (3.4)$$

Es importante observar que los términos del lado derecho de la ecuación (3.4) corresponden a las propiedades del material relativas a la masa (primer término) y amortiguamiento (segundo término), lo que representa una ventaja en la implementación computacional del método híbrido de elementos finitos ante la presencia de problemas con amortiguamiento viscoso.

3.1.3. Montaje de la matriz de rigidez efectiva

En barras, el contorno del elemento estructural son los dos puntos ubicados en las extremidades, representados por Γ_1 y Γ_2 , y la porción de la barra entre los dos puntos es el dominio, representado por Ω , como se observa en la [Figura 3.2](#).



Figura 3.2: Dominio y condiciones de contorno de la barra.

El método de elementos finitos híbridos, necesita en su formulación de la solución fundamental, que podemos obtener a partir de la ecuación (3.3) que tiene como solución general la ecuación (3.5),

$$u(x)^* = B_1 \frac{\text{sen}(kx)}{k} + B_2 \cos(kx), \quad (3.5)$$

que en el caso límite de la variable k tiene como solución estática la ecuación (3.6),

$$\lim_{k \rightarrow 0} u^*(x) = B_1 x + B_2. \quad (3.6)$$

Como se está analizando un problema en el dominio de la frecuencia, en términos de una superposición de soluciones armónicas, se requiere que $B_2 = 0$, ya que la solución oscila en torno de $u^*(0) = 0$.



Figura 3.3: Coordenadas externas e internas de la barra.

Según Dumont (2005), ante la presencia de una solución fundamental que oscila en torno de $u^*(0) = 0$, la manera adecuada de representar el campo de desplazamientos, en esa situación, es como una función de dos parámetros de fuerzas internas, p_1^* y p_2^* , como se observa a la derecha de la Figura 3.3, las cuales se interpretan como las bases de un sistema interno (o auxiliar) de coordenadas como sigue

$$u^* = \frac{1}{EA} \left\langle \frac{\text{sen}[kx]}{k} \quad \frac{\text{sen}[k(\ell - x)]}{k} \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} p_1^* \\ p_2^* \end{array} \right\} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^*. \quad (3.7)$$

De la teoría de la elasticidad lineal, el desplazamiento longitudinal se relaciona con la tensión (o esfuerzo) mediante la ecuación constitutiva conocida como *ley de Hooke*,

$$\sigma^* = E \frac{du^*(x)}{dx},$$

por lo tanto, de la ecuación (3.7), se obtiene el campo de tensiones que representa una *solución fundamental*,

$$\sigma^* = \frac{1}{A} \left\langle \cos[kx] \quad -\cos[k(\ell - x)] \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} p_1^* \\ p_2^* \end{array} \right\} \equiv \sigma^* \mathbf{p}^*. \quad (3.8)$$

Por otro lado, los desplazamientos, u_1 y u_2 , en las extremidades del elemento de barra, pueden representarse según las coordenadas externas, d_1 y d_2 , que se observan a la izquierda de la Figura 3.3, como

$$u_1 = \left\langle 1 \quad 0 \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \right\} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (3.9)$$

y

$$u_2 = \left\langle 0 \quad 1 \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \right\} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \quad \text{en } \Gamma_2, \quad (3.10)$$

donde \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 son las funciones de interpolación u_{im} definidas en la ecuación (2.33). En este caso específico de elementos unidimensionales, los valores en el contorno u_{im} son 1 ó 0 como se observa en las ecuaciones (3.9) y (3.10).

La forma integral de la matriz de transformación cinemática, \mathbf{H} , entre los sistemas \mathbf{d} y \mathbf{p}^* , definida en la ecuación (2.36) como

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{im} d\Gamma$$

es reescrita por conveniencia y nos permite calcular la forma matricial de \mathbf{H} , luego de substituir las ecuaciones (3.8), (3.9) y los valores de η_j . Según la Figura 3.2, donde se representan las normales del contorno, η_j , éstas asumen valores -1 o 1 , respectivamente, dependiendo del punto del contorno, Γ_1 o Γ_2 , donde se encuentran. Los resultados de la matriz de transformación cinemática, \mathbf{H} , se encuentran en la ecuación (3.11),

$$\mathbf{H} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\cos(k\ell) \end{array} \right\} (-1) \langle 1 \ 0 \rangle + \left\{ \begin{array}{c} \cos(k\ell) \\ -1 \end{array} \right\} (1) \langle 0 \ 1 \rangle$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & \cos(k\ell) \\ \cos(k\ell) & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

La forma integral de la matriz de flexibilidad \mathbf{F} en el sistema interno \mathbf{p}^* , definida en la ecuación (2.35) como

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}^* d\Gamma,$$

nos permite calcular la forma matricial de \mathbf{F} luego de substituir las ecuaciones (3.7), (3.8) y los valores de η_j . Los resultados se observan en la ecuación (3.12),

$$\mathbf{F} = \frac{1}{EA} \left[\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\cos(k\ell) \end{array} \right\} (-1) \langle 0 \ \frac{\text{sen}(k\ell)}{k} \rangle + \left\{ \begin{array}{c} \cos(k\ell) \\ -1 \end{array} \right\} (1) \langle \frac{\text{sen}(k\ell)}{k} \ 0 \rangle \right]$$

$$\mathbf{F} = \frac{\text{sen}(k\ell)}{kEA} \begin{bmatrix} \cos(k\ell) & -1 \\ -1 & \cos(k\ell) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Seguidamente, a partir de la ecuación (3.12), se calcula la respectiva inversa de la matriz de flexibilidad,

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{kEA}{\text{sen}^3(k\ell)} \begin{bmatrix} \cos(k\ell) & -1 \\ -1 & \cos(k\ell) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Finalmente, se obtiene la matriz de rigidez efectiva para un elemento de barra, a partir de la ecuación (2.45), definida como

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H},$$

luego de sustituir las ecuaciones (3.11) y (3.13), generando

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \frac{kEA}{\text{sen}(k\ell)} \begin{bmatrix} \cos(k\ell) & -1 \\ -1 & \cos(k\ell) \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

donde k se encuentra definida en la ecuación (3.4).

Con fines de verificación y coherencia de los resultados, se aplica el límite, donde k tiende a cero, a cada término de la ecuación (3.14), obteniéndose como se esperaba, la matriz de rigidez estática de la ecuación (3.15),

$$\mathbf{K} = \lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K}_{e(\omega)} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

3.2. Viga de Bernoulli

La viga, como se observa en la Figura 3.4, es un elemento estructural que trabaja generalmente a flexión, en su geometría una de las dimensiones predomina sobre las otras dos. Otra característica importante es que admite solamente cargas en la dirección perpendicular a su eje longitudinal.

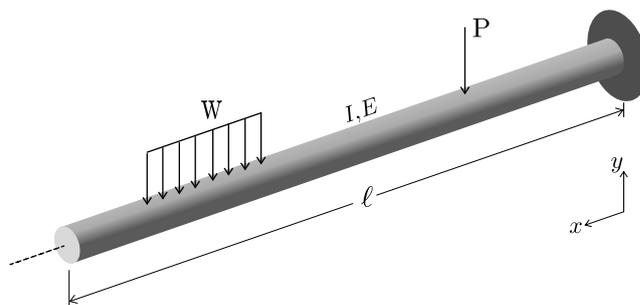


Figura 3.4: Viga de Bernoulli.

En la viga de la Figura 3.4, W y P son fuerzas externas aplicadas perpendicularmente al eje longitudinal; la geometría está representada por la longitud ℓ y el momento de inercia de área de la sección transversal, I ; la propiedad del material que caracteriza al elemento es el módulo de elasticidad longitudinal E . La viga de la Figura 3.4 puede representar un elemento estructural o una pequeña porción del mismo, dependiendo de la naturaleza del problema.

3.2.1. Ecuación de gobierno

La ecuación diferencial parcial dependiente del tiempo que gobierna el movimiento vibratorio de una viga con amortiguamiento viscoso y que puede vibrar solamente en su sentido transversal por acción de fuerzas externas actuando en la misma dirección es dada por la ecuación (3.16),

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - c \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (3.16)$$

donde la función $v(x, t)$ es el desplazamiento transversal que varía en el tiempo desde su posición de equilibrio inicial. La viga es definida para valores de tiempo $t > 0$ y dominio $0 \leq x \leq \ell$ como se observa en la Figura 3.4. El coeficiente de amortiguamiento viscoso es $c = 2\zeta\rho$ que es caracterizado por el factor de amortiguamiento ζ y la masa es representada por m .

3.2.2. Formulación en el dominio de la frecuencia

Suponiendo que el desplazamiento $v(x, t)$ de la ecuación (3.16) admite una solución por separación de variables como la ecuación

$$v(x, t) = v^*(x) \cdot e^{-i\omega t},$$

donde luego de las derivadas correspondientes y siendo los resultados sustituidos en la ecuación (3.16), está se expresa como

$$EI \frac{d^4 v^*(x)}{dx^4} - m(\omega^2 + 2i\zeta\omega)v^*(x) = 0 \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) puede ser reescrita, de manera conveniente para la formulación del problema, como

$$\frac{d^4 v^*(x)}{dx^4} - k^4 v^*(x) = 0 \quad (3.18)$$

donde

$$k^4 = \frac{m}{EI}(\omega^2 + 2i\zeta\omega). \quad (3.19)$$

Es importante observar que los términos del lado derecho de la ecuación (3.19) corresponden a las propiedades del material relativos a la masa (primer término) y amortiguamiento (segundo término).

3.2.3. Matriz de rigidez efectiva con 4 grados de libertad

Con el propósito de obtener una solución fundamental para la ecuación (3.18), su solución general puede ser escrita de manera conveniente como una superposición de términos armónicos como

$$v(x)^* = B_1 \frac{\text{sen}(kx) + \text{sinh}(kx)}{k} + B_2 \frac{\text{sen}(kx) - \text{sinh}(kx)}{k^3} + B_3 [\cos(kx) + \cosh(kx)] + B_4 \frac{\cos(kx) - \cosh(kx)}{k^3}, \quad (3.20)$$

que en el caso límite de la variable k tiene como solución estática la ecuación (3.20),

$$\lim_{k \rightarrow 0} v^*(x) = B_3 + B_1 x - B_4 x^2 - B_2 x^3. \quad (3.21)$$

A partir de la ecuación (3.20) es posible representar el campo de desplazamientos en función de cuatro parámetros de fuerzas p_i^* , que se interpretan como las bases del sistema interno de coordenadas,

$$v^* = \frac{1}{EA} \left\langle v_1^*(x) \quad v_2^*(x) \quad v_3^*(x) \quad v_4^*(x) \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{v}^* \mathbf{p}^*, \quad (3.22)$$

donde los términos correspondientes a los desplazamientos internos son:

$$\begin{aligned} v_1^*(x) &= \frac{\text{sen}(kx) + \text{sinh}(kx)}{k}, & v_2^*(x) &= \frac{\text{sen}(kx) - \text{sinh}(kx)}{k^3}, \\ v_3^*(x) &= \cos(kx) + \cosh(kx), & v_4^*(x) &= \frac{\cos(kx) - \cosh(kx)}{k^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Utilizando la ecuación (3.22), se obtiene el campo de desplazamientos que es descrito como

$$\begin{Bmatrix} v^*(x) \\ \frac{dv^*(x)}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^*(x) & v_2^*(x) & v_3^*(x) & v_4^*(x) \\ \frac{dv_1^*(x)}{dx} & \frac{dv_2^*(x)}{dx} & \frac{dv_3^*(x)}{dx} & \frac{dv_4^*(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^* \mathbf{p}^*. \quad (3.24)$$

Consecuentemente, podemos calcular el respectivo campo de fuerzas internas (fuerzas

cortantes y momentos flectores) como se observa en la ecuación (3.25),

$$\begin{Bmatrix} Q^*(x) \\ M^*(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^3 v_1^*(x)}{dx^3} & \frac{d^3 v_2^*(x)}{dx^3} & \frac{d^3 v_3^*(x)}{dx^3} & \frac{d^3 v_4^*(x)}{dx^3} \\ \frac{d^2 v_1^*(x)}{dx^2} & \frac{d^2 v_2^*(x)}{dx^2} & \frac{d^2 v_3^*(x)}{dx^2} & \frac{d^2 v_4^*(x)}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^* \mathbf{p}^*. \quad (3.25)$$

Por otro lado, en el lado izquierdo de la Figura 3.5 se definen los grados de libertad (desplazamientos y rotaciones en ambas extremidades del elemento) y en el lado derecho de la Figura 3.5 se define la convención de signos positivos para las fuerzas internas (fuerza cortante, Q , y momento flector, M).

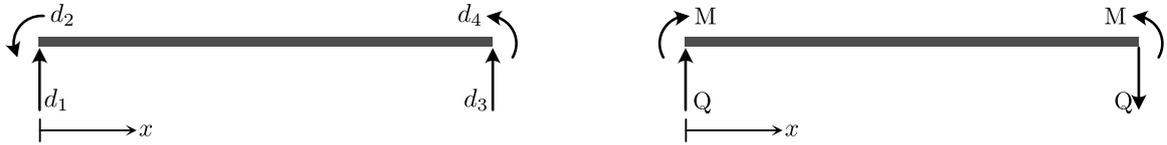


Figura 3.5: Grados de libertad y convención de signos de las fuerzas internas.

A partir de las definiciones de la Figura 3.5, se obtienen las matrices de desplazamientos externos y las matrices matrices η_i con los cosenos directores para el contorno del elemento, Γ_1 y Γ_2 , como se observa en la ecuación 3.26,

$$\begin{Bmatrix} v \\ \frac{dv(x)}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \quad \text{y} \quad \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{en } \Gamma_1, \quad (3.26)$$

y en la ecuación (3.27),

$$\begin{Bmatrix} v \\ \frac{dv(x)}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \quad \text{y} \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en } \Gamma_2. \quad (3.27)$$

La forma integral de la matriz de transformación cinemática, \mathbf{H} , entre los sistemas \mathbf{d} y \mathbf{p}^* , definida en la ecuación (2.36) como

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma,$$

permite calcular la forma matricial de \mathbf{H} , luego de substituir las ecuaciones (3.25), (3.26) y (3.27) en la ecuación (3.28) para obtener la matriz de la ecuación (3.29), donde por simplicidad se escribe $S = \sinh(k\ell)$, $C = \cosh(k\ell)$, $s = \sin(k\ell)$ y $c = \cos(k\ell)$ para tener el resultado mas compacto.

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=0} \eta_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=L} \eta_2 \mathbf{N}_2 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{H} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2(c - C) & k(S - s) \\ -2 & 0 & C + c & -(S + s)/k \\ 0 & 0 & -k^3(S + s) & k^2(C - c) \\ 0 & 2 & k(S - s) & -C - c \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Seguidamente, la forma integral de la matriz de flexibilidad \mathbf{F} en el sistema interno \mathbf{p}^* , definida en la ecuación (2.35) como

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}^* d\Gamma,$$

permite calcular la forma matricial de \mathbf{F} , luego de substituir las ecuaciones (3.24), (3.25) y los valores de η_j de la ecuación (3.26) en la ecuacion 3.30 para obtener la ecuación (3.31).

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=0} \eta_1 \mathbf{u}^{*\text{T}} \Big|_{x=0} + \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=\ell} \eta_2 \mathbf{u}^{*\text{T}} \Big|_{x=\ell} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{F} = -2EI \begin{bmatrix} k(Cs - Sc) & 0 & k^2 Ss & -1 + Cc \\ 0 & (Sc - Cs)/k^3 & 1 - Cc & -Sc/k^2 \\ k^2 Ss & 1 - Cc & k^3(Sc + Cs) & 0 \\ -1 + Cc & -Sc/k^2 & 0 & -(Sc + Cs)/k \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Finalmente, después de calcular la inversa de la matriz de flexibilidad, \mathbf{F}^{-1} , se genera la matriz de rigidez efectiva para un elemento de viga, a partir de la ecuación (2.45) definida como

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{H}^{\text{T}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H},$$

sustituyendo la ecuación (3.29) y la inversa de la ecuación (3.31) para obtener

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \frac{EI k}{Cc - 1} \begin{bmatrix} k^2(Sc - Cs) & ksS & -k^2(S + s) & k(C - c) \\ ksS & (Cs - Sc) & k(C - c) & S - s \\ -k^2(S + s) & k(C - c) & k^2(Sc - Cs) & -ksS \\ k(C - c) & S - s & -ksS & (Cs - Sc) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Con la finalidad de verificar la coherencia del resultado, se aplica el límite a la variable k en cada término de la ecuación (3.32), obteniéndose como se esperaba, la matriz de rigidez estática para vigas,

$$\mathbf{K} = \lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K}_{e(\omega)} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}.$$

3.2.4. Matriz de rigidez efectiva con 6 grados de libertad

La matriz de rigidez efectiva, $\mathbf{K}_{e(\omega)}$, en coordenadas locales según los grados de libertad de la Figura 3.6, es la matriz de la ecuación (3.33),

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = h \begin{bmatrix} \frac{k^{\S} E A c^{\S}}{s^{\S} h} & 0 & 0 & -\frac{k^{\S} E A}{s^{\S} h} & 0 & 0 \\ 0 & k^2(Sc + Cs) & ksS & 0 & -k^2(S + s) & k(C - c) \\ 0 & ksS & (Cs - Sc) & 0 & -k(C - c) & S - s \\ -\frac{k^{\S} E A}{s^{\S} h} & 0 & 0 & \frac{k^{\S} E A c^{\S}}{s^{\S} h} & 0 & 0 \\ 0 & -k^2(S + s) & -k(C - c) & 0 & k^2(Sc + Cs) & -ksS \\ 0 & k(C - c) & S - s & 0 & -ksS & (Cs - Sc) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

donde

$$s^{\S} = \text{sen}(k^{\S} \ell), \quad c^{\S} = \text{cos}(k^{\S} \ell),$$

$$k^{\S} = \sqrt{\frac{\rho}{E}(\omega^2 + 2i\zeta\omega)}, \quad h = \frac{EI k}{Cc - 1}.$$

La matriz se obtiene por la superposición de la matriz de la ecuación (3.14) que corresponde a un elemento de barra (dos grados de libertad en el sentido longitudinal) y la matriz de la ecuación (3.32) que corresponde a un elemento de viga (cuatro grados de libertad, dos en su sentido transversal y dos de rotación).



Figura 3.6: Grados de libertad en coordenadas locales de la viga.

3.3. Matriz de Rigidez efectiva para armadura

Es posible utilizar la matriz de rigidez efectiva para vigas de la ecuación (3.33), con seis grados de libertad en coordenadas locales, representados según la Figura 3.6, para generar la matriz de rigidez efectiva de un elemento de armadura con cuatro grados de libertad en coordenadas locales aplicando conceptos de condensación dinámica a los dos grados de libertad relativos a la rotación (d_3 y d_6). Después de la condensación dinámica se reordena la numeración de los grados de libertad de traslación que quedaron (d_1 , d_2 , d_4 y d_5).

La numeración de los grados de libertad del nuevo sistema de coordenadas locales del elemento estructural se encuentran representados en la Figura 3.7.



Figura 3.7: Sistema de coordenadas locales con cuatro grados de libertad.

Para realizar la condensación dinámica, primero, en la matriz de la ecuación (3.33) se separan los *grados de libertad conservados* (d_1 , d_2 , d_4 y d_5 representados por el subíndice c) de los *grados de libertad extraídos* (d_3 y d_6 representados por el subíndice e), mediante una permutación entre filas y entre columnas. El paso anterior permite obtener la nueva matriz, ver ecuación (3.34), ordenada de manera conveniente para facilitar la condensación dinámica. Se indican en la parte superior y lado izquierdo la nueva posición de las filas y columnas, respectivamente. Los subíndices de cada término

κ_{ij} representa la posición del término en la matriz de la ecuación (3.33).

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & \kappa_{11} & 0 & \kappa_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \kappa_{22} & 0 & \kappa_{25} & \kappa_{23} & \kappa_{26} \\ 4 & \kappa_{41} & 0 & \kappa_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \kappa_{52} & 0 & \kappa_{55} & \kappa_{53} & \kappa_{56} \\ 3 & 0 & \kappa_{32} & 0 & \kappa_{35} & \kappa_{33} & \kappa_{36} \\ 6 & 0 & \kappa_{62} & 0 & \kappa_{65} & \kappa_{63} & \kappa_{66} \end{array} \\ \hline \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ce} \\ \mathbf{K}_{ec} & \mathbf{K}_{ee} \end{array} \right] \quad (3.34)$$

La matriz de la ecuación (3.34) se encuentra dividida en cuatro submatrices que se sustituyen en la ecuación (3.35),

$$\mathbf{K}_{cond} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie}, \quad (3.35)$$

para, finalmente, obtener la matriz de rigidez efectiva condensada que se muestra en la matriz de la ecuación (3.36) en coordenadas locales según la Figura 3.7.

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{k^{\S} E A c^{\S}}{s^{\S}} & 0 & -\frac{k^{\S} E A}{s^{\S}} & 0 \\ 0 & \frac{k^3 E I (S c - C s)}{2 S s} & 0 & -\frac{k^3 E I (S - s)}{2 S s} \\ -\frac{k^{\S} E A}{s^{\S}} & 0 & \frac{k^{\S} E A c^{\S}}{s^{\S}} & 0 \\ 0 & -\frac{k^3 E I (S - s)}{2 S s} & 0 & \frac{k^3 E I (S c - C s)}{2 S s} \end{array} \right] \quad (3.36)$$

En general, la mayoría de veces, el sistema de coordenadas locales no coincide con el sistema de coordenadas globales, por lo tanto, se requiere transformar la matriz de la ecuación (3.36) en coordenadas locales para coordenadas globales, según los grados de libertad mostrados en la Figura 3.8.

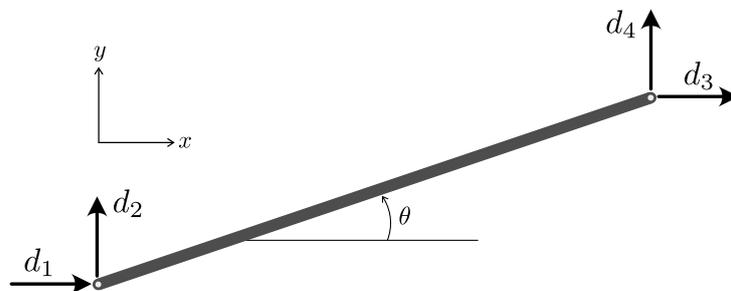


Figura 3.8: Grados de libertad e el sistema de coordenadas globales.

La matriz de transformación \mathbf{T} , para elementos de armadura, que transforma los grados de libertad en coordenadas locales según la [Figura 3.7](#) para el sistema en coordenadas globales de la [Figura 3.8](#) es

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sen \theta & 0 & 0 \\ -\sen \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sen \theta \\ 0 & 0 & -\sen \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Podemos utilizar la matriz de la ecuación (3.37) para transformar la matriz de rigidez efectiva $\mathbf{K}_{e(\omega)}$ de la ecuación (3.36), en coordenadas locales para el sistema global $\mathbf{K}_{e(\omega)g}$ mediante el producto de matrices que sigue

$$\mathbf{K}_{e(\omega)g} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{e(\omega)} \mathbf{T}. \quad (3.38)$$

CAPÍTULO 4 | Análisis de Resultados y Discusión

En el presente capítulo se presentan ejemplos numéricos de estructuras sometidas a fuerzas externas dependientes del tiempo, con la finalidad de evaluar la eficiencia de la Técnica de Superposición Modal Avanzada que actúa en conjunto con el Método Híbrido de Elementos Finitos.

Con el propósito de validar los resultados de las soluciones, éstas son comparadas con resultados de soluciones analíticas cuando existe. En el caso de armaduras sometidas a cargas dinámicas, donde no hay solución analítica, los resultados se comparan con resultados de métodos discretos robustos que se encuentran en la literatura.

Los algoritmos computacionales fueron codificados en el ambiente de programación MAPLE 15.1, usado como entorno principal por la versatilidad que presenta en la manipulación de datos, y el lenguaje de programación FORTRAN 90 para la codificación del algoritmo que calcula los de valores propios y sus respectivos autovectores.

Los ejemplos que se presentan son:

- Estudio de armadura plana.

4.1. Armadura plana

En la [Figura 4.1](#) se ilustra un ejemplo de armadura plana propuesta en el libro de [Weaver \(1987\)](#) para analizar las frecuencias y modos de vibración. La armadura está formada por tres barras y tres nodos. El nudo A tiene restringido su movimiento vertical, el nudo B tiene restringido todos sus movimientos de traslación y en el nudo C es aplicada una fuerza horizontal dependiente del tiempo $P(t)$.

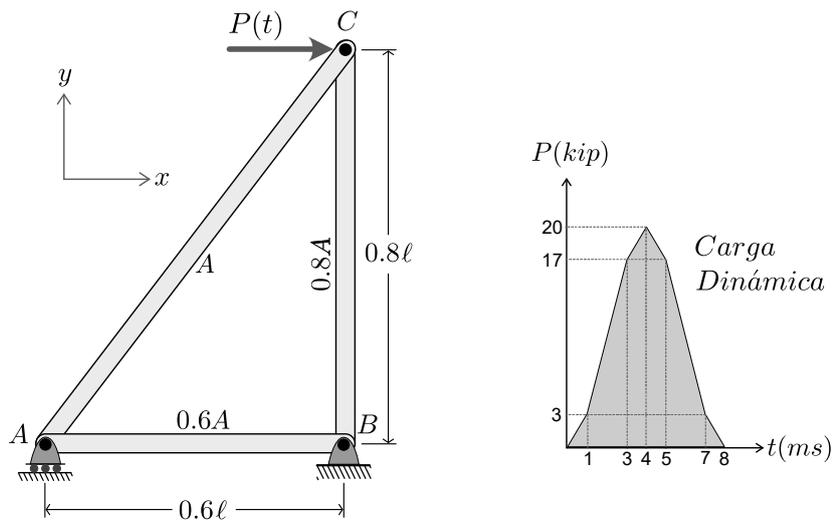


Figura 4.1: Armadura sometida a carga dinámica $P(t)$.

La geometría de la armadura en equilibrio dinámico de la [Figura 4.1](#), que se estudia en la presente sección, es caracterizada por la barra AC que tiene área de sección transversal A y longitud ℓ .

La fuerza dinámica aplicada $P(t)$ es una fuerza de pulso de corta duración, medida en milisegundos como se observa a la derecha de la [Figura 4.1](#), pulso que puede ser construido con los pares de datos de la [Tabla 4.1](#).

Tiempo (ms)	0,0	1,0	3,0	4,0	5,0	7,0	8,0
Fuerza (kip)	0,0	3,0	17,0	20,0	17,0	3,0	0,0

Tabla 4.1: Pares de tiempo-fuerza que caracterizan la carga dinámica aplicada.

Los datos estructurales, respecto a la geometría y propiedades físicas del material, necesarios para la armadura en estudio, son calculados a partir de los siguientes valores numéricos asignados a los parámetros E , ρ , ℓ y A :

- Módulo de elasticidad longitudinal: $E = 3,0 \times 10^4 \text{ kip/in}^2$
- Masa específica: $\rho = 7,35 \times 10^{-7} \text{ kip}\cdot\text{s}^2/\text{in}^4$
- Área de la sección transversal: $A = 10 \text{ in}^2$
- Longitud de la barra: $\ell = 250 \text{ in}$

donde el material es acero y el sistema de unidades el inglés. Con los valores numéricos y la [Figura 4.1](#) se obtiene la geometría de cada una de las barras de la armadura, lo que se resume en la [Tabla 4.2](#).

Unidades	Longitud	Área
	<i>pulg</i>	<i>pulg</i> ²
Barra <i>AC</i>	250,0	10,0
Barra <i>AB</i>	150,0	6,0
Barra <i>CB</i>	200,0	8,0

Tabla 4.2: Longitud y área de la sección transversal de cada barras.

Con el objetivo de validar la implementación computacional del Método híbrido de Elementos Finitos y la técnica de superposición modal avanzada, la primera fase de la solución del presente ejemplo, será comparar los resultados del libro de [Weaver \(1987\)](#) con sus equivalentes de la técnica propuesta en el presente trabajo, es decir, utilizando la matriz de rigidez y una matriz de masa, que corresponde a la forma clásica de resolver problemas de dinámica.

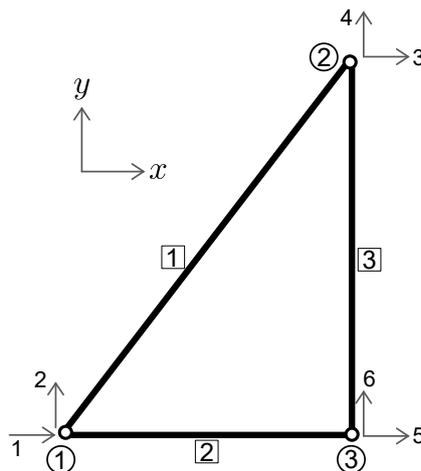


Figura 4.2: Numeración de nudos, barras y grados de libertad de la armadura.

La armadura, en principio, como sólido elástico, es un cuerpo continuo formado por infinitos puntos, por tanto, tenemos infinitos modos de vibración, lo que sumado a

su geometría hace inviable tener por soluciones analíticas. Para una solución discreta por métodos numéricos, la armadura se divide en tres barras (subdominios 1, 2 y 3) unidas por 3 nudos (rótulas 1, 2 y 3). Por hipótesis de las armaduras, cada nudo puede tener 2 grados de libertad de traslación. Sin considerar los apoyos, la armadura tiene 6 grados de libertad, como podemos ver en la [Figura 4.2](#); considerando las restricciones de los apoyos de la [Figura 4.1](#), la armadura tiene 3 grados de libertad propiamente dichos (1, 3 y 4), porque los otros 3 posibles movimientos (2, 5 y 6) se encuentran restringidos por los apoyos.

En la [Tabla 4.3](#), se presentan las frecuencias naturales (raíz cuadrada de los autovalores obtenidos) que corresponden a los grados de libertad 1, 3 y 4 de la armadura discretizada según la [Figura 4.2](#), con fines de comparación, los valores son reproducidos con el número de cifras significativas que se presentan en el libro de referencia y los valores calculados mediante la técnica avanzada de superposición modal con doble precisión. Observamos que los resultados son equivalentes a menos de las cifras significativas.

Frecuencia natural	Weaver <i>rad/s</i>	TSMA <i>rad/s</i>
1. ^{ra}	419,95	419,95111253086
2. ^{da}	1167,7	1167,7097411942
3. ^{ra}	1861,8	1861,7954206174

Tabla 4.3: Frecuencias naturales de los grados de libertad 1, 3 y 4.

Los modos de vibración (autovectores calculados) de la armadura, correspondientes a cada una de las frecuencias naturales de vibración de la [Tabla 4.3](#), calculadas mediante la técnica propuesta en el presente trabajo, se presentan en la parte superior de la [Tabla 4.4](#) y se encuentran representados gráficamente en la [Figura 4.3](#). Cada modo de vibración fue normalizado respecto al término mayor, lo que no sería necesario para los cálculos, se realizó básicamente para poder compararlos con los modos de vibración presentados en la parte inferior de la [Tabla 4.4](#) y que corresponden al libro de referencia. Los modos de vibración corresponden a los grados de libertad 1, 3 y 4 de la armadura, cuyas direcciones se encuentran representadas en la [Figura 4.2](#).

En la [Figura 4.3](#), el gráfico (a) muestra la dirección de los grados de libertad de la armadura. Los gráficos (b), (c) y (d) representan a los modos de vibración correspondientes a la primera, segunda y tercera frecuencia natural de vibración de la armadura, respectivamente.

Grado de libertad	1 ^{er} modo de vibración	2 ^{do} modo de vibración	3 ^{er} modo de vibración
1	0,2313746283	0,8672532313	1,0000000000
3	1,0000000000	-0,1714933019	-0,6050412043
4	-0,2472171566	1,0000000000	-0,6106847663
- Resultados del libro de Weaver (1987)			
1	0,23137	0,86725	1,0000
3	1,00000	-0,17149	-0,60504
4	-0,24722	1,00000	-0,61068

Tabla 4.4: Comparación de los modos de vibración (autovalores).

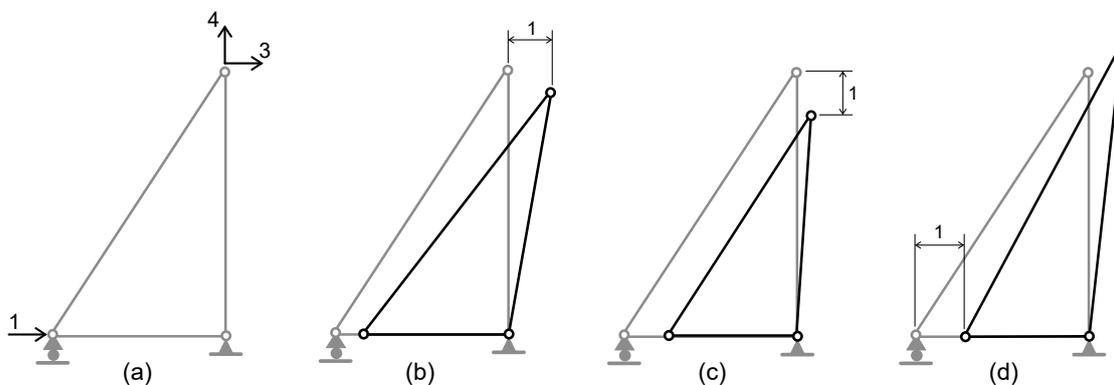


Figura 4.3: Modos de vibración representados gráficamente.

Finalmente, en esta primera fase, se comparan las respuestas dinámicas de los grados de libertad 3 y 4 del nudo 2, como se observa a la izquierda de la [Figura 4.4](#) y a la derecha de la [Figura 4.4](#), respectivamente. Se observa una pequeña diferencia entre los desplazamientos obtenidos por la técnica de superposición modal avanzada, con una matriz de masa, y los resultados del libro usado como referencia. Los resultados de manera general son satisfactorios, para justificar la diferencia que se presenta en ambos grados de libertad, se pueden citar dos motivos relevantes a manera de explicación:

- Las aproximaciones utilizadas por el libro de referencia de [Weaver \(1987\)](#), lo que puede observarse en las cifras significativas de las frecuencias naturales ω y los modos de vibración Φ de la [Tabla 4.3](#) y [Tabla 4.4](#).
- La combinación de la técnica de superposición modal avanzada y el método híbrido de elementos finitos ofrece ventajas significativas para el análisis al compararla con los métodos clásicos, como vimos en el [Sección 2.2](#) y [Subsección 2.2.3](#), por lo tanto, podemos esperar mejores resultados.

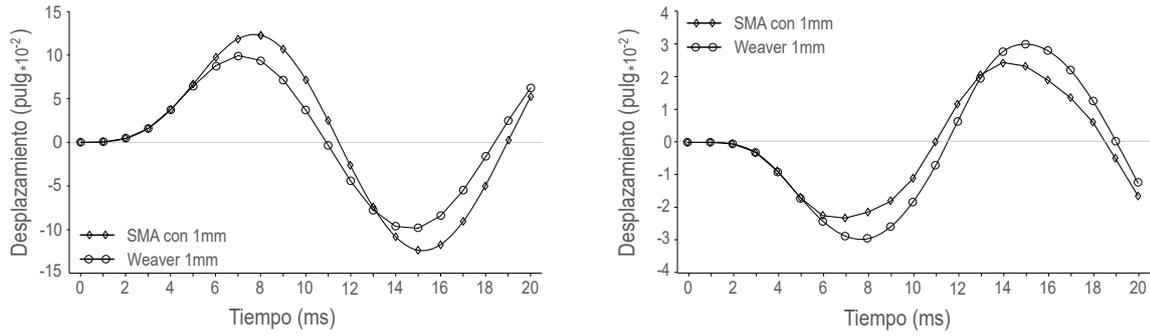


Figura 4.4: Desplazamientos con una matriz de masa. Grados de libertad 3 y 4.

Lo que es posible comparar entre los dos métodos para validar el código computacional fue realizado, es decir, resultados con una matriz de masa, que es viable calcular utilizando los métodos clásicos. Por otro lado, la formulación propuesta en el presente trabajo, permite explorar aun mas el ejemplo, es como tener una *lupa* que nos permite observar nuevas características intrínsecas de la armadura que pueden manifestarse en la respuesta de la estructura.

De manera simple, matemáticamente, comparamos resultados de la ecuación del movimiento sin presencia de amortiguamiento, que corresponden a la ecuación (4.1),

$$\mathbf{M}_1 \ddot{u} + \mathbf{K}_0 u = \mathbf{F}(t), \quad (4.1)$$

que usan los métodos clásicos para resolver problemas de vibración por cargas dinámicas. Donde las matrices \mathbf{M}_1 y \mathbf{K}_0 , en términos de la metodología propuesta en el presente trabajo, se calculan expandiendo la matriz $\mathbf{K}_{e(\omega)}$ de la ecuación (3.32), que se encuentra en el dominio de la frecuencia, como una serie de potencias de frecuencias como se observa en la ecuación (2.55) truncada para el valor n de la serie y que reescribimos por conveniencia

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (\omega^{2j} \mathbf{M}_j)$$

a manera de ejemplo, podemos truncar la serie con $n = 1$, obteniendo la ecuación (4.2),

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - \mathbf{M}_1 \omega^2, \quad (4.2)$$

de donde se extraen las matrices \mathbf{K}_0 y \mathbf{M}_1 , que técnicamente es suficiente para resolver la ecuación (4.1).

A partir de ahora, ya validada la implementación computacional, comenzaremos una segunda fase de estudio, resaltando que a diferencia de los métodos clásicos la

formulación propuesta permite resolver el mismo problema truncando la serie para diferentes valores de n . Para estudiar la respuesta de la estructura, en el presente trabajo, se truncara la serie para valores de $n = 1, 2, \dots, 5, 6$. En la ecuación (4.3) vemos como ejemplo la serie para $n = 6$.

$$\mathbf{K}_{e(\omega)} = \mathbf{K}_0 - \mathbf{M}_1\omega^2 - \mathbf{M}_2\omega^4 - \dots - \mathbf{M}_5\omega^{10} - \mathbf{M}_6\omega^{12} \quad (4.3)$$

Con la finalidad de tener un padrón en la terminología, usaremos el término *matriz de masa* para indicar el número de matrices \mathbf{M}_i de la ecuación (4.3) que se usa para resolver el problema. Por ejemplo: una *matriz de masa* cuando se usa \mathbf{M}_1 , dos *matrices de masa* cuando se usa \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 , tres *matrices de masa* cuando se usa \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 y \mathbf{M}_3 , etc.

Una observación importante, es que, a partir de la segunda matriz de masa, las matrices dependen del momento de inercia de área de la sección transversal de las barras. El ejemplo del libro de referencia Weaver (1987) trabaja con una matriz de masa, que necesita solamente del valor del área de la sección transversal, que como sabemos no varia con la geometría a diferencia del momento de inercia de área que si lo hace. Para resolver ese inconveniente, se usa el área que es dato del problema en el libro de referencia para construir una sección transversal equivalente al valor del área, para seguidamente calcular el momento de inercia de área que se usa en los cálculos. La geometría de la sección transversal puede verse en la Figura 4.5 y los valores para cada una de las barras con sus respectivas unidades se encuentran en la Tabla 4.5.

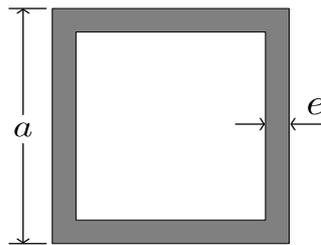


Figura 4.5: Geometría de la sección transversal de las tres barras.

		Sección Transversal		
		Barra 1	Barra 2	Barra 3
Espesura	e in	0,16036294	0,09582106	0,128024785
Altura	a in	15,75	15,75	15,75
Área	A in ²	10,0	6,0	8,0
Momento de inercia	J in ⁴	405,104172	245,062503	325,416670

Tabla 4.5: Geometría de la sección transversal de las barras.

En esta fase del presente estudio, tendremos como respuesta de la estructura, seis desplazamientos diferentes, uno por cada valor de n en que la serie fue truncada. Los resultados en términos de las frecuencias naturales de vibración, utilizando de una a seis matrices de masa, para los grados de libertad 1, 3 y 4, se muestran en la [Tabla 4.6](#) y sus correspondientes desplazamientos relativos al grado de libertad 3 de la [Figura 4.2](#) se encuentran gráficamente representados en la [Figura 4.6](#).

Frecuencia natural	1 mm <i>rad/s</i>	2 mm <i>rad/s</i>	3 mm <i>rad/s</i>	4 mm <i>rad/s</i>	5 mm <i>rad/s</i>	6 mm <i>rad/s</i>
1. ^{ra}	419,951	297,020	253,536	232,948	221,354	214,101
2. ^{da}	1167,71	948,492	665,454	544,075	481,527	444,1582
3. ^{ra}	1861,79	1078,01	985,789	934,450	899,174	874,284

Tabla 4.6: Frecuencias naturales de vibración, donde mm es matriz de masa.

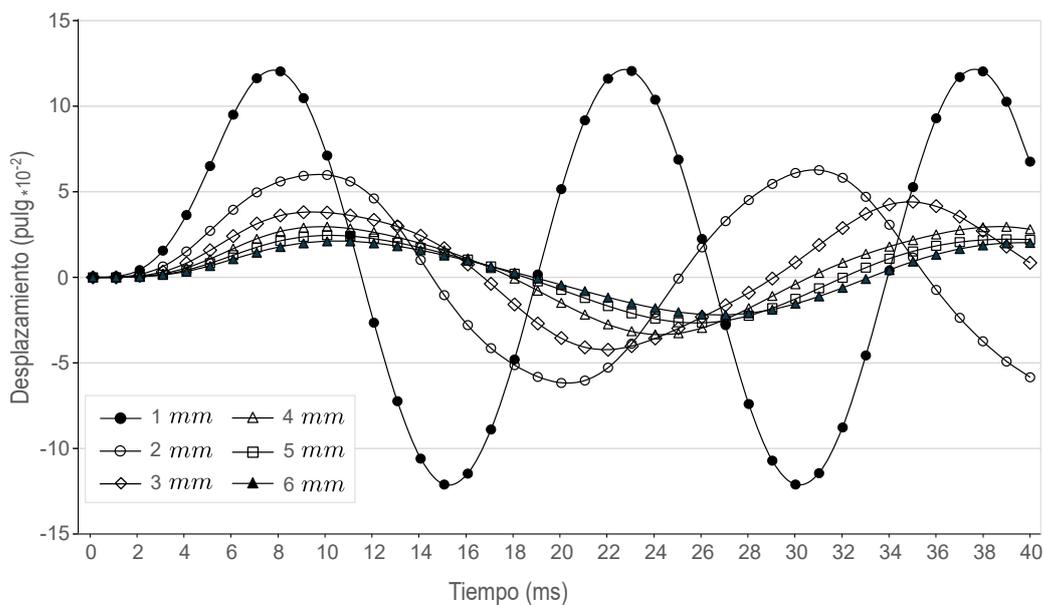


Figura 4.6: Desplazamientos del grado de libertad 3, donde mm es matriz de masa.

De las respuestas, de frecuencias naturales de vibración de la [Tabla 4.6](#) y desplazamientos del grado de libertad 3 de la [Figura 4.6](#), se evidencia que no hay convergencia de los resultados, por lo tanto, no sabemos cual es la respuesta de la estructura. A partir de esa información, podemos concluir que, probablemente, discretizar la armadura del presente ejemplo, con 3 barras unidas por 3 nudos, físicamente no representa de manera adecuada al problema, en la discretización se deben haber perdido frecuencias naturales y sus respectivos modos de vibración representativos de la estructura. Es importante resaltar que al verificar los desplazamientos de los grados de libertad 1 y 4 se manifestó

el mismo fenómeno, lo que refuerza la no convergencia de la estructura, los gráficos no fueron incluidos porque muestran lo mismo que el grado de libertad 2 y se tendrían las mismas conclusiones.

Concluir que no hubo convergencia de las respuestas de la armadura, fue posible porque la técnica de superposición modal permite trabajar con diferentes números de matrices de masa, por tanto, explora mejor las propiedades físicas y geométricas intrínsecas de la armadura, dejando en evidencia fenómenos que con los métodos clásicos no es posible.

Para recuperar las frecuencias naturales de vibración, posiblemente perdidas en la primera discretización, se optó por una segunda discretización de la armadura, que consiste en aumentar tres nudos, ubicados en los puntos intermedios de cada barra. Con el propósito que la estructura no pierda las características que tiene por hipótesis para ser considerada armadura, es necesario garantizar la continuidad de los tres nudos aumentados, lo que podemos conseguir utilizando barras donde los *nodos intermedios* tengan comportamiento de viga (3 grados de libertad, siendo uno de rotación) y los *nodos extremos* comportamiento de armadura (rótula con 2 grados de libertad), como se observa en la [Figura 4.7](#), es decir, usar elementos con 5 grados de libertad.

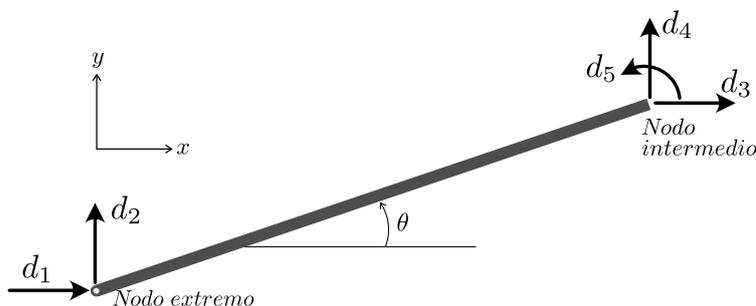


Figura 4.7: Sistema de coordenadas global con 5 grados de libertad.

En resumen, la armadura, de manera global, en esta segunda discretización está conformada por 6 barras unidas por 6 nodos (3 nodos extremos y 3 nodos intermedios) y 12 grados de libertad propiamente dichos (serían 15 grados de libertad si no consideramos las restricciones en los apoyos). La distribución de la numeración de los nodos, barras y grados de libertad son mostrados en la [Figura 4.8](#).

En la [Tabla 4.7](#) se muestran resultados de las frecuencias naturales hasta con 6 matrices de masa de la armadura discretizada con 6 barras, se observa como las frecuencias convergen en la medida que se aumenta el número de matrices de masa y que la velocidad de convergencia es mayor en las frecuencias mas bajas en comparación a las mas altas. El hecho que la velocidad de convergencia sea menor en las frecuencias

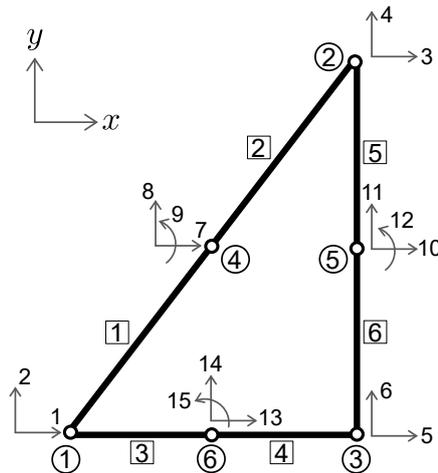


Figura 4.8: Numeración de nudos, barras y grados de libertad de la armadura discretizada por 6 barras.

naturales mas altas, no debe perjudicar la respuesta de la estructura, porque en problemas de dinámica estructural, las frecuencias naturales mas representativas son las menores. Por lo tanto, no hay necesidad de seguir aumentando las matrices de masa hasta que las frecuencias mas altas converjan completamente.

Frecuencia natural	1 mm <i>rad/s</i>	2 mm <i>rad/s</i>	3 mm <i>rad/s</i>	4 mm <i>rad/s</i>	5 mm <i>rad/s</i>	6 mm <i>rad/s</i>
1. ^{ra}	353,078	349,675	349,566	349,562	349,562	349,562
2. ^{da}	587,105	579,421	578,980	578,946	578,943	578,943
3. ^{ra}	912,077	890,677	887,323	886,639	886,488	886,487
4. ^{ta}	1053,82	1008,44	1000,19	998,072	997,474	997,471
5. ^{ta}	1304,69	1285,07	1283,96	1283,89	1283,89	1283,87
6. ^{ta}	1772,78	1582,21	1534,04	1514,55	1504,82	1504,01
7. ^{ma}	2172,98	1987,37	1942,45	1925,10	1917,17	1915,15
8. ^{va}	2824,39	2415,66	2326,01	2293,95	2279,29	2262,32
9. ^{na}	3514,62	3205,79	3136,85	3115,75	3108,34	3103,85
10. ^{ma}	4704,16	3862,30	3660,64	3590,36	3561,94	3549,96
11. ^{ava}	4904,92	4382,45	4238,99	4180,80	4152,21	4136,63
12. ^{ava}	5741,09	5076,74	4874,80	4784,32	4733,83	4720,184

Tabla 4.7: Frecuencias naturales de vibración, donde mm es la matriz de masa.

En la [Figura 4.9](#) se representan gráficamente las frecuencias naturales y su convergencia, puede observarse una pequeña diferencia cuando son calculadas utilizando

una matriz de masa. La convergencia de las frecuencias naturales, es un indicativo que la discretización con 6 barras (subdominios) representan, físicamente, de manera adecuada a la armadura, no siendo necesario discretizarla en mas subdominios.

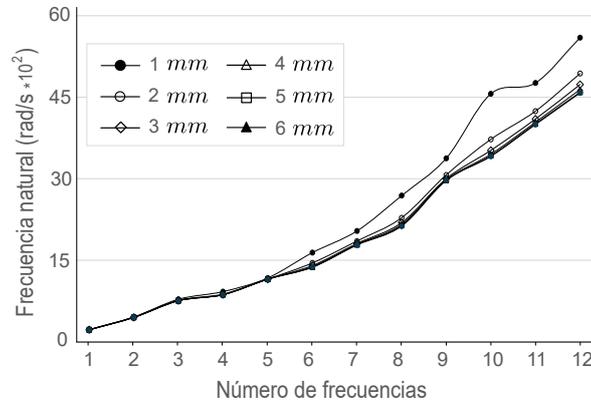


Figura 4.9: Frecuencias naturales de vibración, donde mm es matriz de masa.

En la [Figura 4.10](#) se muestran los desplazamientos del grado de libertad 3 de la [Figura 4.8](#), con una excelente convergencia cuando comparada con la [Figura 4.6](#) sin convergencia. Resultados que eran esperados por el análisis previo sobre la convergencia de las frecuencias naturales de vibración. Prácticamente, las respuestas se superponen cuando el problema es resuelto utilizando entre 2 y 6 matrices de masa, solamente cuando se trabaja con una matriz de masa existe una leve diferencia, lo que también era esperado.

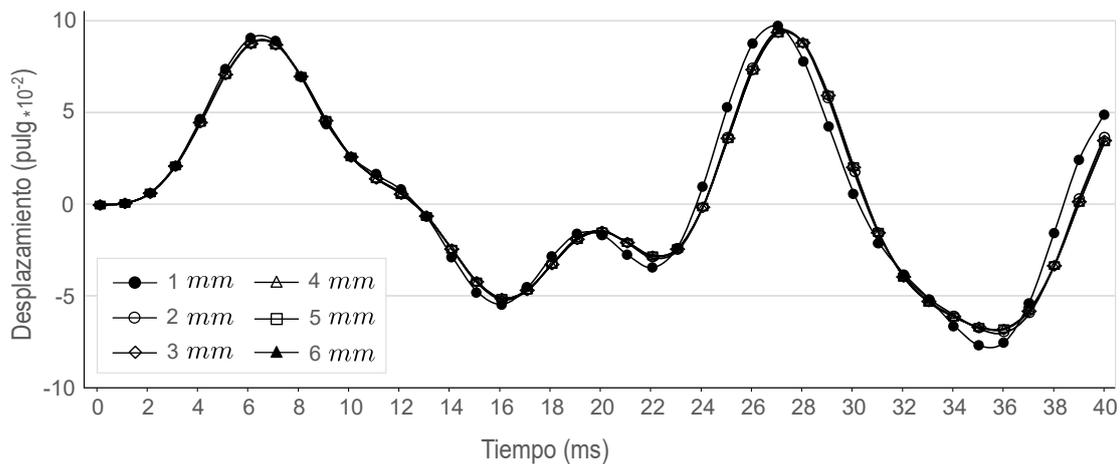


Figura 4.10: Respuestas del grado de libertad 3, donde mm es el número de matrices de masa.

Finalmente, en la [Figura 4.11](#) se muestra la respuesta del grado de libertad 3, de la [Figura 4.8](#), para un tiempo de vibración mayor, lo que permite comparar de manera mas eficiente, las respuestas de la primera (sin convergencia) y segunda discretización (con convergencia). Se observa, sin dudas, que las respuestas son diferentes. Resaltando

que, con los métodos clásicos obtenemos como respuesta la que corresponde a la primera discretización y aceptamos los resultados como adecuados, básicamente, porque no hay solución analítica y tampoco había una técnica alternativa fuera del padrón para compararla.

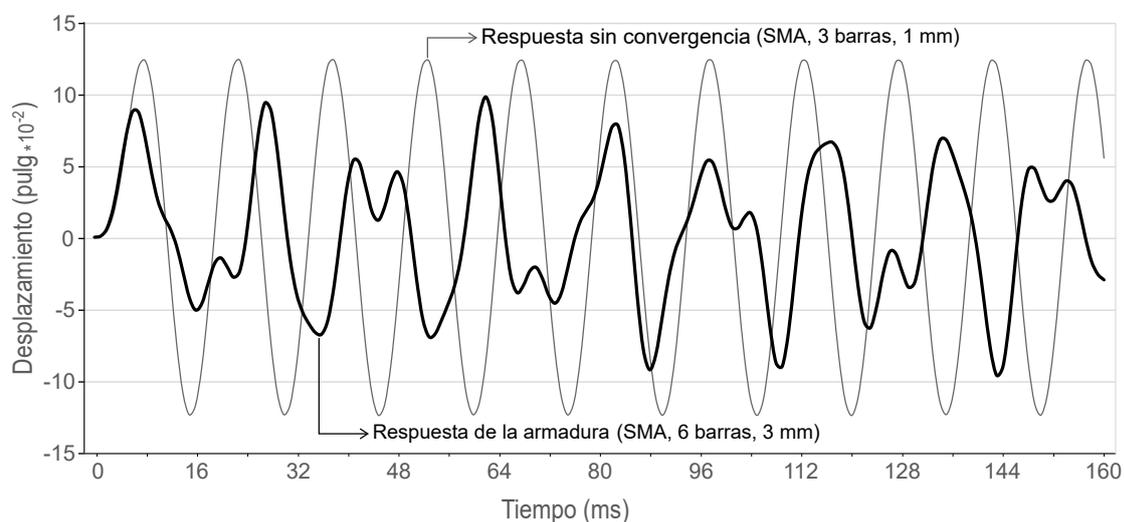


Figura 4.11: Respuestas de la armadura discretizada con 3 barras y 6 barras.

Una observación sutil, pero muy importante, cuidado, no podemos pensar que los métodos clásicos están mal o tienen errores, porque no lo están y seguirán siendo utilizados. La prueba de esa afirmación, es que cuando resolvimos el problema con una matriz de masa, pero discretizando la armadura con 6 barras, que es equivalente a los métodos clásicos, los resultados son adecuados y próximos a los resultados con número mayor de matrices de masa. La diferencia es que la metodología propuesta en el presente trabajo es generalizada y nos permite explorar mejor las propiedades intrínsecas de la estructura, por eso conseguimos concluir que no había convergencia de los resultados y que se requería mejorar la discretización.

CAPÍTULO 5 | Conclusiones

En este trabajo de investigación fue implementada la Técnica de Superposición Modal Avanzada en el contexto de los elementos finitos híbridos dinámicos para sistemas discretizados con elementos unidimensionales rotulados en sus extremidades. Los algoritmos fueron implementados en el ambiente del sistema computacional MAPLE 15, complementado con una rutina en el lenguaje FORTRAN 90 para la resolución del problema de autovalor con resultados satisfactorios.

Algunas conclusiones del trabajo son:

- En armaduras, la metodología propuesta, fue mas eficiente y explora mejor la estructura cuando comparada con resultados de la metodología clásica.
- Se demostró que la discretización que se realiza de manera convencional en armaduras, no es la mas adecuada cuando se trata con problemas dependientes del tiempo por aplicación de cargas súbitas.
- No se evidencia en los resultados teóricos-analíticos, al aplicar el método híbrido de elementos finitos en barras y vigas, que la matriz de amortiguamiento sea el resultado de la suma de porcentajes de masa y rigidez como se trata de manera clásica los problemas con amortiguamiento en la literatura especializada.

Algunas sugerencias:

- Aplicar la metodología a diversos tipos de problemas para observar las ventajas y desventajas en las aplicaciones.
- Hacer un estudio mas detallado de cada una de las variables presentes en cada uno de los métodos con la finalidad de perfeccionar las técnicas.
- Es necesario tratar con problemas grandes para estudiar el comportamiento de la técnica de superposición modal avanzada.

Bibliografia

- Brebbia, C. A. (1978). *The boundary element method for engineers*. Pentech Press Limited, London.
- Chaves, R. A. P. (1999). Estudio do método híbrido dos elementos de contorno e proposta de una formulación simplificada. Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Eng. Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil.
- De Souza, R. M. (1992). O método híbrido dos elementos de contorno para análise de elastostática de sólidos. Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Eng. Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil.
- Dumont, N. A. (1987). The hybrid boundary element method. In Verlag, S., editor, *Mathematical and Computational Aspects*, volume 1. Computational Mechanics Publications.
- Dumont, N. A. (2005). An advanced mode superposition technique for the general analysis of time dependents problems. *Advances in Boundary Element Techniques IV, England*, 1:333–344.
- Dumont, N. A. (2006). On the inverse of generalized λ -matrices with singular leading term. *Internat. Journal Numer. Methods Engrg.*, 66:571–603.
- Dumont, N. A. (2007). On the solution of generalized non-linear complex-symmetric eigenvalue problems. *Internat. Journal Numer. Methods Engrg.*, 71(13):1534–1568.
- Dumont, N. A. and Chaves, R. A. P. (2003). General time-dependent analysis with the frequency-domain hybrid boundary element method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 10:431–452.
- Dumont, N. A. and Oliveira, R. (2001). From frequency-dependent mass and stiffness matrices to the dynamic response of elastic systems. *International Journal Solution Structures*, 3:1813–1830.

BIBLIOGRAFÍA

- Hellinger, E. (1914). Die allgemeinen ansätze der mechanik der kontinua. *Enz. Math.*, 4(1.1):602–694.
- Oliveira, A. C. (2006). Um modelo de interação dinâmica entre elementos estruturais de uma via ferrea. Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Eng. Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil.
- Pian, T. and Tong, P. (1969). Basis if finite element methods for solid continua. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, pages 3–28.
- Pian, T. H. H. (1983). *Reflections and remarks on hybrid and mixed finite element methods*. Jhon Wiley.
- Prazeres, P. G. C. (2005). Desenvolvimento de elementos finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada. Master's thesis, Programa de Pós-graduação em Eng. Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil.
- Przemieniecki, J. S. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Dover Publications, New York.
- Reissner, E. (1950). On a variational theorem in elasticity. *Journal Math. Phys.*, 29(3.4):90–95.
- Trefftz, E. (1926). Ein gegenstück zum ritzchen verfahren. *2nd Internacional Congress of Applied Mechanics*, 54(2):286–292.
- Weaver, W. (1987). *Structural Dynamics by Finite elements*. Prentice Hall.